Общая программа курса «Комплексный анализ» (2014/2015 уч. г., 4 семестр, группы 1–2)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Функции комплексного переменного

Комплексные числа. Комплексное число: определение, вещественная и мнимая часть комплексного числа. Сложение и умножение комплексных чисел: определение. Операция комплексного сопряжения: определение и свойства. Поле комплексных чисел **C**. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, главное значение аргумента, тригонометрическая форма комплексного числа: определения. Открытые и замкнутые множества в **C**, граница множества в **C**, предельные точки множества в **C**: определения. Предел последовательности комплексных чисел: определение. Связное множество и область в **C**: определения.

Функции комплексного переменного. Функция комплексного переменного: определение. Предел функции комплексного переменного: определение и свойства (без доказательства). Непрерывность функции комплексного переменного в точке: определение и свойства (без доказательства). Примеры функций комплексного переменного (степенная функция, полином, рациональная функция).

Комплексные числовые и функциональные ряды. Комплексный числовой ряд: определение, сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды. Теорема об умножении комплексных рядов. Равномерная сходимость комплексной функциональной последовательности и ряда: определение. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного функционального ряда (без доказательства). Теорема о непрерывности равномерно сходящегося комплексного функционального ряда с непрерывными членами (без доказательства). Комплексный степенной ряд: определение. Вещественный ряд, ассоциированный с комплексным степенным рядом: определение, радиус его сходимости (без доказательства). Теорема о сходимости комплексного степенного ряда, круг сходимости комплексного степенного ряда (без доказательства). Примеры комплексных степенных рядов. Сумма и произведение степенных рядов: определение, сходимость суммы и произведения (без доказательства).

Элементарные функции комплексного переменного. Комплексная экспонента $\exp z$, комплексные тригонометрические функции (синус $\sin z$ и косинус $\cos z$): определение в виде степенных рядов и свойства (существование во всей комплексной плоскости, соотношение $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$, формула Эйлера, выражение синуса и косинуса через экспоненту, свойства четности для синуса и косинуса, периодичность экспоненты, формулы для ее модуля и аргумента, формулы для синуса и косинуса суммы (разности) аргументов, периодичность синуса и косинуса, основное тригонометрическое тождество). Отсутствие нулей у экспоненты, нули синуса и косинуса. Комплексные гиперболические функции: определение, связь с комплексными тригонометрическими функциями, аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций. Вещественная и мнимая части синуса, модуль синуса, рельеф синуса.

Многозначные функции. Многозначные функции как функции, обратные к однозначной функции в $D \subset \mathbf{C}$. Выделение однозначных ветвей многозначной функции, области однолистности многолистной функции. Пример многозначной функции: комплексный корень степени n ($z^{1/n}$), его области однолистности и однозначные ветви. Переход с одной ветви на другую, точки ветвления. Точки ветвления для комплексного корня степени n как пример точек ветвления конечного порядка.

Элементарные функции комплексного переменного (продолжение). Комплексный логарифм $\mathrm{Ln}\, z$ как функция, обратная к комплексной экспоненте. Многозначность логарифма. Смысл соотношения $\mathrm{Ln}(a + b) = \mathrm{Ln}\, a + \mathrm{Ln}\, b$. Парадокс Бернулли и его объяснение. Однозначные ветви логарифма, области однолистности логарифма, главное значение логарифма $\ln z$. Точки ветвления логарифма как пример точек ветвления бесконечного порядка. Понятие о римановых поверхностях, построение римановых поверхностей для функций $z^{1/n}$ и $\mathrm{Ln}\, z$. Общее определение операции возведения в степень для комплексных чисел: $a^b = e^{b\,\mathrm{Ln}\, a}$, доказательство того, что в общем случае соотношение $a^b a^c = a^{b+c}$ не имеет места. Функция e^z и ее связь с ранее введенной функцией $\exp z$. Степенная z^a и показательная a^z функции, число однозначных ветвей этих функций и их точки ветвления. Обратные тригонометрические функции: $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$, вывод формул для арксинуса и арктангенса.

Часть 2. Аналитические функции комплексного переменного

Дифференцируемые функции комплексного переменного. Два эквивалентных определения дифференцируемой в точке функции комплексного переменного. Непрерывность дифференцируемой функции. Критерий дифференцируемости в точке функции комплексного переменного в терминах условий Коши-Римана. Свойства операции дифференцирования (без доказательства). Примеры недифференцируемых функций: $f(z) = |z|$, $g(x + iy) = x – iy$. Аналитическая функция в области: определение и примеры.

Криволинейный интеграл в комплексной плоскости. Интеграл от комплекснозначной функции: определение и свойства (без доказательства). Непрерывный путь: определение, виды непрерывных путей (гладкий, кусочно-гладкий, простой, замкнутый, простой замкнутый). Замена параметра для гладкого пути: определение, теорема о том, что пути, полученные путем замены параметра, образуют класс эквивалентности. Ориентированная гладкая и кусочно-гладкая кривая в комплексной плоскости: определения. Кривая, противоположно ориентированная к данной кривой: определение. Примеры ориентированных кривых. Криволинейный интеграл по ориентированной гладкой кривой: определение, доказательство корректности определения (независимость значения интеграла от выбора параметризации кривой). Свойство интеграла по противоположно ориентированной кривой. Интеграл по кусочно-гладкой кривой: определение. Оценка модуля интеграла по кусочно-гладкой кривой.

Первообразная функции комплексного переменного. Определение первообразной функции, теорема Ньютона-Лейбница, следствие о равенстве нулю интеграла по замкнутой кусочно-гладкой кривой для функции, имеющей первообразную в области. Достаточное условие существования первообразной в терминах значения интеграла по произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой.

Аппроксимация интеграла по кривой интегралом по ломаной. Вписанная в кривую ломаная, расстояние между точкой и множеством, ε-окрестность множества: определения. Две теоремы об аппроксимации (теорема об аппроксимации интеграла от непрерывной функции по кусочно-гладкой кривой интегралом по вписанной в нее ломаной и теорема об аппроксимации интеграла по границе области интегралом по замкнутой ломаной, лежащей внутри области, — вторая теорема без доказательства).

Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши. Односвязная область: определение, примеры. Первый вариант интегральной теоремы Коши (о том, что для аналитической функции в односвязной области интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру равен нулю). Пример, показывающий, что условие односвязности области является существенным (функция $1/z$ в $\mathbf{C}\backslash\{0\}$). Второй вариант интегральной теоремы Коши (об интеграле по кусочно-гладкой границе односвязной области при условии, что функция является аналитической в области и непрерывной в ее замыкании). Третий вариант интегральной теоремы Коши (об интеграле по границе области, если граница состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых, ориентированных надлежащим образом). Интегральная формула Коши.

Разложение аналитической функции в степенной ряд. Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (без доказательства), следствие о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда внутри его круга сходимости (без доказательства). Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд, следствие о радиусе сходимости этого ряда, формула для коэффициентов ряда, следствие о бесконечной дифференцируемости аналитической функции. Теорема Морера (критерий аналитичности в терминах равенства нулю интеграла по любому замкнутому контуру односвязной области). Теорема Вейерштрасса для последовательности аналитических функций (о том, что если последовательность аналитических функций равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в области, то предельная функция является аналитической в области), следствие для рядов.

Нули аналитической функции. Теорема о нулях аналитической функции. Кратность изолированного нуля аналитической функции, представление аналитической функции в окрестности изолированного нуля, следствие об отсутствии других нулей в окрестности изолированного нуля. Теорема о сгущении нулей (аналитическая функция, имеющая точку сгущения нулей, является тождественно равной нулю), следствие (теорема единственности). Примеры применения теоремы единственности: (а) существование не более одной аналитической функции, совпадающей с требуемой функцией вещественного переменного на вещественном промежутке; (б) распространение соотношений, доказанных для вещественного промежутка, на комплексную плоскость; (в) доказательство отсутствия аналитической функции с заданными свойствами (на примере функции f такой, что $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$, $n \in \mathbf{N}$). Пример ситуации, когда теорема единственности неприменима (построение аналитической функции f такой, что $f(n\pi) = 0$, $n \in \mathbf{N}$). Аналитическое продолжение.

Ряд Лорана. Определение ряда Лорана, теорема о разложении функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана, формула для коэффициентов ряда Лорана. Пример разложения в ряд Лорана. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Особые точки однозначного характера: определение, примеры особых точек, не являющихся особыми точками однозначного характера. Классификация особых точек в терминах существования предела, примеры. Регулярная и главная часть ряда Лорана: определения. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Критерий того, что особая точка является устранимой, в терминах разложения в ряд Лорана, следствие (о том, что особая точка ограниченной функции является устранимой). Критерий того, что особая точка является полюсом, в терминах разложения в ряд Лорана; следствие о представлении функции в окрестности полюса кратности m. Критерий того, что особая точка является существенно особой точкой, в терминах разложения в ряд Лорана. Теоремы Сохоцкого и Пикара о свойствах существенно особых точек (теорема Пикара без доказательства).

Теория вычетов и ее применение. Вычет аналитической функции в точке: определение в терминах ряда Лорана и в терминах интеграла по контуру. Пример вычисления вычета (вычет функции $e^{1/z}$ в точке 0). Две формулы для вычисления вычета в случае простого полюса, пример. Формула для вычисления вычета в случае кратного полюса. Простейший вариант основной теоремы теории вычетов (случай ограниченной односвязной области). Вычет в бесконечно удаленной точке: определение, теорема о вычете в бесконечно удаленной точке (для функции, аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек однозначного характера). Общий вариант основной теоремы теории вычетов. Вычисление вещественных тригонометрических интегралов с применением теории вычетов, пример (интеграл от 0 до 2π от функции $1/(1 - 2a\cos\varphi + a^2)$, $0 < a < 1$). Вычисление вещественных несобственных интегралов от рациональных функций, примеры (интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $(x^2 + 1)^{-4}$ и интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $1/(1 + x^{2n})$, $n \geq 1$). Лемма Жордана и вычисление интегралов Фурье, примеры (интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\cos(5x)\,(x - 1)/(x^2 - 2x + 5)$ и интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $\sin(\alpha x)/x$, $\alpha \neq 0$). Вычисление несобственных интегралов Френеля (интегралы от 0 до $+\infty$ от функций $\sin(x^2)$ и $\cos(x^2)$).

Принцип аргумента и теорема Руше. Теорема об интегрировании логарифмической производной (о значении интеграла по контуру Γ от функции $f'(z)/f(z)$, если f аналитична в односвязной области, за исключением конечного числа полюсов). Следствие о приращении аргумента функции f при обходе контура Γ (принцип аргумента), его геометрическая интерпретация, примеры. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры с использованием теоремы Руше. Пример использования теоремы Руше для определения числа корней полинома в области (полином $z^9 - 6z^4 + z^3 - 2z^2 + 1$ в круге $|z| < 1$).

Литература

1. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1966.
2. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1985.