Экзаменационная программа по курсу
Математический анализ

(I курс, II семестр 2014/15 уч. год, специальность 010500
Прикладная математика и информатика)

Лектор П.А.Чалов

I. *Интеграл Римана*

Интегральная сумма и её геометрический смысл. Предел интегральных сумм. Функции интегрируемые (по Риману). Определённый интеграл Римана. Ограниченность интегрируемой функции. Пример ограниченной, но неинтегрируемой функции.

Суммы Дарбу, их геометрический смысл, связь с интегральными суммами. Свойства сумм Дарбу: приближение сумм Дарбу интегральными суммами; соотношения между суммами Дарбу при продолжении разбиения; соотношения между суммами Дарбу построенных по различным разбиениям; ограниченность множества верхних (нижних) сумм Дарбу, интегралы Дарбу.

Критерий интегрируемости ограниченной функции. Колебание функции на сегменте (определение и вычисление).

Некоторые классы интегрируемых функций (непрерывные функции; некоторые разрывные функции и кусочно-непрерывные функции; монотонные функции).

Основные свойства интеграла Римана (21 свойство вместе с формулами среднего значения) (*формула Бонне без доказательства*).

Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом. Основная теорема интегрального исчисления; существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям интегралов.

II. *Несобственные интегралы*

Несобственные интегралы первого рода (определение, сходимость); примеры. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода. Абсолютная сходимость и сходимость несобственных интегралов первого рода. Условная сходимость несобственных интегралов первого рода. Свойство линейности несобственных интегралов первого рода.

Признаки сходимости несобственных интегралов (Вейерштрасса, Дирихле и Абеля).

Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов первого рода. Замена переменной и интегрирование по частям несобственных интегралов первого рода.

Несобственные интегралы второго рода (определение, сходимость); примеры. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода.

Переход от несобственных интегралов второго рода к несобственным интегралам первого рода.

Главное значение несобственного интеграла; связь со сходимостью несобственного интеграла.

III. *Некоторые геометрические приложения определённого интеграла*

Плоская кривая. Простая плоская кривая. Замкнутая простая плоская кривая. Вписанная ломаная. Спрямляемая кривая; длина дуги спрямляемой кривой. Лемма о длинах ломанных. Достаточное условие спрямляемости кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой. Дифференциал дуги. Понятие пространственной кривой.

Плоские фигуры. Многоугольники. Фигуры содержащиеся в данной фигуре и содержащие её. Соотношения между площадями многоугольников содержащихся и содержащих фигуру. Внутренняя и внешняя площади фигуры; соотношение между ними. Квадрируемые фигуры. Критерий квадрируемости. Криволинейная трапеция; её квадрируемость и формула для вычисления площади. Криволинейный сектор; его квадрируемость и формула для вычисления площади.

IV. *Метрические, нормированные, евклидовы пространства. Пространство* $\mathbb{R}^n$

Метрические пространства. Метрика; аксиомы метрики. Примеры метрических пространств. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Пространство $\mathbb{R}^n$ (три метрики). Пространство непрерывных функций $C[a, b]$ (две метрики). Пространство $\mathbb{C}$. Изометрическое отображение; изометричные пространства; примеры.

Понятие окрестности в метрическом пространстве. Открытый и замкнутый шары. Шары в пространстве $\mathbb{R}^n$ в разных метриках; соотношения между окрестностями в разных метриках. Шар в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

Последовательности в метрическом пространстве. Предел последовательности. Сходящиеся последовательности; единственность предела. Ограниченные последовательности. Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности. Критерий сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$. Следствие для пространства $\mathbb{C}$.

Ограниченные множества в метрическом пространстве. Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$ (о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности).

Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве; примеры. Критерий открытости множества. Свойства открытых и замкнутых множеств (о пересечении и объединении множеств). Замкнутость замкнутого шара. Открытость открытого шара.

Фундаментальные (сходящиеся в себе) последовательности в метрическом пространстве. Полные пространства. Примеры. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$. Принцип вложенных замкнутых шаров (критерий полноты метрического пространства).

Компактные множества в метрических пространствах.

Компактность в терминах последовательностей. Относительно компактное множество (компактное в пространстве). Компактное множество (компактное в себе). Связи понятий компактности, относительной компактности, ограниченности и замкнутости (в произвольных метрических пространствах и в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пример ограниченного замкнутого, но некомпактного множества в пространстве $C[-\pi, \pi]$.

Компактность в терминах покрытий. Покрытие, открытое покрытие множества. Ограниченность и замкнутость компактных множеств. Лемма Гейне-Бореля в пространстве $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности множеств в $\mathbb{R}^n$.

Норма. Нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Примеры норм в пространстве $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение. Евклидово пространство.

V. *Отображения в метрических пространствах*

Линейные операторы. Множество $L(E, F)$. Примеры линейных операторов. Общий вид оператора $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Линейные операторы в нормированных пространствах. Ограниченные операторы. Ограниченность оператора $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Пример неограниченного оператора. Норма линейного оператора и формула для её вычисления.

Предел и непрерывность отображений в метрических пространствах. Скалярные и векторные функции одного и нескольких вещественных переменных. Теоремы Кантора о равномерной непрерывности (*без доказательства*), об устойчивости знака непрерывной функции (*без доказательства*), Вейерштрасса (*без доказательства*), о непрерывности скалярного произведения вектор-функций(*без доказательства*).

Связное множество, область, теорема о промежуточном значении.

Предел вдоль кривой и по направлению.

Повторные пределы. Достаточное условие существования повторного предела; следствие.

VI. *Дифференцирование скалярных и векторных функций*

Производная по направлению. Арифметические операции над функциями, имеющими производную в заданном направлении. Теорема Лагранжа. Частные производные скалярных функций.

Дифференцируемые в точке вектор-функции нескольких вещественных переменных. Различные формы записи условия дифференцируемости. Полный дифференциал вектор-функции в точке. Полная производная вектор-функции в точке. Единственность оператора, участвующего в определении дифференцируемости вектор-функции в точке. Непрерывность дифференцируемых векторных функций. Необходимое условие дифференцируемости вектор-функции в точке. Матрица Якоби, градиент, якобиан. Необходимое условие дифференцируемости по направлению скалярной функции. Достаточное условие дифференцируемости вектор-функции в точке. Критерий дифференцируемости вектор-функции в точке. Геометрический смысл дифференцируемости скалярной функции двух переменных (*без доказательства*). Дифференцирование сложной функции. Частные производные сложной функции.

VII. *Частные производные и дифференциалы высших порядков*

Производные по направлению и частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных по направлениям. Теорема о равенстве смешанных производных дважды дифференцируемой функции (*без доказательства*). Следствие для k раз дифференцируемой функции (*без доказательства*).

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для скалярных функций с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

VIII. *Локальный экстремум*

Локальный экстремум скалярной функции нескольких вещественных переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточное условие экстремума. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

IX. *Неявные функции*

Неявные функции. Теоремы существования непрерывной и дифференцируемой неявной скалярной функции. Вычисление частных производных неявных скалярных функций. Теоремы существования непрерывной и дифференцируемой неявной вектор-функции (*без доказательства*).

X. *Системы функций*

Системы зависимых и независимых функций. Достаточное условие независимости системы функций.

XI. *Условный экстремум*

Понятие об условном экстремуме. Метод Лагранжа (*без доказательства*). Общая схема нахождения наибольших и наименьших значений функций многих переменных.