ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического анализа

Т. И. Коршикова, Ю. А. Кирютенко,
Л. И. Калиниченко, В. А. Савельев

Курс лекций по математическому анализу
I курс, 1-й семестр

Ростов-на-Дону
2007 год

Т. И. Коршикова, Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко, В. А. Савельев. Курс лекций по математическому анализу, I курс, 1-й семестр. — ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2007 год

Изложен лекционный материал курса «Математический анализ», традиционно читаемый сотрудниками кафедры математического анализа ЮФУ в первом семестре первого курса на отделениях «Математика» и «Механика». После каждого раздела приведены задачи теоретического характера для самостоятельной работы.

© Т.И. Коршикова, Л.И. Калиниченко, Ю.А. Кирютенко, В.А. Савельев
© ФГОУ ВПО «Южный федеральный университет», 2007

Глава 1

Введение в анализ

1.1 Множества и операции над ними

Под множеством будем понимать совокупность объектов, наделенных определенными свойствами. Эти свойства должны полностью определять данное множество, то есть являться признаками, по которым относительно любого объекта можно решить, принадлежит он данному множеству или нет. Синонимами термина "множество" являются термины "класс "семейство "совокупность". Объекты, из которых состоит данное множество, называют его элементами.

Чаще всего множество обозначают большими буквами латинского или греческого алфавита, а его элементы — малыми буквами. Если a — элемент множества A, то пишут $a \in A$ (читают: "a принадлежит множеству A") или $A \ni a$ (множество A содержит элемент a). Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A.

Множество обычно записывают одним из следующих способов:

$$A = \{a\,,\ \ldots\ ,f\} \text{ или } A = \{x \in X\ :\ P(x)\}.$$

Первая запись означает, что множество A состоит из элементов $a, \ldots, f$, то есть перечислены элементы, составляющие A, их может быть конечное число или бесконечно много. Вторая запись означает, что A есть совокупность всех тех объектов из множества X, для которых выполняется свойство P. Формально введем пустое множество — множество, не содержащее в себе никаких элементов, которое обозначим символом $\varnothing$.

Определение 1.1. *Множества A и B называются равными (или совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.*

Коротко это высказывание записывают: $A = B$, а отрицание этого утверждения — в виде: $A \neq B$.

Определение 1.2. *Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A есть подмножество множества*

B (или A есть часть B), и пишут $A \subset B$ (читается: "Множество A содержится в множестве B") или $B \supset A$(читается: "Множество B содержит множество A").

Отметим следующие свойства отношения включения:

1. $A \subset A$, то есть всякое множество есть подмножество себя самого;
2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (отношение включения транзитивно);
3. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Удобно считать, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Пусть A и B — некоторые подмножества множества E. Введем наиболее простые операции с множествами.

Определение 1.3. *Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$ и состоящее из всех элементов, которые принадлежат или множеству A или B.*

Таким образом, $x \in A \cup B$, если $x \in A$, но $x \notin B$, или $x \in B$, но $x \notin A$, или $x \in A$ и $x \in B$. Очевидно, что $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$.

Определение 1.4. *Пересечением множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \cap B$ и состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит и A и B.*

Если множества A и B не имеют общих точек, то $A \cap B = \varnothing$. Очевидно, что $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Определение 1.5. *Разностью множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \setminus B$ и состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Если $A \subset B$, то часто множество $A \setminus B$ называют дополнением множества B до A. По определению $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$.

Пример 1.1. Пусть $A = \{1, 3, 4, 8, 15\}$, $B = \{1, 2, 7, 8, 12\}$. Тогда

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 12, 15\},\ A \cap B = \{1, 8\},$$

$$A \setminus B = \{3, 4, 15\},\ B \setminus A = \{2, 7, 12\}$$

Определение 1.6. *Набор, состоящий из двух элементов x_1 и x_2, называют упорядоченным, если известно, какой из этих элементов является первым, а какой — вторым. Такой упорядоченный набор называют упорядоченной парой и обозначают (x_1, x_2). Элементы x_1, x_2 называют, соответственно, первой и второй координатами пары (x_1, x_2). Пары (x_1, x_2) и (y_1, y_2) называют совпадающими, если $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.*

Определение 1.7. *Декартовым (или, по-другому, прямым) произведением множеств A и B называют множество упорядоченных пар (x, y), где первый элемент x является элементом множества A, а второй y — элементом множества B. Это множество обозначают символом $A \times B$.*

Таким образом, $A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$. Но, вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$. Известная всем плоскость с декартовой системой координат является декартовым произведением двух числовых прямых (осей).

Пусть A и B — числовые отрезки, помещенные на взаимно перпендикулярных осях плоскости. Упорядоченная пара (x, y) — это точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках $x \in A$ и $y \in B$. Произведением $A \times B$ является прямоугольник.

1.2 Логическая символика

В последующем, как и в большинстве математических текстов используется ряд специальных символов, многие из которых вводятся по мере надобности. Применяются распространенные символы математической логики $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, которые читаются, соответственно, как "влечет" , "равносильно" , "существует" ("найдется"), "любой" ("каждый" , "для каждого" , "для любого").

Запись $A \Longrightarrow B$ читают одним из следующих способов: A влечет B, B следует из A, B — необходимое условие A, A — достаточное условие (признак) B.

Запись $A \Longleftrightarrow B$ читают одним из следующих способов: A равносильно B, A необходимо и достаточно для B, A верно тогда и только тогда, когда верно B. Квантор равносильности часто применяется в символьной записи определений и утверждений.

Запись "$\exists\, x \in X$" означает: существует элемент x из множества X.

Запись "$\forall\, x \in X$" означает: для любого элемента x из множества X или каков бы ни был элемент x из множества X.

Часто в символьной записи математических утверждений используют символ ":" или эквивалентный ему символ "| которые читают: "такой, что". В частности, запись "$\exists\, x \in X\ :\ x^2 - 1 = 0$" означает: существует такой элемент x в множестве X, что $x^2 - 1 = 0$.

1.3 Функция

Определение 1.8. *Пусть X и Y — некоторые непустые множества. Будем говорить, что задана функция, определенная на X со значениями в Y (иными словами: действующая из X в Y), если по некоторому закону (правилу) f каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, обозначаемый через $f(x)$.*

Для записи функции, действующей из X в Y по правилу f, приняты следующие обозначения: $f : X \longrightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$, $f : \forall x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$. Если из контекста ясно, откуда и куда действует функция, то используются короткие обозначения: $x \to f(x)$, $y = f(x)$, $f(x)$ или f .

В зависимости от природы множеств X и Y термин "функция" в разных разделах математики имеет ряд синонимов: отображение, преобразование, оператор, функционал.

Если задана функция $f : X \longrightarrow Y$, то множество X называют множеством или областью определения функции; символ x — аргументом функции или независимой переменной; соответствующий $x_0 \in X$ элемент $y_0 \in Y$ называют значением функции на элементе x_0 и обозначают через $f(x_0)$. При изменении аргумента значение $y = f(x) \in Y$, вообще говоря, меняется. Поэтому величину y называют зависимой переменной.

Как отмечено выше, символ $f(x)$ используется для обозначения самой функции, и значения функции в точке x. Однако это не приводит к недоразумению, поскольку в каждом случае ясно, о чем идет речь. Кроме того, при вычислениях обозначение функции в виде $f(x)$ удобнее, чем другие.

Множество всех значений функции $f : X \longrightarrow Y$, которые она принимает на элементах x из X, называют множеством значений или областью значений функции f на множестве X и обозначают через $f(X)$ или $E(f)$. Таким образом, $f(X) = \{\, y \in Y \mid\ \exists\, x \in X : \ y = f(x) \,\}$.

В случае отображения $f : X \longrightarrow Y$, элемент $y = f(x)$ из Y, соответствующий элементу $x \in X$, называют образом элемента x , а сам элемент x — прообразом элемента y, множество $f(X)$ — образом множества X, а X — прообразом множества $f(X)$. Заметим, что элемент y из $f(X)$ может иметь более одного прообраза.

Определение 1.9. *Две функции $f : X_1 \longrightarrow Y_1$ и $\varphi : X_2 \longrightarrow Y_2$ называют равными (совпадающими), если $X_1 = X_2$ и на каждом элементе $x \in X_1$ они принимают равные значения, то есть $f(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in X_1$, при этом пишут: $f = \varphi$.*

Определение 1.10. *Пусть $X \neq \varnothing$, $f : X \longrightarrow Y$. Графиком Γ_f функции f называют подмножество декартового произведения $X \times Y$, элементы которого имеют вид $(x, f(x))$, $x \in X$, то есть*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \,|\, x \in X\} = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, x \in X,\ y = f(x)\,\}.$$

1.3.1 Простейшая классификация функций

Определение 1.11. *Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется сюръективной (или отображающей X на Y), если множество Y совпадает с множеством $f(X)$ — множеством значений функции f на X.*

Если рассмотреть уравнение $y = f(x)$ при $y \in Y$, то сюръективность функции $f : X \longrightarrow Y$ означает, что уравнение $y = f(x)$ имеет не менее одного решения во множестве X при каждом y из Y.

Определение 1.12. *Если при отображении $f : X \longrightarrow Y$ разные элементы множества X имеют разные образы, то отображение f называют инъективным (f взаимно однозначно отображает X в Y).*

Иными словами, $f : X \longrightarrow Y$ инъективно, если

$$\forall x_1, x_2 \in X, : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Для уравнения $f(x) = y$ инъективность отображения $f : X \longrightarrow Y$ означает, что для любого y из $f(X) \subset Y$ уравнение имеет единственное решение во множестве X.

Определение 1.13. *Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называют биективным (или взаимно однозначным отображением X на Y), если оно одновременно сюръективно и инъективно.*

Таким образом, отображение $f : X \longrightarrow Y$ биективно тогда и только тогда, когда любой элемент из Y имеет единственный прообраз в X. В этом случае уравнение $f(x) = y$ разрешимо в X при любом y из Y и имеет единственное решение.

1.3.2 Композиция функций и обратное отображение

Определение 1.14. *Пусть заданы функции $f : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$. Функцию, которая действует из X в Z по правилу*

$$\forall x \in X \longrightarrow z = \varphi(f(x)) \in Z$$

называют суперпозицией (композицией) функций f, φ и обозначают $\varphi \circ f$.

При выполнении определенных условий операцию композиции можно применять несколько раз, при этом полезно иметь в виду, что

$$g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f.$$

Вообще говоря, $\varphi \circ f \neq f \circ \varphi$, даже если обе суперпозиции существуют.

Пусть теперь отображение $f : X \longrightarrow Y$ биективно. Значит для любого $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$, являющийся его прообразом, то есть такой, что $f(x) = y$. Естественно возникает отображение, действующее из Y в X, которое каждому элементу $y \in Y$ ставит в соответствие его прообраз при отображении f.

Определение 1.15. *Пусть отображение $f : X \longrightarrow Y$ биективно. Отображение из Y в X, определенное правилом*

$$\forall y \in Y \longrightarrow x \in X : f(x) = y,$$

называют обратным по отношению к f и обозначают f^{-1}.

Ясно, что отображение $f^{-1} : Y \to X$ биективно и обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ совпадает с f. Таким образом, свойство двух отображений быть обратными по отношению друг к другу является взаимным.

Функцию, которая определяется правилом $\forall x \in X \longrightarrow x$, называют тождественной и обозначают символом e_x или I_x. Тогда, взаимно обратные отображения с помощью введенной функции можно охарактеризовать следующим образом: $f \circ f^{-1} = e_y,\ f^{-1} \circ f = e_x$.

1.3.3 Сужение функции

Определение 1.16. *Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $X_1 \subset X$, $X_1 \neq \varnothing$. Функцию, которая каждому элементу $x \in X_1$ ставит в соответствие элемент $f(x) \in Y$, называют сужением (или ограничением) функции f на множество X_1 и обозначают $f|_{X_1}$.*

Таким образом, $f|_{X_1} : X_1 \longrightarrow Y$ и $f|_{X_1}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X_1$. Часто функцию f называют продолжением функции $f|_{X_1}$ на множество X.

1.4 Действительные числа

Число является одной из основных математических абстракций, изучению которой может быть посвящен самостоятельный курс. Из многих концепций построения множества действительных чисел приведем аксиоматическую.

Определение 1.17. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных чисел, а его элементы — вещественными (действительными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:*

1. **Аксиомы сложения**

   Определено отображение (операция сложения: $+$), действующее из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ ставит в соответствие некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполняются условия:

   (a) $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (коммутативность сложения);

   (b) в $\mathbb{R}$ существует нейтральный элемент, называемый нулем, обозначаемый 0, такой, что $x + 0 = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(c) *для любого элемента* $x \in \mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$ *существует элемент, называемый противоположным к* x*, обозначаемый* $(-x)$*, такой, что* $x + (-x) = 0$;

(d) $x + (y + z) = (x + y) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(ассоциативность сложения).*

2. **Аксиомы умножения**

Определено отображение (операция умножения: $\cdot$*), действующее из* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$*, которое каждой упорядоченной паре* (x, y) *элементов* x, y *из* $\mathbb{R}$ *ставит в соответствие некоторый элемент* $x \cdot y \in \mathbb{R}$*, называемый произведением* x *и* y*. При этом выполняются условия:*

(a) $x \cdot y = y \cdot x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *(коммутативность умножения);*

(b) *в* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *существует нейтральный элемент, называемый единицей, обозначаемый* 1*, такой, что* $1 \cdot x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(c) *для любого элемента* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *существует в* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *обратный элемент, обозначаемый* $1/x$ *или* x^{-1}*, такой, что* $x \cdot (1/x) = 1$;

(d) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(дистрибутивность умножения).*

Операции сложения и умножения связаны условием:

(e) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *(дистрибутивность умножения по отношению к сложению).*

Множество, на котором определены обе операции, и которые удовлетворяют группам аксиом 1 и 2, называется алгебраическим полем.

(Часто знак операции умножения в математических выражениях опускают и вместо $x \cdot y$ *пишут* $x\,y$*.)*

3. **Аксиомы порядка**

Для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ *определено отношение* $\leqslant$*, то есть либо* $x \leqslant y$*, либо* $y \leqslant x$*. При этом выполняются условия:*

(a) $x \leqslant x, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) *если* $x, y \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $x \leqslant y$ *и* $y \leqslant x$*, то* $x = y$;

(c) *если* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $x \leqslant y$ *и* $y \leqslant z$*, то* $x \leqslant z$ *(транзитивность);*

(d) *если* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *и* $x \leqslant y$*, то* $x + z \leqslant y + z$;

(e) *если* $x, y \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant x$*,* $0 \leqslant y$*, то* $0 \leqslant x \cdot y$*.*

Отношение $\leqslant$ *называют отношением неравенства и читают: "не превосходит" или "меньше или равно". Множество, между элементами которого имеется отношение* $\leqslant$*, удовлетворяющее аксиомам 3, называется упорядоченным. Поэтому множество* $\mathbb{R}$ *является упорядоченным алгебраическим полем.*

4. **Аксиома полноты (непрерывности)**

Если X и Y — непустые подмножества множества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$, то существует такое число c, что

$$x \leqslant c \leqslant y, \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Эту аксиому часто называют принципом отделимости.

Можно доказать, что во введенном множестве $\mathbb{R}$ имеют место все, известные из школьного курса математики, свойства чисел. Желающие могут получить их самостоятельно или изучить соответствующий раздел в книгах [2] или [6].

1.4.1 Важнейшие подмножества действительных чисел

Определение 1.18. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется множеством натуральных чисел, а его элементы — натуральными числами, если X — наименьшее числовое множество, которое содержит единицу и вместе с каждым элементом x содержит элемент $x+1$.*

Множество натуральных чисел обозначают через $\mathbb{N}$, а его произвольный элемент — через n. Число $1+1 \in \mathbb{N}$ обозначают символом 2 и называют двойкой, число $2+1$ обозначают символом 3 и называют тройкой и так далее. Можно доказать, что

$$0 < 1 < 2 < \dots < n < n+1 < \dots \ \text{ и } \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Прямым следствием определения 1.18 является принцип математической индукции.

Если подмножество E множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ таково, что $1 \in E$ и вместе с числом $x \in E$ множеству E принадлежит $x+1$, то $E = \mathbb{N}$.

Иллюстрируя этот принцип в действии, докажем с его помощью формулу, называемую формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

или коротко

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k, \tag{1.1}$$

В этой формуле a, b — произвольные действительные числа, n — произвольное натуральное число,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \, (n-k)!}, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ \dots \ \cdot k, \, k \in \mathbb{N}, \quad 0! = 1.$$

■ Пусть E — множество тех натуральных чисел n, для которых справедлива формула (1.1). При $n = 1$ $a+b = \frac{1!}{0!\,1!}\,a + \frac{1!}{1!\,0!}\,b$, что соответствует формуле (1.1). Поэтому $n = 1 \in E$.

Покажем, что если $n \in E$, то $n+1 \in E$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) =$$

$$= (a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + C_n^{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1} + \cdots + b^n)(a+b) =$$

$$= a^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0)a^n b + (C_n^2 + C_n^1)a^{n-1}b^2 + \cdots + (C_n^k + C_n^{k-1})a^{n-k+1}b^k + \cdots + b^{n+1}.$$

Но $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ и при $k = 1, 2, 3 \dots n$,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = C_{n+1}^k,$$

поэтому

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k}b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k}b^k.$$

Таким образом, $n+1 \in E$ и, следовательно, $E = \mathbb{N}$. □

Числа C_n^k, $k = 0, 1, 2, \dots n$, называют биномиальными коэффициентами. Из формулы (1.1) следует, что

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Определение 1.19. *Множество, состоящее из всех натуральных чисел, им противоположных и нуля называют множеством целых чисел и обозначают символом* $\mathbb{Z}$.

Определение 1.20. *Множество* $\{m/n \in \mathbb{R} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$ *называют множеством рациональных чисел и обозначают через* $\mathbb{Q}$. *Элемент* $\frac{m}{n}$ *множества* $\mathbb{Q}$ *называют рациональным числом.*

Можно доказать, что $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ (например, можно доказать, что в $\mathbb{Q}$ не существует числа s такого, что $s \cdot s = 2$).

Определение 1.21. *Действительные числа, которые не являются рациональными, называются иррациональными.*

Часто полезна "геометрическая терминология в которой множество $\mathbb{R}$ называют числовой прямой, его элементы — точками числовой прямой.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, то есть $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Введем следующие обозначения и названия для перечисленных ниже числовых множеств:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant y\}$ — отрезок ab (или сегмент ab);
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ — интервал ab;
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ — полуинтервал ab, содержащий b;
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ — полуинтервал ab, содержащий a.

Введенные множества называют промежутками, числа a и b — их концами, число $b-a$ — длиной промежутка.

Часто удобно дополнить множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми символами $+\infty$ и $-\infty$, которые называют соответственно плюс бесконечность и минус бесконечность. При этом считают, если $a \in \mathbb{R}$, что

$$-\infty < +\infty; \; -\infty < a < +\infty,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty; \; a + (+\infty) = +\infty,$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty; \; a + (-\infty) = -\infty,$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \; -\infty \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm\infty \cdot a = \pm\infty, \text{ если } a > 0,$$

$$\pm\infty \cdot a = \mp\infty, \text{ если } a < 0.$$

Множество $\mathbb{R}$, дополненное символами $+\infty$ и $-\infty$, называется расширенным множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой) и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$. Следующие множества ($a \in \mathbb{R}$) называют неограниченными промежутками:

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}, \quad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\},$$

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}, \quad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\},$$

В этих обозначениях часто пишут: $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$.

1.5 Функции действительной переменной

1.5.1 Функция и способы её задания

Определение 1.22. *Функцию $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$ называют действительнозначной, а в случае, когда $X \subset \mathbb{R}$, действительнозначной функцией действительной переменной или короче, когда это не может вызвать недоразумения, функцией действительной переменной.*

Всюду далее рассматриваться будут **только такие функции**. Сначала приведём несколько примеров.

Пример 1.2. Каждому числу $x \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие ординату (абсциссу) точки, полученной поворотом точки $(1,0)$ координатной плоскости вокруг начала координат на угол x. Это правило задает функцию на $\mathbb{R}$, со значениями в отрезке $[-1, 1]$, которую называют тригонометрическим синусом (косинусом) и обозначают $\sin x$ (соответственно $\cos x$).

Пример 1.3. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число x, а отрицательному числу x — число $(-x)$. Получим функцию, определенную на $\mathbb{R}$, с множеством значений $[0, +\infty)$. Эту функцию называют модулем (или абсолютной величиной) числа x и обозначают $|x|$.

Перечислим полезные для дальнейшего свойства этой функции.

1. $|a| \geqslant 0, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
2. $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$;
3. $|-a| = |a|, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
5. $|a + b| \leqslant |a| + |b|, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;
6. $|a + b| \geqslant ||a| - |b||, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

С помощью функции $|x|$ можно очень коротко записывать некоторые часто используемые множества. Так, если $\varepsilon > 0$, и $a \in \mathbb{R}$, то

$$|a| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon \quad , |a| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant a \leqslant \varepsilon,$$

$$|a| > \varepsilon \Longleftrightarrow a > \varepsilon \text{ или } a < -\varepsilon \quad , |a| \geqslant \varepsilon \Longleftrightarrow a > \varepsilon \text{ или } a < -\varepsilon.$$

Пример 1.4. Каждому положительному числу x поставим в соответствие 1, числу $x = 0$ — число 0, каждому отрицательному числу — число -1. Получим функцию, действующую из $\mathbb{R}$ на множество $\{-1; 0; 1\}$. Её называют функцией знака и обозначают $\operatorname{sgn} x$ (от латинского — signum),

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Многие часто встречающиеся функции, как видно из примеров, имеют определенное символьное обозначение. Используя эти обозначения, задание многих функций можно реализовать в виде формулы (или аналитического выражения), содержащей указания на те операции над числами и значениями аргумента x, которые надо провести, чтобы получить соответствующее y. Такой способ задания функции называют аналитическим. Область определения X этой функции, как правило, не указывается и называется естественной областью определения функции. Она совпадает с множеством тех действительных чисел, для которых указанная формула имеет смысл (в процессе вычислений оперируют только действительными числами). Например, если функция задана формулой $f(x) = \sqrt{\ln\cos 2\pi x}$, то ее естественной областью определения является множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, а множеством значений — $\{0\}$.

Заметим, что всякая формула является символьной записью некоторого правила, так что, в конце концов, нет принципиального различия между заданием функции с помощью правила или формулы; это различие чисто внешнее.

В естественных науках и в технике зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально. Такая функциональная зависимость задается не формулой, а лишь таблицей, где сопоставлены полученные из опыта величины. Примеры табличного задания функции можно найти в любом техническом справочнике.

Наконец, в некоторых случаях с помощью самопишущих приборов (например, сейсмографа) функциональная зависимость между физическими величинами задается графиком. Мы не будем останавливаться на последних способах задания функции, так как ими в математическом анализе не приходится пользоваться. С некоторыми другими способами задания функции мы познакомимся позже.

Поскольку в $\mathbb{R}$ определены арифметические операции, то их можно определить и для действительнозначных функций.

Определение 1.23. *Пусть функции f и φ действуют из X в $\mathbb{R}$. Функцию, обозначаемую $f + \varphi$, определенную правилом:*

$$\forall x \in X \to f(x) + \varphi(x),$$

называют суммой функций f и φ.

Аналогично вводится произведение и частное функций.

1.5.2 Монотонные функции

Определение 1.24. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Возрастающие или убывающие на множестве X функции еще называют строго монотонными на X.

Определение 1.25. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Очевидно, что возрастающая на множестве X функция является неубывающей, а убывающая — невозрастающей.

Функции, которые являются неубывающими или невозрастающими на множестве X, еще называют монотонными функциями на X.

Теорема 1.1 (о существовании обратной функции к строго монотонной)**.** *Если функция f возрастает (убывает) на множестве X, то функция $f : X \longrightarrow f(X)$ биективна и обратная к ней возрастает (убывает) на множестве $f(X)$.*

■ Пусть для определенности функция f возрастает на X. Ясно, что она сюръективна. По определению возрастающей функции разные элементы множества X имеют разные образы, поэтому функция $f : X \longrightarrow f(X)$ инъективна. Следовательно, она биективна и определена обратная функция $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ по правилу:

$$\forall y \in f(X) \longrightarrow x = f^{-1}(y) \in X \,:\, f(x) = y.$$

Пусть y_1, y_2 — произвольные элементы множества $f(X)$ и $y_1 < y_2$. Положим $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Тогда $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Так как функция f^{-1} биективна, то $x_1 \neq x_2$. Если бы x_1, x_2 удовлетворяли неравенству $x_1 > x_2$, то в силу возрастания функции f мы бы получили $y_1 > y_2$, чего быть не может в силу выбора элементов. Таким образом

$$\forall y_1, y_2 \in f(X) : \, y_1 < y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

что означает возрастание функции f^{-1} на множестве $f(X)$. □

Замечание. Функция, имеющая обратную, не обязательно монотонна.

Рассмотрим расположение графиков взаимно обратных функций в декартовой системе координат и докажем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, то точки $M_1(a, b)$, $M_2(b, a)$ плоскости симметричны относительно прямой $y = x$.*

■ Если $a = b$, то точки M_1, M_2 совпадают и лежат на прямой $y = x$. Будем считать, что $a \neq b$. Прямая, проходящая через точки M_1, M_2, имеет уравнение $y = -x + a + b$, а потому перпендикулярна прямой $y = x$. Поскольку середина отрезка M_1M_2 имеет координаты $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$, то она лежит на прямой $y = x$. Следовательно, точки M_1, M_2 симметричны относительно прямой $y = x$. □

Следствие. *Если функции $f : X \longrightarrow Y$ и $\varphi : Y \longrightarrow X$ взаимно обратные, то их графики симметричны относительно прямой $y = x$, если они построены в одной системе координат.*

■ Пусть $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$, $\Gamma_\varphi = \{(y, \varphi(y)) \,|\, y \in Y\}$ — графики функций f и φ соответственно. Так как

$$(a, b) \in \Gamma_f \Longleftrightarrow (b = f(a), a \in X) \Longleftrightarrow (a = \varphi(b), b \in Y) \Longleftrightarrow (b, a) \in \Gamma_\varphi,$$

то в силу доказанной леммы графики Γ_f и Γ_φ симметричны относительно прямой $y = x$. □

1.6 Свойства числовых множеств

1.6.1 Ограниченные числовые множества

Определение 1.26. *Пусть X — непустое числовое множество. Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число a, что $x \leqslant a$ ($x \geqslant a$) для любого элемента $x \in X$. При этом число a называется верхней (нижней) границей множества X. Множество, ограниченное снизу и сверху называют ограниченным.*

С помощью логических символов ограниченность сверху множества X записывают следующим образом:

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \, x \leqslant a, \forall x \in X.$$

Учитывая свойства модуля числа, можно дать следующее равносильное определение ограниченного множества.

Определение 1.27. *Непустое числовое множество X называют ограниченным, если существует такое положительное число M, что*

$$|x| \leqslant M, \ \forall\, x \in X.$$

Определение 1.28. *Элемент a из числового множества X называют максимальным (минимальным) элементом в X, если $x \leqslant a$ (соответственно, $x \geqslant a$) для любого x из X, и пишут: $a = \max X$ (соответственно, $a = \min X$).*

В силу аксиомы порядка (3.b) легко показать, что если множество X в $\mathbb{R}$ имеет максимальный (минимальный) элемент, то он единственен.

Отметим, что если числовое множество X имеет максимальный (минимальный) элемент a, то оно ограничено сверху (снизу) и число a является верхней (нижней) границей множества X. Однако не всякое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет максимальный (минимальный) элемент.

Пример 1.5. Покажем, что множество $X = [0, 1)$ не имеет максимального элемента.

■ Заметим, что множество X ограничено сверху и 1 — одна из его верхних границ. Пусть x_0 — любой элемент из X. Тогда $0 \leqslant x_0 < 1$ и

$$0 \leqslant x_0 < x_0 + \frac{1 - x_0}{2} = \frac{x_0}{2} + 1/2 < 1/2 + 1/2 = 1$$

Следовательно, $\widetilde{x} = x_0 + \dfrac{1 - x_0}{2} \in X$ и $\widetilde{x} > x_0$. Последнее означает, что x_0 не является максимальным элементом множества X. Но x_0 — произвольный элемент X, поэтому множество X не имеет максимального элемента. □

Замечание. Любое числовое множество, содержащее конечное число элементов, имеет максимальный и минимальный элементы.

Теорема 1.2 (принцип полноты Вейерштрасса). *Если непустое числовое множество ограничено сверху (снизу), то существует число, которое является наименьшей верхней (соответственно, наибольшей нижней) границей этого множества, и это число единственно.*

■ Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$ и ограничено сверху. Обозначим через Y множество верхних границ множества X, то есть $Y = \{y \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant y,\ \forall x \in X\}$. По условию $Y \neq \varnothing$ и $x \leqslant y$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in Y$. По аксиоме полноты

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant c \leqslant y,\ \forall x \in X,\ \ \forall y \in Y.$$

Поскольку $x \leqslant c$, $\forall x \in X$, то $c \in Y$. Но $c \leqslant y$, $\forall y \in Y$, значит c — наименьшая верхняя граница множества X, то есть минимальный элемент множества Y. Поэтому он единственен. □

Определение 1.29. *Пусть X — непустое ограниченное сверху числовое множество. Наименьшую из верхних границ множества X называют точной верхней границей или верхней гранью множества X и обозначают* $\sup X$ *(читают "супремум X") или* $\sup\limits_{x \in X} x$.

Итак, $\sup X = \min\{c \in \mathbb{R} |\ x \leqslant c,\ \forall x \in X\}$ и потому определение 1.29 равносильно следующему.

Определение 1.30. *Пусть X — непустое ограниченное сверху числовое множество. Число a называют точной верхней границей множества X, если выполнены два условия:*

1. $x \leqslant a$, $\forall x \in X$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X :\ x_\varepsilon > a - \varepsilon$.

Условия 1–2 являются характеристическими свойствами $\sup X$. Первое означает, что a — верхняя граница множества X, а второе — что любое число b, меньшее чем a, уже не является верхней границей множества X.

С учетом определения 1.29 принцип полноты множества $\mathbb{R}$ в смысле Вейерштрасса формулируется следующим образом:

Теорема 1.3. *Непустое ограниченное сверху числовое множество имеет, притом единственную, точную верхнюю границу.*

Аналогично вводится понятие точной нижней границы множества.

Определение 1.31. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, ограничено снизу. Наибольшую из его нижних границ называют точной нижней границей или нижней гранью множества X и обозначают* $\inf X$ *(читают "инфимум X") или* $\inf\limits_{x \in X} x$.

Характеристическими свойствами $a = \inf X$, $a \in \mathbb{R}$, являются:

$$1)\ a \leqslant x,\ \forall x \in X; \quad 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X:\ x_\varepsilon < a + \varepsilon.$$

Лемма 1.2. *Если числовое множество X имеет максимальный (минимальный) элемент a, то $a = \sup X$ (соответственно $a = \inf X$).*

■ Пусть $a = \max X$. Тогда $a \in X$ и $x \leqslant a$, $\forall x \in X$. Поэтому a — верхняя граница множества X и $\forall \varepsilon > 0$, если положить $x_\varepsilon = a \in X$, имеем:

$$\exists\, x_\varepsilon = a \in X\ :\ x_\varepsilon > a - \varepsilon.$$

Следовательно, по определению 1.30 $a = \sup X$. □

Пример 1.6. Найти $\sup X$, если $X = [0, 1)$.

■ Так как $x < 1$, $\forall x \in X$, то 1 — верхняя граница множества X. Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее 1. Число $1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ принадлежит множеству X. Поскольку $1 - \dfrac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$, то можно положить $x_\varepsilon = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $1 = \sup X$. □

1.6.2 Неограниченные числовые множества

Определение 1.32. *Если непустое числовое множество не является ограниченным сверху (снизу), то его называют неограниченным сверху (снизу).*

В символьной форме это определение принимает вид:

$$X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing \text{ не ограничено сверху } \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in X\ :\ x > a.$$

В случае, если числовое множество X не ограничено сверху считают, что его точная верхняя граница равна $+\infty$.

Если же X не ограничено снизу, то считают, что $\inf X = -\infty$.

Из сказанного и теоремы 1.2 вытекает следующий результат.

Теорема 1.4 (существования точных границ)**.** *Каждое непустое множество X из $\mathbb{R}$ имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ точные верхнюю и нижнюю границы;* $\sup X$ *— число, если X ограничено сверху,* $\sup X = +\infty$*, если X не ограничено сверху;* $\inf X$ *— число, если X ограничено снизу и* $\inf X = -\infty$*, если X не ограничено снизу.*

Теорема 1.5. *Непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество множества $\mathbb{Z}$ имеет максимальный (минимальный) элемент.*

■ Пусть $X \subset \mathbb{Z}$, $X \neq \varnothing$, X — ограниченное сверху множество. По теореме 1.2 о существовании точных границ числового множество имеется число C такое, что $C = \sup X$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и, в частности, $\varepsilon = 1$ найдется такой элемент $x_\varepsilon = n_0 \in X$, что $n_0 > C - 1$, то есть $n_0 \leqslant C < n_0 + 1$. Поскольку между

n_0 и n_0+1 нет целых чисел, то $\forall m \in X$ $m \leqslant n_0$ и, следовательно, $n_0 = \max X$. $\square$

Теорема 1.6. *Бесконечное подмножество натуральных чисел не ограничено сверху.*

■ Пусть X — бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$. Предположим, что оно ограничено сверху. Так как $X \subset \mathbb{Z}$, то по теореме 1.5 множество X имеет максимальный элемент n_0. Тогда X имеет не более n_0 элементов, что противоречит условию. $\square$

Теорема 1.7 (принцип Архимеда). *Для любого числа a и любого положительного числа b найдется единственное целое число n_0 такое, что $(n_0-1)b \leqslant a < n_0 b$.*

■ Так как $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху, поэтому существует число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $n > a/b$. Пусть $Y = \{n \in \mathbb{Z} : n > a/b\}$. Множество Y является непустым ограниченным снизу. По теореме 1.5 оно имеет минимальный элемент. Пусть $n_0 = \min Y$. Тогда $n_0 - 1 \notin Y$ и $n_0 - 1 \leqslant \dfrac{a}{b}$. Следовательно, $n_0 - 1 \leqslant \dfrac{a}{b} < n_0$ и $(n_0-1)b \leqslant a < n_0 b$. Поскольку число n_0 — минимальный элемент Y, то оно единственно. $\square$

Следствие 1. Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leqslant x < k+1$ (достаточно в теореме положить $b = 1$). Такое число k называют целой частью числа x и обозначают через $[x]$ или $E(x)$.

Следствие 2. Для любого положительного числа ε существует натуральное число n такое, что $0 < 1/n < \varepsilon$.

■ Пусть ε — положительное число. По принципу Архимеда найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что $n > 1/\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$, то $n \in \mathbb{N}$ и $0 < 1/n < \varepsilon$. $\square$

Теорема 1.8 (о плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$). *Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, найдется рациональное число r такое, что $a < r < b$.*

■ Число $b - a$ положительно. По следствию 2 принципа Архимеда подберем натуральное число n_0 такое, что $0 < 1/n_0 < b-a$. Далее, по принципу Архимеда по числу a и $1/n_0 > 0$ найдется $m_0 \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{m_0-1}{n_0} \leqslant a < \frac{m_0}{n_0}.$$

Докажем, что рациональное число m_0/n_0 — искомое. Действительно,

$$\frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0-1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + (b-a) = b.$$

Отсюда, $a < m_0/n_0 < b$. $\square$

1.6.3 Счетные и несчетные множества

При изучении множеств приходится по некоторым правилам сравнивать их между собой по запасу элементов. Изложим одно такое правило.

Пусть n — натуральное число, а $N_n = \{k \in \mathbb{N} \ : \ k \leqslant n\}$. Множество X называют конечным, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что между множествами X и N_n можно установить биективное отображение, в противном случае множество X называют бесконечным.

Определение 1.33. *Бесконечное множество X называют счетным, если существует биективное отображение $f : \mathbb{N} \to X$. Если бесконечное множество X не является счетным, его называют несчетным.*

Иными словами, счетное множество — это такое бесконечное множество, элементы которого можно занумеровать: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,\ n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.7. Множество X натуральных четных чисел счетно, поскольку функция $f : \mathbb{N} \to X,\ f(n) = 2n$, является биекцией.

Пример 1.8. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно. В этом случае биективное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^{n-1}[n/2]$, позволяет пронумеровать элементы множества $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots, -n, n, \dots,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.9. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

■ Пусть X — бесконечное множество, а x_1 — произвольный элемент из X. Заметим, что множество $\{x' \in X |\, x' \neq x_1\}$ бесконечно. Зафиксируем любой элемент этого множества и обозначим его x_2. Продолжая этот процесс, на n-ом шаге выделим элемент $x_n \in X$ такой, что

$$x_n \neq x_k,\ k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

В результате получим множество $Y = \{x_n \in X \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, которое является счетным, так как $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$. □

Теорема 1.10. *Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.*

■ Пусть множество A является объединением счетной совокупности счетных множеств $A_1, A_2, \dots$. Поскольку множества $A_k, k \in \mathbb{N}$, являются счетными, то их можно представить в виде:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\},$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пронумеруем элементы множества A следующим образом:

$$a_1 := a_{11}, a_2 := a_{12}, a_3 := a_{21}, a_4 := a_{31}, a_5 := a_{22}, a_6 := a_{13}, \dots$$

Если у множеств A_i и A_j, $i \neq j$, окажутся одинаковые элементы, то их посчитаем один раз. Поскольку $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ и $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, то множество A — счетно. $\square$

Следствие. *Множество рациональных чисел счетно.*

$\blacksquare$ Множество рациональных чисел определяется следующим образом:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{числа } m \text{ и } n \text{ взаимно простые} \right\}.$$

Расположим рациональные числа в таблицу. Сначала в первую строку поместим все целые числа в порядке не убывания их абсолютных величин и так, что за каждым натуральным числом следует ему противоположное:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots .$$

Во вторую строку поместим все несократимые рациональные числа со знаменателем 2 в порядке не убывания их абсолютных величин, причем вслед за каждым положительным числом следует ему противоположное:

$$1/2, -1/2, 3/2, -3/2, 5/2, -5/2, \dots .$$

Аналогично, в n-ую строку выпишем все несократимые рациональные числа со знаменателем n, упорядоченные по абсолютной величине и вслед за каждым положительным числом вписано ему противоположное. В результате получим таблицу всех рациональных чисел, состоящую из счетного множества строк, каждая из которых содержит счетное множество элементов. При этом среди выписанных элементов нет одинаковых. По теореме 8 множество $\mathbb{Q}$ счетно.

Определение 1.34. *Конечные и счетные множества называют не более чем счетными.*

1.7 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $f : X \to Y, \varphi : Y \to Z$ — биективные функции. Доказать, что $\varphi \circ f : X \to Z$ — биективная функция и
$$(\varphi \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ \varphi^{-1})(z),\ \forall\, z \in Z.$$
2. Доказать, что множество чисел $X = \left\{\dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ имеет минимальный элемент $1/2$, не имеет максимального элемента, но $\sup X = 1$.

3. Пусть X и Y — непустые числовые множества, причем X ограничено сверху, $Y \subset X$. Доказать, что Y ограничено сверху и $\sup\, Y \leqslant \sup\, X$.

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, X ограничено сверху. Доказать, что множество $-X = \{-x \,:\, x \in X\}$ ограничено снизу и $\inf\,(-X) = -\sup\, X$.

5. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, X ограничено снизу. Доказать, что множество $-X = \{-x \,:\, x \in X\}$ ограничено сверху и $\sup(-X) = -\inf X$.

6. Пусть X и Y непустые ограниченные сверху числовые множества. Доказать, что множество $Z = \{z = x + y \,:\, x \in X,\ y \in Y\}$ ограничено сверху и $\sup Z = \sup X + \sup Y$.

7. Пусть множество X ограничено сверху, $X_1 \subset \mathbb{R}$, и
$$\forall\, x' \in X_1\ \exists\, x \in X \,:\, x' \leqslant x.$$
Доказать, что множество X_1 ограничено сверху.

8. Числовые множества X и Y ограничены сверху. Доказать, что множество $Z = X \bigcup Y$ ограничено сверху и $\sup Z = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

9. Привести пример множества $X \subset \mathbb{R}$, не имеющего максимального элемента, а множество $Y = \{y = |x|\,,\, x \in X\}$ имеет максимальный элемент.

10. Доказать, что если $n \in \mathbb{N}$, то множество $X = \{p \in \mathbb{N} \,:\, n < p\}$ имеет минимальный элемент, равный $n + 1$.

11. Пусть X и Y — непустые, ограниченные сверху подмножества положительных чисел, а $Z = \{z = xy \,:\, x \in X,\, y \in Y\}$. Доказать, что множество Z ограничено сверху и $\sup Z = \sup X \cdot \sup Y$.

12. Найти $\sup X,\ \inf X$, если

    (a) $X = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (b) $X = \left\{\dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

13. Доказать, что множество $X = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ не имеет максимального и минимального элементов.

Глава 2

Теория пределов

В этой главе изучается операция предельного перехода — основная операция математического анализа. Сначала рассмотрим предел функции натурального аргумента, поскольку все основные результаты теории пределов отчетливо видны в этой простой ситуации. Затем рассмотрим предел в точке функции действительной переменной.

2.1 Предел последовательности

2.1.1 Определение и примеры

Определение 2.1. *Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.*

Значения $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое происходит отображение, снабжая символ соответствующим индексом (аргументом функции f): $x_n = f(n)$. Элемент x_n называется n-м членом последовательности. В связи с этим последовательность часто обозначают символом $\{x_n\}$ или $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, а также записывают в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

В дальнейшем в этой главе будем рассматривать только последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ действительных чисел.

Определение 2.2. *Любой интервал, содержащий точку $a \in \mathbb{R}$, называют окрестностью этой точки. Интервал $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, называют δ-окрестностью точки a и обозначают $U_a(\delta)$ или $V_a(\delta)$ (или короче: U_a или V_a).*

Определение 2.3. *Число $a \in \mathbb{R}$ называют пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности точки a существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что все элементы x_n последовательности, номера которых больше N, содержатся в U_a. При этом пишут*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } \lim x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

В логической символике определение 2.3 имеет вид:

$$a \in \mathbb{R}.\ a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall U_a\ \exists N = N(U_a) \in \mathbb{N} : \forall n > N\ x_n \in U_a.$$

Поскольку $U_a(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, то часто употребляют следующую равносильную формулировку определения 2.3

Определение 2.4. *Число a называют пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что все члены последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Соответственно, в логической символике это определение имеет вид:

$$a \in \mathbb{R},\ a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$$

Замечание. Первые члены последовательности не влияют на существование и величину предела в случае его существования.

Иногда полезна следующая геометрическая интерпретация определения 2.3 предела последовательности:

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если вне любой окрестности точки a находится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$.

Ясно, что если вне некоторой окрестности точки a находится бесконечное число членов $\{x_n\}$, то a не является пределом $\{x_n\}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. Если $\{x_n\} :\ x_n = c$, то $\lim x_n = c$, так как все члены последовательности, начиная с первого, принадлежат любой окрестности точки c.

Пример 2.2. Покажем, что последовательность $\{x_n\} :\ x_n = \dfrac{\sin n}{n+5}$, имеет предел и $\lim x_n = 0$.

■ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как

$$|x_n| = \frac{|\sin n|}{n+5} \leq \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ для $\forall\, n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то, полагая $N = \max\{1, [1/\varepsilon]\}$, получим:

$$|x_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall\, n > N.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max\{1, [1/\varepsilon]\} \in \mathbb{N} : \forall\, n > N\ |x_n| < \varepsilon$. □

Замечание. Одновременно мы доказали, что $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Пример 2.3. Покажем, что $\lim \dfrac{1}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

■ Поскольку $q > 1$, то $q = 1+\alpha$, где $\alpha > 0$. Поэтому $\forall n > 1$ по формуле бинома Ньютона

$$q^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n > n\alpha.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{1}{q^n} < \dfrac{1}{n\alpha}$, $\forall n > 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, положим $N = \max\{1,\ [1/\alpha\varepsilon]\}$ и получим, что

$$0 < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{n\,\alpha} < \varepsilon,\ \forall n > N.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N = \max\{1, [1/\varepsilon\alpha]\} \in \mathbb{N} : \forall\, n > N\ |1/q^n| < \varepsilon.$ □

Пример 2.4. Покажем, что последовательность $\{x_n\} :\ x_n = (-1)^n$, не имеет предела.

■ Для любого числа a укажем такую окрестность, вне которой расположено бесконечное множество членов данной последовательности. Для этого зафиксируем точку $a \in \mathbb{R}$ и рассмотрим ее единичную окрестность $U_a(1) = (a-1, a+1)$. Поскольку $x_{2k} = 1,\ x_{2k+1} = -1,\ \forall k \in \mathbb{N}$, и хотя бы одно из чисел $+1$ или -1 не принадлежит $U_a(1)$, то вне $U_a(1)$ находится бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, число a не является её пределом. В силу произвольности числа a заключаем, что $\nexists \lim x_n$. □

Определение 2.5. *Числовая последовательность, пределом которой является число, называется сходящейся. Все остальные последовательности называются расходящимися.*

В логической символике определение 2.5 имеет вид:

$\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow\ \exists\, a \in \mathbb{R} : \lim x_n = a$.

$\{x_n\}$ расходится $\Leftrightarrow\ \forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\,\varepsilon > 0\ :\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ :\ |x_n - a| \geq \varepsilon$.

Последовательности $\{c\}$, $\left\{\dfrac{\sin n}{n+5}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{q^n}\right\}$, если $q > 1$, являются сходящимися, а последовательность $\{(-1)^n\}$ — расходящейся.

2.1.2 Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 2.1. *Последовательность не может иметь двух разных пределов.*

■ Пусть числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b. Для определенности будем считать, что $a < b$. Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. По определению 2.4 предела последовательности найдем N_1 и N_2 такие, что $|x_n - a| < \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, $\forall\, n > N_1$, то есть $\forall n > N_1$

$$a - \frac{b-a}{2} < x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2},$$

и $|x_n - b| < \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, $\forall n > N_2$, то есть $\forall n > N_2$

$$\frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} < x_n < b + \frac{b-a}{2}.$$

Тогда $\forall n > N = \max\{N_1, N_2\}$ $\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$, чего быть не может. $\square$

Определение 2.6. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (соответственно, снизу или ограниченной), если множество $X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ является ограниченным сверху (снизу или ограниченным). Если X — неограниченное множество, то $\{x_n\}$ называется неограниченной последовательностью.*

С учетом определений 2.1 и 2.2 имеем:

$\{x_n\}$ ограничена сверху $\Leftrightarrow\ \exists\, M \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \le M$,
$\{x_n\}$ ограничена снизу $\Leftrightarrow\ \exists\, M \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \ge M$,
$\{x_n\}$ ограничена $\Leftrightarrow\ \exists\, M > 0\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ |x_n| \le M$,
$\{x_n\}$ не ограничена $\Leftrightarrow\ \forall\, M > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ |x_n| > M$.

Теорема 2.2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

■ Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = d$. Полагая в определении 2.4 $\varepsilon = 1$, найдем номер N такой, что $|x_n - d| < 1, \forall\, n > N$, то есть $d - 1 < x_n < d + 1$, $\forall\, n > N$. Введем обозначения:

$$a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N, d-1\}, \quad b = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, d+1\}.$$

Тогда $a \le x_n \le b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание. Ограниченность последовательности — необходимое, но недостаточное условие сходимости (см.пример 4).

Теорема 2.3. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$, то последовательность $\{|x_n|\}$ сходится и $\lim |x_n| = |a|$.*

■ Так как $a = \lim x_n$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall\, n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\forall\, n > N\ ||x_n| - |a|| \le |x_n - a| < \varepsilon$. $\square$

Замечание 1. Из теоремы 2.3 и примера 3 следует, что при $|q| > 1$

$$\lim \frac{1}{q^n} = 0.$$

Замечание 2. Обратное утверждение к теореме 2.3 не имеет места.

Теорема 2.4. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и при этом $x_n \le y_n$, $\forall\, n > n_0$, то $\lim x_n \le \lim y_n$.*

■ Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ и $a > b$. По определению 2.4 предела последовательности по числу $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ найдется номер N такой, что $\forall\, n > N$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}, \quad b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Следовательно, $\forall\, n > \max\{n_0, N\}$ $y_n < \dfrac{a+b}{2} < x_n$, что противоречит условию. □

Замечание. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся и для всех $n > n_0$ $x_n < y_n$, то можно утверждать лишь, что $\lim x_n \le \lim y_n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательности $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ и $y_n = \dfrac{1}{n}$.

Непосредственно из определения 2.4 следуют и такие результаты.

Теорема 2.5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n < b$ ($b \in \mathbb{R}$), то $\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, x_n < b, \forall\, n > N$.*

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n \ne 0$, то $\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \operatorname{sgn} x_n = \operatorname{sgn}(\lim x_n), \forall\, n > N$.

Теорема 2.6. *Пусть последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ удовлетворяют условиям:*

1) $x_n \le y_n \le z_n, \forall n > n_0$,

2) последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся и $\lim x_n = \lim z_n = a$.

Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim y_n = a$.

2.1.3 Бесконечно малые последовательности

Определение 2.7. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (коротко б.м.), если она сходится и $\lim x_n = 0$.*

Согласно определению 2.4 предела числовой последовательности, определение 2.7 эквивалентно следующему:

Определение 2.8. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| < \varepsilon$.*

Итак, $\{x_n\}$ — б.м. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) :\ \forall\, n > N\ |x_n| < \varepsilon$.

Из примеров 2, 3 и замечания 1 к теореме 2.3 получаем, что последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{\sin n}{n+5}\right\}$, $\{q^{-n}\}$ при $|q| > 1$, являются бесконечно малыми.

Свойства бесконечно малых последовательностей описываются следующими теоремами.

Теорема 2.7. *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

■ Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые. Покажем, что таковой будет и $\{x_n + y_n\}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon)$ такой, что

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n > N_1, \tag{2.1}$$

и найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такой, что

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n > N_2. \tag{2.2}$$

Обозначим через $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ будут справедливы неравенства (2.1) и (2.2) . Поэтому при $n > N$

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно малая.

Утверждение о сумме конечного числа бесконечно малых последовательностей следует из доказанного по индукции. □

Теорема 2.8. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой.*

■ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная и $\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательности. По определению 2.6 ограниченной последовательности найдется число $M > 0$ такое, что

$$|x_n| \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \ \forall n > N. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем, что $\forall n > N$

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \le M \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой. □

Следствие 1. Произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся есть бесконечно малая последовательность.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Пользуясь бесконечно малыми последовательностями, на определение сходящейся последовательности можно посмотреть по-другому.

Лемма 2.1. *Для того чтобы число a являлось пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление $x_n = a + \alpha_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, в котором $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.*

■ *Необходимость.* Пусть $\lim x_n = a$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если положить $\alpha_n = x_n - a,\ n \in \mathbb{N}$, то получим, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n = a + \alpha_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что существует число a, для которого $x_n = a + \alpha_n,\ n \in \mathbb{N}$, и $\lim \alpha_n = 0$. Зафиксируем произвольное положительное число ε. Так как $\lim \alpha_n = 0$, то найдется номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon,\ \forall n > N$. Или (в других обозначениях) $\forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim x_n = a$. □

Применим лемму 2.1 к одному важному частному примеру.

Лемма 2.2. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

■ Так как для всех $n > 1$ $\sqrt[n]{n} > 1$, то $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, причем $\alpha_n > 0$ для всех $n > 1$. Поэтому $n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \dfrac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n$. Поскольку все слагаемые положительны, $n - 1 > \dfrac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2$ и $0 < \alpha_n < \sqrt{2/n}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\sqrt{2/n} < \varepsilon$ для всех $n > 2/\varepsilon^2$, то, полагая $N = \max\{1, [2/\varepsilon^2]\}$, получим, что $0 < \alpha_n < \varepsilon,\ \forall\, n > N$. Следовательно, последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой и, согласно лемме 2.1, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. □

Следствие. Если $a > 1$, то $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
■ Утверждение следует из неравенств $1 < \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$, $\forall n > [a]$. □

2.1.4 Арифметические операции с последовательностями

Пользуясь леммой 2.1 и свойствами бесконечно малых последовательностей, легко получить теоремы о пределах последовательностей, получаемых с помощью арифметических операций из сходящихся последовательностей.

Теорема 2.9. *Пусть числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Тогда имеют место утверждения:*

1) последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n;$$

2) последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n;$$

3) если $\lim y_n \neq 0$, *то отношение* x_n/y_n *определено, начиная с некоторого номера, последовательность* $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ *сходится и*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

■ Докажем только утверждения 2) и 3). Пусть $\lim x_n = a,\ \lim y_n = b$. По лемме 2.1 $x_n = a+\alpha_n,\ y_n = b+\beta_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — бесконечно малые. Тогда

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b + (a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n). \tag{2.5}$$

По теореме 2.8 и следствию 1 последовательности $\{a\cdot\beta_n\}$, $\{b\cdot\alpha_n\}$, $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ являются бесконечно малыми. По теореме 2.7 последовательность $\{a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно мала. Из представления (2.5) по лемме 2.1 и следует утверждение 2).

Обратимся к утверждению 3). По условию $\lim y_n = b \neq 0$. В силу теоремы 2.3. последовательность $\{|y_n|\}$ сходится и $\lim |y_n| = |b| \neq 0$. Поэтому по числу $\varepsilon = |b|/2$ найдется номер N такой, что $\forall n > N$

$$0 < \frac{|b|}{2} = |b| - \frac{|b|}{2} < |y_n| < \frac{3|b|}{2}$$

Следовательно, $y_n \neq 0$, и $\dfrac{2}{3|b|} < \dfrac{1}{y_n} < \dfrac{2}{|b|},\ \forall\, n > N.$

Таким образом, частное x_n/y_n определено для всех $n > N$, а последовательность $\{1/y_n\}$ ограничена. Рассмотрим для всех $n > N$ разность

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{y_n}\,(\alpha_n b - a\beta_n).$$

Последовательность $\{\alpha_n b - a\beta_n\}$ — бесконечно малая, $\left\{\dfrac{1}{b}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ — ограниченные. По теореме 2.8 последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая. Поэтому, в силу леммы 2.1, утверждение 3) доказано. □

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то для любого числа c последовательность $\{c \cdot x_n\}$ сходится и $\lim(cx_n) = c \cdot \lim x_n$.

Следствие 2. Если $a > 0$, то $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Следствие 3. Для любого $a \in \mathbb{R}\ \exists \lim \sqrt[n]{n+a} = 1$

■ Так как $1 < n + a < 2n$ для $n > N = [|a|] + 2$, то $1 < \sqrt[n]{n+a} < \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$. Отсюда с учетом теорем 2.9 и 2.6 получаем нужное. □

2.1.5 Бесконечно большие последовательности

Определение 2.9. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой (коротко б.б.), если для любого положительного числа* ε *най-*

дется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что все члены последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n| > \varepsilon$. Если все члены бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), то последовательность называется положительной (отрицательной) бесконечно большой.

Для формализации записи бесконечно большой последовательности традиционно используют одно из следующих обозначений

$$\lim x_n = \infty,\ \lim x_n = +\infty,\ \lim x_n = -\infty,$$

которые в символьной записи можно представить так:

$$\lim x_n = \infty \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \forall n > N\ |x_n| > \varepsilon.$$

$$\lim x_n = +\infty\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \forall n > N\ x_n > \varepsilon.$$

$$\lim x_n = -\infty\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \forall n > N\ x_n < -\varepsilon.$$

Прежде всего, отметим связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

Теорема 2.10. *Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то, начиная с некоторого номера, определено отношение $1/x_n$ и последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно малой. Если все члены бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ отличны от нуля, то последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно большой.*

■ Докажем, например, первую часть утверждения. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. По определению 2.9 лишь конечное число её членов может быть равно нулю. Поэтому существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ $x_n \neq 0$ и отношение $1/x_n$ определено. Поскольку первые члены последовательности не влияют на существование и величину предела, будем считать, что $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению 2.9 бесконечно большой последовательности найдётся такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|x_n| > 1/\varepsilon$, $\forall\, n > N$. Следовательно, $|1/x_n| < \varepsilon$, $\forall\, n > N$. □

Замечание. Легко показать, что последовательность $\left\{\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ является бесконечно малой. Однако последовательность обратных величин в этом случае не определена.

Из теоремы 2.10, примера 3 и замечания 1 к теореме 2.3 следует

Лемма 2.3. *Последовательность q^n, где $|q| > 1$, является бесконечно большой. Если $q > 1$ последовательность $\{q^n\}$ является положительной бесконечно большой.*

Выясним связь между бесконечно большими и неограниченными последовательностями. Непосредственно из определений 2.9 и 2.6 следует

Теорема 2.11. *Бесконечно большая последовательность не ограничена.*

Замечание. Неограниченность последовательности — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы она была бесконечно большой. Подтверждением этого является следующий пример.

Пример 2.5. Пусть $\{x_n\} : x_n = n^{(-1)^n}$. Изучим последовательности, составленные из элементов данной последовательности с четными и нечетными номерами, то есть $\{2n\}$ и $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$. Первая из них является бесконечно большой, а значит неограниченной вместе с рассматриваемой последовательностью. Вторая последовательность является бесконечно малой. Поэтому для любого $\varepsilon > 1$ все элементы последовательности с нечетными номерами, не удовлетворяют неравенству $|x_n| > \varepsilon$ и потому исходная последовательность не является бесконечно большой.

Теорема 2.12. *Сумма бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью.*

■ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, $\{y_n\}$ — бесконечно большая. Тогда $\exists M > 0 : |x_n| \leq M, \forall\, n > 1$ и

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n > N\; |y_n| > \varepsilon + M.$$

Поэтому $|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| \geq |y_n| - M > (\varepsilon + M) - M = \varepsilon, \forall n > N.$ □

Немного изменяя доказательство, теорему 2.12 можно уточнить.

Теорема 2.13. *Сумма ограниченной и положительной (отрицательной) бесконечно большой и последовательностей есть положительная (отрицательная) бесконечно большая последовательность.*

Теорема 2.14. *Сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая того же знака.*

■ Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие одного знака. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\; |x_n + y_n| = |x_n| + |y_n|$. Но, в силу определения 2.9, по любому числу $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N > n_0$ такой, что

$$|x_n| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |y_n| > \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n > N.$$

Тогда $|x_n + y_n| = |x_n| + |y_n| > \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > N$, и поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ является бесконечно большой. Но при $n > N_0$ $\operatorname{sgn}(x_n + y_n) = \operatorname{sgn}(x_n) =$

$\operatorname{sgn}(y_n)$. Таким образом, последовательность $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая того же знака, что и последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. $\square$

Замечание. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ являются бесконечно большими разных знаков, то о поведении последовательности $\{x_n + y_n\}$ ничего определённого сказать нельзя. Для иллюстрации последнего высказывания достаточно рассмотреть, например, последовательности

$$x_n = n,\ y_n = -n + (-1)^n \text{ или } y_n = -n + a,\ \text{где } a \in \mathbb{R}.$$

Определение 2.10. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется отграниченной от нуля, если существует число $m > 0$ и номер n_0 такие, что $|x_n| \geq m, \forall n > n_0$.*

В логической символике определение 2.10 записывается в виде:

$$\{x_n\} \text{ отграничена от } 0 \Longleftrightarrow \exists\, m > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, |x_n| \geq m,\ \forall\, n > n_0.$$

Лемма 2.4. *Если числовая последовательность $\{x_n\}$ — сходящаяся, причём $\lim |x_n| \neq 0$, или является бесконечно большой, то она отграничена от нуля.*

■ Пусть $\lim |x_n| =$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Тогда по числу $\varepsilon = |a|/2$ найдётся номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\frac{|a|}{2} = |a| - \frac{|a|}{2} < |x_n| < |a| + \frac{|a|}{2} = \frac{3|a|}{2}$$

Выполнение левого неравенства означает нужное. Вторая часть леммы следует из определения 2.9 бесконечно большой последовательности. $\square$

Теорема 2.15. *Произведение бесконечно большой последовательности и отграниченной от нуля есть бесконечно большая последовательность.*

■ Пусть $\{x_n\}$ — отграниченная от нуля последовательность, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая. Тогда для первой — $\exists\, m > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n| \geq m,\ \forall\, n > n_0$, а для второй — $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,:\, N > n_0$ и $|y_n| > \varepsilon/m,\ \forall\, n > N$ Следовательно, $\forall n > N$

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon. \square$$

Замечание 1. Не зная законов изменения бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей, ничего определенного о поведении их произведения сказать нельзя. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность $\infty \cdot 0$.

Замечание 2. Отношение двух бесконечно малых (больших) последовательностей представляет неопределённость вида $0/0$ (соответственно ∞/∞).

2.1.6 Определение предела в $\overline{\mathbb{R}}$

Определение 2.11. *Пусть ε — некоторое положительное число. ε-окрестностью символа $+\infty$ назовём интервал*

$$(\varepsilon, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > \varepsilon\}$$

и обозначим его $U_{+\infty}(\varepsilon)$ или $U_{+\infty}$. Аналогично, ε-окрестностью символа $-\infty$ назовём интервал

$$(-\infty, -\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -\varepsilon\}$$

и обозначим его $U_{-\infty}(\varepsilon)$ или $U_{-\infty}$. Множество $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| > \varepsilon\}$ назовём ε-окрестностью символа ∞ и обозначим его U_∞.

Определение 2.12. *Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Говорят, что точка a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности U_a точки a найдётся номер $N = N(U_a)$ такой, что все члены x_n последовательности с номерами $n > N$ принадлежат окрестности U_a.При этом пишут $\lim x_n = a$ или $x_n \longrightarrow a$ при $n \longrightarrow \infty$.*

Лемма 2.5. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ и $x_n \leq y_n$, $\forall\, n > N_0$, то $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

■ Пусть $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, это утверждение леммы совпадает с теоремой 2.4 о переходе к пределу в неравенстве для сходящихся последовательностей.

Если $a = -\infty$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, или $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b = +\infty$, неравенство $a \leq b$ очевидно.

Если $a = +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > N_0 : x_n > \varepsilon$, $\forall n > N$. Но $x_n \leq y_n$, $\forall\, n > N_0$, поэтому $y_n \geq x_n > \varepsilon$, $\forall n > N$. Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ является положительной бесконечно большой и $a = b = +\infty$. Аналогично показывается, что если $b = -\infty$, то $a = -\infty$. □

Учитывая определения 2.9 и 2.12, можно сказать, что бесконечно большая последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ и он равен одному из бесконечных символов ∞, $-\infty$, $+\infty$.

Далее, говоря о сходящихся последовательностях, мы будем иметь в виду последовательности, имеющие конечный предел, а выражение "последовательность стремится к ..." или "имеет предел, равный ..." будем использовать и тогда, когда будем иметь дело и с бесконечно большими последовательностями.

2.1.7 Подпоследовательности и их свойства

Определение 2.13. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность, $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.*

Из определения следует, что подпоследовательность есть суперпозиция последовательностей $\{x_n\}$ и $\{n_k\}$.

Замечание. Если $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то она является положительной бесконечно большой. Действительно, $n_1 \ge 1$; $n_2 > n_1 \ge 1$, поэтому $n_2 \ge 2$; $n_3 > n_2 \ge 2$, поэтому $n_3 \ge 3$. Методом математической индукции можно показать, что $n_k \ge k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Отсюда по лемме 2.5 получаем нужное.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{2k\}$ и 4, 2, 6, 8, 10, $\ldots$. Последовательность $\{2k\}$ — подпоследовательность последовательности $\{n\}$ (здесь $n_k = 2k, k \in \mathbb{N}$), а последовательность 4,2,8,10,... не является подпоследовательностью последовательности $\{n\}$, хотя последовательности $\{2k\}_{k=1}^{+\infty}$ и 4, 2, 6, 8, 10, ...состоят из одних и тех же чисел. Последовательность $\{x_{n+n_0}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если $n_0 \in \mathbb{N}$. Сама последовательность $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность самой себя (при этом $n_k = k$, $k \in \mathbb{N}$).

Теорема 2.16. *Если точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, то любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ имеем предел и он равен a.*

■ Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Зафиксируем некоторую окрестность U_a точки a. По определению 2.12 найдётся номер $N = N(U_a)$ такой, что $x_n \in U_a, \forall\, n > N$. Но $\lim n_k = +\infty$. Поэтому существует номер k_0 такой, что $n_k > N, \forall\, k > k_0$. Следовательно, $x_{n_k} \in U_a, \forall\, k > k_0$ и $\lim x_{n_k} = a$. □

Следствие. Если две подпоследовательности одной последовательности $\{x_n\}$ имеют не совпадающие пределы, и хотя бы один из двух пределов — число, то последовательность $\{x_n\}$ предела не имеет.

■ Если бы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, то тот же предел имели бы и все её подпоследовательности, но это противоречит условию теоремы. □

Определение 2.14. *Последовательность множеств $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется системой вложенных множеств, если $X_k \supset X_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.*

Очевидно, что последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]_{n=1}^{+\infty}\}$ является системой вложенных отрезков, если выполнены условия:

1) $a_n \le b_m$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

2) $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность.

3) $\{b_n\}$ — невозрастающая последовательность.

Лемма 2.6 (о вложенных отрезках). *Пусть $\{[a_n, b_n]_{n=1}^{+\infty}\}$ — система вложенных отрезков и последовательность $\{b_n - a_n\}$ длин отрезков системы* *является бесконечно малой, тогда существуют единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, и* $\lim a_n = \lim b_n = c$.

■ Поскольку $\{[a_n, b_n]_{n=1}^{+\infty}\}$ — система вложенных отрезков, то для числовых множеств $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\, b_n \,|\, n \in \mathbb{N}\,\}$ выполнены условия аксиомы полноты множества $\mathbb{R}$. В силу этого найдётся число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, a_n \in A$, $\forall\, b_m \in B$ выполнены неравенства $a_n \le c \le b_m$. В частности,

$$a_n \le c \le b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то есть существует точка c, принадлежащая всем отрезкам системы.

Докажем её единственность. Пусть c и c_1 — две точки, принадлежащие отрезкам $[a_n, b_n]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 \le |c - c_1| \le b_n - a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

По условию леммы $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Применяя к (2.6) теоремы 2.1, 2.6 получим, что $c = c_1$. Аналогично, поскольку $0 \le c - a_n \le b_n - a_n$ и $0 \le b_n - c \le b_n - a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то $\exists \lim a_n = \lim b_n = c$. □

Замечание. Доказанную лемму о вложенных отрезках (часто её называют принципом Коши–Кантора) можно взять в качестве аксиомы полноты при аксиоматическом введении множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Теорема 2.17 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

■ Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \le x_n \le b$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. По крайней мере, один из получившихся отрезков содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим его через $[a_1, b_1]$ и зафиксируем произвольный элемент $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Снова один из получившихся отрезков содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим его через $[a_2, b_2]$. В силу того, что на отрезке $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, фиксируем такой член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]_{k=1}^{+\infty}\}$, длины которых $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}, k \in \mathbb{N}$, образуют бесконечно малую последовательность, и такую последовательность $\{x_{n_k}\}$, что $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ и $n_{k+1} > n_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Система вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]_{k=1}^{+\infty}\}$ удовлетворяет условиям леммы 2.6. Поэтому существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам системы, $\lim a_k = \lim b_k = c$, а в силу теоремы 2.6 последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. □

Аналогом теоремы Больцано-Вейерштрасса для неограниченных последовательностей является следующее утверждение.

Лемма 2.7. *Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность: положительную, если последовательность не ограничена сверху, отрицательную, если последовательность не ограничена снизу.*

■ Прежде всего заметим, что если у неограниченной сверху (снизу) последовательности отбросить конечное число первых её элементов, то получится неограниченная сверху (снизу) последовательность.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Тогда найдётся такой элемент x_{n_1} этой последовательности, что $x_{n_1} > 1$. Учитывая, что последовательность $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots$ не ограничена сверху, в ней найдётся элемент x_{n_2}, удовлетворяющий неравенству $x_{n_2} > 2$, при этом $n_2 > n_1$. Продолжая эти рассуждения далее, получим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $x_{n_k} > k, \forall k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\{x_{n_k}\}$ является положительной бесконечно большой последовательностью. □

Из теоремы Больцано-Вейерштрасса и леммы 2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.18 (обобщённая теорема Больцано-Вейерштрасса). *Из произвольной последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел в $\overline{\mathbb{R}}$.*

2.1.8 Критерий Коши

При изучении вопроса сходимости конкретной последовательности $\{x_n\}$ с помощью определения сходящейся последовательности приходится изучать величину $|x_n - a|$. В этом разделе устанавливается критерий сходимости последовательности, который позволяет сделать заключение о её сходимости по величинам $|x_n - x_m|$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Определение 2.15. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что все элементы последовательности с номерами $n > N, m > N$ удовлетворяют условию $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Условие фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ часто называют условием Коши.

Определение 2.15 равносильно следующему определению.

Определение 2.16. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \, : \, \forall n > N \, \forall p \in \mathbb{N} \, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Лемма 2.8. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

■ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. По определению 2.16 для любого $\varepsilon > 0$ и, в частности, для $\varepsilon = 1$, найдётся номер N такой, что для всех $n > N$ и любого $p \in \mathbb{N}$ $|x_{n+p} - x_n| < 1$. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > N$. Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$x_{n_0} - 1 < x_{n_0+p} < x_{n_0} + 1.$$

Положим $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0} - 1|, |x_{n_0} + 1|\}$, тогда $|x_n| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Замечание. Ограниченность числовой последовательности является необходимым, но не достаточным условием фундаментальности. Для подтверждения этого высказывания рассмотрим ограниченную последовательность чисел $x_n = (-1)^n$. Так как $|x_{n+1} - x_n| = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной.

Теорема 2.19 (критерий Коши сходимости последовательности)**.** *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

■ *Необходимость.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. По определению 2.4 предела числовой последовательности

$$\exists\, N = N(\varepsilon)\ :\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n > N.$$

Поэтому для всех $n > N$ и $m > N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.
Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Согласно лемме 2.8 она ограничена и по теореме 2.17 из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что и сама последовательность сходится, причём $\lim x_n = a$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности найдём такое $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что $\forall\, k > k_0$ $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$.

По условию Коши найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$.

Поскольку последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ — бесконечно большая, то существует $\widetilde{k} > k_0$ такое, что $n_{\widetilde{k}} > N, \forall\, k > \widetilde{k}$, поэтому $\forall\, n > N$

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_{\widetilde{k}}}) + (x_{n_{\widetilde{k}}} - a)| \leq |x_n - x_{n_{\widetilde{k}}}| + |x_{n_{\widetilde{k}}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$. $\square$

Пример 2.6. Покажем, что последовательность $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ не является фундаментальной.

$\blacksquare$ Отрицание утверждения о том, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, выглядит так:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad \exists p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0 \,. \tag{2.7}$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ $|x_{2n} - x_n| = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+n} > n\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому, полагая $\varepsilon_0 = 1/2,\ p = n$, получим (2.7). $\square$

2.1.9 Частичные пределы последовательности

Определение 2.17. *Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

Определение 2.18. *Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой её $\varepsilon-$окрестности содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.*

Лемма 2.9. *Определения 2.17 и 2.18 эквивалентны.*

$\blacksquare$ 1. Пусть существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. По определению предела последовательности в любой окрестности точки a находятся все члены подпоследовательности, начиная с некоторого, то есть бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

2. Пусть в любой $\varepsilon-$окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Для определённости будем считать, что $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим систему $\varepsilon-$окрестностей точки a, для которых $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. В окрестности $U_a(1)$ зафиксируем произвольный элемент последовательности; обозначим его через x_{n_1}. В окрестности $U_a(1/2)$ выберем элемент x_{n_2}, номер которого удовлетворяет условию $n_2 > n_1$. В окрестности $U_a(1/3)$ выберем элемент x_{n_3} такой, что $n_3 > n_2$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к a, поскольку

$$|x_{n_k} - a| < 1/k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Если $a = +\infty$ или $a = -\infty$, то следует рассмотреть систему окрестностей $U_a(k)$, $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Лемма 2.10. *Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, то a — единственный частичный предел последовательности $\{x_n\}$.*

■ Так как $\lim x_n = a$, то по теореме 2.16 любая её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет предел и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Следовательно, точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является единственным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ □

Замечание. Можно доказать, что если a — единственный частичный предел последовательности $\{x_n\}$, то $\lim x_n = a$.

Из обобщённой теоремы Больцано-Вейерштрасса 2.18 следует

Теорема 2.20. *Любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Обозначим через $P(\{x_n\})$ множество частичных пределов числовой последовательности $\{x_n\}$.

Пример 2.7. Приведём пример последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$P(\{x_n\}) = \{1; 2; 3\}.$$

■ Так как $\lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, $\lim(2 + \frac{1}{n}) = 2$, $\lim(3 + \frac{1}{n}) = 3$, то для последовательности $\{x_n\}$:

$$x_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{k}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \dfrac{1}{k}, & n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 3 + \dfrac{1}{k}, & n = 3k-2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$P(\{x_n\}) \supset \{1; 2; 3\}$. Покажем, что других частичных пределов эта последовательность не имеет. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$. По аксиоме полноты множества $\mathbb{R}$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что окрестности $U_1(\varepsilon), U_2(\varepsilon), U_3(\varepsilon), U_a(\varepsilon)$ попарно не пересекаются. По определению предела числовой последовательности в множестве $\mathbb{R} \setminus \{U_1(\varepsilon) \cup U_2(\varepsilon) \cup U_3(\varepsilon)\}$ находится не более конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$ (последовательности $\{x_{3k}\}$, $\{x_{3k-1}\}$, $\{x_{3k-2}\}$ "исчерпывают"последовательность $\{x_n\}$). Следовательно, в окрестности $U_a(\varepsilon)$ содержится не более конечного числа элементов x_n, а поэтому точка a не является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Последнее означает, что $P(\{x_n\}) = \{1; 2; 3\}$. □

Теорема 2.21. *Для любой последовательности $\{x_n\}$ множество $P(\{x_n\})$ имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ максимальный и минимальный элементы.*

■ По теореме 2.20 множество $P(\{x_n\})$ не пусто. По теореме 1.4 существования точных границ $\sup P(\{x_n\}) \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\inf P(\{x_n\}) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если множество $P(\{x_n\})$ состоит из конечного числа элементов, то сравнивая их найдём максимальный и минимальный элементы. В этом частном случае утверждение доказано.

Пусть множество $P(\{x_n\})$ состоит из бесконечного числа элементов и, например, $\sup P(\{x_n\}) = A$. Докажем, что A — максимальный элемент множества $P(\{x_n\})$, то есть $A \in P(\{x_n\})$. Заметим, что $A \in (-\infty, +\infty]$, поскольку, если $A = -\infty$, то $P(\{x_n\}) = \{-\infty\}$, и $P(\{x_n\})$ состоит из одного элемента.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. По определению точной верхней границы

$$p \leq A, \forall\, p \in P(\{x_n\}), \text{ и } \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, p_\varepsilon \in P(\{x_n\}) \,:\, p_\varepsilon > A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению 2.18 частичного предела последовательности в окрестности $U p_\varepsilon(\varepsilon/2)$ точки p_ε содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Поскольку $U p_\varepsilon(\varepsilon/2) \subset U_A(\varepsilon)$, то ε-окрестность точки A содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Поэтому $A \in P(\{x_n\})$.

Если $A = +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой элемент $p_\varepsilon \in P(\{x_n\})$, что $p_\varepsilon > 2\varepsilon$. Так как $U p_\varepsilon(\varepsilon) \subset U_{+\infty}(\varepsilon)$ и окрестность $U_{p_\varepsilon}(\varepsilon)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то $+\infty \in P(\{x_n\})$. $\square$

2.1.10 Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 2.19. *Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$, называется верхним пределом последовательности и обозначается символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Наименьший частичный предел последовательности $\{x_n\}$, называется нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначается символом $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Из теоремы 2.21 следует, что любая последовательность имеет верхний и нижний пределы, при этом

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf P(\{x_n\}), \ \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup P(\{x_n\}), \ \varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема 2.22. *Для того, чтобы число $a \in \mathbb{R}$ было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1) $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, x_n < a + \varepsilon, \forall\, n > N$,

2) $\exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to a$ *при* $n \to \infty$.

■ *Необходимость.* Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Согласно теореме 2.21, a — частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Поэтому выполнено условие 2). Справедливость условия 1) докажем методом от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ в множестве $[a + \varepsilon_0, +\infty)$ лежит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Эти члены последовательности образуют некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности. По теореме 2.20 последовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет по крайней мере один частичный

предел. Пусть $\gamma \in P(\{x_{n_k}\})$. Тогда $\gamma \geq a + \varepsilon_0 > a$ и $\gamma \in P(\{x_n\})$, чего быть не может, так как $a = \sup P(\{x_n\})$. Полученное противоречие показывает, что предположение было неверным, и доказывает справедливость условия 1).
Достаточность. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям 1), 2). Из условия 2) следует, что $a \in P(\{x_n\})$. Докажем, что a — максимальный элемент множества $P(\{x_n\})$. Пусть $\gamma \in P\{x_n\}$ и $x_{m_k} \to \gamma$ при $k \to \infty$. В силу условия 1), $x_{m_k} < a+\varepsilon$ для всех членов этой подпоследовательности, кроме быть может, конечного их числа. Поэтому согласно теореме 2.4 о предельном переходе в неравенстве получаем, что $\gamma \leq a + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\gamma \leq a$. Значит, a — максимальный элемент множества $P(\{x_n\})$ и $a = \overline{\lim} x_n$. $\square$

Замечание 1. Условие 2) теоремы 2.22 можно заменить следующим:

$$2')\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x_{n_k}\} \,:\, x_{n_k} > a - \varepsilon, \, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что число $a \in \mathbb{R}$ является нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n > N \; x_n > a - \varepsilon$,

2) $\exists \, \{x_{n_k}\} \,:\, x_{n_k} \to a$ при $k \to \infty$.

Теорема 2.23. *Для того чтобы символ $+\infty$ был верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была неограниченной сверху.*

■ *Необходимость.* Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, тогда $+\infty \in P(\{x_n\})$ и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Ясно, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху.
Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. По лемме 2.7, найдётся такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Поэтому $+\infty \in P(\{x_n\})$ является максимальным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$. $\square$

Аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 2.24. *Чтобы символ $-\infty$ был нижним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ была не ограничена снизу.*

Теорема 2.25. *Если $x_n \leq y_n, \forall n > N$, то*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \quad и \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

■ Докажем, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$. Положим $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = b$, поэтому $\exists\{y_{n_k}\} : \lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} = b$. Соответствующая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет, по крайней мере, один частичный предел. Пусть $\gamma \in P(\{x_{n_k}\})$ и $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = \gamma$. Поскольку $x_{n_{k_j}} \leq y_{n_{k_j}}$ для всех номеров $j \in \mathbb{N}$, то согласно лемме 2.5 $\gamma \leq \beta$. Отсюда, по определению 2.19 нижнего предела последовательности, $\alpha \leq \beta$. □

Следствие. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Если $x_n \leq a, \forall n > N_1$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq a$. Если $x_n \geq b, \forall n > N_2$, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geq b$.

Теорема 2.26. *Для числовых последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n, \tag{2.8}$$

если слагаемые правых частей не являются одновременно бесконечными символами разных знаков.

■ Докажем только первое неравенство. Положим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = b, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = c.$$

Пусть $a = -\infty$, $b \neq +\infty$. Тогда $\{x_n\}$ — отрицательная бесконечно большая, а частичные пределы последовательности $\{y_n\}$ принадлежат $[-\infty, b]$. По теореме 2.13 последовательность $\{x_n + y_n\}$ является отрицательной бесконечно большой и $c = -\infty$. Случай $a = +\infty$, $b \neq -\infty$ рассматривается аналогично, при этом возникает положительная бесконечно большая последовательность.

Если $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, то по условию 1) теоремы 2.22

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \quad x_n < a + \frac{\varepsilon}{2}, \;\; y_n < b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $x_n + y_n < (a + b) + \varepsilon, \forall n > N$. Из теоремы 2.25 тогда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq (a + b) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, что, в силу произвольности ε, приводит к неравенству $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq a + b$. □

Замечание 1. Можно доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то для любой последовательности $\{y_n\}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n, \;\; \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

Замечание 2. В отличии от теоремы 2.9 об арифметических операциях со сходящимися последовательностями неравенства в формулах (2.8) могут быть строгими. Для подтверждения сказанного достаточно рассмотреть, например, последовательности $\{x_n\} : x_n = (-1)^n$ и $\{y_n\} : \; y_n = (-1)^{n+1}$. Для них

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 1, \;\; \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = -1,$$

$$x_n + y_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = 0,$$

то есть

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) < \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n = 2.$$

Для произведения последовательностей имеет место аналогичный результат.

Теорема 2.27. *Если* $x_n \geq 0, \quad y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n \cdot y_n),\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n, \tag{2.9}$$

кроме тех случаев, когда операция произведения не определена в правых частях. Если, дополнительно, последовательность $\{x_n\}$ *сходится, то в соотношениях (2.9) имеют место равенства.*

Теорема 2.28. *Для числовой последовательности* $\{x_n\}$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n).$$

■ 1). Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n = -\infty$, тогда $\exists\{x_{n_k}\}\ :\ x_{n_k} \to -\infty$ при $k \to +\infty$. Поэтому $-x_{n_k} \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n) = +\infty$.

2). Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n = +\infty$. По теореме 2.24

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ и } \ \lim_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty.$$

3). Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n = a \in \mathbb{R}$. По замечанию к теореме 2.22 о характеристических свойствах конечного нижнего предела выполнены условия:

1) $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ x_n > a - \varepsilon, \forall\, n > N$,

2) $\exists\, \{x_{n_k}\}\ :\ x_{n_k} \to a$ при $k \to +\infty$.

Отсюда получаем:

1) $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ -x_n < -a + \varepsilon, \forall\, n > N$,

2) $\exists\, \{-x_{n_k}\}\ :\ -x_{n_k} \to -a$ при $k \to +\infty$.

Выполнение последних двух условий означает, согласно теореме 2.22 о характеристических свойствах конечного нижнего предела последовательности, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n = a = -(-a) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n)$. □

2.1.11 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $\{x_n\}$ числовая последовательность. Доказать, что она не имеет предела, если $\exists a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ такие, что некоторые непересекающиеся окрестности их $U_a,\ U_b$ содержат бесконечное множество элементов последовательности.

2. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ получена из $\{x_n\}$ перестановкой ее членов (то есть $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_k : y_k = x_{n_k}$, причем $n_{k_1} \neq n_{k_2}$, если $k_1 \neq k_2$; и, наоборот, $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists m_k : x_k = y_{m_k}$, причем $m_{k_1} \neq m_{k_2}$, если $k_1 \neq k_2$). Доказать, что последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim x_n = \lim y_n$.

3. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность. Доказать, что последовательность $\{y_n\} : y_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и $\lim y_n = \lim x_n$.

4. Привести пример ограниченных (неограниченных) расходящихся последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ таких, что $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно малые.

5. Привести пример такой бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$, что $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ расходится.

6. Пусть последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ сходящиеся. Доказать, что последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся.

7. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ расходится.

8. Показать на примерах, что если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой, то последовательность $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ может быть как сходящейся, так и расходящейся.

9. Доказать, что если S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии с разностью d, то последовательность $\left\{\dfrac{S_n}{n^2}\right\}$ сходится.

10. Доказать, что если $x_n > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$, и $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$, то $\lim \sqrt[n]{x_n} = a$.

11. Привести пример сходящейся последовательности $\{x_n\}$ и бесконечно большой последовательности $\{y_n\}$ таких, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ является ограниченной (неограниченной) и расходящейся последовательностью.

12. Пусть $\{y_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $a > 0$. Доказать, что $\{\sqrt[n]{a} \cdot y_n\}$ — бесконечно большая последовательность.

13. Показать, что последовательность $\left\{n \cdot \cos\dfrac{n\pi}{3}\right\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\left\{n \cdot \cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ — нет.

14. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, которые не являются бесконечно большими, а последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая.

15. Пусть у последовательности $\{x_n\}$ её подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ сходятся и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$.

16. Пусть у последовательности $\{x_n\}$ её подпоследовательности $\{x_{3k}\}$, $\{x_{3k+1}\}$, $\{x_{3k+2}\}$ сходятся. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

17. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой
$$\lim(x_{n+p} - x_n) = 0, \ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

18. Пусть $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность десятичных чисел $\{0, a_1 a_2 \dots a_n\}$ сходится.

2.2 Предел функции

2.2.1 Предельная точка множества

Определение 2.20. *Пусть X — непустое подмножество множества $\mathbb{R}$. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности U_a точки a найдётся, по крайней мере, одна, не совпадающая с a, точка множества X.*

Определение 2.21. *Если $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и U_a — некоторая окрестность точки a, то множество $U_a \backslash \{a\}$ называется проколотой окрестностью точки a и обозначается $\overset{\circ}{U}_a$.*

Замечание. Если $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то $\overset{\circ}{U}_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x - a| < \varepsilon\}$. Если $a = +\infty$, то $\overset{\circ}{U}_{+\infty} = U_{+\infty}$, если $a = -\infty$, то $\overset{\circ}{U}_{-\infty} = U_{-\infty}$.

С учетом сказанного определение 2.20 принимает вид:
$$X \neq \varnothing, \ X \subset \mathbb{R}, \ a \in \overline{\mathbb{R}}; \ a \ - \ \text{предельная точка } X \iff \overset{\circ}{U}_a \cap X \neq \varnothing, \forall U_a.$$

Лемма 2.11. *Для того чтобы $a \in \mathbb{R}$ была предельной точкой непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой окрестности этой точки содержалось бесконечное подмножество множества X.*

■ *Необходимость.* Предположим, что a - предельная точка множества X, но в некоторой окрестности $\tilde{U}_a$ точки a содержится конечное число элементов множества X$\backslash\{a\}$.Для определенности будем считать, что $a \in \mathbb{R}$. Обозначим элементы множества $X\backslash\{a\}$, находящиеся в $\tilde{U}_a$, через $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$. Положим $\varepsilon_0 = \min\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_0} - a|\}$. Тогда $\varepsilon_0 > 0$ и в проколотой ε_0-окрестности $\overset{\circ}{U}_a(\varepsilon_0)$ точки a нет точек множества X, что противоречит определению 2.20.

Достаточность утверждения очевидна. $\square$

Пример 2.8. Если $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, то предельной точкой множества X является только точка 0.

Пример 2.9. Если $X = (0, 1)$, то любая точка $a \in [0, 1]$ является предельной точкой множества множества X.

Пример 2.10. Если $X = \mathbb{N}$, то предельной точкой множества X является только $+\infty$.

Как видно из примеров, предельная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать ему.

Теорема 2.29. *Для того чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ была предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X, отличных от a, сходящаяся к a.*

■ *Необходимость.* Пусть a – предельная точка множества X. Будем считать, что $a \in \mathbb{R}$. Тогда в окрестности $U_a(1/n), n \in \mathbb{N}$ найдется элемент множества $X \backslash \{a\}$, который обозначим через x_n. Последовательность $\{x_n\}$ обладает свойствами: $x_n \in X \backslash \{a\}$, $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Из последнего получаем,что $x_n \to a$.
Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Зафиксируем произвольную окрестность U_a точки a. По определению 2.3 предела последовательности найдётся номер $N = N(U_a)$ такой, что $x_n \in U_a$, $\forall\, n > \mathbb{N}$. Учитывая, что $x_n \in X \backslash \{a\}$, получим, что в $\mathring{U}_a$ содержится бесконечное подмножество множества X, а значит, a – предельная точка множества X. $\square$

Теорема 2.30. *Всякое бесконечное множество действительных чисел имеет по крайней мере одну предельную точку.*

■ Пусть X – бесконечное подмножество множества $\mathbb{R}$. Ясно, что существует последовательность $\{x_n\}$ попарно различных элементов множества X. Согласно теореме 2.20 последовательность $\{x_n\}$ имеет по крайней мере один частичный предел. Пусть $a \in P(\{x_n\})$. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Поскольку $x_{n_k} \in X, \forall\, k \in \mathbb{N}$, и все они, кроме быть может одного, отличны от a, то a – предельная точка множества X. $\square$

Замечание. Любое конечное множество $X \subset \mathbb{R}$ не имеет предельных точек.

2.2.2 Определение предела функции

В этой главе будем считать, что X — некоторое непустое подмножество множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, a – предельная точка множества X и вещественнозначная функция f определена на X. Поэтому всякий раз, когда в последующем будем говорить о функции f, будем подразумевать, если не оговорено нечто другое, что $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 2.22. *Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке a (или ещё говорят, что A — предел функции f при x стремящемся к a), если для любой окрестности U_A точки A найдётся такая окрестность U_a точки a, что образ каждой точки $x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$ при отображении f принадлежит окрестности U_A, то есть $f(\overset{\circ}{U}_a \bigcap X) \subset U_A$. При этом пишут: $A = \lim\limits_a f$ или $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.*

В логической символике это определение можно записать так:

$$\forall\, U_A\, \exists\, U_a : \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \cap X \;\; f(x) \in U_A.$$

Замечание. Из определения 2.22 предела функции следует, что на существование и величину предела функции f в точке a не влияет значение функции f в точке a, если $a \in X$; более того, функция f может быть не определена в точке a.

Учитывая определение окрестности конечной точки $a \in \mathbb{R}$ и определение окрестности бесконечных символов, замечаем, что данное выше определение предела функции в точке может быть дано в терминах "$\varepsilon - \delta$".

Определение 2.23 (по Коши). *Будем говорить, что число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условиям $0 < |x - a| < \delta$ выполняется соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Перефразируем в терминах "$\varepsilon - \delta$" тот факт, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Определение 2.24. *Будем говорить, что $+\infty$ является пределом функции f(x) при $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $x < -\delta$, выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$.*

Пример 2.11. Функция $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ $(c \in \mathbb{R})$, имеет предел в каждой точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim\limits_a f = c$.

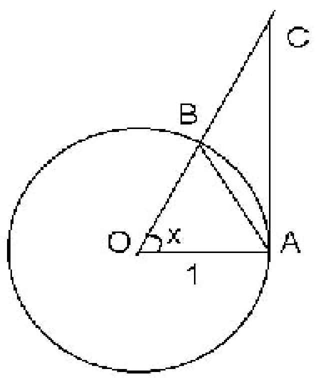
■ Действительно, $f(x) - c = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, поэтому $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Поэтому в каждой точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ в определении предела функции (по Коши) в качестве $\delta = \delta(\varepsilon)$ можно взять любое положительное число (для любого $\varepsilon > 0$). □

Пример 2.12. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

■ Предварительно покажем, что для любого $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad (2.10)$$

С этой целью в единичном круге с центром в точке O рассмотрим острый угол AOB, радианной меры $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$. Проведём хорду AB и касательную AC к окружности в точке A. Тогда $\triangle AOB \subset$ сектор $AOB \subset \triangle AOC$.



Сравнивая площади этих фигур, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

которое приводит к неравенствам (2.10). Разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенств (2.10), получим, что $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$. Отсюда, следует, что

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Так как $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, то $2\sin^2\dfrac{x}{2} < 2\sin\dfrac{x}{2}$ и, в силу (2.10), $2\sin\dfrac{x}{2} < x$. Следовательно, для любого $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < x$. Так как функция $\dfrac{\sin x}{x}$ является чётной, то для любого $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0)$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{-x} < -x.$$

Ясно, что $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|, \forall\, x : 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \min\{\varepsilon, \dfrac{\pi}{2}\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x| < \delta \leq \varepsilon.$$

Последнее означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ $\square$

Пример 2.13. Показать, что у функции

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

нет предела в точке $a = 0$.

■ Сказанное означает, что

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists U_A(\varepsilon) : \forall U_0(\delta)\ \exists x \in \overset{\circ}{U}_0(\delta) : f(x) \notin U_A.$$

Заметим, что функция $\operatorname{sgn} x$ в точках $x \neq 0$ принимает только два значения $+1$ и -1. Очевидно, что для любого $A \in \mathbb{R}$ в окрестность $U_A(1) = (A-1, A+1)$ не могут попасть одновременно точки -1 и $+1$. Но в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_0(\delta)$ точки $a = 0$ есть как положительные, так и отрицательные числа x. Значит для любого $\delta > 0$ найдется точка $x \in \overset{\circ}{U}_0\,(\delta)$ такая, что $f(x) \notin U_A(1)$ и утверждение доказано. $\square$

Пример 2.14. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\ 0}\dfrac{1}{x} = \infty.$

■ Следует показать, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon)\ :\ \forall x \neq 0,\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Так как $\dfrac{1}{|x|} > \varepsilon, \forall x\ :\ 0 < |x| < \dfrac{1}{\varepsilon}$, то полагая $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$, получим нужное. $\square$

Теорема 2.31 (Гейне). *Для того чтобы $A \in \overline{\mathbb{R}}$ было пределом функции $f\ : X \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in X\backslash\{a\}$, сходящейся к a, последовательность образов $\{f(x_n)\}$ при отображении f сходилась к A.*

■ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Согласно определению предела функции

$$\forall\, U_A\, \exists\, U_a\ :\ \forall\, x \in X \cap \overset{\circ}{U}_a \Rightarrow f(x) \in U_A.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ точек множества $X\backslash\{a\}$ стремится к a, то найдется номер N такой, что $x_n \in U_a$ при $n > N$. Поэтому $f(x_n) \in U_A$ при $n > N$. На основании определения предела последовательности в $\overline{\mathbb{R}}$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\ \infty} f(x_n) = A$.

Достаточность. Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из множества $X \setminus \{a\}$, которая сходится к a, последовательность образов $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Для определённости считаем, что $a \in \mathbb{R}$. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a. Тогда найдётся такая окрестность U_A

точки A, что при любом $n \in \mathbb{N}$ в $\left(\frac{1}{n}\right)$-окрестности точки a найдётся элемент $x_n \in X \setminus \{a\}$, для которого что $f(x_n) \notin U_A$. Ясно, что $\lim x_n = a$ и $f(x_n) \not\to A$, хотя $x_n \in X \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Следствие. Если существует последовательность $\{x_n\} : x_n \in X \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ и последовательность $\{f(x_n)\}$ не имеет предела, то не существует предела функции f в точке a.

Пример 2.15. Показать, что функция $\sin x$ не имеет предела при стремлении x к $+\infty$ (или к $-\infty$).

■ Для последовательности $\{x_n\} : x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $\sin x_n = (-1)^n$, и потому последовательность $\{\sin x_n\}$ не имеет предела. $\square$

2.2.3 Свойства предела функции

Теорема 2.32. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X, U_a — некоторая окрестность точки a, $\varphi = f\Big|_{\overset{\circ}{U}_a \cap X}$. Для того чтобы функция f имела в точке a предел, необходимо и достаточно, чтобы функция φ имела предел в точке a. В случае существования предела $\lim\limits_a f = \lim\limits_a \varphi$.*

Утверждение сразу следует из определения предела функции.

Теорема 2.33. *Функция не может иметь в точке двух различных пределов.*

■ Предположим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в точке a два предела $\lim\limits_a f = A_1$, $\lim\limits_a f = A_2$, $A_1 \neq A_2$. По теореме Гейне для любой фиксированной последовательности $\{x_n\} : x_n \in X \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$, чего быть не может. $\square$

Определение 2.25. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется локально ограниченной в точке a (a — предельная точка X), если существует такая окрестность U_a точки a, что множество $\{f(x) \mid x \in \overset{\circ}{U}_a \cap X\}$ ограничено. Учитывая определение ограниченного числового множества, заключаем, что локальная ограниченность функции f в точке a означает:*

$$\exists\, U_a \,\exists\, M > 0 \,:\, |f(x)| \leq M \,, \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$$

Теорема 2.34. *Если функция f имеет в точке a конечный предел, то она локально ограничена в точке a.*

■ Пусть $\lim\limits_a f = A$, $A \in \mathbb{R}$. По определению 2.22 предела функции найдется такая окрестность U_a точки a, что в каждой точке $x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<1$. Следовательно, для $\forall x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$

$$|f(x)| \le |f(x)-A| + |A| < 1 + |A|,$$

что означает локальную ограниченность функции f в точке a. $\square$

Теорема 2.35. *Пусть функция f имеет в точке a конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_a f = A \neq 0$. Тогда существует такая окрестность U_a точки a, что $f(x) \neq 0$ и $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$.*

$\blacksquare$ По определению предела функции в точке по числу $\varepsilon = |A| > 0$ найдется такая окрестность U_a точки a, что $|f(x)-A| < |A|, \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$, то есть $A-|A| < f(x) < A+|A|$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$. $\square$

Теорема 2.36. *Если функции f и φ, определенные на множестве X, имеют в точке a конечные пределы, то их сумма $f \pm \varphi$, произведение $f \cdot \varphi$ и, если $\lim\limits_a \varphi \neq 0$, частное f/φ имеют в точке a конечные пределы, причем*

$$\lim_a (f \pm \varphi) = \lim_a f \pm \lim_a \varphi,\ \lim_a (f \cdot \varphi) = \lim_a f \cdot \lim_a \varphi,\ \lim_a \frac{f}{\varphi} = \frac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a \varphi}$$

$\blacksquare$ Проведем, например, доказательство третьего утверждения (первые два доказываются аналогично).

Пусть $\lim\limits_a f = A$, $\lim\limits_a \varphi = B \neq 0$. Согласно теореме 2.35 существует такая окрестность U_a точки a, что $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$. Фиксируем произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества $X \backslash \{a\}$, стремящуюся к a. Не нарушая общности можно считать, что $x_n \in U_a$, $\forall n \ge 1$. По теореме Гейне

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,\ \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = B \neq 0, \text{ а поэтому } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Учитывая произвольность последовательности $\{x_n\} : x_n \in X\backslash\{a\}$, $x_n \to a$, из теоремы Гейне получаем нужное. $\square$

Теорема 2.37 (о пределе суперпозиции функций)**.** *Пусть a — предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, и выполнены следующие условия:*

1) $\lim\limits_a f = b$;

2) $\exists\, U_a : f(x) \neq b, \forall\, x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$;

3) $\lim\limits_b \varphi = c$,

то существует предел суперпозиции $\varphi \circ f$ в точке a и $\lim\limits_a \varphi \circ f = c$.

■ Доказательство проведем с помощью теоремы Гейне. Зафиксируем последовательность $\{x_n\} \,:\, x_n \in X \setminus \{a\},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to a$. Будем считать, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_a,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(x_n) \to b$. Положим $f(x_n) = y_n,\ n \in \mathbb{N}$. Поэтому $y_n \in Y \backslash \{b\},\ n \in \mathbb{N},\ y_n \to b$. Следовательно, b — предельная точка множества Y, что объясняет возможность рассмотрения предела функции φ в точке b и, в силу условия 3) теоремы, $\varphi(y_n) \to c$ при $n \to \infty$. Последнее означает, что

$$\varphi \circ f(x_n) \to c \text{ при } n \to \infty,\ \forall \{x_n\} : x_n \in X \backslash \{a\},\ x_n \to a.$$

На основании теоремы Гейне, заключаем, что $\lim\limits_a \varphi \circ f = c$. □

Теорема 2.38. *Пусть функции f и φ определены на множестве X и имеют конечные пределы в точке a. Если существует такая окрестность U_a точки a, что $f(x) \leq \varphi(x),\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$, то*

$$\lim_a f \leq \lim_a \varphi.$$

Теорема 2.39. *Пусть функции f, φ, g определены на множестве X и удовлетворяют условиям:*

1) $\exists\, U_a \,:\, f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x), \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$;

2) $\exists\, \lim\limits_a f,\ \exists\, \lim\limits_a g,\ \lim\limits_a f = \lim\limits_a g = A$.

Тогда существует предел функции φ в точке a и $\lim\limits_a \varphi = A$.

Доказательство последних утверждений можно провести по аналогии с доказательством предыдущих теорем, используя теорему Гейне. А можно повторить доказательства соответствующих теорем теории предела последовательности, заменяя слова "$\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n > N$" на слова "$\exists\, U_a \,:\, \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$". Предлагаем читателю провести доказательства теорем 2.38 и 2.39 самостоятельно.

Как и для последовательности можно ввести понятия бесконечно малой и бесконечно большой в точке a функции.

Определение 2.26. *Функция f называется бесконечно малой в точке a, если существует предел функции f в точке a и $\lim\limits_a f = 0$. Функция f называется бесконечно большой в точке a, если существует предел ее в точке a и он равен одному из бесконечных символов.*

Бесконечно малые и бесконечно большие в точке a функции обладают свойствами, аналогичными свойствам бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей с той лишь разницей, что требование ограниченности последовательности заменяется требованием локальной ограниченности функции в точке a, а отграниченность от нуля — локальной отграниченностью от нуля функции в точке. При этом функция f называется локально отграниченной от нуля в точке a, если существует окрестность U_a точки a и число $m > 0$ такие, что $|f(x)| \geq m,\ \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \bigcap X$.

Из понятия бесконечно малой в точке a функции и определения предела функции следует

Теорема 2.40. *Для того чтобы существовал конечный предел функции f в точке a, равный A, необходимо и достаточно, чтобы функция f имела представление $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a функция.*

2.2.4 Односторонние пределы функции

Будем считать, что X — непустое подмножество множества $\mathbb{R}$.

Определение 2.27. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется левосторонней (правосторонней) предельной точкой множества X, если $X \bigcap (a-\delta, a) \neq \emptyset$ (соответственно, $X \bigcap (a, a+\delta) \neq \emptyset$) для любого числа $\delta > 0$. Если a является только левосторонней или только правосторонней предельной точкой множества X, то ее называют односторонней предельной. Если же a является и левосторонней и правосторонней предельной точкой, то ее называют двусторонней предельной.*

Пример 2.16. Если $X = (a, b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, то каждая точка $x_0 \in X$ является двусторонней предельной, a — правосторонней, b — левосторонней предельной точкой множества X.

Замечание. Если a — только левосторонняя (правосторонняя) односторонняя предельная точка множества X, то существует такое $\delta > 0$, что

$$(a, a+\delta) \bigcap X = \emptyset \quad (X \bigcap (a-\delta, a) = \varnothing.$$

Определение 2.28. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — левосторонняя (правосторонняя) предельная точка множества X. $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется левым (правым) пределом функции f в точке a, если для любой окрестности U_A точки A найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) \in U_A,\ \forall\, x \in X \bigcap (a-\delta, a)$ (соответственно, $f(x) \in U_A,\ \forall\, x \in X \bigcap (a, a+\delta)$).*

Для обозначения левого (правого) предела функции f в точке a используют следующую символику:

$$\lim_{x \to a-0} f(x),\ \lim_{a-0} f,\ f(a-0) \quad \Big(\text{или} \lim_{x \to a+0} f(x),\ \lim_{a+0} f,\ f(a+0)\Big).$$

В частности, если $a = 0$, пишут соответственно:

$$\lim_{x \to -0} f(x),\ \lim_{-0} f,\ f(-0) \quad \Big(\lim_{x \to +0} f(x),\ \lim_{+0} f,\ f(+0)\Big).$$

Из определения 2.28 очевидно следует

Теорема 2.41. *Если a — односторонняя предельная точка множества X, то определения предела и одностороннего предела функции f в этой точке равносильны.*

Теорема 2.42. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — двусторонняя предельная точка множества X. Для того чтобы существовал предел функции f в точке a, равный A, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела функции f в точке a, равные A.*

■ Необходимость — очевидное утверждение. Докажем достаточность. Пусть функция f имеет в точке a левый и правый пределы, равные между собой и $f(a-0) = f(a+0) = A$. В силу определения 2.28 одностороннего предела функции по любой окрестности точки A найдутся число $\delta_1 > 0$:

$$f(x) \in U_A,\ \forall\, x \in (a-\delta_1, a) \bigcap X,$$

и число $\delta_2 > 0$:

$$f(x) \in U_A,\ \forall\, x \in (a, a+\delta_2) \bigcap X.$$

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим, что $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a\ (\delta) \bigcap X\ \ f(x) \in U_A$, а значит $\exists \lim\limits_{a} f = A$. □

Замечание. Определение одностороннего предела функции может быть дано и в терминах последовательностей. Например,

$$A = f(a-0) \iff (\forall\, \{x_n\}\ :\ x_n \in X,\ x_n < a,\ x_n \to a \implies f(x_n) \to A).$$

Пример 2.17. Найдем односторонние пределы функции $[x]$ в целочисленной точке $a = n_0$.

■ Областью определения функции $f(x) = [x]$ является множество $\mathbb{R}$, поэтому n_0 — двусторонняя предельная точка множества $D(f)$. Так как на интервале $(n_0 - 1, n_0)$ функция f равна $n_0 - 1$, а на интервале (n_0, n_0+1) равна n_0, то $f(n_0 - 0) = n_0 - 1;\ f(n_0+0) = n_0$. Следовательно, в силу теоремы 2.42 функция f не имеет предела в точке n_0. □

2.2.5 Теорема о пределе монотонной функции

Теорема 2.43. *Пусть функция f не убывает на множестве $X \subset \mathbb{R}$, a — правосторонняя предельная точка множества X, b — левосторонняя предельная точка множества X. Тогда существуют*

$$f(a+0) = \inf\{f(x)\ :\ x \in X \bigcap (a, +\infty)\},$$

$$f(b-0) = \sup\{f(x)\ :\ x \in X \bigcap (-\infty, b)\}.$$

■ Докажем, что $f(b-0) = \sup\{f(x)\,|\,x \in X\bigcap(-\infty, b)\}$. Пусть

$$Y = \{f(x)\,|\,x \in X\bigcap(-\infty, b)\} \text{ и } M = \sup Y.$$

Рассмотрим два случая.

1) Y — ограниченное сверху множество. Тогда $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \le M$, для всех x из $X\bigcap(-\infty, b)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x_\varepsilon \in X\bigcap(-\infty, b)$ такая, что $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Учитывая характер монотонности функции f, замечаем, что $f(x) \ge f(x_\varepsilon)$, $\forall x \in X\bigcap(x_\varepsilon, b)$. Если положить $\delta = b - x_\varepsilon > 0$, то получим:

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\;:\;M - \varepsilon < f(x) \le M + \varepsilon,\;\forall\,x \in X\bigcap(b-\delta, b).$$

Последнее означает, что $f(b-0) = M$.

2) Y — неограниченное сверху множество. Тогда $M = +\infty$ и

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,x_\varepsilon \in X\bigcap(-\infty, b)\;:\;f(x_\varepsilon) > \varepsilon.$$

Поскольку f не убывает на X, то $\forall\,x \in (x_\varepsilon, b)\bigcap X$ $f(x) \ge f(x_\varepsilon)$. Отсюда, считая $\delta = b - x_\varepsilon > 0$, получим:

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\;:f(x) > \varepsilon \text{ для } \forall\,x \in X\bigcap(b-\delta, b).$$

Поэтому $f(b-0) = +\infty = M$. □

Теорема 2.44. *Пусть функция f не убывает на множестве X, для которого $+\infty$ $(-\infty)$ является предельной точкой. Тогда существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup\{f(x)\,|\,x \in X\} \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf\{f(x)\,|\,x \in X\}).$$

■ Доказательство этого утверждения при $x \to +\infty$ дословно повторяет доказательство теоремы 2.43 с той лишь разницей, что в нем следует положить $\delta = x_\varepsilon$ (всегда можно считать, что $x_\varepsilon > 0$), а при рассмотрении функции f при $x \to -\infty$ можно считать $x_\varepsilon < 0$ и $\delta = -x_\varepsilon$. □

Из теорем 2.43 и 2.44 вытекают следующие предложения.

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает, то она имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\lim x_n = \sup\{x_n\,|\,n \in \mathbb{N}\}$.

Следствие 2. Если функция f не убывает на интервале (a, b), где $a \in \overline{\mathbb{R}},\; b \in \overline{\mathbb{R}}$, то существуют пределы

$$\lim_a f = \inf\{f(x)\,|\,x \in (a, b)\},\;\lim_b f = \sup\{f(x)\,|\,x \in (a, b)\}.$$

Следствие 3. Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, где $a \in \mathbb{R},\; b \in \mathbb{R}$, и $c \in (a, b)$, то

$$f(a) \le f(a+0) \le f(c-0) \le f(c) \le f(c+0) \le f(b-0) \le f(b).$$

Для функции $f\;:\;X \to \mathbb{R}$, которая не возрастает на множестве X справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.45. *Если функция f не возрастает на множестве X, для которого a — правосторонняя, а b — левосторонняя предельная точки, то*

$$f(a+0) = \sup\{f(x)\,|\,x \in X \bigcap (a, +\infty)\}$$

,

$$f(b-0) = \inf\{f(x)\,|\,x \in X \bigcap (-\infty, b)\}.$$

Если же $+\infty$ или $-\infty$ является предельной точкой множества X, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf\{f(x)\,|\,x \in X\}, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup\{f(x)\,|\,x \in X\}.$$

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ не возрастает, то она имеет предел и он равен $\inf\{x_n\,|\,n \in \mathbb{N}\}$.

Следствие 2. Для того чтобы монотонная последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.

Следствие 3. Если функция f не возрастает на $[a, b]$ и $c \in (a, b)$, то

$$f(a) \geq f(a+0) \geq f(c-0) \geq f(c) \geq f(c+0) \geq f(b-0) \geq f(b).$$

Пример 2.18. Доказать, что $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $\forall\, a > 0$.

■ Прежде всего покажем, что последовательность $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, монотонна. Так как $x_n > 0$ и

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}, \forall\, n \geq 1, \tag{2.11}$$

а последовательность $\{\dfrac{a}{n+1}\}$ является бесконечно малой, то

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall\, n > n_0 = [a].$$

Следовательно, последовательность $\{x_{n+n_0}\}$ убывает и ограничена снизу нулем. По следствию 1 теоремы 2.45 она сходится. Пусть $\lim x_n = c$. Из равенства (2.11) следует, что $x_{n+1} = \dfrac{a}{n+1}\, x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Отсюда, в силу свойств сходящихся последовательностей, получаем, что $c = 0 \cdot c$, то есть $c = 0$. □

Следствие. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Замечание. Аналогично доказывается, что $\lim \dfrac{n}{a^n} = 0$, $\forall\ a :\ |a| > 1$.

2.2.6 Число e

Применим следствие 2 теоремы 2.45 для доказательства сходимости последовательности $\{x_n\}$, члены которой определяются законом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Прежде всего докажем, что последовательность возрастает. Применяя формулу бинома Ньютона, получим для x_n следующее представление:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Поэтому для всех $n \geq 1$ $x_{n+1} =$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним выражения для x_n и x_{n+1}. В представлении x_n правая часть содержит n положительных слагаемых, а правая часть представления x_{n+1} — $(n+1)$ слагаемое. Так как для любого $k = 2, 3, \dots, n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) <$$

$$< \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

то $x_n < x_{n+1}, \forall\, n \geq 2$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Докажем теперь, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Поскольку $\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq 1, \forall\, i = 1, 2, \dots, n-1$, то для $, n \geq 2$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Но $k! \geq 2^{k-1}, \forall\, k \geq 2$, поэтому $x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

А значит, рассматриваемая последовательность имеет конечный предел, который, следуя Л.Эйлеру, обозначают через e.

Из предыдущего ясно, что $2 \leq x_n \leq 3$, поэтому $2 \leq e \leq 3$. Можно показать, что e является иррациональным числом и $e \approx 2,718281828$.

Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Заметим, что областью определения этой функции является множество $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Зафиксируем последовательность $\{x_n\} : x_n > 0, \lim x_n = +\infty$. Положим $k_n = [x_n]$, $n \in \mathbb{N}$. По определению функции целой части, $k_n \leq x_n < k_n + 1$. Учитывая определение и свойства бесконечно большой последовательности, замечаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

Поскольку $\dfrac{1}{k_n} \geq \dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{k_n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} <$$
$$< \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}\right\}$ является суперпозицией последовательностей $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ и $\{k_n\}$, для которых выполняются условия 1) – 3) теоремы 2.37 о пределе суперпозиции функций. Поскольку $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e \text{ и } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = e.$$

Аналогично можно показать, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e.$$

Следовательно, по теореме 2.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$

Поскольку $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно большая положительная последовательность, то по теореме Гейне $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Изучим функцию $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ при $x \to -\infty$. Пусть $x = -t$. Для $x < -1$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right).$$

Ясно, что $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $x \to -\infty$. Так как

$$\left(1+\frac{1}{t-1}\right) \to 1,\ \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \to e \text{ при } t \to +\infty,$$

то по теореме 2.37 о пределе суперпозиции функций, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Остаётся доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$. Для доказательства последнего зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $x > \delta_1$ $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что при $x < -\delta_2$ выполняется неравенство $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$. Положим $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех x таких, что $|x| > \delta$ выполняется неравенство $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2.2.7 Критерий Коши для функции

Теорема 2.46. *Для того чтобы функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имела конечный предел в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность U_a точки a, что для любых точек $x', x'' \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ выполнялось неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Последнее условие называют условием Коши.

■ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U_a точки a, что в любой точке $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, для любых точек $x', x'' \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ имеем:

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что функция f удовлетворяет в точке a условию Коши.
Достаточность. Пусть функция f удовлетворяет условию Коши в точке a. Докажем, что функция f имеет в точке a конечный предел.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in X\backslash\{a\}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, и $\lim x_n = a$. Покажем, что последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ фундаментальна. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и, согласно условию Коши, найдем соответствующую ему окрестность U_a точки a. Поскольку $\lim x_n = a$ и $x_n \ne a$, то найдется номер N такой, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_a$, $\forall\, n > N$. Следовательно, $\forall\, n > N, \forall\, p \in \mathbb{N}$ $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$, что означает фундаментальность последовательности $\{f(x_n)\}$. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, тогда $A \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем по условию Коши окрестность U_a, такую, что $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, x', x'' \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$. Так как $\lim f(x_n) = A$ и $x_n \to a$, то найдем точку $x_{n_0} \in \overset{\circ}{U}_a$, для которой $|f(x_{n_0}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall\, x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ имеем

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f(x_{n_0})| + |f(x_{n_0}) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_a f = A$. $\square$

Замечание 1. Достаточность условия Коши для существования конечного предела функции можно было доказать иначе, показав, что для любых последовательностей $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ таких, что

$$x'_n \in X\backslash\{a\},\, x''_n \in X\backslash\{a\},\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, x'_n \to a,\, x''_n \to a,$$

последовательности значений функции $\{f(x'_n)\}, \{f(x''_n)\}$ сходятся к одному и тому же числу.

Замечание 2. Если предельная точка $a \in \mathbb{R}$, то условие Коши существования конечного предела функции f в точке a имеет вид

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall\, x', x'' \in X,\, 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание 3. Аналогично формулируется и доказывается критерий Коши для случая одностороннего предела функции в точке.

Определение 2.29. *Колебанием функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $X \subset \mathbb{R}$ называется точная верхняя граница модуля разности значений функции f на всевозможных точках $x', x'' \in X$, то есть*

$$\sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')|.$$

Колебание функции f на множестве X обычно обозначают через $\omega^f(X)$ или $\omega(f, X)$. Поэтому, используя определение 2.29, критерий Коши существования предела функции, можно сформулировать следующим образом:

$$\exists \lim_a f \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists U_a : \omega^f(\overset{\circ}{U}_a \bigcap X) < \varepsilon.$$

2.2.8 Сравнение функции

Когда возникает задача описания поведения функции вблизи некоторой точки из $\overline{\mathbb{R}}$, в которой, как правило, функция не определена, говорят, что интересуются асимптотическим поведением или асимптотикой функции в окрестности этой точки. Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции. Так, говоря о функции $f(x) = x^2 + 2x + \sin(1/x)$ при $x \to \infty$, можно сказать, что она ведет себя как функция x^2, а при $x \to 0$ — как $\sin(1/x)$.

Определение 2.30. *Пусть функции f и φ определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X. Говорят, что функция $f(x)$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $\varphi(x)$ при $x \to a$, и пишут $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$ (читается: "$f(x)$ есть о малое от $\varphi(x)$ при $x \to a$"), если $f(x) = \alpha(x)\,\varphi(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a функция.*

Запись $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает, что f является бесконечно малой при $x \to a$.

Если функция $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то условие $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$ можно переписать в виде

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$$

В случае, если функция φ является бесконечно малой в точке a, функция $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем φ. Например, $x^3 = o(\sin x^2)$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} x \frac{x^2}{\sin x^2} = 0.$$

Аналогично, $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$ так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$.

Определение 2.31. *Пусть функции f и φ определены на множестве X, a — предельная точка X. Говорят, что функция f является ограниченной по сравнению с функцией $\varphi(x)$ при $x \to a$ и пишут: $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to a$, если $f(x) = \alpha(x)\,\varphi(x)$, где $\alpha(x)$ — локально ограниченная в точке a функция.*

Запись $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to a$ читается: "$f(x)$ есть O большое от $\varphi(x)$ при $x \to a$".

В определениях 2.30 и 2.31 значок $x \to a$ указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место в некоторой проколотой окрестности точки a.

Если в некоторой проколотой окрестности точки a $\varphi(x) \neq 0$ и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,\ A \in \mathbb{R},\ \text{то}\ f(x) = O(\varphi(x))\ \text{при}\ x \to a.$$

Например, $\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right) x = O(x)$ при $x \to 0$, так как $\left|1 + \sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 2$ для $x \neq 0$, и $2x^2 + 3x = O(x^2)$ при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^2} = 2$.

При использовании равенств с символами O и o следует иметь в виду, что они не являются равенствами в обычном смысле. Так, если $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$ и $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$, то отсюда нельзя сделать вывод, что $f(x) = g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a. Например, $x^2 + 3x + 1 = o(x^3)$ при $x \to \infty$, $x + 5 = o(x^3)$ при $x \to \infty$, но $x^2 + 3x + 1 \neq x + 5$ ни в какой окрестности U_∞.

Аналогично, из равенства $f(x)+o(f) = g(x)+o(f)$ при $x \to a$ нельзя сделать вывод, что $f(x) = g(x)$ в $\dot{U}_a$.

Дело в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные функции. По существу определениями 2.30 и 2.31 введены классы функций, обладающих некоторыми свойствами (указанными в этих определениях) в некоторой проколотой окрестности точки a. Более того, равенства $f(x) = o(\varphi(x))$ или $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to a$ читается только слева направо.

Определение 2.32. *Если функции f и φ таковы, что при $x \to a$*

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ и } \varphi(x) = O(f(x)),$$

то они называются функциями одного порядка при $x \to a$.

Например, функции x и $(3+\sin x)\,x$ являются функциями одного порядка при $x \to 0$ и при $x \to \infty$.

Определение 2.33. *Функции f и φ, заданные на множестве X, называются эквивалентными при $x \to a$, если найдется такая окрестность U_a, что $\forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a \;\; f(x) = \alpha(x)\varphi(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$.*

В силу теоремы 2.35 (локального свойства функции, имеющей в точке a отличный от нуля предел), существует такая окрестность U_a точки a, что на множестве $X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ можно определить функцию $\gamma(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$, а поэтому

$$\varphi(x) = \gamma(x)\, f(x),\ \forall\, x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a, \text{ где } \gamma(x) \to 1 \text{ при } x \to a.$$

Следовательно, условие эквивалентности функций f и φ симметрично.

Часто эквивалентные при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называют асимптотически равными при $x \to a$. Эквивалентность функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ обозначают, используя символ $\sim$, следующим образом:

$$f(x) \sim \varphi(x) \,\text{при}\, x \to a.$$

Из сказанного следует, что если $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to a$, то $\varphi(x) \sim f(x)$ при $x \to a$.

Лемма 2.12. *Для того чтобы функции f и φ, определенные на множестве X, были эквивалентными при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$ при $x \to a$ или $\varphi(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to a$.*

■ *Необходимость.* Пусть $f \sim \varphi$ при $x \to a$. Тогда $f(x) = \alpha(x)\varphi(x)$, при всех $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$. По теореме 2.40, $\alpha(x) = 1 + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая в точке a функция. Поэтому для всех $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$

$$f(x) = \varphi(x) + \gamma(x)\varphi(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)) \,\text{при}\, x \to a.$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to a$.

Достаточность. Пусть $\exists U_a\ : f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$ при $x \to a$. По определению 2.30 $o(\varphi(x)) = \alpha(x)\varphi(x)$, $\forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$, и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Поэтому $\forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$ $f(x) = \varphi(x)(1 + \alpha(x)) = \gamma(x)\varphi(x)$, где $\gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, $\forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_a$, и $\lim\limits_{x\to a} \gamma(x) = 1$. Следовательно, $f \sim \varphi$ при $x \to a$.

Аналогично доказывается достаточность условия $\varphi(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to a$. □

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ и $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. Учитывая теорему о пределе суперпозиции функций, пока можно сказать, что если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ и в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_a$ точки a, $u(x) \neq 0$, то $\sin u(x) \sim u(x)$ при $x \to a$ и $\arcsin u(x) \sim u(x)$ при $x \to a$. Несколько позже требование $u(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a$, будет снято.

Отметим два легко доказываемых свойства эквивалентных функций:
1) Если $f \sim \varphi$ при $x \to a$ и $\varphi \sim g$ при $x \to a$, то $f \sim g$ при $x \to a$.
2) Если $f \sim f_1$ при $x \to a$ и существует один из пределов $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\varphi(x)$, то существует второй и они равны.

Замечание. Нельзя свойство 2) распространять на сумму (разность) функций. В самом деле, $\sqrt{x^2 + x} \sim x$ при $x \to +\infty$, но

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + x} - x) \neq \lim_{x\to+\infty}(x - x) = 0,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Наконец, отметим еще несколько часто употребимых правил обращения с символами O и o.
1) $o(f) + cf = O(f)$ при $x \to a$, $c \in \mathbb{R}$.
2) $o(f) + o(f) = o(f)$ при $x \to a$.
3) $o(f) = O(f)$ при $x \to a$.
4) $o(f) + O(f) = O(f)$ при $x \to a$.
5) $o(f) \cdot O(f) = o(f^2)$ при $x \to a$.
6) $o(c \cdot f) = o(f)$ при $x \to a$, $\forall c \neq 0$.
7) $f \cdot o(f) = o(f^2)$ при $x \to a$.

Объясним, например, свойство 3). Символ $o(f)$ означает некоторую функцию вида $\alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a функция. Поскольку бесконечно малая в точке a функция является локально ограниченной в ней, то $\alpha(x)f(x) = O(f)$ при $x \to a$.

Как отмечалось выше, равенства, отмеченные в свойствах 1)–6), читаются слева направо, хотя могут оказаться верными и при чтении справа налево (например, 7), 6)).

2.3 Задания для самостоятельной работы

1. Найти все предельные точки множеств

   a) $X = \{x \in \mathbb{R} : \sin\dfrac{\pi}{x} = 0\}$,

   b) $X = \{2^{(-1)^n n},\ n \in \mathbb{N}\}$,

   c) $X = \{(-1)^n + \dfrac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$.

2. Привести пример множества X, для которого множество его предельных точек совпадает с множеством $\{1, 2, 3\}$.

3. Привести пример множества X, для которого множество его предельных точек совпадает с множеством $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

4. Пусть множество $X = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ имеет единственную предельную точку a. Можно ли утверждать, что $\lim x_n = a$?

5. Пусть множество X имеет предельную точку a. Можно ли сказать, что множество $Y = \{|x| :\ x \in X\}$ имеет предельную точку? Если имеет, найти ее.

6. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X и существует окрестность U_a такая, что $f\,\Big|_{U_a \cap X}$ — не ограничена. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{a} f = \infty$?

7. Пусть функция f имеет в каждой точке множества X конечный предел. Можно ли утверждать, что f ограничена на X? Привести соответствующие примеры.

8. Пусть отличная от постоянной функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является T-периодической. Доказать, что $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

9. Пусть $f(x) = x^2 \cos\dfrac{\pi}{x}$ и $g(y) = \operatorname{sgn}^2 y$. Показать, что $\nexists \lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$, хотя $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$. Почему к функции $g \circ f$ в точке $x = 0$ не применима теорема о пределе суперпозиции функций?

10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, x_0 – предельная точка X и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Доказать, что функции $f + g$ и $f \cdot g$ не имеют предела в точке x_0.

11. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x^3) = A$.

12. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f^3(x) = A^3$.

13. Верно ли утверждение: "$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x^2) = A$."

14. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Пусть в каждой точке $a \in X_1$ существует $\lim\limits_{x \to a} f \Big|_{X_1} (x) = f(a)$, и в каждой точке $a \in X_2$ существует $\lim\limits_{x \to a} f \Big|_{X_2} (x) = f(a)$. Можно ли утверждать, что в каждой точке $a \in X$ существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$?

15. Существуют ли пределы $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\dfrac{1}{x}\right]$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{[x]} x$?

16. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + f(2x)) = 0$. Верно ли обратное утверждение?

17. Пусть $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и выполняются условия

    1) $f(x) \geq |x|^{3/4}$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_a(\delta)$;

    2) $f(x) \cdot f(2x) \leq 2\,|x|$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_a(\delta)$.

    Доказать, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

18. Найти $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если функция f определена в окрестности $\overset{\circ}{U}_a$ точки $a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + \dfrac{1}{|f(x)|} \right) = 0$.

19. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и для любого числа $a > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a+n) = a$. Можно ли утверждать, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Доказать, что эта функция имеет предел только в точках ± 1.

21. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Имеет ли эта функция предел в точках $x \in \mathbb{R}$?

Глава 3

Непрерывные функции и их свойства

3.1 Определение непрерывной функции

Всюду далее будем считать, что вещественнозначная функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и отмечать это уже не будем.

Определение 3.1. *Функция f называется непрерывной в точке a из X, если для любой окрестности $U_{f(a)}$ найдется такая окрестность U_a точки a, что образ множества $U_a \bigcap X$ при отображении f содержится в $U_{f(a)}$.*

В логической символике это определение записывается так:

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в точке } a \in X \;\Leftrightarrow\; \forall\, U_{f(a)}\, \exists\, U_a \;:\; f(U_a \bigcap X) \subset U_{f(a)}.$$

Поскольку под окрестностью конечной точки мы понимаем симметричную окрестность, то это определение равносильно следующему:

Определение 3.2 (по Коши). *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

В логической символике последнее определение можно записать так: функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in X \Leftrightarrow$

$$(\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X,\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.)$$

Замечание 1. Свойство непрерывности функции f изучается в любой точке $a \in X$, в то время как предел — в предельной точке a множества X, которая может не принадлежать X.

Замечание 2. В определении непрерывной функции в точке a рассматриваются образы всех точек множества $X \bigcap U_a$, а в определении предела функции — образы точек из $X \bigcap U_a$, отличных от a.

Если $a \in X$, но не является предельной точкой множества X, то ее называют изолированной точкой множества X. Ясно, что функция непрерывна в каждой изолированной точке области определения.

Поскольку $f(a)$ принадлежит каждой окрестности $U_{f(a)}$, то, учитывая определение предела функции f в точке a, получаем следующее определение, равносильное предыдущим.

Определение 3.3. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, a — предельная точка множества X. Функция f называется непрерывной в точке a, если существует предел функции в точке a и он равен значению функции f в точке a.*

Учитывая представление функции, имеющей в точке конечный предел, получаем: непрерывность функции f в точке a означает, что f имеет представление $f(x) = f(a) + o(1),\ x \to a$.

Наконец, используя определение предела функции по Гейне, получаем определение, равносильное предыдущим

Определение 3.4 (по Гейне). *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов множества X, сходящейся к a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ образов сходится к $f(a)$.*

Замечание. По сравнению с определением Гейне предела функции в определении 3.4 непрерывности функции снято требование, обязывающее все элементы последовательности $\{x_n\}$ быть отличными от a. (В случае, когда a — изолированная точка множества X, все элементы x_n, начиная с некоторого, равны a.)

Определение 3.5. *Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Совокупность вещественнозначных функций, непрерывных на множестве X, обычно обозначается символом $C(X)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3.1. Функция $f(x) = C,\ x \in \mathbb{R}$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

■ Действительно, для любой точки $a \in \mathbb{R}$, для $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(a)| = 0$. Поэтому $\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0$ имеем:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Последнее означает непрерывность функции в точке a, а значит и на множестве $\mathbb{R}$. □

Пример 3.2. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, то $f \in C(\mathbb{R})$.

■ Зафиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{R}$ и число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|f(x) - f(a)| = |x - a|,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

то, полагая $\delta = \varepsilon$, получим

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Поэтому f непрерывна в точке a и непрерывна на $\mathbb{R}$. $\square$

Пример 3.3. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

■ Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$ $|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$ и получим, что, как только $|x-a| < \delta$, так $|\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon$. $\square$

Аналогично доказывается непрерывность функции $f(x) = \cos x$.

Пример 3.4. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

■ Поскольку для любых $a \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(a)| = \big|\,|x| - |a|\,\big| \leq |x-a|,$$

то, как и в предыдущих примерах, достаточно положить $\delta = \varepsilon$, чтобы доказать непрерывность функции f в точке a, а значит на $\mathbb{R}$. $\square$

3.2 Точки разрыва функции, их классификация

К точкам разрыва функции $f : X \to \mathbb{R}$ следует отнести те точки множества X, в которых функция f не является непрерывной. Однако такое определение целесообразно уточнить следующим образом.

Определение 3.6. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой разрыва функции f, если либо $a \in X$, но f не является непрерывной в ней, либо $a \notin X$, но является двусторонней предельной точкой множества X.*

Заметим, что иногда к точкам разрыва функции f относят не только двусторонние, но и односторонние предельные точки множества X, которые не принадлежат X.

Учитывая определение 3.6 и определение непрерывной функции в точке a, заключаем, что a из X является точкой разрыва функции f, если

$$\exists\, U_{f(a)} \,:\, \forall\, U_a \;\exists\, x \in X \bigcap U_a \;:\; f(x) \notin U_{f(a)}$$

или

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\; \delta > 0 \;\exists\, x \in X,\; |x-a| < \delta \;:\; |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Иными словами, предельная точка a множества X, принадлежащая X, является точкой разрыва функции f, если либо не существует предела функции f в точке a, либо он существует, но отличен от значения $f(a)$ функции f в точке a.

Пример 3.5. Пусть $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Точка $a = 0$ не принадлежит области определения функции f, но является для нее двусторонней предельной. Поэтому $a = 0$ — точка разрыва функции f.

Пример 3.6. Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Поскольку каждая точка $a \neq 0$ обладает окрестностью, в которой функция $\operatorname{sgn} x$ постоянна, то функция непрерывна в точке $a \neq 0$. Далее, на последовательности $\{x_n\} : x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, функция принимает значения $\operatorname{sgn} x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $x_n \to 0$ и не существует предел последовательности $\{\operatorname{sgn} x_n\}$, заключаем, что рассматриваемая функция терпит разрыв в точке $a = 0$.

Определение 3.7. *Пусть a — точка разрыва функции f, a – двусторонняя (или односторонняя) предельная точка множества X. Точку a называют точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние (или соответствующий односторонний) пределы функции f в точке a.*

Определение 3.8. *Если a — точка разрыва первого рода функции f и в ней существует предел функции, то точку a называют точкой устранимого разрыва.*

Если a — точка устранимого разрыва функции f и $\lim\limits_{a} f = A$, то функция

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{a\}, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

непрерывна в точке a.

Лемма 3.1. *Если a — точка разрыва первого рода функции f и a — односторонняя предельная точка множества X, то она является точкой устранимого разрыва функции f.*

Утверждение следует из предыдущего определения и теоремы о равносильности предела и одностороннего предела функции в односторонней предельной точке.

Определение 3.9. *Если a — точка разрыва функции f и в этой точке не существует или бесконечен хоть один из односторонних пределов функции f, то a называется точкой разрыва второго рода.*

Из определений 3.7 и 3.9 получаем, что каждая точка разрыва функции f, которая не является точкой разрыва первого рода, является точкой разрыва второго рода.

Возвращаясь к примерам 5 и 6, замечаем, что, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $a = 0$ является точкой устранимого разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, а так как $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{sgn} x = +1$, поэтому $a = 0$ является точкой разрыва первого рода функции $\operatorname{sgn} x$.

Пример 3.7. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

разрывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, поскольку не существует односторонних пределов $f(a+0)$, $f(a-0)$, то есть любая точка $a \in \mathbb{R}$ есть точка разрыва второго рода функции $D(x)$.

Теорема 3.1 (о точках разрыва монотонной функции)**.** *Монотонная на промежутке функция может иметь только точки разрыва первого рода.*

■ Пусть для определенности функция f монотонна на $(a, b]$. Если x_0 — точка разрыва функции f, то либо $x_0 \in (a, b)$, либо $x_0 = b$. По следствию из теоремы о пределе монотонной функции существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, если $x_0 \in (a, b)$ и $f(x_0 - 0)$ если $x_0 = b$. Следовательно, x_0 — точка разрыва первого рода. □

Часто бывает полезно понятие односторонней непрерывности функции в точке.

Определение 3.10. *Пусть a — левосторонняя (правосторонняя) предельная точка множества X и $a \in X$. Говорят, что функция f, определенная на X, непрерывна в точке a слева (справа), если существует предел $f(a-0)$ (соответственно $f(a+0)$) и он равен значению функции f в точке a.*

Используя определения Коши и Гейне для одностороннего предела функции, можно получить соответствующие определения односторонней непрерывности функции в точке.

Например, если a — левосторонняя предельная точка X, $a \in X$, то функцию $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называют непрерывной в точке a слева, если $\forall\{x_n\} : x_n \in X, x_n < a, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Замечание. В односторонней предельной точке, принадлежащей области определения функции, понятия односторонней непрерывности и непрерывности функции совпадают. Если же рассматриваемая точка является двусторонней предельной, то функция непрерывна в ней тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа.

Пример 3.8. Пусть $f(x) = [x]$ ($[x]$ — целая часть числа x). Фиксируем произвольную точку a из $\mathbb{R}$. Если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует целое число n_0, такое, что $n_0 < a < n_0 + 1$. Поэтому найдется окрестность U_a точки a такая, что $U_a \subset (n_0, n_0+1)$. Следовательно, $\forall\, x \in U_a \quad f(x) = n_0 = f(a)$ и функция f непрерывна в точке a. Если же $a = n_0 \in \mathbb{Z}$, то согласно примеру 17 $f(n_0 - 0) = n_0 - 1 \neq f(n_0)$, $\; f(n_0+0) = n_0 = f(n_0)$. Следовательно, функция f в точке $n_0 \in \mathbb{Z}$ терпит разрыв первого рода и является непрерывной в ней справа.

3.3 Локальные свойства непрерывной функции

Теорема 3.2. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, то она локально ограничена в ней. Если, кроме того, $f(a) \neq 0$, то найдется такая окрестность U_a точки a, что*

$$f(x) \neq 0, \quad \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(a), \quad \forall\, x \in X \bigcap U_a.$$

■ Если a — изолированная точка множества X, то утверждения очевидны. Если же a — предельная точка множества X, то утверждения следуют из соответствующих локальных свойств функции, имеющей в точке конечный предел $(\lim\limits_a f = f(a))$. □

Теорема 3.3. *Если функции f и φ, определенные на множестве X, непрерывны в точке a, то функции $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$ и, если $\varphi(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{\varphi}$ непрерывны в точке a.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.2.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f : X \to Y$ имеет конечный предел в точке a, $\lim\limits_a f = b$, $b \in Y$, функция $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке b. Тогда существует предел суперпозиции функций φ и f, при этом $\lim\limits_a \varphi \circ f = \varphi(b)$.*

■ Фиксируем произвольную последовательность

$$\{x_n\} : x_n \in X,\ x_n \neq a,\ x_n \to a.$$

Поскольку $f : X \to Y$ и $\lim\limits_a f = b$, то $f(x_n) \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \to b$. Обозначим $y_n = f(x_n)$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ обладает свойствами: $y_n \in Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \to b$. По условию функция φ непрерывна в точке b, поэтому $\varphi(y_n) \to \varphi(b)$. Следовательно, $\varphi \circ f(x_n) \to \varphi(b)$, и, по определению Гейне предела функции, существует предел $\lim\limits_a \varphi \circ f = \varphi(b)$. □

Следствие. Если функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0, а функция $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то функция $\varphi \circ f$ непрерывна в точке x_0.

Из теорем 3.3 и 3.4 и примеров 2, 3 следует, что многочлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ где } a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ a_n \neq 0,$$

является непрерывной на множестве $\mathbb{R}$ функцией, а рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна в своей области определения.

3.4 Глобальные свойства непрерывных функций

Описательно говоря, глобальными называются свойства, справедливые в области определения функции.

Теорема 3.5. *Если функция f непрерывна на множестве X и $X_1 \subset X$, то сужение $f|_{X_1}$ — непрерывная функция на X_1.*

■ Пусть a — некоторая точка множества X_1. Так как $f \in C(X)$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \forall\, x \in X \bigcap U_a(\delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Поэтому $\forall\, x \in X_1 \bigcap U_a(\delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, то есть

$$\forall\, x \in X_1 \bigcap U_a(\delta) \ \Rightarrow\ |f|_{x_1}(x) - f|_{x_1}(a)| < \varepsilon,$$

Это означает непрерывность $f|_{X_1}$ в точке a и то, что $f|_{X_1} \in C(X_1)$. □

Замечание. Из того, что функция $f|_{X_1}$ непрерывна в точке x_0, не следует непрерывность функции f в ней. Чтобы подтвердить это, рассмотрим пример.

Пример 3.9. Функция Дирихле, рассмотренная в примере 7, терпит разрыв в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, однако, функции $D|_{\mathbb{Q}}$, $D|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ является непрерывными в каждой точке их области определения.

Теорема 3.6 (Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает различные значения, то есть $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа C, находящегося между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = C$.*

■ Для определенности будем считать, что $f(a) < f(b)$. Фиксируем произвольное число C такое, что $f(a) < C < f(b)$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой α_1. Может случиться, что $f(\alpha_1) = C$. Тогда задача решена и в качестве γ возьмем α_1. Если же $f(\alpha_1) \neq C$, то из двух полученных отрезков выбираем тот, обозначим его $[a_1, b_1]$, на концах которого выполняются условия $f(a_1) < C < f(b_1)$. Такой отрезок обязательно существует: $[a_1, b_1] = [\alpha_1, b]$, если $f(\alpha_1) < C$, и $[a_1, b_1] = [a, \alpha_1]$, если $f(\alpha_1) > C$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой α_2. Если $f(\alpha_2) = C$, то $\gamma = \alpha_2$ и задача решена. Если $f(\alpha_2) \neq C$, то из полученных отрезков возьмем тот, обозначим его $[a_2, b_2]$, для которого $f(a_2) < C < f(b_2)$. Продолжая, в случае необходимости, этот процесс далее, либо на n_0 шаге получим точку α_{n_0} — середину $[a_{n_0-1}, b_{n_0-1}]$, в которой $f(\alpha_{n_0}) = C$, либо получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}$, таких, что $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$f(a_n) < C < f(b_n),\ n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

В первом случае полагаем $\gamma = \alpha_{n_0}$, что приводит к решению задачи. Во втором случае по лемме о вложенных отрезках существует единственная точка γ, принадлежащая всем отрезкам системы, такая что

$$\lim a_n = \lim b_n = \gamma.$$

Поскольку $\gamma \in [a, b]$, то f непрерывна в ней и

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(\gamma).$$

Переходя к пределу в неравенствах (3.1), получим $f(\gamma) = C$. Так как $\gamma \in [a, b]$ и $f(a) < C < f(b)$, то $\gamma \in (a, b)$. $\square$

Замечание 1. Доказательство теоремы дает алгоритм отыскания корня уравнения $f(x) = C$ на отрезке $[a, b]$, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и число C находится между значениями $f(a)$ и $f(b)$ функции f на концах отрезка $[a, b]$.

Замечание 2. Теорема утверждает существование, но не единственность точки $\gamma \in (a, b)$ такой, что $f(\gamma) = C$.

Замечание 3. В теореме 3.6 нельзя опустить требование непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$. (В подтверждение можно рассмотреть функцию $\operatorname{sgn} x$ на отрезке [-1,1].)

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то есть $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = 0$.

Следствие 2. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n-1} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, .., 2n-1,\ a_{2n-1} \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, имеет по меньшей мере один действительный корень.

■ Без ограничения общности можно считать $a_{2n-1} = 1$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty.$$

В силу определения бесконечно большой функции определенного знака, найдутся точки a и b из $\mathbb{R}$, такие что $a < b$ и $P(a) < 0$, $P(b) > 0$. Поскольку $P(x) \in C(\mathbb{R})$, то $P(x) \in C([a, b])$ и по следствию 1 теоремы 3.6 получаем нужное. $\square$

Теорема 3.7 (1–ая теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

■ Предположим, что $f \in C([a, b])$, но f не является ограниченной на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in [a, b] \; : \; |f(x_n)| > n.$$

По лемме Больцано-Вейерштрасса из полученной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\gamma = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда $\gamma \in [a, b]$ и по определению Гейне непрерывной функции

$$f(x_{n_k}) \to f(\gamma) \;\; \text{при} \;\; k \to \infty.$$

С другой стороны,

$$|f(x_{n_k})| > n_k, \; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 1. На промежутке, отличном от отрезка, утверждение теоремы 3.7, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на промежутке $(0, 1]$, но не ограничена на нем, поскольку $\lim\limits_{x\to+0} 1/x = +\infty$.

Замечание 2. С помощью теоремы 3.7 иногда удается доказать ограниченность функции, непрерывной на промежутке, отличном от отрезка. Например, рассмотрим функцию $f(x) = e^{-1/x}$, $\forall\, x \in (0, 1]$. Так как $f \in C((0, 1])$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$, то функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на отрезке [0,1], а значит ограничена на нем. Поскольку $\tilde{f}([0, 1]) = f((0, 1]) \cup \{0\}$ то $f((0, 1])$ — ограниченное множество.

Определение 3.11. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Если существует точка $p \in X$ (или $q \in X$) такая, что*

$$f(p) = \sup\{f(x) : \; x \in X\} \quad (f(q) = \inf\{f(x) : \; x \in X\}),$$

то говорят, что функция f достигает на X своей точной верхней (нижней) границы. Число $f(p)$ (соответственно, $f(q)$) называют наибольшим (наименьшим) значением функции f на X.

Теорема 3.8 (2–ая теорема Вейерштрасса). *Если $f \in C([a, b])$, то она достигает на отрезке $[a, b]$ своих точных границ, то есть принимает на $[a, b]$ наибольшее и наименьшее значения.*

■ Докажем, что на отрезке $[a, b]$ найдется точка p такая, что

$$M^f = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\} = f(p).$$

Предположим, что на $[a, b]$ нет точек, в которых функция f принимает значение, равное M^f. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M^f - f(x)}.$$

Функция F определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна и положительна на нем. По первой теореме Вейерштрасса функция F ограничена на отрезке $[a, b]$. Поэтому существует число $A > 0$ такое, что $F(x) \le A$, $\forall\, x \in [a, b]$. Следовательно,

$$M^f - f(x) \ge \frac{1}{A},\ \forall\, x \in [a, b],\ \text{то есть } f(x) \le M^f - \frac{1}{A},\ \forall\, x \in [a, b].$$

Последнее неравенство противоречит определению точной верхней границы числового множества. Поэтому предположение о недостижимости точной верхней границы множества $f([a, b])$ является неверным. □

Другое доказательство теоремы 3.8 можно найти в [5, с. 97–98].

Замечание 1. Утверждение теоремы 3.8, вообще говоря, не верно на промежутке, отличном от отрезка. Чтобы в этом убедится, достаточно, например, рассмотреть функцию $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$.

$$\sup\{f(x) | x \in (0, 1)\} = +\infty, \quad \inf\{f(x) | x \in (0, 1)\} = 1,$$

эти величины не принадлежат множеству $f((0, 1))$.

Замечание 2. Функции, которые не являются непрерывными на отрезке $[a, b]$ могут достигать, а могут и не достигать на нем своих точных границ. Подтверждением могут служить на отрезке $[0, 1]$ функция Дирихле и функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (0, 1] \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

Теорема 3.9 (Дарбу об образе отрезка при непрерывном отображении)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то образ отрезка $[a, b]$ при отображении f совпадает с отрезком $[m^f, M^f]$, где*

$$m^f = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\},\ M^f = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

■ По второй теореме Вейерштрасса существуют точки $p, q \in [a, b]$ такие, что $f(p) = M^f, f(q) = m^f$. Пусть $p < q$ и $m^f \ne M^f$. Поскольку $f \in C([p, q])$, то, применяя к функции f на отрезке $[p, q]$ теорему Больцано-Коши о промежуточном значении, получаем, что $[m^f, M^f] \subset f([a, b])$. С другой стороны, по определениям точных верхней и нижней границ числового множества $f([a, b]) \subset [m^f, M^f]$. Следовательно, $f([a, b]) = [m^f, M^f]$. Если же $m^f = M^f = M$, то $f(x) = M, \forall\, x \in [a, b]$, а поэтому $f([a, b]) = \{M\}$. □

Следствие. Если функция f непрерывна и не убывает (не возрастает) на отрезке $[a, b]$, то $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (соответственно, $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$).

Замечание 1. Если образом отрезка $[a,b]$ при отображении f является отрезок $f([a,b])$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что функция f является непрерывной. Подтверждением служит функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2x}, & \text{если } x \in (0,1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая терпит разрыв в точке $x = 0$, однако $f([0,1]) = [-1,1]$.

Замечание 2. Можно доказать, что если функция f непрерывна и не убывает (не возрастает) на интервале (a,b), то $f((a,b)) = (A,B)$ (соответственно, $f((a,b)) = (B,A)$), где

$$A = \lim_{x\to a} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x), \ B = \lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

Если функция f непрерывна и не убывает (не возрастает) на промежутке $[a,b)$, то $f([a,b)) = [f(a),B)$ (соответственно, $f([a,b)) = (B,f(a)]$).

Предлагаем читателю доказать эти утверждения самостоятельно.

Теорема 3.10 (о непрерывности монотонной функции)**.** *Если функция f монотонна на промежутке X и множество $f(X)$ — промежуток, то функция f непрерывна на X.*

■ Для определенности считаем, что функция f не убывает и $X = (a,b)$. Прежде всего, заметим, что в силу теоремы о пределе монотонной функции, в каждой точке $x \in (a,b)$ $f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)$.

Доказательство теоремы проведём методом «от противного». Предположим, что существует точка $c \in (a,b)$, в которой функция f терпит разрыв. Тогда выполняется хотя бы одно из двух неравенств

$$f(c-0) < f(c), \ f(c) < f(c+0).$$

Пусть, например, $f(c-0) < f(c)$. Поскольку

$$f(c-0) = \sup_{x\in(a,c)} f(x), \ f(c+0) = \inf_{x\in(c,b)} f(x),$$

то на интервале (a,c) и (c,b) функция f не принимает значений, принадлежащих интервалу $(f(c-0), f(c))$. Но этого не может быть, так как множество $f((a,b))$ — промежуток. Следовательно, предположение неверно, то есть, функция f непрерывна на промежутке (a,b). □

Следствие. Если функция f монотонна на промежутке X, то следующие условия эквивалентны:

1) функция f непрерывна на промежутке X,

2) $f(X)$ — промежуток.

Теорема 3.11 (о непрерывности функции, обратной к монотонной). *Если функция f возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на нем, то ее обратная функция $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ (соответственно, $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a,b]$) непрерывна.*

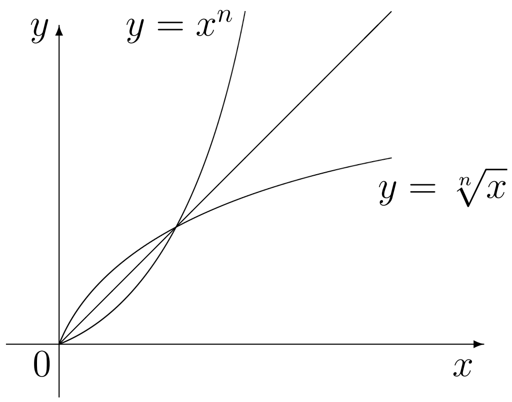
■ Будем считать для определенности, что функция f возрастает на отрезке $[a,b]$. В силу следствия из теоремы 3.9, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. По теореме о существовании обратной функции к монотонной существует функция $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$, которая возрастает.

Наконец, по определению обратной функции $f^{-1}([f(a), f(b)]) = [a,b]$. Тогда по теореме 3.10 функция f^{-1} непрерывна на $[f(a), f(b)]$. □

Замечание. Аналогично, с учетом замечания 2 к теореме 3.9 можно доказать, что если функция f возрастает (убывает) на промежутке X и непрерывна на нём, то обратная функция f^{-1} возрастает (убывает) и непрерывна на промежутке $f(X)$.

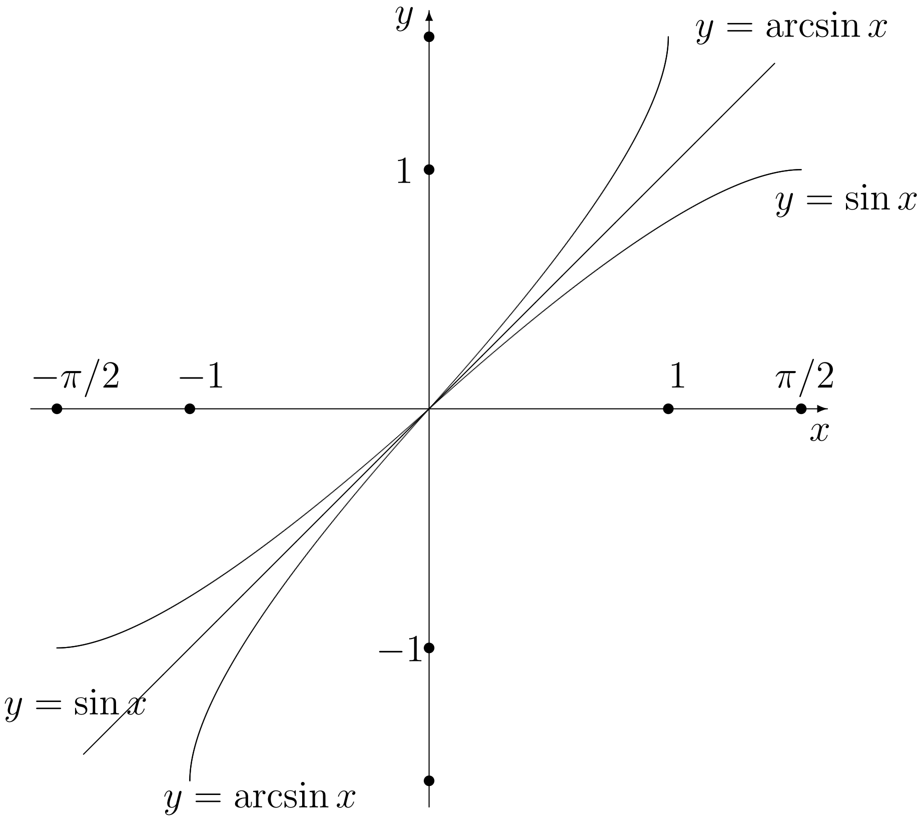
Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3.10. Пусть $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in [0, +\infty)$. В этом случае степенная функция $f(x) = x^n$ возрастает на промежутке $[0, +\infty)$ и непрерывна на нем. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = +\infty$, $f(0) = 0$, то по замечанию 2) к теореме 3.9 и по теоремам 1.1, 3.11 существует обратная функция $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, которая также возрастает и непрерывна. Её называют арифметическим корнем n–ой степени и обозначают $x = \sqrt[n]{y}$.



Графики (см.рисунок выше) функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов.

Пример 3.11. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ возрастает и непрерывна. Поскольку $f(\pm\pi/2) = \pm 1$, то по теоремам 1.1, 3.9, 3.11 существует обратная функция $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, которая возрастает и непрерывна. Её называют функцией "арксинус"и обозначают arcsin. Следовательно, функция arcsin каждому числу $x \in [-1, 1]$ ставит в соответствие такое число из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x.



Графики (см. рисунок) функций $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов.

Замечание. Аналогично вводятся и рассматриваются непрерывная убывающая функция $y = \arccos x$, которая действует из $[-1, 1]$ в $[0, \pi]$, и непрерывная возрастающая функция $y = \operatorname{arctg} x$, которая действует из $\mathbb{R}$ в $(-\pi/2, \pi/2)$.

3.5 Показательная, логарифмическая и степенная функции

В школьном курсе алгебры и начал анализа определена степень a^r числа $a > 0$ с рациональным показателем r, то есть на множестве Q рациональных чисел определена показательная функция $f(r) = a^r$, выяснены некоторые ее свойства:

1) $a^r > 0, \forall\, r \in Q$,

2) f возрастает на Q, если $a > 1$; f убывает на Q, если $a \in (0, 1)$,

3) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \forall\, p, q \in Q$,

4) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$, $\forall\, p, q \in Q$,

5) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$, $\forall\, p \in Q, \forall\, a > 0\, \forall\, b > 0$.

Докажем следующие утверждения.

Лемма 3.2. *Если* $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(r) = a^r$, *то* $\lim\limits_{r \to 0} f(r) = 1$.

■ Для определенности будем считать $a > 1$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \ \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1,$$

то $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N$

$$|a^{1/n} - 1| < \varepsilon, \ \ |a^{-1/n} - 1| < \varepsilon.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > N$. Тогда

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Следовательно, если $\delta = \dfrac{1}{n_0}$, то $\forall\, r \in (-\delta, \delta) \bigcap Q$

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^r < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Иными словами, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \dfrac{1}{n_0} > 0 \ : \ \forall r \in (-\delta, \delta) \bigcap Q$ справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$, что завершает доказательство.

Случай $a \in (0, 1)$ рассматривается аналогично. □

Лемма 3.3. *Пусть $a > 0$, $\{r_n\}$ — сходящаяся последовательность рациональных чисел. Тогда последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.*

■ Для определенности будем считать, что $a > 1$.

Покажем, что числовая последовательность $\{a^{r_n}\}$ является фундаментальной. Заметим, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|.$$

Так как последовательность $\{r_n\}$ сходится, то существует такое рациональное число A, что $r_n \le A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a^{r_n} \le a^A = B.$$

По лемме 3.2 $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \forall r \in (-\delta, \delta) \bigcap \mathbb{Q}$ выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Из фундаментальности последовательности $\{r_n\}$ получаем:

$$\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} : \ \forall n > N, \ \forall m > N \ \ |r_n - r_m| < \delta.$$

Отсюда $\forall n > N, \ \forall m > N$

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| < B \cdot \frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon,$$

что означает фундаментальность последовательности $\{a^{r_n}\}$. □

Определение 3.12. *Пусть $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0. Положим*

$$a^{x_0} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Лемма 3.4. *Определение 3.12 корректно в том смысле, что величина предела $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящейся к x_0.*

■

Пусть $\{r_n{}'\}$, $\{r_n{}''\}$ — произвольные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к x_0. Согласно лемме 3.3 соответствующие последовательности $\{a^{r_n{}'}\}$, $\{a^{r_n{}''}\}$ сходятся. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n{}'} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n{}''}$.

Составим новую последовательность $\{r_n\}$ такую, что

$$r_n = \begin{cases} r'_k, & \text{если } n = 2k-1, \\ r''_k, & \text{если } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ясно, что она сходится к числу x_0. По лемме 3.3 последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится. Учитывая, что последовательности $\{a^{r_n{}'}\}$, $\{a^{r_n{}''}\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{a^{r_n}\}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n{}'} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n{}''} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \ \square$$

Замечание. Если $x_0 = \dfrac{p}{q}$ — рациональное число, то величина степени a^{x_0}, найденная по определению 3.12, совпадает со значением $a^{p/q}$ в ранее известном из школьного курса алгебры смысле, поскольку среди последовательностей рациональных чисел, сходящихся к $x_0 = \dfrac{p}{q}$, есть последовательность $\{r_n\}:\ r_n = \dfrac{p}{q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и $a^{r_n} = a^{p/q} \to a^{p/q}$.

Определение 3.13. *Пусть a — некоторое положительное число и $a \neq 1$. Функцию, определенную законом*

$$\forall x \in \mathbb{R} \to a^x,$$

называют показательной с основанием a.

Изучим некоторые свойства показательной функции.

Теорема 3.12. *Если $a > 1$, то функция $f(x) = a^x$ возрастает на $\mathbb{R}$. Если же $a \in (0,1)$, то функция $f(x) = a^x$ убывает на $\mathbb{R}$.*

■ Докажем первую часть утверждения.

Фиксируем произвольные числа $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $x_1 < x_2$. По принципу Архимеда существуют рациональные числа r_1, r_2 такие, что $x_1 < r_1 < r_2 <$

x_2. Пусть $\{r_n{}'\}, \{r_n{}''\}$ — последовательности рациональных чисел, сходящиеся соответственно к x_1 и x_2, причем

$$r_n{}' < r_1 < r_2 < r_n{}'', \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

По свойству 2 показательной функции, определенной на множестве Q рациональных чисел,

$$a^{r_n{}'} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n{}''}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в крайних неравенствах к пределу при $n \to \infty$ и учитывая определение 3.12, получим

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}.$$

Итак,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ a^{x_1} < a^{x_2},$$

что доказывает возрастание функции $f(x) = a^x$ на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 1$.

Случай $a \in (0,1)$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 3.13. *Показательная функция $f(x) = a^x$ на $\mathbb{R}$ принимает только положительные значения.*

■ Для определенности рассмотрим показательную функцию с основанием $a > 1$.

Пусть x_0 — произвольное действительное число. По принципу Архимеда найдется целое число n_0 такое, что $n_0 \leq x_0 < n_0 + 1$. В силу возрастания функции $f(x) = a^x$, имеем:

$$a^{n_0} \leq a^{x_0}$$

Но по свойству 1 показательной функции, определенной на множестве Q рациональных чисел, $a^{n_0} > 0$. Поэтому $a^{x_0} > 0$. $\square$

Теорема 3.14. *Показательная функция $f(x) = a^x$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел.*

■ Функция f монотонна на множестве $\mathbb{R}$, поэтому имеет конечные односторонние пределы в точке $x = 0$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1,$$

то $f(+0) = f(-0) = 1$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = a^0,$$

что означает непрерывность функции f в точке $x = 0$.

Фиксируем теперь произвольную точку $x_0 \neq 0$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$|f(x) - f(x_0)| = |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1|.$$

Так как функция f непрерывна в точке $x = 0$, то

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, :\, \forall x \in \mathbb{R},\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow\, |a^x - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Поэтому $\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |a^x - a^{x_0}| < a^{x_0} \cdot \dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}} = \varepsilon$, что доказывает непрерывность функции f в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3.15. *Если $f(x) = a^x$, то $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.*

■ Для определённости будем считать, что $a > 1$. В силу теоремы 3.12 функция $y = a^x$ возрастает на $\mathbb{R}$. Далее, существуют следующие пределы

$$\lim_{x\to+\infty} a^x,\;\; \lim_{x\to-\infty} a^x.$$

Но, как мы знаем, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n} = 0$. Поэтому по теореме Гейне о пределе функции

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\;\; \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

По замечанию 2 к теореме 3.9 $f(-\infty, +\infty) = (0, +\infty)$. $\square$

Согласно теореме 3.11 о непрерывности обратной функции к монотонной на интервале, показательная функция $f(x) = a^x$ имеет обратную $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, которая непрерывна, возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $a \in (0, 1)$. Её называют логарифмической с основанием $a\,(a > 0,\, a \neq 1)$ и обозначают $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. В случае, если $a = e$, логарифм называют натуральным и обозначают символом ln.

Определение 3.14. *Пусть α — некоторое действительное число, отличное от нуля. Функция, которая каждому положительному x ставит в соответствие x^α, называется степенной, α — её показателем.*

Теорема 3.16. *Степенная функция $f(x) = x^\alpha$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.*

Утверждение следует из теоремы 3.4 о непрерывности суперпозиции функций, так как $f(x) = e^{\alpha \ln x}$.

При $\alpha > 0$ полагают $0^\alpha = 0$ и доопределяют степенную функцию в точке $x = 0$, то есть при $\alpha > 0$ считают, что степенная функция определена на множестве $[0, +\infty)$. При этом

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha = \lim_{x\to+0} e^{\alpha \ln x} = 0 = 0^\alpha.$$

Следовательно, функция $x^\alpha, \alpha > 0$, непрерывна на множестве $[0, +\infty)$.

Теорема 3.17. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и непрерывны на множестве X. Если $u(x) > 0$ для всех $x \in X$, то функция $(u(x))^{v(x)}$ непрерывна на X.*

Утверждение, так как $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$, $\forall\, x \in X$.

3.6 Некоторые замечательные пределы

Лемма 3.5. *Если* $a > 0$, $a \neq 1$, *то* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

■ Пусть $f : X = (-1,0)\cup(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log_a(1+x)}{x}, \forall x \in X$. Поскольку $f(x) = \log_a(1+x)^{1/x}$, $\forall x \in X$, $(1+x)^{1/x} \to e$ при $x \to 0$ и функция $\log_a x$ непрерывна в точке $x = e$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e. \ \square$$

Следствие 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$ при $x \to 0$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Лемма 3.6. *Если* $a > 0$, $a \neq 1$, *то* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

■ Положим $a^x - 1 = t, \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда $x = \log_a(1+t)$ — непрерывная на множестве $(-1,+\infty)$ функция. Поэтому при $t \to 0$, $x(t) \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \ \square$$

Следствие. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$.

В частности, $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Лемма 3.7. *Если* $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *то* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$.

■ Утверждение верно, так как $(1+x)^\mu = e^{\mu \ln(1+x)}$. $\square$

Следствие. Если $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ при $x \to 0$.

3.7 Равномерная непрерывность функции

Определение 3.15. *Функция* $f : X \to R$ *называется равномерно непрерывной на множестве* X, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых точек* x' *и* x'' *из* X *таких, что* $|x' - x''| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

С помощью символики это определение записывается так:

функция $f : X \to R$ равномерно непрерывна на X $\Leftrightarrow$

$$(\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x',\, x'' \in X,\, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.)$$

Очевидно, что если функция f равномерно непрерывна на множестве X, то она непрерывна на нем, то есть непрерывность — необходимое условие равномерной непрерывности. Однако непрерывность функции на множестве, вообще говоря, не влечет ее равномерной непрерывности на этом множестве, поскольку

$$f \in C(X) \Leftrightarrow \forall\, x_0 \in X, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 :$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall\, x \in X \;:\; |x - x_0| < \delta.$$

В этом определении число δ зависит не только от ε, но и от точки $x_0 \in X$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.12. Покажем, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ равномерно непрерывна на множестве $[1, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на множестве $(0, 1]$.

■ 1) Пусть $X = [1, +\infty)$. Для любых двух точек x' и x'' из $[1, +\infty)$

$$|f(x') - f(x'')| = |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = \frac{|x' - x''|}{x'x''} \le |x' - x''|.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда

$$\forall\, x',\, x'' \in [1, +\infty) \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le |x' - x''| < \delta = \varepsilon.$$

Поэтому функция f равномерно непрерывна на множестве $[1, +\infty)$.

2) Теперь покажем, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, 1]$, хотя и непрерывна на нём. В связи с этим запишем отрицание свойства равномерной непрерывности функции:

$$\text{функция } f : X \to R \text{ не является равномерно непрерывной на } X \iff$$
$$\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x'_\delta,\, x''_\delta \in X \;:\; |x'_\delta - x''_\delta| < \delta, \text{ но } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \ge \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольно $\delta \in (0, 1)$. Пусть x'_δ — произвольная точка из интервала $(0, \delta) \subset (0, 1)$, а $x''_\delta = \dfrac{x'_\delta}{2}$. Тогда x'_δ, $x''_\delta \in (0, 1]$,

$$|x'_\delta - x''_\delta| = \frac{x'_\delta}{2} < \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ но } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = |\frac{1}{x'_\delta} - \frac{1}{x''_\delta}| = \frac{1}{x'_\delta} > \frac{1}{\delta} > 1.$$

Следовательно, для числа $\varepsilon = 1$ и для любого $\delta > 0\, \exists\, x'_\delta$, $x''_\delta \in (0, 1]$:

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta, \text{ но } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = |\frac{1}{x'_\delta} - \frac{1}{x''_\delta}| > 1 = \varepsilon,$$

то есть f не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, 1]$.

Пример 3.13. Покажем, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$, хотя является ограниченной и непрерывной на нем.

■ Для доказательства рассмотрим последовательность точек

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi},\ n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $x_n \in (0,1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и $x_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Поэтому

$$\forall\, \delta \in (0,1),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, |x_n| < \delta,\, \forall\, n > n_0.$$

Учитывая, что $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$, получим, что

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| = 2,\, \forall\, n > N.$$

Следовательно, $\exists\, \varepsilon_0 = 2 \,:\, \forall\, \delta \in (0,1), \exists\, x'_\delta = x_n,\ x''_\delta = x_{n+1}, n > n_0 \,:$

$$|x'_\delta - x''_\delta| = |x_n - x_{n+1}| < \delta, \text{ но } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Это означает, что рассматриваемая функция не является равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$. □

Пример 3.14. Докажем, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на множестве $[1, +\infty)$.

■ Рассмотрим последовательность точек $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $x_n \in [1, +\infty)$, и

$$|x_n - x_{n+1}| = |\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},\, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

В то же время, $|f(x_n) - f(x_{n+1})| = |n - (n+1)| = 1$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to +\infty$, то

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\delta^2}\right]\right\} \,:\, \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta,\, \forall\, n > n_0,$$

значит, $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ для $n > n_0$. Пусть $\varepsilon = 1$, δ — произвольное положительное число. Положим $x'_\delta = \sqrt{n}$, $x''_\delta = \sqrt{n+1}$, $n > n_0$. Тогда

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x'_\delta, x''_\delta \in [1, +\infty) : |x'_\delta - x''_\delta| < \delta, |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = 1 = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $[1, +\infty)$. □

Теорема 3.18 (Кантора)**.** *Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нем.*

■ Предположим, что $f \in C([a,b])$, но не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки x'_δ, $x''_\delta \in [a,b]$, $\quad |x'_\delta - x''_\delta| < \delta$, но $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Возьмем, например, последовательность чисел $\delta_n = \dfrac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся последовательности $\{x'_n\}, \{x''_n\} \in [a,b]$ такие, что

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n},\ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Поскольку последовательность $\{x'_n\}$ ограничена, по лемме Больцано–Вейерштрасса она имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = \gamma$. Очевидно, что $\gamma \in [a,b]$. Далее, в силу выбора последовательностей,

$$|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}, \forall\, k \in N.$$

Поскольку $\lim n_k = +\infty$, то подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$ сходится к той же точке γ. Далее, $f(x'_{n_k}) \to f(\gamma)$, $f(x''_{n_k}) \to f(\gamma)$ при $k \to \infty$, поэтому разность $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})$ обязана быть бесконечно малой. С другой стороны, в силу выбора элементов x'_n, x''_n, $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, число 0 не является пределом последовательности $\{f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 1. Приведенные примеры показывают, что в условиях теоремы Кантора нельзя заменить отрезок на промежуток другого вида.

Замечание 2. Из доказательства теоремы Кантора следует, что она остаётся в силе на ограниченном множестве X, содержащем все свои предельные точки.

3.8 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть функция f является локально ограниченной в точке a. Может ли функция f быть непрерывной в точке a? Может ли она иметь разрыв в точке a и какого рода?

2. Пусть функция f непрерывна в точке a и в любой окрестности ее принимает как положительные, так и отрицательные значения. Доказать, что $f(a) = 0$.

3. Пусть $f(a) = 2$ и в каждой окрестности точки a принимает значения, меньшие 1. Доказать, что функция f терпит разрыв в точке a.

4. Доказать, что функция

   $$f(x) = \begin{cases} \ \ x, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   непрерывна только в точке $a = 0$.

5. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна только в двух точках $a = 0$ и $a = 1$.

6. Пусть функция f определена и не ограничена на отрезке $[a, b]$. Доказать, что на этом отрезке функция f имеет хотя бы одну точку разрыва 2-го рода.

7. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ и для любого $\varepsilon_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, найдётся число $\delta_n > 0$ такое, что,

$$\forall\, x \in X : |x - a| < \delta_n \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon_n.$$

Доказать, что функция f непрерывна в точке a.

8. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a. Доказать, что функция $f(2x)$ непрерывна в точке $a/2$.

9. Пусть функция f является четной (нечетной) и непрерывной в точке a. Доказать, что функция f непрерывна в точке $-a$.

10. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ является T–периодической и непрерывной в точке a. Доказать, что функция f непрерывна в любой точке $a + kT$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n} \text{ — несократимая дробь, } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

непрерывна в нуле и в иррациональных точках, но не является непрерывной в остальных точках. Указать характер точек разрыва.

12. Пусть функция f ограничена на (a, b) и $m^f(x) = \inf\limits_{t \in (a,x)} f(t)$. Доказать, что функция $m^f(x)$ непрерывна слева в любой точке $x \in (a, b)$.

13. Пусть функции f и φ определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и непрерывны в точке $a \in X$. Доказать, что в точке a непрерывны функции

$$m(x) = \inf\{f(x), \varphi(x)\},\ \ M(x) = \sup\{f(x), \varphi(x)\}.$$

14. Пусть в точке a функция f непрерывна, а функция φ терпит разрыв. Обязательно ли функции $f + \varphi$, $f \cdot \varphi$ имеют разрыв в точке a?

15. Верно ли утверждение: если функция f непрерывна в некоторой окрестности точки a, то она ограничена в ней?

16. Доказать, что если функция f имеет в двусторонней предельной точке a разрыв первого рода, то она локально ограничена в этой точке.

17. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in X$. Доказать, что в точке a непрерывны функции

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geq 0 \\ f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}.$$

18. Пусть функция $f : X \to R$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$. Доказать, что существует число $c > 0$ и окрестность U_a такие, что $|f(x)| > c, \forall\, x \in X \bigcap U_a$.

19. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, непрерывна и имеет конечные односторонние пределы при $x \to a$ и $x \to b$. Доказать, что функция f ограничена на интервале (a, b).

20. Пусть функция f непрерывна на (a, b) и в точках $x', x'' \in (a, b)$ принимает не равные значения. Доказать, что на (a, b) найдется точка γ такая, что $f(\gamma) = \dfrac{1}{2}(f(x') + f(x''))$.

21. Пусть функция f равномерно непрерывна на промежутке $[0, 1)$. Доказать, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$.

22. Показать, что уравнение $x\, 2^x = 1$ имеет по меньшей мере один корень, не превосходящий 1.

23. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и положительна на нем. Доказать, что существует такое число $c > 0$, что $f(x) \geq c, \forall\, x \in [a, b]$.

24. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве X и $X_1 \subset X$. Доказать, что f равномерно непрерывна на множестве X_1.

25. Пусть функция f равномерно непрерывна на множествах X и X_1. Доказать, что f равномерно непрерывна на множестве $X \bigcup X_1$.

26. Пусть функции f и φ равномерно непрерывны на множестве X. Доказать, что функция $\alpha f + \beta\varphi$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$ является равномерно непрерывной на X.

27. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве X. Доказать, что функция $y = |f(x)|$ равномерно непрерывна на X. Если множество X симметрично относительно начала координат, то равномерно непрерывной на X будет и функция $y = f(|x|)$.

28. Пусть функция f непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Доказать, что функция $v(x) = f(x - [x])$ является 1-периодичной и равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

29. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является T-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$. Доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

30. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

31. Пусть для функции $f : X \to \mathbb{R}$ существуют такие числа $k > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, что $|f(x') - f(x'')| \leq k|x' - x''|^{\alpha}$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве X.

32. Пусть функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

33. Пусть функция f равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b). Доказать, что функция f ограничена на (a, b).

Глава 4

Дифференцируемые функции

4.1 Понятие дифференцируемой в точке функции

Рассмотрим функцию $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть a — некоторая фиксированная точка множества X, а Δx — такое не равное нулю число, что $a + \Delta x \in X$. Число Δx обычно называют приращением аргумента, а число $f(a + \Delta x) - f(a)$ — приращением функции f в точке a, соответствующим приращению Δx аргумента, и обозначают $\Delta f_a(\Delta x)$ или, если из контекста ясно в какой точке проводится рассмотрение, Δf.

Известно, что если $a \in X$ и является предельной точкой множества X, то функция f, определенная на X, непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда функция f имеет представление

$$f(x) = f(a) + o(1), \quad x \to a,$$

то есть

$$\Delta f_a(\Delta x) = o(\Delta x^0), \quad \Delta x \to 0.$$

Выделим класс функций, для которых можно уточнить характеристику приращений $\Delta f_a(\Delta x)$ функции f, соответствующих приращению Δx аргумента.

Определение 4.1. *Пусть функция f определена на множестве X, $a \in X$ и a — предельная точка множества X . Функция f называется дифференцируемой в точке a по множеству X, если существует такое число A, что*

$$\Delta f_a(\Delta x) = A\,\Delta x + o(\Delta x), \quad a + \Delta x \in X, \quad \Delta x \to 0. \tag{4.1}$$

Иными словами, функция f дифференцируема в точке a, если существует линейная относительно Δx функция $A\Delta x$, которая отличается от приращения $\Delta f_a(\Delta x)$ функции в точке a, соответствующего приращению аргумента Δx, на бесконечно малую более высокого порядка малости по сравнению с Δx, когда $\Delta x \to 0$, при этом Δx может принимать только такие значения, чтобы $a+\Delta x \in X$.

Учитывая представление функции вида $o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, заметим, что дифференцируемая в точке a по множеству X функция имеет вид

$$f(a+\Delta x) = f(a) + A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{4.2}$$

где $a+\Delta x \in X$ и $\alpha(\Delta x) \to o$ при $\Delta x \to o$, или

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \alpha(x-a)\,(x-a),$$

где $x \in X$ и $\alpha(x-a) \to o$ при $x \to a$.

Определение 4.2. *Пусть функция f дифференцируема в точке a по множеству X. Линейная функция $A\,\Delta x$, $\Delta x \in \mathbb{R}$, из представления (4.2) называется дифференциалом функции f в точке a и обозначается $df_a(\Delta x)$.*

Из определения 4.1 следует

Лемма 4.1. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке a по множеству X, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{4.3}$$

равный числу A из (4.1).

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке a по множеству X, то представление (4.2) единственно и дифференциал функции f в точке a определяется однозначно. (Утверждение верно в силу единственности предела функции в точке).

Определение 4.3. *Пусть функция f определена на множестве X, $a \in X$ и a — предельная точка множества X. Если существует в $\overline{\mathbb{R}}$ предел (4.3), то его называют производной функции f в точке a по множеству X и обозначают $f'(a)$ (по Лагранжу) или $\dfrac{df}{dx}(a)$ (по Лейбницу).*

С учетом определения 4.3 лемма 4.1 принимает вид:

Лемма 4.2. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке a по множеству X, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в точке a по множеству X.*

Таким образом, если функция f дифференцируема в точке a по множеству X, то при $a+\Delta x \in X$ и $\Delta x \to 0$

$$\Delta f_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x), \quad df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x.$$

Пример 4.1. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = c_0, \forall x \in \mathbb{R}$. Доказать, что функция f дифференцируема в каждой точке $a \in \mathbb{R}$ по множеству $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
■ Пусть a — произвольная точка из $\mathbb{R}$. Тогда

$$\Delta f_a(\Delta x) = 0,\ \forall\,\Delta x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, а значит $f'(a) = 0$ и функция f дифференцируема в точке a по множеству $\mathbb{R}$. Поскольку a — произвольная точка из $\mathbb{R}$, то получили нужное. $\square$

Пример 4.2. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Если a — некоторая точка из $\mathbb{R}$, то

$$\frac{\Delta h_a(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{(a+\Delta x) - a}{\Delta x} = 1,\ \forall\, \Delta x \neq 0.$$

Отсюда следует, что производная функции h в точке a по множеству $\mathbb{R}$ существует и равна 1. Таким образом, функция h дифференцируема в любой точке $a \in \mathbb{R}$ по множеству $\mathbb{R}$, при этом $dh_a(\Delta x) = 1 \cdot \Delta x$. $\square$

Как видим, для функции $h(x) = x$ приращение функции в точке равно приращению переменной Δx, а поэтому и дифференциал этой функции в точке так же равен Δx, то есть, сокращая обозначение, можно написать, что $dx = \Delta x$. Поэтому для произвольной дифференцируемой в точке a функции f равенство $df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x$ можно переписать в виде

$$df_a(dx) = f'(a)\,dx \quad \text{или} \quad f'(a) = \frac{df_a(dx)}{dx},$$

что напоминает символику Лейбница производной функции f в точке a.

Чтобы объяснить, как на дифференцируемость и значение производной влияет множество X, рассмотрим такой пример.

Пример 4.3. Пусть $X_0 = \left\{x = \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in X_0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus X_0 \end{cases}$. Тогда, как легко следует из определений и двух предыдущих примеров, функция f

- дифференцируема в точке $a = 0$ по множеству $\overline{X}_0$, при этом $f'(0) = 1$,
- дифференцируема в точке $a = 0$ по множеству $\mathbb{R}\setminus X_0$, при этом $f'(0) = 0$,
- не дифференцируема в точке $a = 0$ по множеству $\mathbb{R}$. $\square$

В дальнейшем мы не будем явно указывать, по какому множеству X выполняется дифференцирование, поскольку это будет ясно из контекста определения функции, но забывать о множестве X и его роли в определении дифференцируемости функции не следует.

Теорема 4.1 (необходимое условие дифференцируемости)**.** *Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в ней.*

Доказательство очевидно, поскольку представление (4.2) влечет существование $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Замечание. Непрерывность функции в точке является необходимым, но не является достаточным условием дифференцируемости функции в точке. Для примера рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ в точке $a = 0$. Она непрерывна в точке $a = 0$, но

$$\frac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \operatorname{sgn} \Delta x,$$

поэтому не существует предел отношения $\dfrac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть функция f не дифференцируема в точке $a = 0$.

В полной аналогии с понятием левого и правого предела функции в данной точке вводятся понятия левой и правой производной функции f в точке.

Определение 4.4. *Пусть f определена на множестве X, $a \in X$, a — правосторонняя (левосторонняя) предельная точка X. Если в $\overline{\mathbb{R}}$ существует*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \ \left(\textit{соответственно,} \ \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right),$$

то его называют правой (левой) производной функции f в точке a и обозначают $f'_+(a)$ (соответственно, $f'_-(a)$).

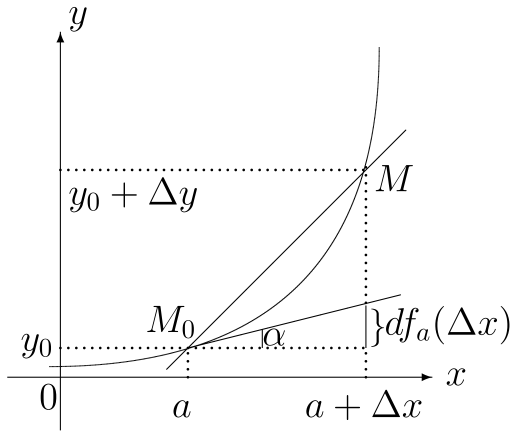
Правая и левая производные функции f в точке a называются односторонними производными. Из сопоставления определений 4.3 и 4.4 и из теоремы о связи односторонних пределов функции с пределом вытекают следующие утверждения:

Теорема 4.2. *Пусть функция f определена на множестве X и $a \in X$. Если a — односторонняя предельная точка множества X, то понятие производной функции f в точке a совпадает с односторонней производной функции f. Если же a — двусторонняя предельная точка X, то функция f имеет в точке a производную тогда и только тогда, когда существуют обе односторонние производные функции f в этой точке, равные между собой. В случае выполнения последних условий $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.*

Возвращаясь к $f(x) = |x|$, заметим, что $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

4.2 Геометрический смысл производной и дифференциала

Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X, a — некоторая точка этого промежутка, Δx — приращение аргумента, причем $\Delta x \neq 0$ и $a + \Delta x \in X$. Поэтому точки $M_0(a, f(a))$, $M(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ принадлежат графику Γ_f функции f. Прямую, проходящую через точки M_0 и M, называют секущей.



Поскольку точка M_0 фиксирована, то угловой коэффициент k секущей MM_0 является функцией от Δx (величина Δx приращения аргумента вполне определяет точку M графика функции), то есть $k = k(\Delta x)$. Ясно, что $k(\Delta x) = \dfrac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x}$ и секущая M_0M имеет уравнение

$$y = k(\Delta x)(x-a) + y_0, \text{ где } y_0 = f(a).$$

Определение 4.5. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta x\to 0} k(\Delta x) = k_0,$$

то прямая, соответствующая уравнению $y = k_0(x-a)+y_0$, называется наклонной (невертикальной) касательной к графику Γ_f функции f в точке $M_0(a_0, y_0)$. Если же существует бесконечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} k(\Delta x) = \infty$$

(функция $k(\Delta x)$ является бесконечно большой в точке 0*), то прямая $x = a$ называется вертикальной касательной к Γ_f в точке M_0.*

Поскольку угловой коэффициент касательной, в случае ее существования, получен из углового коэффициента секущей с помощью предельного перехода при $\Delta x \to 0$, то касательную часто называют предельным положением секущей M_0M при $M \to M_0$ по Γ_f (при $\Delta x \to 0$ $f(a+\Delta x) \to f(a)$, так как функция f непрерывна в точке a).

Теорема 4.3. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и $a \in X$. Чтобы график Γ_f функции f имел в точке $M_0(a, f(a))$ невертикальную касательную, необходимо и достаточно, чтобы функция f была дифференцируемой в точке a. При этом уравнение касательной имеет вид*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a). \tag{4.4}$$

Для того, чтобы график Γ_f функции f имел в точке M_0 вертикальную касательную, необходимо и достаточно, чтобы функция f имела в точке a бесконечную производную.

■ Так как $k(\Delta x) = \dfrac{\Delta f_a(\Delta x)}{\Delta x}$, то предел этой функции в $\overline{\mathbb{R}}$ при $\Delta x \to 0$ существует тогда и только тогда, когда функция f имеет в точке a производную $f'(a)$, причем $k_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = f'(a)$. Учитывая определение 4.5, получаем нужное. □

Из определений 4.1 и 4.5 и теоремы 4.3 получаем следующее определение невертикальной касательной к графику функции f в точке M_0, которое равносильно определению 4.5.

Определение 4.6. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и $a \in X$. Прямая $y = k\,x + b$ называется невертикальной касательной к графику функции f в точке $M_0(a, f(a))$, если*

$$f(x) - (kx + b) = o(x - a),\ x \to a.$$

Выясним геометрический смысл дифференциала $df_a(\Delta x)$. Будем считать, что функция f дифференцируема в точке a. Поэтому график функции f в точке $M_0(a, f(a))$ имеет невертикальную касательную, уравнением которой является (4.4). Так как $df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x$, где $\Delta x = x - a$, то $y_{kac}(x) = df_a(\Delta x) + f(a)$. Следовательно, дифференциал $df_a(\Delta x)$ функции f в точке a есть приращение ординаты касательной, проведенной в точке M_0 к Γ_f, то есть $df_a(\Delta x) = y_{kac}(a + \Delta x) - f(a)$.

4.3 Производная и дифференциал функции на множестве

Определение 4.7. *Если каждая точка множества X является его предельной точкой и функция f дифференцируема в каждой точке множества X, то говорят, что функция f дифференцируема на множестве X. Функцию, определенную правилом $x(\in X) \to f'(x)$, называют производной функции f на множестве X и обозначают f' или $\dfrac{df}{dx}$. Если Δx — некоторое фиксированное число, причем $\Delta x \neq 0$, то функцию, определенную правилом $x \in X \to df_x(\Delta x) \in \mathbb{R}$, называют дифференциалом функции f на множестве X, соответствующим приращению Δx аргумента, и обозначают $df(\Delta x)$.*

Напомним, что $df_a(\Delta x)$ является линейной функцией от $\Delta x \in \mathbb{R}$. Учитывая, что $df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x$, получаем, $df(\Delta x) = f'\,\Delta x$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.4. Пусть $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, X_α — область определения функции. Заметим, что если $\alpha \geq 0$, то $0 \in X_\alpha$, если $\alpha < 0$, то $0 \notin X_\alpha$.

а) Пусть $\alpha = 0$. Тогда $f(x) = 1$, $\forall x \in X = \mathbb{R}$. В силу примера 1 функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

б) Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $a \in X_\alpha \setminus \{0\}$. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^\alpha(\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1)}{x-a} = \alpha a^{\alpha-1}.$$

Следовательно, при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функция f дифференцируема на $X_\alpha \setminus \{0\}$ и $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

в) Пусть $\alpha > 0$ и $a = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1 \\ 0, & \text{если } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{если } \alpha \in (0,1) \end{cases}.$$

Последнее означает, что функция $f(x) = x^\alpha$ дифференцируема в точке $x = 0$, если $\alpha \geq 1$; $f'(0) = 0$ при $\alpha > 1$, $f'(0) = 1$ при $\alpha = 1$. Функция $f(x) = x^\alpha$ теряет свойство дифференцируемости в точке $x = 0$, если $\alpha \in (0,1)$, при этом ее график имеет в точке $x = 0$ вертикальную касательную.

Пример 4.5. Пусть $f(x) = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} = a^{x_0} \ln a,$$

то функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = a^{x_0} \ln a$. Следовательно, функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Пример 4.6. Пусть $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a — некоторая точка из $\mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} \cos\frac{x+a}{2} = \cos a,$$

то функция f дифференцируема в точке a и $f'(a) = \cos a$. Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично доказывается, что функция $f(x) = \cos x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4.4 Основные правила вычисления производной

Теорема 4.4. *Если функции f и ψ определены на множестве X и дифференцируемы в точке $a \in X$, то функции $f + \psi$, $f \cdot \psi$ и, если $\psi(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{\psi}$ дифференцируемы в точке a, при этом*

1) $(f+\psi)'(a) = f'(a) + \psi'(a)$,
$d(f+\psi)_a(\Delta x) = df_a(\Delta x) + d\psi_a(\Delta x)$;

2) $(f\cdot\psi)'(a) = f'(a)\cdot\psi(a) + f(a)\cdot\psi'(a)$,
$d(f\cdot\psi)_a(\Delta x) = df_a(\Delta x)\cdot\psi(a) + f(a)\cdot d\psi_a(\Delta x)$;

3) $\left(\dfrac{f}{\psi}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot\psi(a) - f(a)\cdot\psi'(a)}{\psi^2(a)}$,
$d\left(\dfrac{f}{\psi}\right)_a(\Delta x) = \dfrac{df_a(\Delta x)\cdot\psi(a) - f(a)\cdot d\psi_a(\Delta x)}{\psi^2(a)}$.

■ Докажем только третью часть утверждения. По условию теоремы функция ψ дифференцируема в точке a и $\psi(a)\neq 0$. В силу локальных свойств непрерывной в точке функции найдется такая окрестность U_a точки a, что на множестве $X\cap U_a$ функция ψ отлична от нуля. Поэтому на множестве $X\cap U_a$ определена функция f/ψ. Для любого $x\in X\cap U_a$ имеем

$$\frac{\Delta\left(f/\psi\right)_a(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x)\psi(a) - f(a)\psi(x)}{(x-a)\psi(a)\psi(x)} =$$
$$= \frac{1}{\psi(a)\psi(x)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\psi(a) - f(a)\frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\right),$$

где $\Delta x = x - a$. Учитывая дифференцируемость и непрерывность функций f и ψ в точке a, получим, что существует предел последнего выражения при $x\to a$, который равен

$$\left(f'(a)\psi(a) - f(a)\psi'(a)\right)\frac{1}{\psi^2(a)}. \tag{4.5}$$

Поэтому существует предел левой части, равный числу (4.5). Значит, функция f/ψ дифференцируема в точке a, ее производная и дифференциал в точке a определяются формулами 3). □

Замечание. Доказательство теоремы 4.4, опирающееся на определение дифференцируемой в точке функции, см. в [4, с.200–202].

Пример 4.7. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in Z$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, то, согласно теореме 4.4, функция f дифференцируема в области определения и

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично доказывается, что функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ дифференцируема в своей области определения и

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Теорема 4.5 (о дифференцируемости суперпозиции функций)**.** *Если X и Y — подмножества в $\mathbb{R}$, функция $f : X\to Y$ дифференцируема в точке x_0, а функция $\psi : Y\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то* *суперпозиция функций $\psi \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(\psi \circ f)'(x_0) = \psi'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ или $(\psi \circ f)'(x_0) = (\psi' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0)$.*

■ По условию теоремы функция ψ дифференцируема в точке y_0, поэтому $\forall y \in Y \setminus \{y_0\}$

$$\psi(y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y - y_0)(y - y_0), \tag{4.6}$$

где $\alpha(y - y_0) \to 0$ при $y \to y_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha(0) = 0$. Тогда представление (4.6) функции ψ имеет место на множестве Y. Поскольку $f : X \to Y$, то $\forall x \in X$

$$\psi(f(x)) - \psi(y_0) = \psi'(y_0)(f(x) - y_0) + \alpha(f(x) - y_0)(f(x) - y_0).$$

Учитывая, что $y_0 = f(x_0)$, получим для $x \in X \setminus \{x_0\}$

$$\frac{\psi(f(x)) - \psi(f(x_0))}{x - x_0} = \psi'(y_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(f(x) - f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Так как при $x \to x_0$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$, $\alpha(f(x) - f(x_0)) \to 0$, то существует конечный предел правой части предыдущего равенства, равный числу $\psi'(y_0) \cdot f'(x_0)$. Значит, существует предел его левой части при $x \to x_0$ и он равен $\psi'(y_0)\, f'(x_0)$, то есть существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(f(x)) - \psi(f(x_0))}{x - x_0} = \psi'(y_0) f'(x_0).$$

Следовательно, функция $\psi \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная в точке x_0 равна $(\psi \circ f)'(x_0) = \psi'(f(x_0))\, f'(x_0)$. □

Следствие. Пусть функция $f : X \to Y$ дифференцируема на множестве X, а функция $\psi : Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема на множестве Y. Тогда суперпозиция функций $\psi \circ f$ дифференцируема на множестве X и

$$(\psi \circ f)' = (\psi' \circ f) \cdot f'.$$

Теорема 4.6 (о производной обратной функции)**.** *Пусть функция f определена, непрерывна и возрастает или убывает на промежутке X. Если функция f дифференцируема в точке x_0 промежутка X и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция f^{-1}, определённая на промежутке $Y = f(X)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$ и*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)}.$$

■ Пусть f — возрастающая функция на X. Тогда по теореме о непрерывности функции обратной к монотонной, обратная к f функция f^{-1} определена возрастает и непрерывна на промежутке Y, причем промежуток Y имеет тот же вид, что и промежуток X.

Пусть $\Delta y \neq 0$ и $y = y_0 + \Delta y \in Y$. Тогда $x_0 + \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) \in X$ и $\Delta x \neq 0$. Покажем существование конечного предела

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0},$$

воспользовавшись теоремой Гейне существования предела функции (см. теорему 2.31), и найдем его. Для этого фиксируем произвольную последовательность $\{y_n\}$: $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$. Положим $x_n = f^{-1}(y_n)$, $n \in N$. Тогда $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$ и по определению обратной функции имеем

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \tag{4.7}$$

(воспользовались тем, что $x_n \neq x_0$ в силу биективности функции f^{-1}).

По непрерывности функции f^{-1} в точке y_0, $x_n = f^{-1}(y_n) \to x_0$. Кроме того, f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0).$$

И из (4.7) получаем существование предела

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поскольку $\{y_n\}$ — произвольная последовательность точек множества Y, отличных от y_0, стремящаяся к y_0, то по теореме Гейне

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. $\square$

Следствие. Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке X, дифференцируема на нем и $f'(x) \neq 0, \forall x \in X$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема на промежутке $f(X)$ и

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\Big|_{x = f^{-1}(y)}.$$

Замечание 1. Если выполняются условия теоремы и функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ по теореме о дифференцируемости суперпозиции функций следует, что

$$(f^{-1})'(y_0)\, f'(x_0) = 1 \text{ и } (f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}.$$

Замечание 2. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы, но при этом $f'(x_0) = 0$, то функция f^{-1} имеет в точке y_0 бесконечную производную.

Замечание 3. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы, но при этом $f'(x_0) = \infty$, то функция f^{-1} имеет в точке y_0 производную равную 0.

Пример 4.8. Покажем, что функция $\psi(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ дифференцируема на промежутке $(0, +\infty)$ и $\psi'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$.

■ Пусть для определенности $a > 1$. Функция ψ является обратной к функции $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$. Так как функция f возрастает и дифференцируема на $\mathbb{R}$, а $f'(x) = a^x \ln a \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, то по теореме 4.6 функция f^{-1} дифференцируема на $(0, +\infty)$, причем

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(y)} = (a^x \ln a)^{-1}\Big|_{x=\log_a y} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{\log_a e}{y}.$$

Значит функция $\psi(x) = \log_a x$ дифференцируема на $(0, +\infty)$ и $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$. В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty)$. □

Пример 4.9. Покажем дифференцируемость на интервале $(-1, 1)$ функции $\psi(x) = \arcsin x$ и наличие у нее производной на отрезке $[-1, 1]$.

■ Известно, что функция $\psi : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ является непрерывной обратной к функции $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Поскольку функция f дифференцируема на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, и

$$f'(x) = \cos x, \, \forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2], \;\; f'(\pm\pi/2) = 0, \;\; f(\pm\pi/2) = \pm 1,$$

то согласно теореме 4.6 и замечания 2 к ней, функция ψ дифференцируема на $(-1, 1)$,

$$\psi'(y) = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \, \forall\, y \in (-1, 1),$$

и $\psi'(\pm 1) = \infty$. □

Пример 4.10. Пусть функции $y = U(x)$ и $y = V(x)$ дифференцируемы на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $U(x) > 0, \forall\, x \in X$. Докажем, что функция $g(x) = (U(x))^{V(x)}$ дифференцируема на X.

■ Действительно, так как $g(x) = \exp(V(x) \ln U(x))$, то в силу теорем 4.4 — 4.6 и примера 8 функция g дифференцируема на X и

$$g'(x) = \exp(V(x) \ln U(x)) \left(V'(x) \ln U(x) + V(x) \frac{U'(x)}{U(x)} \right). \; □$$

4.5 Инвариантность формы первого дифференциала

В начале главы показано, что если функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и x — независимая переменная ее, то

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)dx, \text{ где } dx = \Delta x. \tag{4.8}$$

Пусть функция $x = \psi(t)$, $\psi : T \to X$, дифференцируема в точке t_0 и $\psi(t_0) = x_0$. В силу теоремы о дифференцируемости суперпозиции функций функция $f \circ \psi$ дифференцируема в точке t_0 и

$$(f \circ \psi)'(t_0) = f'(\psi(t_0))\psi'(t_0) = f'(x_0)\psi'(t_0).$$

Поскольку t — независимая переменная функции $y = f \circ \psi(t)$, то

$$d(f \circ \psi)_{t_0}(\Delta t) = (f \circ \psi)'(t_0)dt = f'(x_0)\psi'(t_0)dt, \text{ где } dt = \Delta t.$$

Кроме того, $\psi'(t_0)dt = d\psi_{t_0}(\Delta t)$. Если обозначить $dx = d\psi_{t_0}(\Delta t)$, то получим

$$d(f \circ \psi)_{t_0}(\Delta t) = f'(x_0)dx. \tag{4.9}$$

Сопоставляя полученную формулу с (4.8), замечаем, что форма дифференциала функции $y = f(x)$ не зависит от того, является ли x независимой переменной или дифференцируемой функцией другой переменной. Это свойство называют свойством инвариантности формы дифференциала. Следует заметить, что в формуле (4.8) $dx = \Delta x$, а в (4.9) $dx = d\psi_{t_0}(\Delta t)$.

4.6 Производные высших порядков

Пусть функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на множестве $X_1 \subset X$. Тогда на множестве X_1 определена функция f'. Если функция f' дифференцируема в точке $a \in X_1$, то говорят, что функция f дважды дифференцируема в точке a, а производную $(f')'(a)$ называют второй производной функции f в точке a и обозначают одним из следующих символов

$$f''(a),\ f^{(2)}(a),\ \frac{d^2 f}{dx^2}(a).$$

Если функция f дважды дифференцируема в каждой точке множества $X_2 \subset X_1$, то говорят, что функция f дважды дифференцируема на множестве X_2. Функцию, определяемую правилом $x(\in X_2) \to f''(x)$, называют второй производной функции f на множестве X_2. Индуктивно можно ввести понятие n раз $(n > 1)$ дифференцируемой в точке и на множестве функции и n-ой производной функции f в точке и на множестве $X_n \subset X_{n-1}$. Например, если $n > 1$, то $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$, если последняя производная существует. Заметим, что при $n > 1$ для любого $k = 1, \dots, n-1$

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(k)})^{(n-k)}(x_0).$$

Пример 4.11. Пусть $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Покажем, что функция f дифференцируема любое число раз на $(0,+\infty)$.
■ В силу примера 4 функция f дифференцируема на $(0,+\infty)$ и

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x \in (0,+\infty).$$

Поскольку f' является произведением постоянной и степенной функций, то по теореме 4.4 она дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$. Следовательно, функция f дважды дифференцируема на нем и

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Заметим, что если $\alpha = 1$, то $f'(x) = 1$ и $f''(x) = 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, функция f $(n-1)$ раз дифференцируема на $(0,+\infty)$ и $f^{(n-1)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}$.

Функция $f^{(n-1)}$ является произведением числа $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)$ и степенной функции $x^{\alpha-n+1}$. Поэтому она дифференцируема на $(0,+\infty)$ и $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Следовательно, функция f дифференцируема в области определения любое число раз и

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \ \forall n \in N. \ \square$$

В частности, если $\alpha = k_0 \in \mathbb{N}$, то

$$f^{(n)}(x) = 0, \ \forall n > k_0, \ \forall x \in (0,+\infty); \ f^{(k_0)}(x) = k_0!, \ \forall\, x \in (0,+\infty).$$

Если $\alpha = -1$, то $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$, $\forall\, x \in (0,+\infty)$.

Из теоремы 4.5 получаем, что функция $f(x) = (ax+b)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, дифференцируема любое число раз при $x > -\dfrac{b}{a}$ и

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}a^n.$$

Наконец, согласно теореме 4.4, многочлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \ m \in \mathbb{N}, \ a_m \neq 0,$$

дифференцируем на $\mathbb{R}$ любое число раз и

$$P^{(n)}(x) = 0, \ \forall n > m, \ P^{(m)}(x) = m!\, a_m, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Пример 4.12. Докажем, что функция $f(x) = \ln x$ дифференцируема любое число раз на $(0,+\infty)$.
■ В примере 8 показано, что рассматриваемая функция f дифференцируема в области определения и $f'(x) = x^{-1}$. Учитывая предыдущий пример и определение производной n-го порядка, заключаем, что функция f дифференцируема

любое число раз на интервале $(0, +\infty)$ и

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}. \ \square$$

Замечание. Функция $y = \ln(ax+b)$ дифференцируема любое число раз в области её определения и

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}.$$

Можно доказать, что функции $a^{bx+c}, \sin(ax+b), \cos(ax+b)$ дифференцируемы любое число раз на $\mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a^{bx+c})^{(n)} = b^n a^{bx+c} \ln^n a, \ \ (e^{bx+c})^{(n)} = e^{bx+c}\, b^n,$$

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+n\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Теорема 4.7. *Пусть функции f и φ n раз дифференцируемы на множестве X ($n \geq 2$). Тогда функции $f+\varphi$, $f\cdot\varphi$, n раз дифференцируемы на множестве X и*

$$(f+\varphi)^{(n)} = f^{(n)} + \varphi^{(n)},$$

$$(f\,\varphi)^{(n)} = f^{(n)}\varphi + nf^{(n-1)}\varphi' + \frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}\varphi'' + ... + f\varphi^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}\varphi^{(k)}, \ \ \textit{при этом } f^{(0)} = f.$$

■ Последняя формула носит имя Лейбница и очень напоминает бином Ньютона. Только её и докажем, используя метод математической индукции. При $n = 1$ по утверждению 2) теоремы 4.4 имеем: $f\cdot\varphi$ дифференцируема на множестве X и $(f\,\varphi)' = f'\varphi + \varphi' f$, поэтому доказываемое утверждение верно при $n = 1$. Предположим, что для некоторого номера $m < n$ функция $f\cdot\varphi$ дифференцируема m раз на X и

$$(f\cdot\varphi)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\, f^{(k)}\, \varphi^{(m-k)}. \tag{4.10}$$

Так как функции f и φ дифференцируемы n раз на X и $m < n$, то функции $f, \varphi, f', \varphi', \ldots, f^{(m)}, \varphi^{(m)}$ дифференцируемы на множестве X. Поэтому правая часть равенства (4.10) является дифференцируемой на X функцией, а значит функция $f\cdot\varphi$ $(m+1)$ раз дифференцируема на X и

$$(f\cdot\varphi)^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(f^{(k+1)}\varphi^{(m-k)} + f^{(k)}\varphi^{(m-k+1)}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k+1)} \varphi^{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)} \varphi^{(m-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} f^{(k)} \varphi^{(m-k+1)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)} \varphi^{(m-k+1)} =$$

$$= f^{(m+1)}\varphi + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} \right) f^{(k)} \varphi^{(m-k+1)} + f\varphi^{(m+1)} =$$

$$= f^{(m+1)}\varphi + \sum_{k=1}^{m} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} f^{(k)} \varphi^{(m-k+1)} + f\varphi^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} f^{(k)} \varphi^{((m+1)-k)}. \ \square$$

Пример 4.13. Используя формулу Лейбница, найдем $n-$ую производную функции $f(x) = 2x^2 \sin^2 x$.

■ Так как $f(x) = x^2(1 - \cos 2x) = x^2 - x^2 \cos 2x$ и производные порядка выше, чем степень многочлена, тождественно равны нулю, то при $n > 2$

$$f^{(n)}(x) = -x^2(\cos 2x)^{(n)} - 2xn(\cos 2x)^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{2} 2(\cos 2x)^{(n-2)} =$$

$$= -x^2 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) - nx2^n \cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-n(n-1)2^{n-2} \cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -(4x^2 - n(n-1))2^{n-2} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2^n nx \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right). \ \square$$

4.7 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция f, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}$, дифференцируема n раз ($n \geq 2$) на X. Зафиксируем число $\Delta x \neq 0$ и рассмотрим функцию $df(\Delta x)$, определенную на множестве X. Так как

$$df(\Delta x) = f' \, \Delta x, \tag{4.11}$$

то функция $df(\Delta x)$ дифференцируема на множестве X. Если $x_0 \in X$, то величину $d(df(\Delta x))_{x_0}(\Delta x)$ называют вторым дифференциалом функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx независимой переменной, и обозначают $d^2 f_{x_0}(\Delta x)$. Из формулы (4.11) получаем, что

$$d^2 f_{x_0}(\Delta x) = d(f' \, \Delta x)_{x_0}(\Delta x) = (f' \, \Delta x)'(x_0) \, \Delta x = f''(x_0)(\Delta x)^2.$$

Для сокращения записи, используются обозначения

$$(\Delta x)^2 = \Delta x^2, \quad (dx)^2 = dx^2.$$

Следовательно, второй дифференциал функции f в точке x_0 вычисляется по формуле

$$d^2 f_{x_0}(\Delta x) = f''(x_0)\, \Delta x^2, \quad d^2 f_{x_0}(dx) = f''(x_0)\, dx^2.$$

По условию функция f дважды дифференцируема на множестве X, поэтому на X определена функция $x \to d^2 f_x(\Delta x)$ (Δx — фиксированное число), которую называют вторым дифференциалом функции f на множестве X, соответствующим приращению Δx независимой переменной. Ее обозначают $d^2 f(\Delta x)$. В силу предыдущего

$$d^2 f(\Delta x) = f'' \cdot \Delta x^2. \tag{4.12}$$

Индуктивно вводится понятие n-го дифференциала функции f в точке x_0 из X и на множестве X. По индукции легко доказывается, что

$$d^k f_{x_0}(\Delta x) = f^{(k)}(x_0)\, \Delta x^k,\ d^k f(\Delta x) = f^{(k)} \cdot \Delta x^k,\ 1 \le k \le n.$$

В этой формуле $\Delta x^k = (\Delta x)^k$. Аналогично предыдущему, в ней вместо Δx можно использовать dx, сокращая в записи $(dx)^k$ до dx^k.

Лемма 4.3. *Дифференциалы второго и высших порядков, вообще говоря, не обладают свойством инвариантности формы.*

■ Доказательство проведем для дифференциалов второго порядка. Пусть функция f дважды дифференцируема на множестве $X \subset \mathbb{R}$, а функция $\varphi : T \to X$ дважды дифференцируема на множестве T. В силу теоремы 4.5 функция $f \circ \varphi$ дифференцируема на T и $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Но f и φ дважды дифференцируемы на T, поэтому $f' \circ \varphi$ и φ' — дифференцируемые на T функции и функция $f \circ \varphi$ дважды дифференцируема на множестве T. Учитывая свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка, получим, что

$$d^2(f \circ \varphi)(\Delta t) = d\left(d(f \circ \varphi)\,(\Delta t)\right)\,(\Delta t) = d((f' \circ \varphi)\, d\varphi(\Delta t))(\Delta t) =$$

$$= d(f' \circ \varphi)(\Delta t)\, d\varphi(\Delta t) + (f' \circ \varphi)\, d^2\varphi(\Delta t) =$$
$$= (f'' \circ \varphi)\, \left(d\varphi(\Delta t)\right)^2 + (f' \circ \varphi)\, d^2\varphi(\Delta t).$$

Итак, функция $f \circ \varphi$ дважды дифференцируема и

$$d^2(f \circ \varphi)(\Delta t) = (f'' \circ \varphi)\, \left(d\varphi(\Delta t)\right)^2 + (f' \circ \varphi)\, d^2\varphi(\Delta t).$$

Сравнивая представление второго дифференциала функции $f(\varphi(t))$ с формулой (4.12) для второго дифференциала функции $f(x)$, в котором x — независимая переменная, убеждаемся в том, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы. Тем более не обладают свойством инвариантности формы последующие дифференциалы. □

Замечание. Если $\varphi(t) = at + b$, то формы дифференциалов высших порядков функции f и $f \circ \varphi$ совпадают

$$d^n f_x(dx) = f^{(n)}(x)\, dx^n,$$

$$d^n (f \circ \varphi)_t(dt) = f^{(n)}(\varphi(t))\, (d\varphi_t(dt))^n, \text{ где } d\varphi_t(dt) = a\, dt.$$

В заключение приведем определение, которым воспользуемся в дальнейшем.

Определение 4.8. *Функция f называется n раз непрерывно дифференцируемой на множестве X, если она n раз дифференцируема на нем и функция $f^{(n)}$ непрерывна на X. Класс функций непрерывно дифференцируемых n раз на множестве X будем обозначать $C^n(X)$.*

4.8 Свойства функций, дифференцируемых на промежутках

Теорема 4.8 (Ферма)**.** *Пусть функция f определена на промежутке X, и в некоторой его внутренней точке c принимает наибольшее или наименьшее значение. Если функция f дифференцируема в точке c, то $f'(c) = 0$.*

■ Для определенности будем считать, что функция f имеет в точке $x = c$ наибольшее значение, то есть $f(x) - f(c) \le 0, \ \forall\, x \in X$. Предположим, что $f'(c) \ne 0$. По условию функция f дифференцируема в точке c, поэтому

$$f(x) - f(c) = (f'(c) + \alpha(x))(x - c), \ \forall\, x \in (a, b) \setminus \{c\} \tag{4.13}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to c$. По локальному свойству функции, имеющей в точке конечный, отличный от нуля, предел, найдется окрестность $\overset{\circ}{U}_c \subset X$, в которой функция $f'(c) + \alpha(x)$ сохраняет знак числа $f'(c)$. Функция $(x - c)$ имеет в этой окрестности по разные стороны от точки c значения разных знаков. Поэтому правая часть равенства (4.13) имеет в окрестности U_c по разные стороны от точки c значения разных знаков. Но по предположению на интервале X, а, значит, и в окрестности U_c, $f(x) - f(c) \le 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f'(c) = 0$. □

Замечание 1. Если функция f определена на промежутке $[a, b)$, принимает наибольшее или наименьшее значение в точке $x = a$ и дифференцируема в ней, то может случиться, что $f'(a) \ne 0$. Как подтверждение можно рассмотреть функцию $f(x) = x$ на $[0, 1)$.

Замечание 2. Если функция f определена на (a, b), дифференцируема в точке $c \in (a, b)$ и $f'(c) = 0$, то не обязательно $f(c)$ есть наибольшее или наименьшее значение функции на интервале (a, b). Например, функция $f(x) = x^3$ дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, возрастает на нем и $f'(0) = 0$.

Замечание 3. Геометрически теорема Ферма означает, что в точке $(c, f(c))$ график функции $y = f(x)$ имеет горизонтальную касательную.

Теорема 4.9 (Дарбу). *Если функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'(a)\, f'(b) < 0$ (то есть f' принимает на концах отрезка значения разных знаков), то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.*

■ Для определенности будем считать, что $f'(a) > 0$ и $f'(b) < 0$. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в силу теоремы Вейерштрасса она принимает на нем наибольшее значение, то есть

$$\exists p \in [a, b] : f(p) = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}.$$

Покажем, что $p \neq a$. Так как $f'(a) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \forall\, x \in (a, a + \delta).$$

Но $x - a > 0, \forall\, x \in (a, a + \delta)$, поэтому $f(x) > f(a), \forall x \in (a, a + \delta)$. А это означает, что $f(a) \neq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Аналогично доказывается, что
$p \neq b$. Значит, $p \in (a, b)$ и по теореме Ферма 4.8 $f'(p) = 0$. □

Следствие 1. Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$, функция f' принимает на концах его различные значения. Тогда для любого числа c, находящегося между $f'(a)$ и $f'(b)$, найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$ что $f'(\gamma) = c$.
■ Будем считать, что $f'(a) < f'(b)$. Фиксируем число $c \in (f'(a), f'(b))$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - c\,x$. Она дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\varphi'(a) = f'(a) - c < 0, \quad \varphi'(b) = f'(b) - c > 0.$$

По теореме Дарбу есть такая точка $\gamma \in (a, b)$, что $\varphi'(\gamma) = 0$, то есть $f'(\gamma) = c$.
□

Следствие 2. Если функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, то функция f' сохраняет знак на отрезке $[a, b]$.

Замечание 1. Теорема Дарбу имеет сходство с теоремой Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной функции, но не является ее следствием, поскольку функция f' не обязательно непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Замечание 2. Не всякая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ может быть производной какой-либо функции. Например, функция $\operatorname{sgn} x$ является производной функции $y = |x|$ на промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$, но нет функции, для которой она является производной на отрезке $[-1, 1]$.

Теорема 4.10 (Ролля). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает на концах равные значения, то есть $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

■ По условию функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Поэтому существуют точки p и q из $[a,b]$ такие, что

$$f(p) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad f(q) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Если $f(p) = f(q)$, то функция f постоянна на отрезке $[a,b]$ и

$$f'(x) = 0, \forall x \in [a,b].$$

Если $f(p) \neq f(q)$, то одна из точек p, q лежит в интервале (a,b). Её мы обозначим через c. По теореме Ферма 4.8 $f'(c) = 0$. □

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b). Тогда между точками, в которых функция f равна нулю, найдется по крайней мере одна точка, в которой функция f' равна нулю.

Следствие 2. Если $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ — многочлен n-ой степени (то есть, $a_n \neq 0$), то уравнение $P_n(x) = 0$ имеет не более чем n различных корней.

■ Пусть уравнение $P_n(x) = 0$ имеет не менее $(n+1)$ различных корней $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, причем $x_j < x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $P_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$ — многочлен $(n-1)$-ой степени. По теореме Ролля

$$\exists\, b_j \in (x_j, x_{j+1}), j = 1, \ldots, n \,:\, P_n'(b_j) = 0,$$

то есть уравнение $P_n'(x) = 0$ имеет не менее n различных корней. Продолжая дифференцирование уравнения, и применяя на каждом шаге теорему Ролля, получим, что для каждого $m < n$

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} k(k-1)\ldots(k-m+1)\, a_k\, x^{k-m},$$

и уравнение $P_n^{(m)}(x) = 0$ имеет не менее $(n-m+1)$ различных корней. В частности, при $m = n$ уравнение $P_n^{(n)}(x) = 0$ имеет не менее 1-го корня. Но, с другой стороны, $P_n^{(n)}(x) = n!\, a_n \neq 0$, а, значит, уравнение $P_n^{(n)}(x) = 0$ и не имеет корней. Полученное противоречие и доказывает следствие. □

Из результата применения теоремы Ролля в начале доказательства этого следствия сразу же следует ещё один результат.

Следствие 3. Если $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ — многочлен n-ой степени и уравнение $P_n(x) = 0$ имеет m $(m \leq n)$ различных корней, то уравнение $P_n'(x) = 0$ имеет $(m-1)$ различных корней.

Замечание 1. Если для функции f не выполнено хотя бы одно условие теоремы 4.10, то для нее, вообще говоря, не имеет место утверждение теоремы.

Замечание 2. Геометрически теорема Ролля означает следующее: если график непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции имеет в точках $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ невертикальные касательные и ординаты крайних точек равны, то есть $f(a) = f(b)$, то на графике есть точка $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$, в которой касательная параллельна оси OX.

Теорема 4.11 (Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Последнюю формулу часто называют формулой Лагранжа.*

■ Для доказательства теоремы рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $F(a) = F(b)$. Применив к ней теорему Ролля 4.10, найдем точку $c \in (a, b)$ такую, что $F'(c) = 0$. Поскольку $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то есть имеет место формула Лагранжа. □

Следствие. Пусть функция f непрерывна на $[x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, и дифференцируема на $(x_0, x_0 + \delta)$. Тогда для любого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ найдется такое $\vartheta_x \in (0, 1)$, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \vartheta_x(x - x_0))\,(x - x_0).$$

■ Последнюю формулу обычно называют формулой Лагранжа конечных приращений. Она имеет место, так как на отрезке $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + \delta)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа и соответствующая точка c_x имеет представление $c_x = x_0 + \vartheta_x(x - x_0)$, где $\vartheta_x \in (0, 1)$. □

Аналогичные результаты имеют место и на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$.

Замечание 1. Формулу конечных приращений Лагранжа следует отличать от приближенного равенства

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

которое имеет место при условии дифференцируемости функции f в точке x_0. Последнюю формулу обычно называют формулой бесконечно малых приращений, поскольку

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0.$$

Замечание 2. Пусть график непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции в каждой точке $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, имеет невертикальные касательные. Тогда на нем найдется точка $(c, f(c))$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика.

Замечание верно, так как $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — угловой коэффициент рассматриваемой хорды, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке $(c, f(c))$.

Теорема 4.12 (критерий монотонности функции)**.** *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема в его внутренних точках. Для того чтобы функция f не убывала на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ в каждой внутренней точке множества X.*

■ Пусть функция f является неубывающей непрерывной на промежутке X функцией, которая дифференцируема в каждой внутренней точке, и x — некоторая точка из соответствующего интервала. Тогда для любого $\Delta x > 0$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \text{ если } x + \Delta x \in X.$$

Поэтому $f'(x) \geq 0$.

Пусть $f'(x) \geq 0$ в каждой внутренней точке промежутка X и x_1, x_2 — произвольные точки множества X, причем $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа 4.11, получим равенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

в котором $c \in (x_1, x_2)$. Следовательно, $f(x_2) \geq f(x_1)$, а поэтому функция f не убывает на промежутке X. □

Замечание. Аналогично можно доказать, что при выполнении условий теоремы 4.12 функция f не возрастает на промежутке X тогда и только тогда, когда $f'(x) \leq 0$ в каждой точке промежутка X.

Теорема 4.13 (критерий постоянства функции)**.** *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема в его внутренних точках. Чтобы функция f была постоянной на X, необходимо и достаточно, чтобы в каждой внутренней точке промежутка X $f'(x) = 0$.*

■ Если функция f постоянна на промежутке X, то $f'(x) = 0$ в каждой его точке. Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь $f'(x) = 0$ во внутренних точках промежутка X и $x_0 \in X$. Тогда для любого $x \in X$, применяя к отрезку $[x_0, x]$ теорему Лагранжа 4.11, получим

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_x)(x - x_0), \; c_x \in (x_0, x).$$

Следовательно, $f(x) = f(x_0), \forall x \in X$, что доказывает вторую часть утверждения. $\square$

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема в его внутренних точках. Для того чтобы функция f была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) во внутренних точках промежутка X и не существовало интервала $(\alpha, \beta) \subset X$, на котором $f'(x) = 0$.

Следствие 2. Если на промежутке X функция f имеет положительную (отрицательную) производную, то функция f имеет обратную функцию $f^{-1} : f(X) \to X$, которая дифференцируема на промежутке $f(X)$.

Теорема 4.14 (Коши)**.** *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), при этом $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Последнюю формулу называют обобщенной формулой конечных приращений или формулой Коши.

■ Прежде всего заметим, что $g(b) \neq g(a)$, поскольку в противном случае в интервале (a, b) нашлась бы точка c такая, что $g'(c) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $F(a) = F(b)$. Применяя к F теорему Ролля 4.10 и имея в виду, что

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

делаем вывод, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$, то есть

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(x)}. \ \square$$

Замечание 1. Теорема Лагранжа 4.11 является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$.

Замечание 2. В формуле Коши конечных приращений не обязательно считать, что $a < b$. Эта формула верна и при $b < a$.

4.9 Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть заданы две функции $\varphi : T \to X$, $\psi : T \to Y$. Будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ биективна. Поэтому определена обратная функция $t =$

$\varphi^{-1}(x)$, $\varphi^{-1} : X \to T$, а значит и суперпозиция $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Функцию $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ называют заданной параметрически и записывают одним из следующих способов:

$$f : x = \varphi(t),\, y = \psi(t),\, t \in T; \; f : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\, t \in T.$$

Переменную t называют параметром функции $f : X \to Y$. Вопрос о дифференцировании параметрически заданной функции решает следующее утверждение.

Теорема 4.15. *Пусть T — промежуток и параметрически заданная функция $f : X \to Y$, $f : x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:*

1) функции φ и ψ дифференцируемы на T;

2) $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in T$;

Тогда функция f дифференцируема на промежутке X, её производная f'_x является параметрически заданной функцией

$$f'_x : x = \varphi(t),\, y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\, t \in T. \tag{4.14}$$

■ Так как функция φ удовлетворяет условиям $1) - 2)$, то по следствию 2 теоремы Дарбу (4.9) функция φ' сохраняет знак на промежутке T. Поэтому, согласно следствию 1 теоремы 4.13, функция φ либо возрастает (если $\varphi'(t) > 0$ на T), либо убывает (если $\varphi'(t) > 0$ на T). Тогда по теореме 4.6 обратная функция $\varphi^{-1} : X \to T$ дифференцируема на промежутке $X = \varphi(T)$ и

$$(\varphi^{-1})'(x) = 1/\varphi'(\varphi^{-1}(x)),\, \forall x \in X.$$

Поскольку функция ψ дифференцируема на X, то по теореме о дифференцируемости суперпозиции функция $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ дифференцируема на X и

$$f'_x(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))\, \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)},\, \forall x \in X.$$

Последнее означает, что функция f'_x является параметрически заданной

$$f'_x : x = \varphi(t),\, y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\, t \in T. \; \square$$

4.10 Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Теорема 4.16. *Пусть функции f и φ дифференцируемы на интервале (a, b), $\varphi'(x) \neq 0, \forall\, x \in (a, b)$, и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = 0$. Если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = K,$$

то существует предел

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=K.$$

■ Рассмотрим два случая: $b\in\mathbb{R}$ и $b=+\infty$.

1) Пусть $b\in\mathbb{R}$ и для определенности $b>a$. Доопределим функции f и φ в точке b, положив $f(b)=\varphi(b)=0$. Теперь функции f и φ непрерывны на промежутке $(a,b]$ и удовлетворяют условиям теоремы Коши 4.14 на любом отрезке $[x,b]$, где $x\in(a,b)$. Поэтому для каждого $x\in(a,b)$ найдется точка $c_x\in(x,b)$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(b)}{\varphi(x)-\varphi(b)}=\frac{f'(c_x)}{\varphi'(c_x)},$$

то есть

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{f'}{\varphi'}\right)\circ c_x. \tag{4.15}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to b}c_x=b$, $c_x\neq b$, $\forall x\in(a,b)$, и

$$\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=K,$$

то по теореме 2.37 о пределе суперпозиции функций, условия которой выполнены, правая часть равенства (4.15) имеет предел при $x\to b$ и он равен K. Следовательно, существует предел левой части равенства (4.15) при $x\to b$ и он равен K.

2) Пусть теперь $b=+\infty$. Без ограничения общности будем считать, что $a>0$. По условиям теоремы функции f и φ дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$, $\varphi'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,+\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=K$. Тогда вспомогательные функции $F(t)=f(1/t)$ и $\Phi(t)=\varphi(1/t)$ дифференцируемы на интервале $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ и

$$F'(t)=f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),\ \Phi'(t)=\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),\ \forall\, t\in\left(0,\frac{1}{a}\right).$$

Кроме того, $\lim\limits_{t\to+0}F(t)=\lim\limits_{t\to+0}f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{t\to+0}\Phi(t)=0$ и

$$\lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{\Phi'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{\varphi'(1/t)}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{f'}{\varphi'}\right)\circ\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=K$$

(снова воспользовались теоремой 2.37 о пределе суперпозиции функций).

В силу доказанной первой части $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F(t)}{\Phi(t)}=K$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{\varphi(1/t)}=\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{\Phi(t)}=K.\ \square$$

Теорема 4.17. *Пусть функции f и φ дифференцируемы на интервале (a,b), $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = \infty$. Если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = K,$$

то существует предел

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K.$$

Мы опускаем доказательство этого утверждения, отсылая читателя к книгам [4, с. 318–320], [6, т.1, с. 280–284],[1, т.1, с. 256–260].

Совершенно аналогично формулируются и доказываются теоремы, аналогичные теоремам 4.16 и 4.17, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ или ∞, $a \in \mathbb{R}$, или $a = -\infty$.

Замечание 1. Предел отношения функций f и φ может существовать в случае, когда не существует предел отношения производных этих функций. Например, если $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $\varphi(x) = x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

но не существует предела при $x \to 0$ отношения производных этих функций, поскольку

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 4.16 и функции f' и φ' непрерывны в точке b, причем $\varphi'(b) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(b)}{\varphi'(b)}.$$

Замечание 3. Пусть функции f и φ дважды дифференцируемы на интервале (a,b), для всех $x \in (a,b)$ $\varphi'(x) \neq 0$, $\varphi''(x) \neq 0$, и

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} \varphi(x) = 0, \ \left(\lim_{x\to b} f(x) = \infty, \lim_{x\to b} \varphi(x) = \infty\right),$$

$$\lim_{x\to b} f'(x) = \lim_{x\to b} \varphi'(x) = 0, \ \left(\lim_{x\to b} f'(x) = \infty, \lim_{x\to b} \varphi'(x) = \infty\right).$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)} = K$, то существуют пределы

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = K,$$

то есть правило Лопиталя можно применить повторно.

4.11 Формула Тейлора

Теорема 4.18 (формула Тейлора для многочлена)**.** *Пусть a — некоторое число, P — многочлен степени n ($n \geq 1$). Тогда*

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

то есть многочлен P степени n однозначно определяется значениями многочлена и его производных $P(a)$, $P'(a)$,...,$P^{(n)}(a)$ в точке a.

■ Прежде всего заметим, что многочлен $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ всегда можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^n. \qquad (4.16)$$

Для этого в многочлене $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, заменим x^k на $((x-a)+a)^k$, раскроем внешние скобки, приведем подобные и получим представление (4.16). Поэтому можно считать, что многочлен $P(x)$ задан формулой (4.16). Выразим коэффициенты b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, многочлена $P(x)$ через значения его производных в точке a.

Из равенства (4.16) следует, что $P(a) = b_0$. Последовательно продифференцируем равенство (4.16) k раз ($k = 1, \ldots, n$) и получим, что $P^{(k)}(x) =$

$$= k!b_k + (k+1)k \ \ldots \ 2\, b_{k+1}(x-a) + \cdots + n(n-1) \ \ldots \ (n-k+1)b_n(x-a)^{n-k},$$

поэтому $P^{(k)}(a) = k!b_k$, то есть $b_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$, $k = 1, \ldots, n$, и потому многочлен P имеет представление

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \ \square$$

Пусть теперь функция f отлична от многочлена и дифференцируема n раз в точке a. Многочлен $T_n^f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ называют многочленом Тейлора порядка n функции f по степеням $(x-a)$. Согласно предыдущей теореме $(T_n^f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Положим

$$f(x) = T_n^f(x) + R_n^f(x). \qquad (4.17)$$

Если функция $f(x)$ не является многочленом степени n, то $R_n^f \not\equiv 0$. Равенство (4.17) называют формулой Тейлора функции f по степеням $(x-a)$, а функцию $R_n^f(x)$ — ее n-ным остаточным членом.

Теорема 4.19 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция f дифференцируема $(n-1)$ раз в промежутке $[a, a+\delta)$ и n раз в точке a $(n \in \mathbb{N})$. Тогда*

$$f(x) = T_n^f(x) + o((x-a)^n) \text{ при } x \to a.$$

■ Из равенства (4.17) $R_n^f(x) = f(x) - T_n^f(x)$. Поэтому функция R_n^f дифференцируема $(n-1)$ раз в промежутке $[a, a+\delta)$ и n раз в точке a. Кроме того, $(R_n^f)^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n^f(a)}{(x-a)^n} = 0$. Рассматриваемое отношение удовлетворяет условиям первого правила Лопиталя и при $(n-1)$-кратном его применении получим, что

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(R_n^f)'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{(R_n^f)^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)},$$

если последний предел существует. Поскольку функция $(R_n^f)^{(n-1)}$ дифференцируема в точке a и $(R_n^f)^{(n-1)}(a) = 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{(R_n^f)^{(n-1)}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(R_n^f)^{(n-1)}(x) - (R_n^f)^{(n-1)}(a)}{x-a} = (R_n^f)^{(n)}(a) = 0.$$

Следовательно, $(n-1)$-кратное применение правила Лопиталя законно и при $x \to a$ $R_n^f(x) = o((x-a)^n)$, то есть при $x \to a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n). \ \square$$

Полученное представление функции f называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Если же $a = 0$ — формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

Замечание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано является обобщением представлений для непрерывной и дифференцируемой в точке a функции.

Следствие. Пусть функции f и g n раз дифференцируемы в точке a и $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда при $x \to a$ имеет место представление $f(x) - g(x) = o((x-a)^n)$.

Так, например, для функций $g(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, условия следствия выполняются для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому при $x \to a$ $f(x) = o((x-a)^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.20. *Если выполнены условия теоремы 4.19 и существует многочлен $P_n(x)$ такой, что $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$ при $x \to a$, то он единственен.*

■ Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$. Согласно теореме 4.19, при $x \to a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k = o((x-a)^n),\ x \to a.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to a$, получим равенство

$$f(a) - a_0 = 0, \text{ то есть } a_0 = f(a).$$

Последнее означает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} - a_k\Big)(x-a)^{k-1} = o((x-a)^{n-1}) \text{ при } x \to a.$$

Отсюда при $x \to a$ получим равенство $\dfrac{f'(a)}{1!} - a_1 = 0$, то есть $a_1 = \dfrac{f'(a)}{1!}$. Продолжая этот процесс, по индукции получим, что

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k = 0, 1, \dots, n.$$

Поэтому многочлен $P_n(x)$ является многочленом Тейлора $T_n^f(x)$ функции f по степеням $(x-a)$. □

Замечание. Доказанная теорема означает, что никакой многочлен $P_n(x)$ степени n, отличный от многочлена Тейлора $T_n^f(x)$ порядка n не может приближать функцию f с точностью $o((x-a)^n)$ при $x \to a$.

Применяя теорему 4.19 к элементарным функциям при $a = 0$, получим:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n), \qquad x \to 0;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$
$$x \to 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n), x \to 0;$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}), x \to 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{(2n)} + o(x^{2n+1}), x \to 0.$$

Вывод этих формул читатель может найти в [6, т.1, с. 192–195].

Пример 4.14. Пусть функция f дифференцируема $(n+1)$ раз в точке $a = 0$ и известно, что

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n),\ x \to 0. \tag{4.18}$$

Найти локальную формулу Маклорена функции f.

■ По теореме 4.20 из (4.18) следует, что $(f')^{(k)}(0) = k!b_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому $f^{(k+1)}(0) = k!b_k$ или $f^{(k)}(0) = (k-1)!b_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ и

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{n+1}) =$$

$$= f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(k-1)!}{k!}b_{k-1}x^k + o(x^{n+1}),\ x \to 0.$$

После преобразования получим

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{k-1}}{k}x^k + o(x^{n+1}),\ x \to 0.$$

В частности, если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$ и

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),\ x \to 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, получаем представление

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0. \ \square$$

Теорема 4.21. *Пусть функция $f \in C^n([a, a+\delta))$, $\delta > 0$, и дифференцируема $(n+1)$ раз на интервале $(a, a+\delta)$. Тогда для любой точки $x \in (a, a+\delta)$, для любой функции φ, непрерывной на промежутке $[a, a+\delta)$, дифференцируемой на интервале $(a, a+\delta)$ и такой, что $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in (a, x)$, найдется такая точка $c_x \in (a, x)$, что*

$$R_n^f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c_x)} \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x - c_x)^n. \tag{4.19}$$

■ Фиксируем точку $x \in (a, a+\delta)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \Big(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big).$$

В силу условий теоремы, $F \in C([a, a+\delta))$, дифференцируема на интервале $(a, a+\delta)$ и $\forall\, t \in (a, a+\delta)$

$$F'(t) = -\Big(f'(t) + \Big(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\Big) + \Big(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\Big) + \dots$$

$$\dots + \Big(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big)\Big) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применим к функциям F и φ на отрезке $[a, x]$ теорему Коши 4.14 о конечных приращениях, получим, что существует точка $c_x \in (a, x)$ такая, что

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(c_x)}{\varphi'(c_x)}. \tag{4.20}$$

Поскольку $F(x) = 0$, а

$$F(a) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) = R_n^f(x),$$

то соотношение (4.20) принимает вид

$$\frac{-R_n^f(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = -\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{\varphi'(c_x)n!}(x - c_x)^n,$$

из которого и следует представление (4.19) остаточного члена R_n^f формулы Тейлора, которое называется формой Шлемильха и Роша. $\square$

Следствие 1. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 4.21, то для любого $x \in (a, a+\delta)$ найдется такая точка $c_x \in (a, x)$, что

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)},$$

то есть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.21}$$

Замечание. Формулу (4.21) называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Чтобы её получить, достаточно положить в представлении (4.19) $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа является обобщением теоремы Лагранжа 4.11, которая получается из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 0$.

Следствие 2. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 4.21, то для любого $x \in (a, a+\delta)$ найдется такое $\theta_x \in (0, 1)$, что

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))}{n!}(1-\theta_x)^n(x-a)^{n+1}.$$

Замечание. Эта форма остаточного члена формулы Тейлора называется формой Коши. Чтобы её получить, достаточно положить в представлении (4.19) $\varphi(t) = (x - t)$.

Завершая раздел, заметим, что все его результаты остаются в силе, если рассматривать функцию f на промежутках $(a - \delta, a]$ и $(a - \delta, a + \delta)$.

4.12 Исследование поведения функции на множестве

4.12.1 Экстремум функции

Определение 4.9. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Точка $a \in X$ называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует окрестность U_a, такая что*

$$U_a \subset X \text{ и } f(x) \leq f(a), \forall\, x \in U_a \ (f(x) \geq f(a), \forall\, x \in U_a).$$

Если функция f имеет в точке a локальный максимум или минимум, то говорят, что f имеет в точке a локальный экстремум, или что точка a является точкой локального экстремума функции f.

Теорема 4.22 (необходимое условие локального экстремума)**.** *Если функция f имеет в точке a локальный экстремум и f дифференцируема в точке a, то $f'(a) = 0$.*

■ Утверждение следует непосредственно из теоремы Ферма (теоремы 4.8), примененной к окрестности U_a, указанной в определении экстремума. □

Определение 4.10. *Стационарными точками функции f на множестве X называются те внутренние точки X, в которых $f'(x) = 0$.*

Заметим, что функция $f(x) = x^{2/3}$ имеет в точке $x = 0$ локальный минимум, но $f'(0) = \infty$. Поэтому справедлива

Теорема 4.23. *Если функция f имеет в точке a локальный экстремум, то либо f дифференцируема в точке a и $f'(a) = 0$, либо функция f не дифференцируема в точке a.*

Определение 4.11. *Внутренняя точка множества X, в которой функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо бесконечности, либо не существует, называется критической точкой функции f.*

Например, точка $x = 0$ является критической точкой функций $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{2/3}$. Из графиков этих функций следует, что она является точкой локального минимума функций $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^{2/3}$, а для функций $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{1/3}$ она не является точкой локального экстремума. Таким образом, не всякая критическая точка функции является ее точкой экстремума.

Теорема 4.24 (достаточное условие экстремума в критической точке). *Пусть функция f определена на промежутке X, a — критическая точка функции и функция f дифференцируема в некоторой окрестности $U_a(\delta)$ точки a, кроме, быть может, самой точки a. Если функция $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку a, то есть на интервалах $(a-\delta, a)$ и $(a, a+\delta)$ $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то a — точка экстремума функции f. При этом, если*

$$f'(x) > 0, \forall\, x \in (a-\delta, a) \text{ и } f'(x) < 0, \forall\, x \in (a, a+\delta),$$

то a является точкой максимума функции, а если

$$f'(x) < 0, \forall\, x \in (a-\delta, a) \text{ и } f'(x) > 0, \forall\, x \in (a, a+\delta),$$

то a — точка минимума функции. Если же функция $f'(x)$ не меняет знак при переходе через a, то a не является точкой экстремума функции f.

■ Пусть $f'(x) > 0$ на $(a-\delta, a)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(a, a+\delta)$. Так как a — критическая точка функции, то f непрерывна в точке a. Поэтому функция f непрерывна на промежутке $(a-\delta, a]$ и $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (a-\delta, a)$, непрерывна на промежутке $[a, a+\delta)$ и $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (a, a+\delta)$. В силу критерия монотонности функции на промежутке (см. следствие 1 теорем 4.12 и 4.13) функция f возрастает на $(a-\delta, a]$ и убывает на $[a, a+\delta)$, поэтому $f(x) \le f(a)$, $\forall\, x \in U_a$, то есть функция f имеет в точке a локальный максимум.

Аналогично рассматриваются и два других случая. □

Замечание. Условие изменения знака производной при переходе через точку a является достаточным условием локального экстремума, но не является необходимым. Для примера можно рассмотреть в окрестности точки $x = 0$ функцию $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$

Теорема 4.25 (достаточное условие экстремума в стационарной точке). *Пусть a — стационарная точка функции $f : X \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в некоторой окрестности точки a и дважды дифференцируема в точке a. Если $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), то точка a является точкой локального минимума (соответственно, максимума) функции f.*

■ Так как a — стационарная точка функции f, то $f'(a) = 0$. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема 4.19) для всех $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2}(\Delta x)^2 + o\left((\Delta x)^2\right) = (\Delta x)^2\left(\frac{f''(a)}{2} + \alpha(\Delta x)\right),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Пусть $f''(a) > 0$. Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то существует такое $\delta_0 \in (0, \delta)$, что

$$\alpha(\Delta x) < \frac{f''(a)}{4}, \ \forall\, \Delta x \, : \, 0 < |\Delta x| < \delta_0.$$

Но тогда для таких Δx

$$f(x) - f(a) > (\Delta x)^2 \left(\frac{f''(a)}{2} - \frac{f''(a)}{4} \right) = (\Delta x)^2 \, \frac{f''(a)}{4} > 0,$$

то есть функция f имеет в точке a локальный минимум.

Аналогично доказывается, что функция f имеет в точке a локальный максимум, если $f''(a) < 0$. $\square$

Замечание. Если $f''(a) = 0$, то функция может иметь в точке a локальный экстремум (как функция $f(x) = x^4$ в точке $a = 0$), а может и не иметь (как функция $f(x) = x^3$ в точке $a = 0$). Для ответа на вопрос, является ли в этом случае точка a точкой экстремума можно привлечь информацию о производных более высокого порядка.

Теорема 4.26. *Пусть функция $f : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ $(n - 1)$ раз дифференцируема в $(a - \delta, a + \delta)$, n раз дифференцируема в точке a и*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \ \ f^{(n)}(a) \neq 0. \tag{4.22}$$

Тогда

a) если n — четное число, то a — точка локального экстремума f: максимума, если $f^{(n)}(a) < 0$, и минимума, если $f^{(n)}(a) > 0$.

b) если n — нечетное число, то a не является точкой экстремума функции f.

■ Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и условие (4.22), получим, что

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n) \text{ при } x \to a$$

или

$$f(x) - f(a) = (x - a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \right),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Учитывая, что $f^{(n)}(a) \neq 0$, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, найдем такое $\delta_0 > 0$, что $|\alpha(x)| < \dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$ для всех $x \in (a - \delta_0, a + \delta_0) \setminus \{a\}$. Поэтому в проколотой δ_0-окрестности точки a

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \right) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a) \text{ и } \operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sgn}(x - a)^n f^{(n)}(a).$$

Если n — четное число, то для всех $x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\}$

$$(x-a)^n > 0 \text{ и } \operatorname{sgn}(f(x)-f(a)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a).$$

Если $f^{(n)}(a) > 0$, то $f(x) > f(a)$, $\forall\, x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\}$, и f имеет в точке a локальный минимум. Если $f^{(n)}(a) < 0$, то $f(x) < f(a)$, $\forall\, x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\}$, и f имеет в точке a локальный максимум. Если n — нечетное число, то функция $(x-a)^n$ имеет противоположные знаки по разные стороны от точки a, то есть разность $f(x)-f(a)$ меняет знак при переходе через точку a. Последнее означает, что a не является точкой экстремума функции f. $\square$

Замечание. Очевидно, что теорема 4.25 является следствием теоремы 4.26.

С задачей локального экстремума тесно связана задача о наибольшем и наименьшем значении непрерывной функции на промежутке. Для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, согласно 2-ой теореме Вейерштрасса существует точка $p \in [a,b]$, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка $q \in [a,b]$, в которой функция принимает наименьшее значение. Если $p \in (a,b)$, то точка p является точкой локального максимума функции, а если $q \in (a,b)$, то q является точкой локального минимума функции. Поэтому наибольшее $(\sup\{f(x) : x \in [a,b]\})$ и наименьшее $(\inf\{f(x) : x \in [a,b]\})$ значения функция f на $[a,b]$ может принимать либо в критических точках, лежащих в интервале (a,b), либо в точках a, b.

Если $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то вместо значений функции в точках a, b, следует рассматривать

$$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to b} f(x),$$

если такие пределы существуют (конечные или бесконечные). Точно также следует поступать и на промежутках $[a,b)$ и $(a,b]$.

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке X часто встречается ситуация, когда функция непрерывна на X и имеет на нем единственную критическую точку. Можно доказать, что, если x_0 — точка локального максимума, то $f(x_0) = \sup\{f(x), x \in X\}$, а если x_0 — точка локального минимума, то $f(x_0) = \inf\{f(x), x \in X\}$.

Пример 4.15. Исследовать на экстремум $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$.

■ Функция f непрерывна и дифференцируема на $[0,+\infty)$, причем

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x);\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

Таким образом, функция f имеет на $(0,+\infty)$ единственную стационарную точку. Из таблицы

$\operatorname{sgn} f'(x)$		$+$		$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

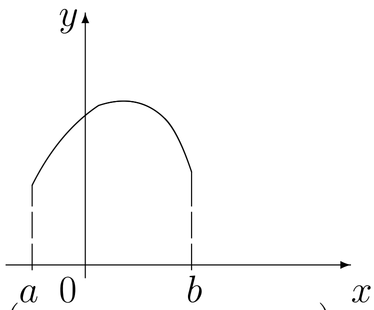
и теоремы 4.24 следует, что функция f имеет в точке $x = 1$ локальный максимум. При этом $f(1) = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = \dfrac{1}{e}$. $\square$

4.12.2 Направление выпуклости графика функции

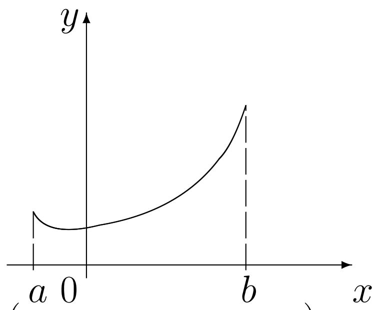
Будем считать, что функция f дифференцируема на интервале (a, b), то есть график Γ_f функции f имеет в каждой точке невертикальную касательную.

Определение 4.12. *Говорят, что график функции f обращен выпуклостью вверх на интервале (a, b) (или функция f является выпуклой вверх на (a, b)), если график Γ_f функции лежит не выше касательных, проведенных в точках $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, к этому графику.*

Определение 4.13. *Говорят, что график функции f обращен выпуклостью вниз на интервале (a, b), если на нем Γ_f лежит не ниже касательных, проведенных в точках $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, к Γ_f.*



(выпуклость вверх)



(выпуклость вниз)

Теорема 4.27. *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$) на (a, b), то график Γ_f обращен выпуклостью вверх (соответственно, вниз) на (a, b).*

■ Пусть $f''(x) \ge 0, \forall\, x \in (a, b)$, и c — некоторая точка интервала (a, b). Уравнение касательной, проведенной к Γ_f в точке $(c, f(c))$ имеет вид $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Поскольку функция f дважды дифференцируема на (a, b), то из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что $\forall\, x \in (a, b)\ \exists\, \eta_x$, лежащая между (c, x), такая, что

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\eta_x)}{2!}(x - c)^2.$$

Поэтому $f(x) - y_{\text{кас}}(x) = \dfrac{f''(\eta_x)}{2!}(x - c)^2, \forall\, x \in (a, b)$. Так как $f''(x) \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) \ge y_{\text{кас}}(x), \forall\, x \in (a, b)$. Поскольку c — произвольная точка интервала (a, b), то Γ_f обращен выпуклостью вниз на (a, b). $\square$

Следствие. Если функция f'' непрерывна и положительна (отрицательна) в точке c, то существует такая окрестность U_c точки c, в которой график Γ_f обращен выпуклостью вниз (соответственно, вверх).

Замечание 1. Если на интервале (a, b) $f''(x) = 0$, то $f(x) = kx + c$ и можно считать, что график функции обращен на (a, b) как выпуклостью вверх, так и вниз.

Замечание 2. Из определений 4.12 и 4.13 следует, что если график Γ_f обращен выпуклостью вверх, то всякая хорда, соединяющая две различные точки графика функции, лежит под соответствующей дугой Γ_f, а для функции, выпуклой вниз, она лежит над соответствующей дугой Γ_f. Это свойство часто берется в качестве определения выпуклости Γ_f вверх и, соответственно, вниз.

Пример 4.16. Пусть $f(x) = x^{2/3}$. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, дважды дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f''(x) = -\dfrac{2}{9}x^{-4/3} < 0, \forall\, x \neq 0$. Поэтому на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ график функции обращен выпуклостью вверх.

4.12.3 Точки перегиба

Определение 4.14. *Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b), $c \in (a, b)$. Точку c называют точкой перегиба функции f (или графика функции), если существует такая окрестность $U_c(\delta)$ точки c, что на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ график Γ_f имеет различные направления выпуклости.*

Теорема 4.28 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть c — точка перегиба функции f и f имеет в точке c конечную вторую производную. Тогда $f''(c) = 0$.*

■ Для простоты доказательства будем считать, что функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U_c(\delta_0)$ точки c и $f''(x)$ непрерывна в точке c.

Предположим, что $f''(c) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f''(x)$ в точке c существует такое $\delta \in (0, \delta_0)$, что на интервале $U_c(\delta)$ $f''(x)$ сохраняет знак. По теореме 4.27 Γ_f обращен выпуклостью вверх, если $f''(c) < 0$, и вниз, если $f''(c) > 0$, на интервале $U_c(\delta)$. Но тогда c не является точкой перегиба функции f. Следовательно, $f''(c) = 0$. □

Замечание. Условие $f''(c) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием наличия у функции f в точке c перегиба. Подтверждением может служить функция $f(x) = x^4$.

Как и при рассмотрении необходимых условий экстремума функции, можно показать, что точки перегиба непрерывной на интервале (a, b) функции f следует искать среди тех точек $c \in (a, b)$, в которых либо функция дважды дифференцируема и $f''(c) = 0$, либо функция f не является дважды дифференцируемой.

Теорема 4.29 (1-ое достаточное условие перегиба). *Пусть функция f непрерывна на интервале (a,b) и функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $c \in (a,b)$, кроме, быть может, точки c. Если $f''(c) = 0$ или $f''(c)$ не существует, а функция $f''(x)$ в этой окрестности по разные стороны от точки c имеет противоположные знаки, то c — точка перегиба функции f.*

■ Пусть, например, на интервале $(c-\delta, c)$ $f''(x) > 0$, а на интервале $(c, c+\delta)$ $f''(x) < 0$. Тогда по теореме 4.27 функция f на интервале $(c-\delta, c)$ обращена выпуклостью вниз, а на интервале $(c, c+\delta)$ — вверх. Поэтому c — точка перегиба функции f. □

Пример 4.17. Исследовать на перегиб функцию $f(x) = x^{5/3}$.

■ Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f''(x) = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$, $x \neq 0$. Тогда на интервале $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0$ и график Γ_f обращен выпуклостью вверх, а на интервале $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$ и график Γ_f обращен выпуклостью вниз, поэтому точка $x = 0$ — точка перегиба функции f. □

Теорема 4.30 (2-ое достаточное условие перегиба). *Пусть функция f трижды дифференцируема в точке c и $f''(c) = 0$, а $f^{(3)}(c) \neq 0$. Тогда c — точка перегиба функции f.*

■ Так как функция f трижды дифференцируема в точке c, то функция $f''(x)$ дифференцируема в точке c, поэтому в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c) + o(x-c),\ x \to c.$$

Но $f''(c) = 0$, поэтому

$$f''(x) = f^{(3)}(c)(x-c) + o(x-c) = (x-c)\left(f^{(3)}(c) + \alpha(x)\right)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to c$, и, значит, найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_c(\delta)$

$$|\alpha(x)| < \frac{|f^{(3)}(c)|}{2},\ \text{ то есть }\ \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x-c) f^{(3)}(c).$$

Следовательно, в $\overset{\circ}{U}_c(\delta)$ по разные стороны от точки c функция $f''(x)$ имеет противоположные знаки. С учетом теоремы 4.29 получаем, что c — точка перегиба функции f. □

Например, $x = 0$ — точка перегиба функции $f(x) = \sin x$, так как $f''(0) = 0$, а $f^{(3)}(0) \neq 0$.

4.12.4 Асимптоты графика функции

Определение 4.15. *Пусть функция f определена на промежутке X, a — левосторонняя (правосторонняя) предельная точка множества X. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой функции f или графика Γ_f при $x \to a-0$ (соответственно, при $x \to a+0$), если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ или $-\infty$ (соответсвенно, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ или $-\infty$).*

Пример 4.18. Пусть $f(x) = \ln x$. Тогда $D(f) = (0, +\infty)$ и функция f непрерывна на $D(f)$. Точка $x = 0$ является правосторонней предельной точкой области определения функции и $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = -\infty$. Поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой функции f при $x \to +0$.

Пример 4.19. Пусть $f(x) = e^{-1/x}$. Тогда $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция f непрерывна на $D(f)$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = +\infty$. Значит, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика Γ_f при $x \to -0$.

Определение 4.16. *Пусть функция f определена на промежутке X и $X \supset (a, +\infty)$ (или $X \supset (-\infty, a)$), $a \in \mathbb{R}$. Прямую $y = kx + b$ называют наклонной (невертикальной) асимптотой функции f или графика Γ_f при $x \to +\infty$ (соответственно, при $x \to -\infty$), если*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \ (\textit{соответственно, } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0).$$

Если $k = 0$, то асимптоту называют горизонтальной.

Пример 4.20. Найти асимптоты функций

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}, \qquad b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}.$$

■ а) Функция f непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Так как $\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = \mp\infty$, то прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой Γ_f при $x \to -1+0$ и при $x \to -1-0$. Разделим числитель $x^2 + 3x - 4$ на знаменатель $x + 1$ по правилу деления многочленов:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = x + 2 - \frac{6}{x + 1}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6}{x + 1} = 0$, то прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой функции $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

b) Функция непрерывна на $\mathbb{R}$ и потому не имеет вертикальных асимптот. Заметим, что для $x \neq 0$

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}.$$

В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x\to\pm\infty.$$

Следовательно, $\sqrt[3]{x^3+x^2} = x+\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to\pm\infty$, а поэтому прямая $y = x+\frac{1}{3}$ является наклонной асимптотой функции $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. $\square$

Теорема 4.31. *Для того, чтобы прямая $y = kx+b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = b. \tag{4.23}$$

$\blacksquare$ *Необходимость.* Если $y = kx+b$ — асимптота Γ_f при $x\to+\infty$, то по определению 4.16

$$f(x) = kx+b+\alpha(x), \tag{4.24}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Разделим обе части полученного равенства на x и получим

$$\frac{f(x)}{x} = k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k$. Но (см. (4.24))

$$f(x)-kx = b+\alpha(x), \text{ где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = b$.

Достаточность. Если существуют конечные пределы, перечисленные в 4.23, то $f(x)-(kx+b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, а поэтому по определению 4.16 прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой Γ_f при $x\to+\infty$. $\square$

Аналогично формулируется и доказывается критерий существования наклонной асимптоты графика Γ_f при $x\to-\infty$.

4.12.5 Построение графика функции.

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно последовательно выполнить следующие операции:

1. Найти область определения функции f, изучить функцию на четность (нечетность), периодичность.

2. Исследовать функцию на непрерывность, указать точки разрыва, найти асимптоты.

3. Найти $f'(x)$, исследовать функцию на экстремум, указать промежутки монотонности.

4. Найти $f''(x)$, исследовать функцию на перегиб, указать промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции.

5. Дать характеристику поведения функции на каждом из полученных промежутков.

6. Нарисовать график.

Пример 4.21. Построить график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

■ 1. $D(f) = \mathbb{R}$; функция является функцией общего вида (иными словами: функция не является четной, не является нечетной), так как

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 + (-x)^2} = -\sqrt[3]{x^3 - x^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Функция не является периодической, так как обращается в нуль только в двух точках $x = 0$ и $x = -1$.

2. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, поэтому Γ_f не имеет вертикальных асимптот. Прямая $y = x + \dfrac{1}{3}$ — наклонная асимптота Γ_f при $x \to \pm\infty$ (см. пример 20(b)).

3. Для всех $x \in (-\infty, -1) \bigcup (-1, 0) \bigcup (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}} = \frac{1}{3}\,\frac{3x + 2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\,\sqrt[3]{x}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)x^2}}{x+1} = \infty,$$

то функция имеет в точках $x = -1$ и $x = 0$ бесконечные производные, а значит Γ_f имеет в соответствующих точках $(-1, 0)$ и $(0, 0)$ вертикальные касательные и эти точки являются критическими.

Далее, $f'(x) = 0 \iff x = -\dfrac{2}{3}$. Поэтому $x = -\dfrac{2}{3}$ — стационарная точка функции. Поскольку $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn} x\,(3x + 2)$, $\forall\, x \notin \{-1; 0\}$, то

$$\begin{array}{lccccccc} \operatorname{sgn} f'(x) & + & & + & & - & & + \\ \hline f(x) & \nearrow & -1 & \nearrow & -\frac{2}{3} & \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$$

$x = -\dfrac{2}{3}$ — точка локального максимума и $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $x = 0$ — точка локального минимума и $f(0) = 0$. На $(-\infty, -2/3]$, $[0, +\infty)$ функция возрастает, а на $[-2/3, 0]$ — убывает.

4. Так как

$$f''(x) = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}x^{-4/3},\ \forall\, x \in (-\infty,-1)\bigcup(-1,0)\bigcup(0,+\infty),$$

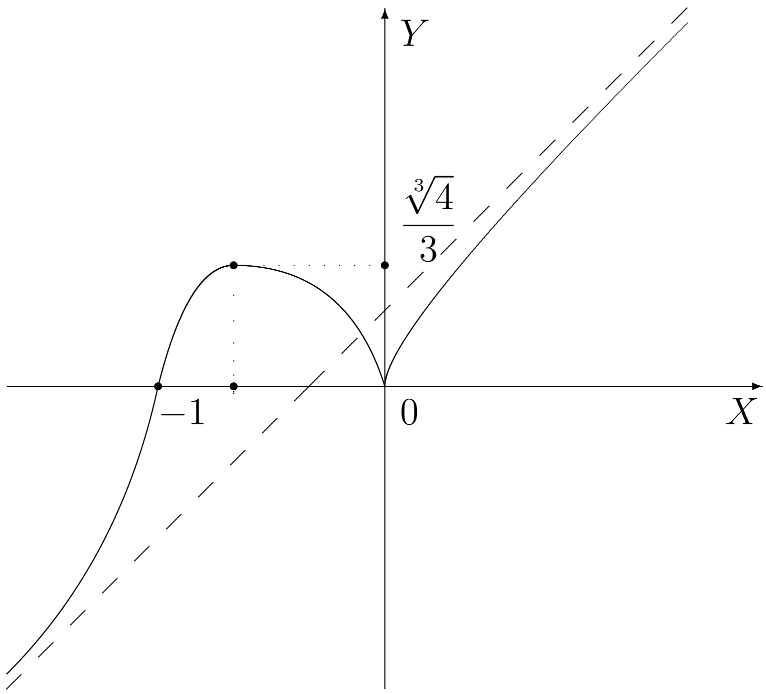
то $f''(x) \neq 0$ на указанном множестве и $x = -1$, $x = 0$ — точки возможного перегиба Γ_f. Но $\operatorname{sgn} f''(x) = -\operatorname{sgn}(x+1)$, $\forall\, x \neq 0, -1$, а значит

$\operatorname{sgn} f''(x)$	$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$\smile$	-1	$\frown$	0	$\frown$

точка $x = -1$ — точка перегиба заданной функции.

Полученные результаты объединим в таблицу и нарисуем график:

	-1		$-2/3$		0	
$\nearrow$	—	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
$\cup$	т.п.	$\cap$	—	$\cap$	—	$\cap$
$y = x + \frac{1}{3}$	$f(-1) =$		$f\left(-\frac{2}{3}\right) =$		$f(0) =$	$y = x + \frac{1}{3}$
наклон. ас.	$= 0$		$= \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$		$= 0$	наклон. ас.



4.13 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть функция f дифференцируема в точке a, а функция g не дифференцируема в точке a. Доказать, что функция $f + g$ не дифференцируема в

точке a. Показать на примерах, что функция $f \cdot g$ может быть как дифференцируемой, так и не дифференцируемой в точке a.

2. Пусть функции f и g не являются дифференцируемыми в точке a. Показать на примерах, что функции $f+g$ и $f \cdot g$ могут быть как дифференцируемыми, так и не дифференцируемыми в точке a.

3. Привести пример функции f, которая не дифференцируема в точке a, а функция f^2 дифференцируема в точке a.

4. Привести пример такой функции f, что функции f и f^2 не является дифференцируемыми в точке a, а функция f^3 является дифференцируемой в точке a.

5. Привести пример функции f, которая определена на $\mathbb{R}$ и не является дифференцируемой в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, а функция f^2 является дифференцируемой в каждой точке $a \in \mathbb{R}$.

6. Привести пример такой функции f, которая является непрерывной, но не дифференцируемой функцией в точке a, а любая функция f^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, является дифференцируемой в точке a.

7. Может ли в точке a быть дифференцируемо частное f/g, если

   (a) f и g не являются дифференцируемыми в точке a,

   (b) f дифференцируема в точке a, а g — нет,

   (c) g дифференцируема в точке a, а f — нет.

8. Привести пример функций $g : X \to Y$ и $f : Y \to \mathbb{R}$ таких, что функция g не имеет производной в точке $a \in X$, функция f является дифференцируемой точке $b = g(a) \in Y$, а суперпозиция $f \circ g$ дифференцируема в точке a.

9. Привести пример функций $g : X \to Y$ и $f : Y \to \mathbb{R}$ таких, что функция g является дифференцируемой точке $a \in X$, функция f не имеет производной в точке $b = g(a) \in Y$, а суперпозиция $f \circ g$ дифференцируема в точке a.

10. Пусть $X = (-\delta, +\delta)$, $\delta > 0$, функция f является чётной и дифференцируемой в точке $x = 0$. Доказать, что $f'(0) = 0$.

11. Пусть $X = (-\delta, +\delta)$, $\delta > 0$, функция f является дифференцируемой в точке $x = 0$. Доказать, что если f — чётная функция, то f' — нечётная функция, если f — нечётная функция, то f' — чётная функция.

12. Привести пример монотонной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции, производная которой является периодической функцией.

13. Доказать, что производная периодической, дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции, является периодической функцией.

14. Доказать приведённые ранее формулы вычисления производных n-го порядка функций a^{bx+c}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$.

15. Выразить производные до 3-го порядка включительно обратной функции $x = f^{-1}(y)$ через производные функции $f(x)$.

16. Выразить производные f''_{x^2}, f'''_{x^3} для параметрически заданной функции f : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, если функции φ, ψ трижды дифференцируемы на промежутке T.

17. При каких значениях α функция $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

    дважды дифференцируема в точке $x = 0$?

18. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ дифференцируема в точке $x = 0$ любое число раз, вычислить $f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

19. Пусть функция f дважды дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Доказать, что в точке x_0 функция

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq x_0 \\ -f(x), & x < x_0 \end{cases}$$

    имеет первую производную, но не имеет второй производной.

20. Пусть функция f дифференцируема в $\mathbb{R}$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = c\,f(x)$. Доказать, что функция f бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}$ и $f^{(n)}(0) = c^n$, если $f(0) = 1$.

21. Привести пример такой функции f, которая дифференцируема в точке $x = 0$ любое число раз и последовательность $\{f^{(n)}(0)\}$ является

    (a) ограниченной,

    (b) неограниченной сверху (снизу), но ограниченной снизу (сверху),

    (c) неограниченной и сверху, и снизу,

    (d) монотонной,

    (e) немонотонной.

22. Пусть функция f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$, и существуют числа a, b, c такие, что $a\,f''(x) + b\,f'(x) + c\,f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Доказать, что функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

23. Пусть функция f дифференцируема на сегменте $[a, b]$, и $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Применимы ли к функции f теоремы Ролля 4.10 и Ферма 4.8?

24. Применима ли на сегменте $[-1, 1]$ теорема Лагранжа 4.11 к функциям

$$\varphi(x) = x^{1/3}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} ?$$

25. Применима ли на $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ теорема Коши 4.14 к функциям $\sin x$, x^3?

26. Применима ли на сегменте $[-1, 1]$ теорема Ролля к функции |x|?

27. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b), $a, b \in R$ и существуют равные конечные пределы $f(a + 0) = f(b - 0)$. Доказать, что существует такая точка $\gamma \in (a, b)$, что $f'(\gamma) = 0$.

28. Привести пример функции f, которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[0, a]$ и имеет на нём бесконечно много точек γ, в которых $f'(\gamma) = 0$.

29. Привести пример функции f, которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[a, b]$ и существует такой сегмент $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, что $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$.

30. Пусть функция f дифференцируема на $[a, b]$ и $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. Доказать, что $|f(b) - f(a)| \geq m(b - a)$.

31. Пусть функции f, φ дважды дифференцируемы на сегменте $[a, b]$ и $f''(x) = \varphi''(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Доказать, что на сегменте $[a, b]$

$$f(x) - \varphi(x) = ax + b.$$

32. Доказать, что между двумя вещественными корнями многочлена с вещественными коэффициентами всегда лежит вещественный корень его производной.

33. Пусть функция f дифференцируема n раз на $[a, b]$ и существуют точки $x_j \in [a, b]$, $j = 1, \ldots, n + 1$, такие, что $f(x_1) = \cdots = f(x_{n+1})$. Доказать, что существует точка $\gamma \in (a, b)$, что $f^{(n)}(\gamma) = 0$.

34. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, дифференцируема на интервале $(a, +\infty)$, и $f(a) < 0$, $f'(x) \geq p > 0$ для всех $x \in (a, +\infty)$. Доказать, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет на $(a, +\infty)$ вещественный корень, то он единственен.

35. Пусть функция f дифференцируема на конечном интервале (a,b) и функция f' ограничена на нём. Доказать, что функция f ограничена на (a,b) и равномерно непрерывна на нем.

36. Пусть функция f дифференцируема на $(a,+\infty)$, $a>0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.

37. Пусть функции f и φ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), $f(a)=\varphi(a)$ и $f'(x)>\varphi'(x)$ для всех $x\in(a,b)$. Доказать, что $f(x)>\varphi(x)$ для всех $x\in(a,b)$.

38. Пусть $f(x)=x^n+px+q$, n — четное число. Доказать, что уравнение $f(x)=0$ не может иметь более двух разных действительных корней.

39. Пусть $f(x)=x^n+px+q$, где n–нечетное число $(n>1)$. Доказать, что уравнение $f(x)=0$ не может иметь более трех разных действительных корней.

40. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[1,2]$ и дифференцируема на интервале $(1,2)$. Доказать, что существует такая точка $c\in(1,2)$, что $f(2)-f(1)=\dfrac{c^2}{2}f'(c)$.

41. Пусть функции f и g непрерывны на $[a,b]$, $f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$. Доказать, что существует точка $c\in(a,b)\ :\ f(c)=g(c)$.

42. Пусть функция $f\in C[a,b]$, дважды дифференцируема на промежутке $[a,b)$ и $f'(a)=0$. Доказать, что существует точка $c\in(a,b)$ такая, что
$$\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\le|f''(c)|.$$

43. Пусть функция $f\in C^m[a,b]$, $g\in C^n[a,b]$, $n\ge 2$ и
$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(m-1)}(a)=0,$$
$$g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n-1)}(a)=0,\ g^{(n)}(a)\ne 0.$$
Доказать, что существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} 0, & \text{если } m>n\\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, & \text{если } m=n\\ \infty, & \text{если } m<n\end{cases}$.

44. Пусть $f(x)=2x-\sin x$, $g(x)=2x+\sin x$. Показать, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, но не существует предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

45. Можно ли применить правило Лопитала при вычислении предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\sin x}\ ?$$

46. Пусть функция f n-раз ($n > 2$) дифференцируема в точке a. Напишите формулу Тейлора для функций f', f''.

47. С помощью формулы Тейлора доказать, что точка $x = 1$ является корнем кратности 3 для многочлена $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.

48. Доказать, что точка a является корнем кратности $k \le n$ для многочлена $p(x)$ степени n, тогда и только тогда, когда

$$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0,\ p^{(k)}(a) \ne 0.$$

49. Доказать на примере функции $f(x) = \begin{cases} \cos x + x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$,

что из представления функции f в виде $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$ при $x \to a$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n ($n \ge 2$), не следует существования $f^{(n)}(a)$.

Глава 5

Неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратная задача — восстановление функции по известной производной, является основной задачей интегрального исчисления.

Всюду в этой главе функции рассматриваются на промежутках (конечных или бесконечных), расположенных в их области определения.

5.1 Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение 5.1. *Пусть D — промежуток в $\mathbb{R}$, конечный или бесконечный, $f : D \to \mathbb{R}$. Функция $F : D \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией для функции f на D (или, проще и короче, первообразной функции f), если она дифференцируема на D и*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in D.$$

Очевидно, что если F — первообразная функции f на промежутке D, то F непрерывна на промежутке D, поскольку дифференцируема.

Например, функция $F(x) = x$ является на $\mathbb{R}$ первообразная функции $f(x) = 1$, поскольку $F(x) = x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, и

$$F'(x) = 1 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично, функция $F(x) = \arcsin x$ — первообразная для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$, так как

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\, x \in (-1, 1).$$

В отличие от производной, первообразная функции не обладает свойством единственности. Например, для функции $f(x) = -2\sin 2x$, функции $F(x) = \cos 2x$ и $\Phi(x) = -2\sin^2 x$ являются первообразными на $\mathbb{R}$, так как для всех $x \in \mathbb{R}$

$$(\cos 2x)' = -2\sin 2x \text{ и } (-2\sin^2 x)' = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x\,.$$

Возникает вопрос об описании всех первообразных заданной функции.

Теорема 5.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$. Если $F(x)$ — первообразная на D для функции $f(x)$, то множество всех ее первообразных на D совпадает с множеством $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.*

■ 1). Обозначим через $\mathcal{J}_f$ множество всех первообразных функции f на D. Поскольку для любого числа $C \in \mathbb{R}$ функция $F(x)+C$ дифференцируема на D и $(F(x) + C)' = f(x),\ \forall\, x \in D$, то функция $F(x) + C$, является первообразной функции f на D. Значит, $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{J}_f$.

2). Докажем обратное вложение, для чего рассмотрим функцию $\Phi(x) \in \mathcal{J}_f$. Введем функцию $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x),\ \forall\, x \in D$. Тогда функция $\varphi(x)$ дифференцируема на D и

$$\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ \forall\, x \in D.$$

Откуда по критерию постоянства функции на промежутке (см. теорему 4.13) следует, что $\varphi(x) \equiv C,\ \forall\, x \in D$, где C — некоторая постоянная. Таким оразом, $F(x) - \Phi(x) = C, \forall\, x \in D$, то есть $\mathcal{J}_f \subset \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Учитывая еще вложение, полученное в первой части доказательства, окончательно получаем, что $\mathcal{J}_f = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. □

Определение 5.2. *Пусть D — промежуток, функция f имеет на D первообразную. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на D называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке D и обозначается символом*

$$\int f(x)\, dx,$$

при этом x называется переменной интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\, dx$ — подынтегральным выражением.

Таким образом, если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке D, то

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Последнее равенство следует понимать как равенство двух множеств, состоящих из функций, определенных на промежутке D, причем слева — совокупность, образующая неопределенный интеграл от $f(x)$, а справа — совокупность функций, отличающихся на D от $F(x)$ на некоторую постоянную C.

Операция поиска неопределенного интеграла от заданной функции $f(x)$ на промежутке D называется интегрированием.

Пример 5.1. Найти неопределенный интеграл функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

■ При $x > 0$ $e^{|x|} = e^x$ и для этой функции на интервале $(0, +\infty)$ e^x является одной из ее первообразных. При $x < 0$ $e^{|x|} = e^{-x}$, и для этой функции на $(-\infty, 0)$ первообразной будет функция $-e^{-x} + C$ при любой постоянной C. Так как первообразная функции $f(x)$ по определению 5.1 должна быть дифференцируемой на $\mathbb{R}$, а, следовательно, непрерывной на $\mathbb{R}$, то должно выполняться условие

$$\lim_{x\to+0} e^x = \lim_{x\to-0} (-e^{-x} + C),$$

то есть $1 = -1 + C$, откуда $C = 2$.

Итак, функция

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ -e^{-x} + 2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

является непрерывной на $\mathbb{R}$.

Докажем, что эта функция является на $\mathbb{R}$ первообразной функции $f(x) = e^{|x|}$. Очевидно, что $f'(x) = e^x = e^{|x|}$ для $x > 0$ и $F'(x) = e^{-x} = e^{|x|}$ для $x < 0$. Покажем, что $F'(0) = e^0 = 1$:

$$F'(+0) = \lim_{x\to+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$F'(-0) = \lim_{x\to-0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{-e^{-x} + 2 - 1}{x} = 1,$$

то есть $F'(+0) = F'(-0) = F'(0) = 1 = e^{|0|}$. Следовательно,

$$\int e^{|x|}\, dx = F(x) + C = \begin{cases} e^x + C, & \text{если } x \geq 0, \\ -e^{-x} + 2 + C, & \text{если } x < 0. \ \square \end{cases}$$

5.2 Основные свойства неопределенного интеграла

Теорема 5.2. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет первообразную на промежутке D, тогда на D*

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x),\ x \in D, \ \text{и } d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx,\ x \in D.$$

■ Действительно, если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на D, то

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Тогда по определению 5.1 для всех $x \in D$

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = F(x)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = F'(x)dx = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx. \ \square$$

Теорема 5.3. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке D, то*

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

■ Так как $df(x) = f'(x)dx$, то по определению 5.2

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C. \ \square$$

Теорема 5.4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на промежутке D первообразные, то функция $f(x) \pm g(x)$ также имеет первообразную на D, причем*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx. \tag{5.1}$$

■ Заметим, что равенство в формуле (5.1) следует понимать как совпадение двух множеств функций. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ некоторые первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно, на промежутке D, то есть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1, \ \int g(x)\,dx = G(x) + C_2.$$

Функция $F(x) \pm G(x)$ дифференцируема на D и

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x), \ \forall\, x \in D.$$

Последнее означает, что $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$ на D, а поэтому

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

Левая часть формулы (5.1) — множество, состоящее из функций вида $F(x) \pm G(x) + C$, а правая — из функций $(F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)$. Ввиду произвольности постоянных C, C_1, C_2 эти множества совпадают, то есть справедливо равенство (5.4). $\square$

Теорема 5.5. *Если функция $f(x)$ имеет на промежутке D первообразную и λ — число, то функция $\lambda f(x)$ также имеет первообразную на D, причем при $\lambda \neq 0$*

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

■ Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке D, то есть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Тогда функция $\lambda F(x)$ дифференцируема на D и

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x),\ \forall\, x \in D.$$

Следовательно, $\lambda F(x)$ является первообразной функции $\lambda f(x)$ на D, то есть

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda F(x) + C_1.$$

Левая часть формулы (5.2) — множество функций вида $\lambda F(x) + C_1$, а правая — множество функций вида $\lambda(F(x) + C) = \lambda F(x) + \lambda C$. Если $\lambda \neq 0$, то ввиду произвольности постоянных C и C_1, эти множества совпадают, то есть имеет место (5.2). $\square$

Объединяя вместе эти две теоремы, получаем следующий результат.

Следствие. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на промежутке D первообразные, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda\, f(x) \pm \mu\, g(x)$ также имеет первообразную на D, причем, если $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, то*

$$\int (\lambda\, f(x) \pm \mu\, g(x))\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \pm \mu \int g(x)\, dx. \tag{5.3}$$

Замечание. Свойство, указанное в следствии из теорем 5.4 и 5.5, обычно называют свойством линейности неопределенного интеграла.

5.3 Таблица основных неопределенных интегралов

В основе построения приводимой ниже таблицы неопределенных интегралов лежит теорема 5.3 и таблица производных. Например, для любого промежутка D в $\mathbb{R}$

$$\int \cos x\, dx = \int d(\sin x) = \sin x + C.$$

Для проверки правильности результатов интегрирования достаточно воспользоваться определениями 5.1, 5.2 и таблицей производных:

$$(\sin x + C)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$$

В приводимой ниже таблице речь идет о неопределенных интегралах на любом промежутке D, входящем в естественную область определения подынтегральной функции.

1) $\displaystyle\int 0\, dx = C,\ D \subset \mathbb{R}.$

2) $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. Формула имеет место на любом промежутке из области определения функции x^α.

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ D \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

4) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1),\ D \subset \mathbb{R}.$

5) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

6) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

7) $\displaystyle\int \cos\ dx = \sin x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ D \subset \Big\{(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\, \frac{\pi}{2} + \pi k),\, k \in \mathbb{Z}\Big\}.$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ D \subset \{(\pi k,\, \pi(k+1),\, k \in \mathbb{Z}\}.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,\ D \subset (-a, a)\ (a > 0).$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0),\ D \subset \mathbb{R}.$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ D \subset \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}\ (a > 0).$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C\ (a \neq 0),\ D \subset \mathbb{R}.$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C\ (a \neq 0),\ D \subset \{\, x \in \mathbb{R} : |x| > |a|\}.$

15) $\displaystyle\int \operatorname{sh}\ x\,dx = \operatorname{ch}\ x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

16) $\displaystyle\int \operatorname{ch}\ x\,dx = \operatorname{sh}\ x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,\ D \subset \mathbb{R}.$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,\ D \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

5.4 Основные методы интегрирования

При вычислении производных обычно пользуются стандартным набором правил и формул, что превращает дифференцирование в единообразную, выполняемую по одним и тем же схемам, работу. Иначе обстоит дело с интегрированием функций. Не существует единого рецепта вычисления неопределенного интеграла, пригодного для всех элементарных функций. Поэтому приходится рассматривать отдельные классы функций и для них разрабатывать правила или хотя бы рекомендации по вычислению интегралов.

5.4.1 Непосредственное интегрирование

Теоремы, приведенные в разделе 5.2 и таблица основных неопределенных интегралов, позволяют вычислять только простейшие интегралы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

■ $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int\left(x^2+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right) dx =$

$$= \int x^2\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx + \int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln|x| + C. \ \square$$

Пример 5.3. Вычислить интеграл $\int\frac{2x^2}{x^2+2}\,dx$.

■ $\int\frac{2x^2}{x^2+2}\,dx = \int\frac{2(x^2+2)-4}{x^2+2}\,dx = \int\left(2-\frac{4}{x^2+2}\right) dx =$

$$= 2\int dx - 4\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} == 2x - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C. \ \square$$

Пример 5.4. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

■ $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx =$

$$= \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}\ x - \mathrm{ctg}\ x + C. \ \square$$

5.4.2 Метод подстановки (замены переменной)

Одним из основных методов интегрирования функций является метод подстановки (или метод замены переменной). Он основан на следующей теореме.

Теорема 5.6. *Пусть D, T — промежутки в $\mathbb{R}$, функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет на D первообразную $F(x)$, а функция $\varphi : T \to \mathbb{R}$ дифференцируема на T и $\varphi(T) \subset D$, тогда*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.4}$$

■ Поскольку функция φ дифференцируема на T, $\varphi(T) \subset D$, а функция F дифференцируема на D, то по теореме о дифференцируемости суперпозиции (см. теорему 4.5) функция $F \circ \varphi$ дифференцируема на T и

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \forall t \in T.$$

Следовательно, функция $F(\varphi(t))$ на промежутке T является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, и по определению 5.2

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \ \square$$

Итак, если выполнены условия теоремы 5.6 и $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\bigg|_{x=\varphi(t)}. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) называется формулой интегрирования посредством подстановки $\varphi(t) = x$. Её применение к вычислению интегралов состоит в том, что вместо вычисления интеграла, стоящего слева в формуле (5.5), вычисляется интеграл, стоящий справа, а затем, возвращаясь к переменной t, полагается $x = \varphi(t)$. В ряде случаев формулу (5.5) целесообразно использовать в обратном порядке. Именно, иногда удобно вычисление интеграла $\displaystyle\int f(x)\,dx$ свести с помощью замены переменной $x = \varphi(t)$ к вычислению интеграла $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Если допустить, что выполнены условия теоремы 5.6 и, кроме того, функция $\varphi : T \to D$ является биекцией, а значит существует обратная функция $\varphi^{-1} : D \to T$, то формулу (5.5) можно переписать в виде

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{5.6}$$

Формула (5.6) называется *формулой интегрирования заменой переменной $x = \varphi(t)$.*

При использовании метода интегрирования с помощью подстановки или замены переменной общих рекомендаций по определению нужной подстановки не существует. Такие рекомендации можно дать только для некоторых специальных видов подынтегральных функций. Эти замены будут рассматриваться ниже, а пока рассмотрим этот метод на простых примерах.

Пример 5.5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin(2x+3)\,dx$.

■ Выполним подстановку $2x+3=t$. Тогда $\displaystyle\int \sin(2x+3)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\,d(2x+3) = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C. \;\square$$

Пример 5.6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$.

■ Выполним подстановку $\sqrt{1-x}=t$. Тогда $x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$ и

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{1-t^2}{t}(-2t)\,dt = -2\int (1-t^2)\,dt = -2\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= -\frac{2}{3}t\left(3-t^2\right)+C = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x}\,(3-1+x)+C = -\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}+C. \;\square$$

Пример 5.7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(|x|\le 1)$.

■ Сделаем замену переменной $x=\sin t$ $(|t|\le \pi/2)$). Тогда $dx=\cos t\,dt$ и

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,d(2t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,$$

так как $t=\arcsin x$ при $|t|\le \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

5.4.3 Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей теореме.

Теорема 5.7. *Пусть функции $u, v : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на промежутке D. Если функция $u'(x)\,v(x)$ имеет первообразную на D, то функция $u(x)\,v'(x)$ также имеет первообразную на D, причем*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \tag{5.7}$$

■ Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на D, то функция $u(x)v(x)$ также дифференцируема на D и

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

или

$$u(x)\,v'(x) = (u(x)\,v(x))' - u'(x)\,v(x).$$

По теореме 5.3 $\displaystyle\int (u(x)\,v(x))'\,dx = u(x)\,v(x) + C$ для всех $x \in D$. Поскольку на промежутке D существуют первообразные функций $(u(x)v(x))'$ и $u'(x)v(x)$, то по теореме 5.4 на D существует первообразная функции $u(x)\,v'(x)$ и

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = \int (u(x)\,v(x))'\,dx - \int u'(x)\,v(x)\,dx =$$

$$= u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx. \ \square$$

Определение дифференциала функции и свойство инвариантности его формы позволяют записать формулу (5.7) в виде

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \tag{5.8}$$

Формулы (5.7),(5.8) называют формулами интегрирования по частям.

Заметим, что, применяя метод интегрирования по частям, следует предварительно представить подынтегральное выражение в виде произведения одной функции u на дифференциал другой функции dv. При этом функция v определяется неоднозначно. Обычно в качестве $v(x)$ выбирается функция, записываемая в наиболее простой форме (не добавляется константа C), поскольку для любого числа c из $\mathbb{R}$

$$\int u\,dv = u\,(v+c) - \int (v+c)\,du = uv + cu - \int v\,du - \int c\,du =$$

$$= uv + cu - \int v\,du - c(u + c_1) = uv - \int v\,du - cc_1 = uv - \int v\,du.$$

Метод интегрирования по частям позволяет, например, вычислять интегралы вида:

(A) $\displaystyle\int P(x)\,\sin x\,dx,\ \int P(x)\,\cos x\,dx,\ \int P(x)\,a^x\,dx\ (a > 0,\ a \neq 1),\ \ k \in \mathbb{N};$

(B) $\displaystyle\int P(x)\,\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\,\operatorname{arctg} x\,dx,\ \int P(x)\,\ln x\,dx,\ \ k \in \mathbb{N}_0;$

(C) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx,\ \int e^x \cos x\,dx;$

где $P(x)$ — многочлен, а также подобные им интегралы. В случае (A) следует полагать $u = P(x)$, в случае (B) — $dv = P(x)\,dx$, в случае (C) — $u = e^x$ или $u = \sin x$ ($u = \cos x$). При этом, для интегралов вида (A) требуется применить формулу (5.8) k раз, где k — степень многочлена $P(x)$, для интегралов вида (B) — один раз, а затем использовать другие методы, а для интегралов вида (C) требуется двукратное интегрирование по частям.

Пример 5.8. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int \ln^2 x\,dx$.

■ Положим $u = \ln^2 x$, $dv = dx$. Тогда $du = 2\,\dfrac{\ln x}{x}\,dx$, $v = x$ и, используя формулу (5.8), получим

$$I = x\ln^2 x - \int 2\,x\,\frac{\ln x}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, еще раз применим формулу (5.8), полагая $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = dx/x$, $v = x$ и

$$I = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C. \ \square$$

Пример 5.9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$, $a \neq 0$.

■ Положим $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v = x$ и

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}| - \int \sqrt{x^2+a}\,dx.$$

Получили уравнение относительно исходного интеграла. Перенося его из правой части уравнения в левую, получим

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C. \ \square$$

Замечание. Аналогично можно доказать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Пример 5.10. Вычислить интеграл $\mathcal{J}_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

■ Положим $u = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{-2nx\,dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $v = x$ и

$$\mathcal{J}_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Таким образом, $\mathcal{J}_n = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\mathcal{J}_n - 2n\mathcal{J}_{n+1}$, откуда

$$\mathcal{J}_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\mathcal{J}_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Полученная рекуррентная формула сводит вычисление интеграла с показателем степени n к вычислению интеграла с показателем степени $n-1$. Так как интеграл $\mathcal{J}_1$ является табличным,

$$\mathcal{J}_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C,$$

то применяя рекуррентная формулу к вычислению, например, интеграла $\mathcal{J}_2$, получим

$$\mathcal{J}_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \ \square \tag{5.10}$$

5.5 Классы интегрируемых элементарных функций

Операция дифференцирования, как известно, не выводит из класса элементарных функций. Однако первообразная от элементарной функции не обязательно является элементарной функцией и, следовательно, интеграл от элементарной функции не обязательно выражается через элементарные функции. Например, через элементарные функции не выражаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\ln x},\ \int \frac{\sin x}{x^n}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x^n}\,dx,\ \int e^{-x^2}\,dx\ (n \in \mathbb{N}).$$

Если интеграл от элементарной функции выражается через элементарные функции, то говорят, что интегрирование выполняется в элементарных функциях (или в конечном виде). Рассмотрим некоторые классы функций, интегрируемых в элементарных функциях.

5.5.1 Интегрирование рациональных функций

Напомним, что рациональной функцией или рациональной дробью называется функция вида $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Функция $f(x)$ называется правильной дробью, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ и неправильной дробью в противном случае.

Из курса алгебры известно, что если степень m многочлена $P(x)$ не меньше степени n многочлена $Q(x)$, то существуют такие многочлены $S(x)$ степени k и

$R(x)$ степени l, что $m = n + k$, $0 \le l < n$, и многочлен $P(x)$ представим в виде $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, при этом такое представление единственно.

Операция поиска многочленов $S(x)$ и $R(x)$ по заданным многочленам $Q(x)$ и $P(x)$ называется делением многочлена $P(x)$ на $Q(x)$, при этом многочлен $P(x)$ называется *делимым*, $Q(x)$ — *делителем*, $S(x)$ — *частным*, $R(x)$ — *остатком от деления* $P(x)$ *на* $Q(x)$.

Отметим, что если $n = 1$, то $l = 0$ и остаток от деления является числом (многочленом нулевой степени): $P(x) = S(x)Q(x) + r$, где $S(x)$ — многочлен степени $n-1$, r — некоторое число.

Если рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ является неправильной дробью, то выполняя деление, получим для нее представление

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ — некоторый многочлен, а слагаемое $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ является правильной дробью.

Рассмотрим сначала задачу интегрирования простых рациональных дробей. Так называют дроби вида

$$(1)\ \frac{A}{x-a}\,, \qquad (3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,,$$

$$(2)\ \frac{A}{(x-a)^k}\,, \qquad (4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,,$$

где $A, B, a, p, q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$.

Лемма 5.1. *Простые дроби интегрируются в элементарных функциях.*

■ Действительно,

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = a\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C,\ k \ge 2.$$

Для вычисления интеграла от простой дроби (3) представим квадратный трехчлен в виде $x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right)$ и, учитывая, что $p^2 - 4q < 0$, положим $a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. В интеграле от простой дроби (3) сделаем замену переменной $t = x + \dfrac{p}{2}$ и получим, что

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A\left(t - \dfrac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2}\,dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2B-Ap}{2a}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{2\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\,\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + C\,.$$

Для вычисления интеграла от простой дроби (4) используем введенную выше замену переменной и аналогично предыдущему получим:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2B-Ap}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{A}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2B-Ap}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}\,.$$

Для вычисления последнего интеграла можно воспользоваться рекуррентной формулой (5.9), полагая $t = a\,u$.

Итак, интегралы от простых дробей выражаются в конечном виде с помощью рациональных функции, логарифмов и арктангенсов. $\square$

Прежде чем продолжить решение задачи об интегрировании правильной рациональной дроби, изучим некоторые алгебраические свойства многочленов и рациональных дробей.

Разложение многочлена на множители

Рассмотрим многочлен степени $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad c_n \neq 0.$$

Коэффициенты $c_n,\ c_{n-1}, \cdots, c_0$ многочлена могут быть как действительными, так и комплексными числами, переменная x может принимать любые значения из множества $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Число a называется *корнем многочлена* $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$. Из курса алгебры известен следующий результат.

Теорема 5.8 (Безу)**.** *Число a является корнем многочлена $Q_n(x)$ степени $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится без остатка на $x - a$, то есть справедливо равенство $Q_n(x) = S_{n-1}(x)\,(x-a)$, где $S_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$.*

Число a является корнем многочлена $Q_n(x)$ степени $n \geq 1$, то по теореме Безу $Q_n(x) = S_{n-1}(x)\,(x-a)$, где $S_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$. Но, возможно, $S_{n-1}(a) = 0$, то есть a корень многочлена $S_{n-1}(x)$, тогда, применяя к нему теорему Безу, получим представление $S_{n-1}(x) = S_{n-2}(x)\,(x-a)$, где $S_{n-2}(x)$ — многочлен степени $n-2$. Тогда $Q_n(x) = S_{n-2}(x)(x-a)^2$. Продолжая это рассуждение, получим, что существует

$$k_0 \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq k_0 \leq n,\ Q_n(x) = S_{n-k_0}(x)(x-a)^{k_0},$$

где $S_{n-k_0}(x)$ — многочлен степени $n-k_0$ и $S_{n-k_0}(a) \neq 0$. для всех $x \in \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{C}$) будет выполняться равенство В этом случае говорят, что число $x = a$ является *корнем многочлена* $Q_n(x)$ *кратности* k.

Естественно, возникает вопрос, всякий ли многочлен имеет корни? Ответ на него дает основная теорема алгебры.

Теорема 5.9 (основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен степени* $n \geq 1$ *с действительными или комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень.*

Пусть x_1 — корень кратности k_1 многочлена $Q_n(x)$, степень которого равна n. Тогда этот многочлен представляется в виде

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1} S_1(x),$$

где $S_1(x)$ — многочлен степени $n-k_1$, причем $S_1(x_1) \neq 0$. Применяя к многочлену $S_1(x)$ теоремы 5.8 и 5.9 найдем, что

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} S_2(x),\ x_1 \neq x_2,\ S_2(x_1) \neq 0,\ S_2(x_2) \neq 0.$$

Продолжая, по индукции получим следующее представление

$$Q_n(x) = c_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_m)^{k_m},\ k_1 + \cdots + k_m = n, \tag{5.11}$$

где c_n — коэффициент при x^n в многочлене $Q_n(x)$, а $x_1, \ldots, x_m$ — его различные корни (вещественные или комплексные).

Для многочленов с действительными коэффициентами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.10. *Если* $z_0 = \alpha + i\beta$ *— комплексный корень* ($\beta \neq 0$) *кратности* r *многочлена* $Q_n(x)$ *с действительными коэффициентами, то комплексное число* $\overline{z}_0 = \alpha - i\beta$ *также является корнем этого многочлена кратности* r.

Всюду далее будем рассматривать многочлены
только с действительными коэффициентами!

В случае существования такой пары комплексных корней у многочлена $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами, правая часть (5.11) содержит множители

$(x-z_0)^r$ и $(x-\overline{z}_0)^r$, при этом

$$(x-z_0)(x-\overline{z}_0)=(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2+px+q,$$

где $p=-2\alpha,\ \ q=\alpha^2+\beta^2,\ \ p^2-4q=-4\beta^2<0$. Значит в этом случае многочлен $Q_n(x)$ делится без остатка на квадратный трехчлен x^2+px+q, коэффициенты которого являются действительными числами, а дискриминант отрицателен. Последнее означает, что существует такой многочлен $T_{n-2r}(x)$ степени $n-2r$ с действительными коэффициентами, что

$$Q_n(x)=(x^2+px+q)^rT_{n-2r}(x),\ T_{n-2r}(z_0)\neq 0,\ T_{n-2r}(\overline{z}_0)\neq 0.$$

Пусть $a_1,a_2,\cdots,a_k$ — все действительные корни многочлена $Q_n(x)$, а их кратности соответственно равны $l_1,l_2,\cdots,l_k$. Тогда равенство (5.11) можно записать в виде

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\cdots(x-a_k)^{l_k}R(x),$$

где $R(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени $n-\sum\limits_{i=1}^{k}l_i$, не имеющий действительных корней.

Если $R(x)$ — многочлен ненулевой степени, то в формуле (5.11) каждой паре комплексно сопряженных корней z_j и $\overline{z}_j$ кратности r_j, $j=1,2,\cdots,s$, многочлена $Q_n(x)$ соответствует множитель $(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}$, где $p_j^2-4q_j<0$, $j=1,2,\cdots,s$. Поэтому имеет место представление

$$Q_n(x)=c_n(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_k)^{l_k}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{r_s},\qquad(5.12)$$

в котором $\sum\limits_{i=1}^{k}l_i+2\sum\limits_{j=1}^{s}r_j=n$.

Таким образом, зная все действительные и комплексные корни многочлена $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами, можно этот многочлен разложить на множители, то есть представить в виде (5.12).

Разложение рациональной функции на простые дроби

Лемма 5.2. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,* $x=a$ *— действительный корень многочлена* $Q(x)$ *кратности* $k\geq 1$, *то есть*

$$Q_(x)=(x-a)^kN(x)\quad и\quad N(a)\neq 0,$$

тогда существует действительное число A *и многочлен* $M(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{M(x)}{(x-a)^{k-1}N(x)},$$

где дробь $\dfrac{M(x)}{(x-a)^{k-1}N(x)}$ *также является правильной.*

■ Представим рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k N(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left(\frac{P(x)}{(x-a)^k N(x)} - \frac{A}{(x-a)^k}\right) =$$
$$= \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AN(x)}{(x-a)^k N(x)}, \tag{5.13}$$

где A — любое действительное число.

По условию степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^k N(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $N(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, так как $k \geq 1$, поэтому для любого числа A рациональная дробь $\dfrac{P(x) - AN(x)}{(x-a)^k N(x)}$ является правильной.

Выберем теперь число A так, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AN(x)$, то есть $P(a) - AN(a) = 0$. По условию $N(a) \neq 0$, поэтому $A = \dfrac{P(a)}{N(a)}$. При таком выборе A многочлен $P(x) - AN(x)$ делится без остатка на $x - a$, и второе слагаемое в правой части формулы (5.13) можно сократить на $x - a$ $(x \neq a)$ и получить дробь вида

$$\frac{M(x)}{(x-a)^{k-1}N(x)}.$$

Так как эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x-a$, где a — действительное число, то полученная дробь также является правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 5.2, тогда справедливо равенство*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{T(x)}{N(x)},$$

где числа $A_1, \cdots, A_k$ *являются действительными,* $T(x)$ *— многочлен с действительными коэффициентами, дробь* $\dfrac{T(x)}{N(x)}$ *является правильной, а число* $x = a$ *не является корнем многочлена* $N(x)$.

■ Для доказательства достаточно применить лемму 5.2 k раз. □

Лемма 5.3. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь, число* $z_0 = \alpha + i\beta$ *— невещественный корень многочлена* $Q(x)$ *кратности* s*, то есть*

$Q(x) = (x^2+px+q)^s N(x)$, где $x^2+px+q = (x-z_0)(x-\overline{z}_0)$ и $N(z_0)\neq 0$, $N(\overline{z}_0)\neq 0$. Тогда существуют действительные числа B, C и многочлен $M(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}N(x)},$$

где дробь $\dfrac{M(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}N(x)}$ также является правильной.

■ Для произвольных действительных чисел B и C запишем представление

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s N(x)} = \\ &= \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \left(\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s N(x)} - \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}\right) = \\ &= \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P(x)-(Bx+C)N(x)}{(x^2+px+q)^s N(x)},\end{aligned} \tag{5.14}$$

Второе слагаемое в правой части (5.14), очевидно, является правильной дробью. Подберем числа B и C так, чтобы числитель второй дроби делился на $x^2+px+q = (x-z_0)(x-\overline{z}_0)$. Для этого достаточно выбрать B и C так, чтобы z_0 было корнем многочлена $P(x)-(Bx+C)N(x)$.

Пусть $P(z_0)-(Bz_0+C)N(z_0) = 0$, тогда $Bz_0+C = \dfrac{P(z_0)}{N(z_0)}$, поскольку, по условию, $N(z_0)\neq 0$. Пусть $z_0 = \alpha+i\beta$, $\dfrac{P(z_0)}{N(z_0)} = K+iL$. Тогда

$$K+iL = Bz_0+C = B(\alpha+i\beta)+C.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем уравнения

$$B\alpha+C = K,\ \ B\beta = L,$$

следовательно,

$$B = \frac{L}{\beta},\ \ C = K - \frac{\alpha}{\beta}L.$$

Заметим, что B и C — действительные числа и при этих значениях B и C многочлен $P(x)-(Bx+C)N(x)$ будет делиться на многочлен x^2+px+q.

Сокращая второе слагаемое правой части равенства (5.14) на квадратный трехчлен x^2+px+q, получаем дробь вида

$$\frac{M(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}N(x)}.$$

Так как эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на многочлен с действительными коэффициентами, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 5.3, тогда справедливо представление*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_s x + C_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{B_{s-1}x + C_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{T(x)}{N(x)},$$

где $B_j,\ C_j\ \ (j = 1, 2, \cdots, s)$ — действительные числа, $T(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, дробь $\dfrac{T(x)}{N(x)}$ является правильной, причем многочлен $N(x)$ не делится на $x^2 + px + q$.

■ Для доказательства достаточно применить лемму 5.3 s раз. □

Теорема 5.11. *Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь и многочлен $Q(x)$ имеет разложение*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_l)^{k_l} (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{n_s},$$

где $a_i,\ p_j,\ q_j \in \mathbb{R};\ k_i \in \mathbb{N},\ n_j \in \mathbb{N},\ p_j^2 - 4q_j < 0,\ 1 \le i \le l,\ 1 \le j \le s.$

Тогда $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ единственным образом можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^{(l)}}{x-a_l} + \dots + \frac{A_{k_l}^{(l)}}{(x-a_l)^{k_l}} +$$
$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{n_1}^{(1)}x + C_{n_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \dots +$$
$$+ \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s} + \dots + \frac{B_{n_s}^{(s)}x + C_{n_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}},$$

где $A_1^{(i)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$, $1 \le i \le l$; $B_1^j, \dots, B_{n_j}^j$, $C_1^j, \dots, C_{n_j}^j$, $1 \le j \le s$; $l, s \in \mathbb{N}$ являются действительными числами и определяются однозначно.

■ Итак, надо доказать представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_j^{(i)}x + C_j^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}. \tag{5.15}$$

Применяя следствие леммы 5.2, выделим сначала простые дроби вида $\dfrac{A_j^{(1)}}{(x-a_1)^j}$, где $j = 1, 2, \cdots, k_1$. Затем к дроби $\dfrac{T(x)}{N(x)}$ снова применим следствие леммы 5.2 и т. д., пока не выделим простые дроби, соответствующие всем действительным корням многочлена $Q(x)$. В результате правильная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ будет представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j} + \frac{\widehat{T}(x)}{\widehat{N}_m(x)}, \tag{5.16}$$

где $m = n - \sum\limits_{i=1}^{l} k_i$, $\dfrac{\widehat{T}(x)}{\widehat{N}_m(x)}$ — правильная дробь, $\widehat{M}(x)$ и $\widehat{N}_t(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, а многочлен $\widehat{N}_m(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя к каждой паре комплексно сопряженных корней многочлена $Q(x)$ следствие леммы 5.3, получим

$$\frac{\widehat{M}(x)}{\widehat{N}_t(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{B_j^{(i)}(x) + C_j^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,. \tag{5.17}$$

Из формул (5.16) и (5.17) следует равенство (5.15), которое дает разложение правильной рациональной дроби на простые дроби. $\square$

Так как правильная рациональная дробь по теореме 5.11 представима в виде конечной суммы простых дробей, а каждая простая дробь интегрируема в элементарных функциях, то, используя свойство линейности неопределенного интеграла, получаем, что любая правильная рациональная дробь, а значит и любая рациональная дробь, интегрируема в элементарных функциях. Таким образом, доказан следующий результат, полностью решающий задачу интегрирования рациональной дроби.

Теорема 5.12. *Всякая рациональная функция с действительными коэффициентами интегрируема в элементарных функциях.*

Приведем примеры вычисления неопределенных интегралов от рациональных функций.

Пример 5.11. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$

■ Разложение правильной дроби $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ на сумму простых дробей будем искать в виде

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть, имеем $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$2x^2+2x+13=(A+B)x^4+(C-2B)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+ \\ +(-2B+C-2D+E)x+A-2C-2E.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B &= 0, \\ C-2B &= 0, \\ 2A+B-2C+D &= 2, \\ -2B+C-2D+E &= 2, \\ A-2C-2E &= 13, \end{cases}$$

решая которую находим: $A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{dx}{x-2}-\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx-\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Вычисляем каждый интеграл:

$$\int \frac{dx}{x-2}=\ln|x-1|+C,\ \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx=\int \frac{x}{x^2+1}\,dx+2\int \frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+2\ \mathrm{arctg}\,x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

Далее, используя формулу (5.10), получаем, что

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2\,(x^2+1)}+2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{2\,x}{x^2+1}+C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-4\,\mathrm{arctg}\,x+C. \ \square$$

Заметим, что иногда *полезно* в тождество, получаемое при приравнивании многочлена $P(x)$ к числителю дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простых дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя данной рациональной дроби). В результате будут получаться линейные уравнения относительно искомых коэффициентов. Но следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Так как разложение на простые дроби часто требует громоздких выкладок, то иногда при вычислении интегралов от рациональной функции, полезно производить некоторые преобразования, делать замены переменных, позволяющие упростить вычисление интегралов.

Пример 5.12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$.

■ $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} = \int \frac{x^2}{x^3(1-x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^3(1-x^3)^2}\,dx$. Полагая $u = x^3$, получим, что исходный интеграл равен

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u(1-u)^2} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right)\frac{du}{1-u} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u(1-u)} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right)du + \frac{1}{3}\int \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|1-u| + \frac{1}{3\,(1-u)} + C = \frac{1}{3\,(x^3-1)} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3-1}\right| + C. \ \square$$

Пример 5.13. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{(x+2)^6}\,dx$.

■ Разлагая многочлен x^3-1 по степеням $(x+2)$, получим, что

$$\int \frac{x^3-1}{(x+2)^6}\,dx = \int \frac{(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12(x+2) - 9}{(x+2)^6}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^3} - 6\int \frac{dx}{(x+2)^4} + 12\int \frac{dx}{(x+2)^5} - 9\int \frac{dx}{(x+2)^6} =$$

$$= -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{9}{5(x+2)^5} + C. \ \square$$

Пример 5.14. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx,\ x \neq 0$.

■ $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)^2}\,dx = \int \frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$. Выполняя подстановку $u = x + \dfrac{1}{x}$, получим, что исходный интеграл равен

$$\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{x}{x^2+x+1} + C. \ \square$$

Пример 5.15. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx\,,\ x \neq 0$.

■ $$\int \frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx = \int \frac{x^4-2x^2+1}{x^6-1}\,dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + \int \frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\dfrac{1}{x}-1}{x+\dfrac{1}{x}+1}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C. \ \square$$

Метод Остроградского

При интегрировании правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ часто используется метод, суть которого состоит в выделении рациональной части первообразной. Основанием этого метода служит тот факт, что первообразные простых дробей (1) и (3) являются трансцендентными функциями, первообразная простой дроби (2) является правильной рациональной дробью, а первообразная простой дроби (4) может быть представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и трансцендентной функции.

Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней и

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\dots(x^2+p_s+q_s)^{n_s},$$

$$a_i,\ p_j,\ q_j,\ \in \mathbb{R},\ k_i,\ n_j \in \mathbb{N},\ p_j^2-4q_j<0;\ 1\le i\le l,\ 1\le j\le s,\ l,s\in\mathbb{N}.$$

Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы все его корни были простыми и каждый корень $Q_2(x)$ (включая и комплексные) являлся бы корнем многочлена $Q(x)$, то есть положим

$$Q_2(x) = (x-a_1)\dots(x-a_l)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_s+q_s).$$

Тогда представим $Q(x) = Q_2(x)Q_1(x)$, где корни многочлена $Q_1(x)$ есть корни многочлена $Q(x)$, но каждый с кратностью на единицу меньше. В частности, все простые корни $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. При таких обозначениях справедливо соотношение, называемое *формулой Остроградского*,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{T(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{5.18}$$

где $R(x)$ и $T(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, соответственно. Неопределенные коэффициенты многочленов $R(x)$, $T(x)$ вычисляются из равенства, которое получается при дифференцировании равенства (5.18).

В формуле Остроградского рациональная функция $R(x)/Q_1(x)$, называется алгебраической частью интеграла от дроби $P(x)/Q(x)$, а слагаемое $\displaystyle\int \frac{T(x)}{Q_2(x)}\,dx$, которое является трансцендентной функцией, называется трансцендентной частью этого интеграла. Обычно метод Остроградского применяется, если многочлен $Q(x)$ имеет несколько корней большой кратности.

Пример 5.16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx$.

■ Так как квадратный трехчлен x^2+4x+8 не имеет действительных корней, положим

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2+4x+8} + \int \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Дифференцируя это равенство, получим, что

$$\frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{A(x^2+4x+8)-(2x+4)(Ax+B)}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8},$$

откуда $2x+12 = A(x^2+4x+8)-(2x+4)(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+4x+8)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C &= 0,\\ A-2A+D+4C &= 0,\\ 4A-4A-2B+4D+8C &= 2,\\ 8A-4B+8D &= 12, \end{cases}$$

откуда $C=0$, $A=B=D=1$. Следовательно,

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} =$$

$$= \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C. \ \square$$

5.5.2 Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Напомним, что *рациональной функцией, зависящей от двух переменных x и y* называют функцию вида

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{5.19}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены от двух переменных, то есть функции вида $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} a_{ij}\,x^i y^j$, $a_{ij}\neq 0$. Число $n+m$ называется степенью многочлена. Аналогично определяется рациональная функция от k переменных.

Например, функция

$$R(x,y)=\frac{x^2y^2-2xy^2+y^3-x^2+xy-x+1}{xy^4+x^3-x^2y+y-2}$$

является рациональной функцией переменных x и y, при этом степень числителя равна 4, а степень знаменателя — 5.

Рациональная функция вида (5.19) при подстановке вместо x и y функций $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ является функцией уже одной переменной. Если при этом функции $\phi(t)$, $\psi(t)$ будут рациональными функциями, то в результате подстановки получится тоже рациональная функция. Этим соображением далее мы будем постоянно пользоваться.

Лемма 5.4. *Функции вида* $R\Big(x, \Big(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^r\Big)$, *где* $r\in\mathbb{Q}$, $\alpha\delta\neq\beta\gamma$, *интегрируются в элементарных функциях.*

■ Пусть $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ и $r=\dfrac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь. Выполним в интеграле

$$\int R\Big(x,\,\Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^r\Big)\,dx$$

подстановку $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^n$. Тогда $x=\dfrac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}$, $dx=\dfrac{nt^{n-1}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha-\gamma t^n)^2}\,dt$ и

$$\int R\Big(x,\,\Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^r\Big)\,dx=\int R\Big(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n},\,t^m\Big)\frac{nt^{n-1}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha-\gamma t^n)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Так как рациональная функция интегрируется в элементарных функциях, то первообразная рассматриваемой функции является элементарной функцией. □

Заметим, что интегралы вида

$$\int R\Big(x,\,\Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^{r_1},\cdots,\Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^{r_s}\Big)\,dx,$$

где $r_i\in\mathbb{Q}$, $i=1,\cdots,s$, $\alpha\delta\neq\beta\gamma$, сводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k,$$

где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $r_1,\cdots,r_s$.

Пример 5.17. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

■ Так как НОК$(2;3)=6$, то положим $x=t^6$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt=$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1)\,dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \ \square$$

Пример 5.18. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$ $(x > 2)$.

■ Запишем подынтегральную функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Так как $f(x)$ — рациональная функция относительно от x и $\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^{1/2}$, то выполним подстановку $\dfrac{x-2}{x-1} = t^2$. Тогда $x = \dfrac{2-t^2}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \int \frac{t}{\left(\dfrac{2-t^2}{1-t^2} - 1\right)\left(\dfrac{2-t^2}{1-t^2} - 2\right)} \cdot \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C. \ \square$$

Интегрирование квадратичных иррациональностей

Лемма 5.5. *Функции вида* $R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)$, a, b, $c, \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$, *в области определения интегрируются в элементарных функциях.*

■ Заметим, что трехчлен $ax^2 + bx + c$ либо имеет действительные корни, либо, если нет действительных корней, его знак совпадает со знаком числа a. Действительно, если $D = b^2 - 4ac < 0$, то

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\big((2ax+b)^2 + (4ac - b^2)\big),$$

откуда следует, что $\operatorname{sgn}(ax^2 + bx + c) = \operatorname{sgn} a$. А так как в области определения функции R должно выполняться неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$, то, если трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, должно быть $a > 0$.

Итак, пусть квадратный трехчлен не имеет действительных корней, тогда подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$ рационализирует подынтегральное выражение. Рассмотрим, например, случай $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$, тогда

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} = R_1(t),\ \ dx = \frac{-2\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2\sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}\,dt = R_2(t)\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}R_1(t) + t = R_3(t),$$

где $R_1(t),\ R_2(t)$ и $R_3(t)$ — рациональные функции от t. Поэтому

$$\int R\Big(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,dx = \int R\big(R_1(t),\ R_3(t)\big)R_2(t)\,dt = \int R_4(t)\,dt,$$

где $R_4(t)$ — рациональная функция от t. Следовательно, если трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, то первообразная рассматриваемой функции является элементарной функцией.

Пусть теперь трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2. Если $x_1 = x_2$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ и потому должно быть $a > 0$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\ |x - x_1|,$$

то есть на рассматриваемом промежутке подынтегральная функция является рациональной, а значит, интегрируется в элементарных функциях.

Пусть $x_1 \neq x_2$, тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. В этом случае подынтегральное выражение рационализирует подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$$

Действительно, возводя последнее равенство в квадрат и сокращая на $(x - x_1)$, получим, что $a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$,, откуда следует, что

$$x = \frac{-ax_2 + x_1t^2}{t^2 - a} = R_1(t), \quad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2}\,dt = R_2(t)\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\big(R_1(t) - x_1\big) = R_3(t).$$

Следовательно,

$$\int R\Big(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,dx = \int R\big(R_1(t),\ R_3(t)\big)R_2(t)\,dt = \int R_4(t)\,dt,$$

где $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$ — рациональные функции от t, а значит, рассматриваемая функция интегрируется в элементарных функциях. $\square$

Замечание. В случае, если $c > 0$, рационализацию подынтегрального выражения можно осуществить с помощью подстановки

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Действительно, пусть, например, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}\,xt + c,$$

$$x = \frac{2\sqrt{c}\ t - b}{a - t^2} = R_1(t),\ dx = 2\frac{\sqrt{c}\ t^2 - bt + \sqrt{c}\ a}{(a - t^2)^2}\,dt = R_2(t)\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\,R_1(t) + \sqrt{c} = R_3(t).$$

Тогда, окончательно,

$$\int R\bigl(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\bigr)\,dx = \int R\bigl(R_1(t),\ R_3(t)\bigr)R_2(t)\,dt = \int R_4(t)\,dt,$$

где $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$ — рациональные функции от t, и, следовательно, функция $R\Bigl(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\Bigr)$ интегрируется в элементарных функциях.

Эти подстановки, рационализирующие выражение $R\Bigl(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\Bigr)\,dx$, называют *подстановками Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x, \quad a>0;$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \quad c>0;$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t|x-x_1|,$$

где x_1 — действительный корень трехчлена ax^2+bx+c.

Пример 5.19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

■ Применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2-x+1} = t-x$, тогда

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1},\ \ dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt = \int \Bigl(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\Bigr)\,dt =$$
$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + C =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1} + 2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| -$$
$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1| + C. \ \square$$

Пример 5.20. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

■ Так как $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, то применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1)$, тогда $x = -\dfrac{t^2-2}{t^2-1}$, $dx = \dfrac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}$. Поэтому

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = -2\int \frac{t(t+2)\,dt}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} =$$
$$= -2\int \Bigl(\frac{8}{27}\,\frac{1}{t-2} - \frac{3}{8}\,\frac{1}{t-1} + \frac{17}{216}\,\frac{1}{t+1} - \frac{5}{36}\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{(t+1)^3}\Bigr)\,dt =$$
$$= -\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6}\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{16}{27}\ln|t-2| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{17}{108}\ln|t+1| + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. $\square$

Хотя подстановки Эйлера во всех случаях решают вопрос о вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ в элементарных функциях, на практике подстановки Эйлера обычно приводят к сложным выкладкам. Поэтому, в случае выполнения некоторых дополнительных условий на подынтегральную функцию, при вычислении интегралов указанного типа используются и другие приемы. Укажем специальные методы вычисления следующих интегралов

1) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$;

2) $\displaystyle\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geq 2$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Выделяя из квадратного трехчлена ax^2+bx+c полный квадрат, запишем его в виде $ax^2+bx+c = a(x+\delta)^2+q$. Если в интегралах 1) и 2) сделать подстановку $x+\delta = t$, то получим интегралы:

$$\int \frac{A_1t+B_1}{\sqrt{at^2+q}}\, dt, \quad \int (A_1t+B_1)\sqrt{at^2+q}\, dt.$$

Вычисление этих интегралов, в зависимости от знака числа a, сводится к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{Ct+D}{\sqrt{t^2 \pm r^2}}\, dt,\ \int \frac{Ct+D}{\sqrt{r^2-t^2}}\, dt,\ \int (Ct+D)\sqrt{r^2-t^2}\, dt,\ \int (Ct+D)\sqrt{t^2 \pm r^2}\, dt,$$

каждый из которых представляет собой сумму двух интегралов, одного табличного, и другого, сводимого к табличному при использовании равенства $t\, dt = \dfrac{1}{2}\, d(t^2 \pm r^2)$.

Интегралы $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ и $\int \sqrt{x^2+k}\, dx$ не входили в таблицу основных интегралов. Но так как они часто встречаются в приложениях, принято и эти интегралы называть табличными. Напомним (см. пример 9 и замечание к нему), что

$$\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a\, \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$$

Пример 5.21. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

■ Так как $1-x-x^2 = -\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$, то, полагая $x+\dfrac{1}{2}=t$, получим, что $dx=dt$. Тогда

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = \int \frac{-3t+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(\frac{5}{4}-t^2\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} + \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} = 3\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}+C =$$

$$= 3\sqrt{1-x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.\ \square$$

Пример 5.22. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

■ Так как $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, то преобразуя интеграл и полагая $x+\dfrac{1}{2}=t$, имеем

$$\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)+6\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int (2t+6)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = 2\int t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + 6\int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + 6\int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{2}{3}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2} +$$

$$+6\left(\frac{t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}{2}+\frac{3}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|\right)+C =$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+x+1)^{3/2}+3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.\ \square$$

Интеграл 3) можно свести к интегралу от рациональной функции с помощью одной из подстановок Эйлера. Однако в данном случае значительно быстрее к цели приводит применение формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{5.20}$$

здесь Q_{n-1} — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ — неизвестная константа. Определение коэффициентов многочлена Q_{n-1} и постоянной λ производится по методу неопределенных коэффициентов. Дифференцируя (5.20) и умножая полученное равенство на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим, что

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему $(n+1)$ линейных уравнений, из которой и определяются коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и постоянная λ. Интеграл в правой части формулы (5.20) сводится к табличному с помощью линейной подстановки.

Заметим, что формула (5.20) позволяет у интеграла $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выделить алгебраическую часть $Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$ без интегрирования.

Пример 5.23. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(x^3-2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

■ Положим

$$\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получим, что

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

а тогда $2(x^3-2) = (4ax+2b)(x^2+x+1)+(ax^2+bx+c)(2x+1)+2\lambda$. Для нахождения неопределенных коэффициентов a, b, c, и λ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = 4a+2a, \\ 0 = 4a+2b+a+2b, \\ 0 = 4a+2b+b+2c, \\ -4 = 2b+c+2\lambda, \end{cases}$$

решая которую находим, что $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{5}{12}$, $c=-\dfrac{1}{24}$, $\lambda=-\dfrac{25}{16}$. Следовательно,

$$\int \frac{(x^3-2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{12}-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{12}-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C. \;\square$$

Интеграл вида 4) подстановкой $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$ приводится к интегралу вида 3).

Пример 5.24. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ $(x>0)$.

■ Положим $x = \dfrac{1}{t}$, тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и потому

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t^3\,dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= -\int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = -\int \sqrt{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= -\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C =$$

$$= -\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C.$$

Остается в последнее выражение подставить $t = \dfrac{1}{x}$. □

Интегрирование дифференциальных биномов

Определение 5.3. *Дифференциальным биномом называются выражения вида*

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx, \quad \text{где } a,\ b \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Q}, \quad n \neq 0, p \neq 0.$$

В середине XIX века выдающийся русский математик П. Л. Чебышев доказал следующее утверждение.

Теорема 5.13 (Чебышева). *Дифференциальные биномы интегрируются в элементарных функциях только в трех случаях:*

1) $p \in \mathbb{Z}$;

2) $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;

3) $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

Лемма 5.6. *В случаях, перечисленных в теореме 5.13, рационализация дифференциальных биномов проводится с помощью следующих подстановок:*

1) если $p \in \mathbb{Z}$, *то* $x = t^l$, *где* l *— наименьшее общее кратное знаменателей дробей* m *и* n;

2) если $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, *то* $a + bx^n = t^s$, *где* s *— знаменатель дроби* p;

3) если $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, *то* $ax^{-n} + b = t^s$, *где* s *— знаменатель дроби* p.

■ 1). Пусть $p \in \mathbb{Z}$, $m = \dfrac{r}{q}$, $n = \dfrac{k}{s}$ — несократимые дроби, $l = \text{НОК}\{q, s\}$. Положим $x = t^l$. Тогда $dx = lt^{l-1}\,dt$ и

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int t^{rl/q}\left(a+bt^{kl/s}\right)^p lt^{l-1}\,dt = \int R(t)\,dt,$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t. Следовательно, первообразная рассматриваемой функции является элементарной функцией.

2). Пусть $p \notin \mathbb{Z}$,но $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ и $p = \dfrac{k}{s}$. Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом

$$x^m(a+bx^n)^p = x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1},$$

и положим $a+bx^n = t^s$. Тогда $x^{n-1}\,dx = \dfrac{s}{bn}\,t^{s-1}dt$ и

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{(m-n+1)/n} t^{sp}\,\frac{s}{bn}\,t^{s-1}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t, так как

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 \text{ — целое число.}$$

Следовательно, первообразная подынтегральной функции является элементарной функцией.

3). Пусть $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, но $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ и $p = \dfrac{k}{s}$. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$x^m(a+bx^n)^p = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p.$$

Тогда интеграл $\displaystyle\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx$ удовлетворяет условию пункта 2), и, следовательно, является элементарной функцией. □

Пример 5.25. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

■ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1/2}(1+x^{1/3})^{-2}\,dt$, здесь $m = -1/2$, $n = 1/3$, $p = -2 \in \mathbb{Z}$, $\text{НОК}(2,3) = 6$, поэтому положим $x = t^6$ и получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+\sqrt[3]{x})^2} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3(1+t^2)^2} = 6\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,dt = 6\int \frac{dt}{1+t^2} -$$

$$-6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 6\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{3t}{t^2+1} - 3\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$

$$= 3\big(\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} - \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\big) + C. \ \square$$

Заметим, что при вычислении интеграла $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ был использован результат примера 10.

Пример 5.26. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

■ Так как $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx$, то $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3\notin\mathbb{Z}$, $(m+1)/n = 2\in\mathbb{Z}$. Применим подстановку $1+x^{1/4}=t^3$, тогда $x=(t^3-1)^4$, $dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int \frac{t\cdot t^2(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}\,dt = 12\int t^3(t^3-1)\,dt =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}\Big(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\Big)^7 - \Big(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\Big)^4 + C. \ \square$$

Пример 5.27. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ $(x>0)$.

■ Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-1/4}\,dx$, то $m=0$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$. Тогда $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n}+p = 0\in\mathbb{Z}$. Поэтому применим подстановку $1+x^{-4}=t^4$ и получим, что

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}} \text{ и } dx = -\frac{t^3dt}{(t^4-1)\sqrt[4]{t^4-1}}\,.$$

Прежде, чем сделать подстановку, преобразуем подынтегральную функцию к виду $(1+x^4)^{-1/4} = x^{-1}(x^{-4}+1)^{-1/4}$. Тогда

$$I = \int x^{-1}(x^{-4}+1)^{-1/4}\,dx = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt[4]{1+x^4}}{x-\sqrt[4]{1+x^4}}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \ \square$$

5.5.3 Интегрирование тригонометрических функций

Лемма 5.7. *Функции вида $R(\sin x,\ \cos x)$, где $R(u, v)$ — рациональная функция от u и v, интегрируются в элементарных функциях.*

■ Подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, $x\in(-\pi,\pi)$ рационализирует выражение

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

так как

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Поэтому $\displaystyle\int R(\sin x,\, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt$, где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Следовательно, рассматриваемая функция интегрируется в элементарных функциях. $\square$

Подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ называется *универсальной тригонометрической подстановкой* для интегралов вида $\displaystyle\int R(\sin x,\, \cos x)\,dx$.

Однако универсальная тригонометрическая подстановка приводит иной раз к сложным выкладкам. Рассмотрим частные случаи, когда цель может достигаться с помощью более простых подстановок. Напомним следующие простые результаты из курса алгебры. Если рациональная функция $R(u,v)$ является нечетной по переменной u, то есть $R(-u,v) = -R(u,v)$, то она приводится к виду $R(u,v) = u\,R_1(u^2,v)$, где R_1 — рациональная функция. Аналогичное представление имеет место, если функция $R(u,v)$ является нечетной по переменной v. Если же рациональная функция $R(u,v)$ является четной по совокупности переменных, то есть $R(-u,-v) = R(u,v)$, то она приводится к виду $R(u,v) = R_2(\dfrac{u}{v}, v^2)$, где R_2 — рациональная функция.

Теперь выделим три специальных подстановки.

1. Если $R(-\sin x,\, \cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует выражение $R(\sin x,\, \cos x)\,dx$, так как $dt = -\sin x\,dx$ и

$$\int R(\sin x,\, \cos x)\,dx = \int \sin x R_1(\sin^2 x,\, \cos x)\,dx =$$

$$= -\int R_1(1-t^2,\, t)\,dt = \int R_2(t)\,dt,$$

где $R_2(t)$ — рациональная функция от t.

2. Если $R(\sin x,\, -\cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то аналогичным образом подстановка $\sin x = t$ рационализирует выражение $R(\sin x,\, \cos x)\,dx$.

3. Если $R(-\sin x,\, -\cos x) = R(\sin x,\, \cos x)$, то исходное выражение рационализирует подстановка $\operatorname{tg} x = t,\ x \in (-\pi/2,\, \pi/2)$, так как тогда $x = \operatorname{arctg} t,\ dx =$

$\dfrac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$. Поэтому

$$\int R(\sin x,\, \cos x)\, dx = \int R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x},\, \cos^2 x\right)\, dx =$$

$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x,\, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)\, dx = \int R_2\left(t,\, \frac{1}{1+t^2}\right)\, \frac{dt}{1+t^2} = \int R_4(t)\, dt,$$

где $R_4(t)$ — рациональная функция от t.

Рассмотрим примеры интегрирования в элементарных функциях рациональных функций от $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 5.28. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

■ Выполним подстановку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, $x \in (-\pi,\, \pi)$ и получим

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(5-\dfrac{8t}{1+t^2}+\dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + C. \ \square$$

Пример 5.29. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin^5 x\cos^4 x\, dx$.

■ Так как $R(-\sin x, \cos x) = -\sin^5 x\cos^4 x = -R(\sin x, \cos x)$, полагая $\cos x = t$, получим

$$\int \sin^5 x\cos^4 x\, dx = \int \sin^4 x\cos^4 x\sin x\, dx =$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^4 x\, d(\cos x) = -\int (1-t^2)^2 t^4\, dt =$$

$$= -\int (t^4-2t^6+t^8)\, dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2}{7}\, t^7 - \frac{1}{9}\, t^9 + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C. \ \square$$

Пример 5.30. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

■ Так как $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)^5} = R(\sin x, \cos x)$, то положим $\operatorname{tg} x = t$ и получим

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int \frac{dx}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^6 x\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x\cdot\dfrac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^3 \dfrac{1}{(1+t^2)^3}} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3}\, dt = \int \frac{dt}{t^3} + 3\int \frac{dt}{t} + 3\int t\, dt + \int t^3\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + 3\ln|t| + \frac{3}{2}\, t^2 + \frac{1}{4}\, t^4 + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| +$$

$$+ \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C. \ \square$$

Иногда при вычислении интегралов указанного типа бывает полезно прибегать к другим искусственным приемам, используя известные тригонометрические формулы.

Пример 5.31. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

■ $$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^3 x \cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C. \ \square$$

При вычислении интегралов вида $\displaystyle\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, используются формулы:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\big),$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\big),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\big).$$

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,\ \ m,\, n \in \mathbb{Q}, \tag{5.21}$$

с помощью подстановок $\sin x = t$ или $\cos x = t$ сводятся к интегралам от дифференциального бинома. Например, выполняя в этом интеграле замену $\sin x = t$, получаем, что $dt = \cos x\, dx$ и

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \pm \int t^m (1-t^2)^{(n-1)/2}\, dt.$$

Если m и n — целые неотрицательные четные числа, то для вычисления интегралов вида (5.21) используют формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 5.32. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

$$\blacksquare \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cos^2 x = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{32}\int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{192}\sin 6x + C =$$
$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + C. \ \square$$

5.6 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$, имеют одну и ту же первообразную $F(x)$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ на $[a,b]$.

2. Пусть функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — ее первообразная на нем. Доказать, что $F(x)$ возрастает на $[a,b]$.

3. Пусть функция $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F(a) = F(b)$, а функция f не имеет нулей на $[a,b]$. Доказать, что функция $F(x)$ не может быть первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

4. Пусть функция $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, а функция f, определенная на $[a,b]$ такова, что$(b-a)f(x) \neq F(b) - F(a)$, $\forall x \in [a,b]$. Доказать, что функция $F(x)$ не может быть первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

5. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, а $\Phi(x)$ — на $[b,c]$ $(a < b < c)$. Можно ли утверждать, что функция
$$\Psi(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in [a,b], \\ \Phi(x), & \text{если } x \in (b,c], \end{cases}$$
является первообразной функции $f(x)$ на $[a,c]$?

6. Доказать, что следующие функции не имеют первообразных на отрезке $[-1,1]$.

   a) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [-1,1] \bigcap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [-1,0), \\ 1+x, & \text{если } x \in [0,1]. \end{cases}$

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Доказать, что функция $f(x)$ не имеет первообразной на отрезке $[a,b]$.

8. Пусть функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ на интервалах (a,b) и (b,c). Можно ли утверждать, что
$$\exists\, C_0 \in \mathbb{R} : F(x) = \Phi(x) + C_0,\ \forall\, x \in (a,b) \bigcup (b,c)?$$

9. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке D, $F(x)$ — её первообразная на D. Доказать, что для всех x из D
$$\int x f'(x)\, dx = x f(x) - F(x) + C.$$

10. Пусть нечетная (четная) функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(-a,a)$. Доказать, что $f(x)$ является четной (соответственно, нечетной) функцией.

11. Пусть периодическая функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция. Верно ли обратное утверждение?

12. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке D первообразную $F(x)$. Доказать, что при $a \neq 0$
$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

13. Пусть четная функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$. Можно ли утверждать, что функция $F(x)\operatorname{sgn} x$ является первообразной функции $f(x)\operatorname{sgn} x$ на $[-1,1]$?

14. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы на промежутке D, функция $f''(x)g(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на нем. Доказать, что функция $f(x)g''(x)$ имеет на промежутке D первообразную, причем
$$\int f(x)g''(x)\, dx = f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x) + F(x) + C.$$

15. Пусть функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на $[a,b] \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a,b)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} F'(x)$. Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для некоторой функции на $[a,b]$.

16. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты, чтобы следующие интегралы представляли собой рациональную функцию:

$$\text{a)} \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx; \quad b) \int \frac{ax^2+bx+c}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}\,dx,\ \alpha \neq 0,\ \beta^2-\alpha\gamma) \neq 0.$$

17. Через какие функции может быть выражен интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ имеет: a) только действительные корни, b) только комплексные корни.

18. Указать, при каких a, b, c, d интеграл $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$

   a) является рациональной функцией;

   b) имеет вид $R_1(x) + \alpha \ln R_2(x) + C$, где $R_1(x)$, $R_2(x)$ — рациональные функции, α — вещественное число, C — произвольная константа;

   c) имеет вид $\alpha \ln R(x) + C$, где α — число, $R(x)$ — рациональная функция, C — произвольная константа.

19. Указать, при каких a, b, c, $(a \neq 0)$ интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ имеет вид

$$\alpha \operatorname{arctg} R(x) + C,$$

где α — число, $R(x)$ — рациональная функция, C — произвольная константа.

20. Представляет ли интеграл $\int \sqrt{1+x^k}\,dx$ элементарную функцию при

$$\text{a) } k = \frac{5}{3}; \quad \text{b) } k = 2; \quad \text{c) } k = \frac{3}{2}; \quad \text{d) } k = \frac{9}{4}\,?$$

21. Построить рациональную функцию $R(t)$ так, чтобы выполнялось одно из условий:

   a) $\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = \alpha \ln R_1(\sqrt[n]{x}) + C;$

   b) $\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = \alpha \operatorname{arctg} R_1(\sqrt[n]{x}) + C.$

   где $R_1(t)$ — рациональная функция.

22. Построить рациональную функцию $R(t)$ так, чтобы,

$$\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = \alpha \ln R_1(\sqrt[n]{x}) + \beta \operatorname{arctg} R_2(\sqrt[n]{x}) + C,$$

где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — рациональные функции.

Литература

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х., Математический анализ, т. 1. — М.: Изд–во МГУ, 1987.

[2] Зорич В. А., Математический анализ, т. 1. — М. : Наука, 1993.

[3] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1. — М. : Высшая школа, 2000.

[4] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. — М. : Наука, 1966.

[5] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. — М. : Наука, 1966.

[6] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1. — М.: Высшая школа, 1988.

[7] Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И., Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 2000.

Оглавление