

**Экзаменационная программа курса «Комплексный анализ»
(2014/2015 уч. г., 4 семестр, группы 1–2)**

Составитель: М. Э. Абрамян

Теорема об умножении комплексных рядов. Комплексная экспонента $\exp z$, комплексные тригонометрические функции: определение и свойства. Комплексные гиперболические функции: определение, связь с комплексными тригонометрическими функциями. Комплексный логарифм $\operatorname{Ln} z$: определение и свойства. Парадокс Бернулли и его объяснение. Понятие о римановых поверхностях, построение римановых поверхностей для функций $z^{1/n}$ и $\operatorname{Ln} z$. Общее определение операции возведения в степень для комплексных чисел и ее свойства. Степенная z^a и показательная a^z функции, их свойства. Обратные тригонометрические функции, вывод формул для арксинуса и арктангенса.

Критерий дифференцируемости в точке функции комплексного переменного в терминах условий Коши-Римана, примеры недифференцируемых функций.

Интеграл от комплекснозначной функции: определение. Замена параметра для гладкого пути, теорема о том, что пути, полученные путем замены параметра, образуют класс эквивалентности. Ориентированная гладкая и кусочно-гладкая кривая в комплексной плоскости: определения. Криволинейный интеграл по ориентированной гладкой кривой: определение и доказательство его корректности. Свойство интеграла по противоположно ориентированной кривой. Оценка модуля интеграла по кусочно-гладкой кривой. Первообразная функция: определение, теорема Ньютона-Лейбница, следствие. Достаточное условие существования первообразной в терминах значения интеграла по произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой. Две теоремы об аппроксимации (вторая теорема без доказательства). Первый вариант интегральной теоремы Коши. Пример, показывающий, что условие односвязности области является существенным. Второй и третий варианты интегральной теоремы Коши. Интегральная формула Коши.

Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд, следствия. Теорема Морера. Теорема Вейерштрасса для последовательности аналитических функций, следствие для рядов. Теорема о нулях аналитической функции. Кратность изолированного нуля аналитической функции, представление аналитической функции в окрестности изолированного нуля, следствие. Теорема о сгущении нулей, следствие (теорема единственности). Примеры применения теоремы единственности (3 примера). Пример ситуации, когда теорема единственности неприменима. Аналитическое продолжение.

Определение ряда Лорана, теорема о разложении функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Особые точки однозначного характера и их классификация. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Критерий того, что особая точка является устранимой, в терминах разложения в ряд Лорана, следствие. Критерий того, что особая точка является полюсом, в терминах разложения в ряд Лорана; следствие. Критерий того, что особая точка является существенно особой точкой, в терминах разложения в ряд Лорана. Теоремы Сохоцкого и Пикара (теорема Пикара без доказательства).

Вычет аналитической функции в точке: определение в терминах ряда Лорана и в терминах интеграла по контуру. Две формулы для вычисления вычета в случае простого полюса. Формула для вычисления вычета в случае кратного полюса. Простейший вариант основной теоремы теории вычетов. Вычет в бесконечно удаленной точке: определение, теорема о вычете в бесконечно удаленной точке. Общий вариант основной теоремы теории вычетов. Вычисление вещественных тригонометрических интегралов с применением теории вычетов, пример (интеграл от 0 до 2π от функции $1/(1 - 2a \cos \varphi + a^2)$, $0 < a < 1$). Вычисление вещественных несобственных интегралов от рациональных функций, примеры (интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $(x^2 + 1)^{-4}$ и интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $1/(1 + x^{2n})$, $n \geq 1$). Лемма Жордана и вычисление интегралов Фурье, примеры (интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\cos(5x)/(x - 1)/(x^2 - 2x + 5)$ и интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $\sin(\alpha x)/x$, $\alpha \neq 0$). Вычисление несобственных интегралов Френеля (интегралы от 0 до $+\infty$ от функций $\sin(x^2)$ и $\cos(x^2)$).

Теорема об интегрировании логарифмической производной. Следствие о приращении аргумента функции f при обходе контура Γ (принцип аргумента). Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры с использованием теоремы Руше. Пример использования теоремы Руше для определения числа корней полинома в области (полином $z^9 - 6z^4 + z^3 - 2z^2 + 1$ в круге $|z| < 1$).

Основные определения, формулы и теоремы

Определение и свойства функций комплексного переменного $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Ln} z$. Парадокс Бернулли и его объяснение. Однозначные ветви многозначных функций, точки ветвления и понятие о римановых поверхностях (на примерах функций $z^{1/n}$ и $\operatorname{Ln} z$). Условия Коши-Римана. Определение криволинейного интеграла по гладкой и кусочно-гладкой кривой. Определение аналитической функции и ее основные свойства (интегральная теорема Коши, теорема о разложении в ряд, теорема Морера). Две теоремы об аппроксимации. Интегральная формула Коши. Формулы для коэффициентов ряда Тейлора аналитической функции. Теорема Вейерштрасса для последовательностей и рядов аналитических функций. Теорема о нулях аналитической функции, кратность нуля. Теорема единственности и понятие аналитического продолжения. Ряд Лорана и формулы для его коэффициентов. Классификация особых точек однозначного характера и их связь со свойствами ряда Лорана, кратность полюса. Теоремы Сохоцкого и Пикара. Определение вычета и формулы для его нахождения в полюсах (простом и кратном). Вычет в бесконечно удаленной точке. Три варианта основной теоремы теории вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.