ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического анализа

Т. И. Коршикова, Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко

Курс лекций по математическому анализу
I курс, 2-й семестр

Ростов-на-Дону
2008 год

Т. И. Коршикова, Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко.
Курс лекций по математическому анализу, I курс, 2-й семестр. — ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2008 год

Изложен лекционный материал курса «Математический анализ», традиционно читаемый сотрудниками кафедры математического анализа ЮФУ (РГУ) во втором семестре первого курса на отделениях «Математика» и «Механика». После каждого раздела приведены задачи теоретического характера для самостоятельной работы.

Глава 1

Определенный интеграл

1.1 Определение интеграла Римана

Назовем разбиением отрезка $[a, b]$ $(a < b)$ множество точек $x_k, k = 0, 1, \dots, n$, таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, и будем обозначать его $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$. Каждый из отрезков $[x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n$, назовем отрезком разбиения τ и его длину $|x_k - x_{k-1}|$ обозначим Δx_k. Величину $d(\tau) = \max \Delta x_k, k = 1, \dots, n$, назовем диаметром разбиения τ (или мелкостью разбиения τ). Множество всех разбиений отрезка $[a, b]$ обозначим символом $\mathcal{N}[a, b]$.

Пусть определена функция $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, а $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Выберем произвольным образом точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n$, и назовем совокупность $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ выборкой, построенной по разбиению τ. Через (τ, ξ) обозначим разбиение τ с выборкой ξ. Составим сумму

$$S^f(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k, \tag{1.1}$$

которую будем называть интегральной суммой (суммой Римана) функции f, составленной по разбиению τ отрезка $[a, b]$ и выборке ξ.

Определение 1.1. *Число $I(f)$ называется пределом интегральных сумм $S^f(\tau, \xi)$ при $d(\tau) \to 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$, диаметр которого $d(\tau) < \delta$, и для любой выборки ξ выполняется неравенство $|S^f(\tau, \xi) - I(f)| < \varepsilon$. В этом случае пишут $I(f) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi)$ или $S^f(\tau, \xi) \to I(f)$ при $d(\tau) \to 0$, имея в виду, что предел не зависит от ξ.*

С помощью символов определение 1.1 можно записать так:

$$I(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$|S^f(\tau, \xi) - I(f)| < \varepsilon,\ \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a, b],\ d(\tau) < \delta,\ \forall\, \xi.$$

Определение 1.2. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$, если существует предел*

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau,\xi) = I(f) \in \mathbb{R},$$

число $I(f)$ называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a,b]$ (или интегралом Римана) и обозначается

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

при этом x называют переменной интегрирования, a — нижним, b — верхним пределом интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau,\xi)$$

Из определений следует, что интегрируемость функции f на отрезке $[a,b]$ и величина интеграла Римана от нее не зависят от имени (обозначения) переменной интегрирования.

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$ будем далее обозначать через $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Выясним геометрический смысл интегральной суммы. Будем считать, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и неотрицательна на $[a,b]$. Криволинейной трапецией обычно называют плоское множество, ограниченное графиком Γ_f функции f, отрезком $[a,b]$ оси OX и, быть может, прямыми $x = a$ и $x = b$. Такую криволинейную трапецию будем далее обозначать через $G_f[a,b]$. Аналитически, область $G_f[a,b]$ можно описать так:

$$G_f[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=1}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — некоторая выборка из разбиения τ. Построим прямоугольники

$$\Pi_k = [x_{k-1},x_k] \times [0, f(\xi_k)],\ k = 1,\ldots,n,$$

площади которых равны числу $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$. Множество $\bigcup_{k=1}^n \Pi_k$ является некоторым многоугольником (ступенчатой областью), стороны которого параллельны одной из осей координат, и его площадь совпадает с интегральной суммой (1.1), соответствующей разбиению τ и выборке ξ.

Несколько позже будет введено понятие площади множества на плоскости и установлено, что при наложенных на f ограничениях, площадь криволинейной трапеции $G_f[a,b]$ равна $I(f)$ — определенному интегралу от функции f по отрезку $[a,b]$, то есть равна пределу площадей введенных ступенчатых областей.

Покажем, что множество $\mathcal{R}_{[a,b]}$ не является пустым.

Пример 1.1. Функция $f(x) \equiv c$ $(c \in \mathbb{R})$, $x \in [a,b]$, интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то есть принадлежит множеству $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

■ Для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{N}[a,b]$ и любой выборки ξ

$$S^f(\tau,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^n c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a).$$

Значит, существует $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau,\xi) = c\,(b-a)$. По определению 1.2

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \text{ и } \int\limits_a^b c\,dx = c\,(b-a). \ \square$$

Теорема 1.1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем.*

■ Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Положим $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists \delta > 0 : |S^f(\tau,\xi) - I(f)| < 1, \ \forall\,\tau \in \mathcal{N}[a,b], d(\tau) < \delta, \ \forall\,\xi.$$

Зафиксируем такое $\tau_0 = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{N}[a,b]$, что $d(\tau_0) < \delta$. Тогда для любой выборки ξ

$$|S^f(\tau_0,\xi)| = |I(f) + S^f(\tau_0,\xi) - I(f)| \le |I(f)| + |S^f(\tau_0,\xi) - I(f)| < |I(f)| + 1,$$

то есть, множество интегральных сумм $\{S^f(\tau_0,\xi),\ \forall\,\xi\}$ ограничено.

Предположим что функция f не является ограниченной на $[a,b]$. Тогда существует отрезок разбиения $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, на котором f не ограничена. Следовательно, существует последовательность $\{\alpha_m\}$ такая, что

$$\alpha_m \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}], \ \lim_{m\to+\infty} |f(\alpha_m)| = +\infty.$$

Рассмотрим выборки $\xi^{(m)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{k_0-1}, \alpha_m, \xi_{k_0+1}, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$S^f(\tau_0, \xi^{(m)}) = \sum_{k=1, k\ne k_0}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(\alpha_m)\Delta x_{k_0}.$$

Так как сумма $\sum\limits_{k=1,k\ne k_0}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k$ не зависит от m, а $|f(\alpha_m)| \to +\infty$ при $m \to +\infty$, то множество $\{S^f(\tau_0,\xi^{(m)}) : m \in \mathbb{N}\}$ является неограниченным. Получили противоречие, поэтому предположение о неограниченности функции f на $[a, b]$ неверно. $\square$

Утверждение обратное теореме 1.1 не имеет места, то есть ограниченность функции на отрезке не является достаточным условием ее интегрируемости на нем.

Пример 1.2. Показать, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \bigcap [a, b] \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

■ Зафиксируем некоторое разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{N}[a, b]$. Если выбрать $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ так, что $\xi'_k \in \mathbb{Q} \bigcap [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$, то получим

$$S^f(\tau, \xi') = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

Если же выбрать $\xi'' = (\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n)$ так, что $\xi''_k \in [x_{k-1}, x_k] \setminus \mathbb{Q}$, то

$$S^f(\tau, \xi'') = \sum_{k=1}^{n} f(\xi''_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Итак, для любого разбиения τ существует такие выборки ξ' и ξ'', что $S^f(\tau, \xi') = b - a$, а $S^f(\tau, \xi'') = 0$, то есть предел интегральных сумм зависит от выборки, чего быть не должно в силу определений 1.1 и 1.2. Следовательно, функция f не интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, хотя ограничена на нем. $\square$

Таким образом, есть функции интегрируемые и неинтегрируемые по Риману на отрезке.

1.2 Суммы Дарбу и их свойства

Изучим свойства интегрируемых функций. В силу теоремы 1.1, не нарушая общности, будем далее всегда рассматривать только *функции, ограниченные на отрезке.*

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{N}[a, b]$, тогда множество

$$\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \ k = 1, 2, \cdots, n,$$

является ограниченным числовым множеством. В силу теоремы о существовании точных границ числового множества (см. [4, теорема 1.4]) для всех $k = 1, 2, \cdots, n$, существуют конечные точные границы

$$M_k^f = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \ m_k^f = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

при этом, очевидно,

$$m_k^f \le f(x) \le M_k^f,\ \forall\, x \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. *Для ограниченной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиения τ отрезка $[a, b]$ суммы*

$$S^f(\tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k^f \,\Delta x_k, \quad s^f(\tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k^f \,\Delta x_k$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу функции f при заданном разбиении τ отрезка $[a, b]$.

Введенные выше обозначения будут далее использоваться в этой главе без пояснений!

Приведем геометрическую интерпретацию сумм Дарбу для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$. Пусть, как и раньше, $G_f[a, b]$ — криволинейная трапеция, определяемая по функции f на отрезке $[a, b]$. Для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$, $S^f(\tau)$ — площадь многоугольника, содержащего криволинейную трапецию $G_f[a, b]$, а $s^f(\tau)$ — площадь многоугольника, содержащегося в криволинейной трапеции $G_f[a, b]$.

Рассмотрим свойства сумм Дарбу.

Теорема 1.2. *Для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$ и любой выборки ξ справедливы неравенства*

$$s^f(\tau) \le S^f(\tau, \xi) \le S^f(\tau). \tag{1.3}$$

■ Доказательство сразу следует из неравенства (1.2), если в нем положить $x = \xi_k$, затем все части неравенства умножить на Δx_k и просуммировать по k. □

Теорема 1.3. *Для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$ справедливы равенства*

$$S^f(\tau) = \sup_{\xi} S^f(\tau, \xi), \quad s^f(\tau) = \inf_{\xi} s^f(\tau, \xi). \tag{1.4}$$

■ Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Докажем, что $S^f(\tau) = \sup\limits_{\xi} S^f(\tau, \xi)$. Согласно характеристическим свойствам точной верхней границы (см.[4, определение 1.30]) нужно показать, что выполняются следующие условия:

a) $\forall \xi \quad S^f(\tau, \xi) \le S^f(\tau)$;

b) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \xi'$: $S^f(\tau) - S^f(\tau, \xi') < \varepsilon$.

Условие a) выполняется в силу теоремы 1.2.

Так как $M_k^f = \sup\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$, то согласно характеристическим свойствам точной верхней границы

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \xi_k' = \xi_k'(\varepsilon) \in [x_{k-1}, x_k] : \; 0 \leq M_k^f - f(\xi_k') < \frac{\varepsilon}{b-a}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая k-е неравенство на Δx_k, и складывая все полученные неравенства, находим, что $0 \leq S^f(\tau) - S^f(\tau, \xi') < \varepsilon$, где $\xi' = (\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n')$ — выборка из разбиения τ, то есть выполняется условие b).

Аналогично доказывается и второе равенство из (1.4). □

Теорема 1.4. *При добавлении к заданному разбиению новых точек разбиения верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя не уменьшится.*

■ Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, и $\tau' = \{\alpha\} \cup \tau$, где $\alpha \in (x_{k_0-1}, \, x_{k_0})$, $1 \leq k_0 \leq n$. Пусть

$$M_{k_0}'^f = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k_0-1}, \alpha]\}, \quad M_{k_0}''^f = \sup\{f(x) \mid x \in [\alpha, x_{k_0}]\}.$$

Заметим, что $M_{k_0}'^f \leq M_{k_0}^f$ и $M_{k_0}''^f \leq M_{k_0}^f$. Тогда для верхних сумм Дарбу $S^f(\tau')$ и $S^f(\tau)$ получим неравенство

$$S^f(\tau') = \sum_{k=1, k\neq k_0}^{n} M_k^f \Delta x_k + M_{k_0}'^f(\alpha - x_{k_0-1}) + M_{k_0}''^f(x_{k_0} - \alpha) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1, k\neq k_0}^{n} M_k^f \Delta x_k + M_{k_0}^f(\alpha - x_{k_0-1} + x_{k_0} - \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k^f \Delta x_k = S^f(\tau).$$

Следовательно, $S^f(\tau') \leq S^f(\tau)$. Так же доказывается утверждение для нижних сумм Дарбу, но в этом случае $m_{k_0}'^f = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k_0-1}, \alpha]\} \geq m_{k_0}^f$, $m_{k_0}''^f = \inf\{f(x) \mid x \in [\alpha, x_{k_0}]\} \geq m_{k_0}^f$. □

Теорема 1.5. *Для любых двух разбиений τ' и τ'' отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство $s^f(\tau') \leq S^f(\tau'')$, то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.*

■ Пусть τ' и τ'' произвольные разбиения отрезка $[a, b]$. Составим разбиение $\tau = \tau' \cup \tau''$ отрезка $[a, b]$, тогда в силу неравенства (1.3) и теоремы 1.4,

$$s^f(\tau') \leq s^f(\tau) \leq S^f(\tau) \leq S^f(\tau''),$$

откуда и следует, что $s^f(\tau') \leq S^f(\tau'')$. □

Теорема 1.6. *Существуют числа*

$$I_*(f) = \sup\left\{s^f(\tau), \, \tau \in \mathcal{N}[a, b]\right\}, \quad I^*(f) = \inf\left\{S^f(\tau), \, \tau \in \mathcal{N}[a, b]\right\}, \quad (1.5)$$

которые называются, соответственно, нижним и верхним интегралами Дарбу от функции f на отрезке $[a,b]$. При этом, для любых разбиений τ' и τ'' отрезка $[a,b]$ имеют место неравенства

$$s^f(\tau') \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^f(\tau''), \tag{1.6}$$

■ Множество $\{S^f(\tau) : \tau \in \mathcal{N}[a,b]\}$ согласно теореме 1.5 ограничено снизу, причем в качестве нижней границы можно взять число $s^f(\tau')$, $\forall\,\tau' \in \mathcal{N}[a,b]$. Тогда по теореме о существовании точных границ числового множества существует число $\inf\limits_{\tau\in\mathcal{N}[a,b]} S^f(\tau) = I^*(f)$. При этом, по определению точной нижней границы числового множества,

$$s^f(\tau) \le I^*(f) \le S^f(\tau),\ \forall\,\tau \in \mathcal{N}[a,b].$$

Аналогично существует число $\sup\{s^f(\tau),\ \tau\in\mathcal{N}[a,b]\} = I_*(f)$, которое по определению точной верхней границы числового множества удовлетворяет неравенствам

$$s^f(\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^f(\tau),\ \forall\,\tau \in \mathcal{N}[a,b].\ \square$$

Лемма 1.1 (Дарбу). *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда $I^*(f) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau)$, $I_*(f) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} s^f(\tau)$.*

■ Докажем, что $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau) = I^*(f)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $I^*(f) = \inf\{S^f(\tau) : \tau \in \mathcal{N}[a,b]\}$, то по критерию точной нижней границы найдется такое разбиение τ_ε отрезка $[a,b]$, что

$$S^f(\tau_\varepsilon) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть τ_ε имеет ℓ точек разбиения, отличных от концов отрезка $[a,b]$. Зафиксируем произвольное разбиение τ отрезка $[a,b]$ с диаметром

$$d(\tau) < \delta = \frac{\varepsilon}{8M\ell},\ \text{где } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Пусть $\tau' = \tau \cup \tau_\varepsilon$. Тогда в силу теоремы 1.4 и неравенств (1.6)

$$I^*(f) \le S^f(\tau') \le S^f(\tau_\varepsilon) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad I^*(f) \le S^f(\tau') \le S^f(\tau).$$

Рассмотрим разность $S^f(\tau) - S^f(\tau')$. Как нетрудно видеть, в ней останутся только слагаемые, определяемые отрезками разбиения τ, которые содержат внутри точки разбиения τ_ε. Но таких отрезков не более ℓ, поэтому имеет место неравенство

$$S^f(\tau) - S^f(\tau') \le 4\,M\,\ell\,d(\tau) < 4\,M\,\ell\,\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

из которого следует, что $S^f(\tau) < S^f(\tau') + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$I^*(f) \le S^f(\tau') \le S^f(\tau) \le S^f(\tau') + \frac{\varepsilon}{2} < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I^*(f) + \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M\ell} > 0$ такое, что для любого разбиения τ отрезка $[a,b]$ с $d(\tau) < \delta$

$$I^*(f) - \varepsilon < I^*(f) \le S^f(\tau) < I^*(f) + \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau) = I^*(f).$$

Аналогично доказывается, что $\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} s^f(\tau) = I_*(f)$. $\square$

Утверждения, содержащиеся в теоремах 1.2 – 1.6 называют свойствами сумм Дарбу.

1.3 Критерий Дарбу интегрируемости функции

Доказанные выше свойства сумм и интегралов Дарбу позволяют установить необходимые и достаточные условия интегрируемости по Риману на отрезке $[a,b]$ ограниченной функции.

Теорема 1.7 (I критерий Дарбу). *Чтобы функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена на отрезке $[a,b]$ и $I_*(f) = I^*(f)$.*

Если $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, и $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то

$$I(f) = I(f)_* = I^*(f). \tag{1.7}$$

■ **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда она ограничена на $[a,b]$ (см. теорему 1.1) и существует число $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|S^f(\tau,\xi) - I(f)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a,b] : d(\tau) < \delta,\ \forall\, \xi,$$

то есть

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{4} < S^f(\tau,\xi) < I(f) + \frac{\varepsilon}{4}, \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a,b] : d(\tau) < \delta,\ \forall\, \xi. \tag{1.8}$$

Выберем разбиение τ с $d(\tau) < \delta$. Воспользуемся характеристическими свойствами точной нижней и точной верхней границ числового множества, а именно тем, что точную нижнюю границу числового множества нельзя увеличить, а точную верхнюю границу нельзя уменьшить, и найдем в каждом из отрезков разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ такие точки ξ'_k и η'_k, что

$$f(\xi'_k) < m_k^f + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ f(\eta'_k) > M_k^f - \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая эти неравенства на $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ и суммируя их по k, получим неравенства

$$S^f(\tau, \xi') < s^f(\tau) + \frac{\varepsilon}{4},\ S^f(\tau, \eta') > S^f(\tau) - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.9}$$

Из неравенств (1.8), (1.9), учитывая неравенство (1.3), получим, что

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{4} < S^f(\tau, \xi') < s^f(\tau) + \frac{\varepsilon}{4} \leq S^f(\tau) + \frac{\varepsilon}{4} < S^f(\tau, \eta') + \frac{\varepsilon}{2} < I(f) + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Значит, $I(f) - \varepsilon < s^f(\tau) \leq S^f(\tau) < I(f) + \varepsilon$. Поскольку это неравенство доказано для любого разбиения $\tau \in \mathcal{N}[a, b] : d(\tau) < \delta$, то из него следует, что

$$\left|S^f(\tau) - I(f)\right| < \varepsilon,\ \left|s^f(\tau) - I(f)\right| < \varepsilon, \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a, b] : d(\tau) < \delta.$$

А это значит, что $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} s^f(\tau) = I(f) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau)$. Из леммы Дарбу тогда следует равенство (1.7).

Достаточность. Если функция f ограничена на $[a, b]$ и имеет место равенство $I_*(f) = I^*(f)$, то, пользуясь леммой Дарбу и переходя к пределу при $d(\tau) \to 0$ в неравенстве (1.3) , получим, что существует предел $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi)$ и при этом

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi) = I_*(f) = I^*(f).\ \square$$

Теорема 1.8 (II критерий Дарбу)**.** *Чтобы функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *была интегрируема на отрезке* $[a, b]$*, необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была ограничена на отрезке* $[a, b]$ *и*

$$\lim_{d(\tau)\to 0} (S^f(\tau) - s^f(\tau)) = 0. \tag{1.10}$$

■ **Необходимость** следует из I-го критерия Дарбу, так как интегрируемость функции на $[a, b]$ влечет и ограниченность подынтегральной функии на $[a, b]$ и равенство (1.7), из которого в силу леммы Дарбу сразу следует справедливость условия (1.10).

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условию (1.10). Докажем, что $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то есть существует число $I(f) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |S^f(\tau, \xi) - I(f)| < \varepsilon, \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a, b] :\ d(\tau) < \delta, \forall\, \xi.$$

Воспользуемся теоремой 1.6. Из неравенств (1.6) следует, что для любого разбиения $\tau \in \mathcal{N}[a,b]$

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^f(\tau) - s^f(\tau).$$

Из последнего неравенства и условия (1.10) сразу получаем равенство $I^*(f) = I_*(f)$. Тогда по теореме 1.7 $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. $\square$

Приведем условия, эквивалентные условию (1.10) критерия Дарбу. Предварительно введем определение колебания функции на множестве.

Определение 1.4. *Пусть функция f ограничена на множестве X. Колебанием функции $f(x)$ на множестве X называется число*

$$\omega_X^f = \sup\{f(x),\, x \in X\} - \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

Лемма 1.2. *Если функция f ограничена на множестве X, то имеет место равенство*

$$\omega_X^f = \sup_{x',x'' \in X} |f(x') - f(x'')|. \tag{1.11}$$

■ Так как функция f ограничена на множестве X, то существуют конечные точные границы

$$M_X^f = \sup\{f(x) : x \in X\}, \quad m_X^f = \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

В силу критерия точной верхней и точной нижней границ числового множества, по любому $\varepsilon > 0$ найдутся точки $x', x'' \in X$ такие, что

$$f(x') > M_X^f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x'') < m_X^f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\omega_X^f \geq f(x') - f(x'') > M_X^f - m_X^f - \varepsilon$. Но, с другой стороны, очевидно, что $\omega_X^f \leq M_X^f - m_X^f$. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует справедливость неравенства (1.11). $\square$

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$, τ — разбиение отрезка $[a,b]$ и

$$\omega_k^f = M_k^f - m_k^f,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$S^f(\tau) - s^f(\tau) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^f - m_k^f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k. \tag{1.12}$$

и потому условие (1.10) можно записать в виде

$$\lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k = 0. \tag{1.13}$$

Объединяя предыдущие результаты, получаем следующий общий результат.

Теорема 1.9. *Пусть функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ограничена на* $[a,b]$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$*;*

2) $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} s^f(\tau) =: I(f)(\in \mathbb{R})$;

3) $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \big(S^f(\tau) - s^f(\tau)\big) = 0$;

4) $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k = 0$;

5) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \tau_\varepsilon \in \mathcal{N}[a,b]$*:* $S^f(\tau_\varepsilon) - s^f(\tau_\varepsilon) < \varepsilon$;

6) $I_*(f) = I^*(f)$;

■ Как доказано ранее, условия $1), 2), 3), 4)$ и $6)$ эквивалентны. Для доказательства эквивалентности им условия $5)$, достаточно доказать импликации $1) \to 5) \to 6)$.

Если функция f ограничена на $[a,b]$, то по 2-му критерию Дарбу условие 1) равносильно условию (1.10), то есть,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : S^f(\tau) - s^f(\tau) < \varepsilon,\ \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a,b],\ d(\tau) < \delta,$$

откуда и следует условие 5).

Пусть выполнено условие 5). По теореме 1.6 для любого разбиения τ отрезка $[a,b]$, а, следовательно, и для $\tau = \tau_\varepsilon$ имеет место неравенство 1.6, а потому $I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$. Из этого неравенства, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что $I_*(f) = I^*(f)$, то есть выполнено условие 6). □

Пример 1.1. Доказать, что функция Римана

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число или } x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \bigcap (0,1] \text{ и } m, n \text{ — взаимно простые числа,} \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0,1]$ и $\int\limits_0^1 \phi(x)\,dx = 0.$

■ Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Сначала занумеруем рациональные точки, лежащие на промежутке $(0,1]$ в таком порядке: сначала точки вида $\dfrac{m}{1}$, $m \in \mathbb{N}$, то есть точку 1, затем точки вида $\dfrac{m}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, то есть точку $\dfrac{1}{2}$, затем точки вида $\dfrac{m}{3}$, $m \in \mathbb{N}$, то есть точки $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, и так далее. При этом будем нумеровать только попарно различные несократимые дроби, то есть, прежде чем нумеровать дробь, ее надо будет привести к равной ей несократимой дроби и занумеровать только в том случае, если ранее эта дробь не встречалась. Заметим, что дробей каждого указанного выше вида — конечное число.

Так как $\frac{1}{n} > \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\varepsilon}$, то неравенство $\phi(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ может иметь место не более чем в $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ рациональных точках, которые обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$.

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ такое разбиение отрезка $[0, 1]$, что $d(\tau) < \frac{\varepsilon}{4N}$. Пусть $\mathcal{E}'$ — такое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что для $k \in \mathcal{E}'$ соответствующий отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ содержит хотя бы одну точку α_j, $j = \overline{1, N}$. Таких отрезков не более $2N$. Обозначим через $\mathcal{E}''$ совокупность тех k из $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ не содержит точек α_j, $j = \overline{1, N}$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольная выборка по разбиению τ. Рассмотрим интегральную сумму $S^{\phi}(\tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ и представим ее в виде

$$S^{\phi}(\tau, \xi) = \sigma_1 + \sigma_2, \text{ где } \sigma_1 = \sum_{k \in \mathcal{E}'} f(\xi_k)\Delta x_k, \ \sigma_2 = \sum_{k \in \mathcal{E}''} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Оценим каждую сумму σ_1, σ_2. Так как $\phi(x) \leq 1$, $\forall\, x \in [0, 1]$ и $\phi(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \mathcal{E}''$, то

$$\sigma_1 = \sum_{k \in \mathcal{E}'} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k \in \mathcal{E}'} 1 \cdot \Delta x_k < 2N \frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sigma_2 = \sum_{k \in \mathcal{E}''} f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k \in \mathcal{E}''} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \frac{\varepsilon}{4N}$ такое, что для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(\tau) < \delta$ выполняется неравенство $0 \leq S^{\phi}(\tau, \xi) = \sigma_1 + \sigma_2 \leq \varepsilon$. По определению 1.2 это означает, что

$$\phi \in \mathcal{R}_{[0,1]} \text{ и } \int\limits_0^1 \phi(x)\, dx = 0. \ \square$$

1.4 Классы интегрируемых функций

Как было показано выше, существуют функции, как интегрируемые по Риману на отрезке $[a, b]$, так и неинтегрируемые на нем. Естественно возникает вопрос об выделении классов функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 1.10 (об интегрируемости монотонной функции)**.** *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

■ Положим для определенности, что функция $f(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \, \forall \, x \in [a,b],$$

и значит функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$.

Ранее было показано, что функция, являющаяся постоянной на отрезке $[a,b]$, интегрируема на этом отрезке. Поэтому будем считать, что $f(x)$ отлична от постоянной на $[a,b]$, и потому $f(a) < f(b)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ с $d(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Так как функция f не убывает на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, то

$$M_k^f = f(x_k), \quad m_k^f = f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$S^f(\tau) - s^f(\tau) = \sum_{k=1}^n (M_k^f - m_k^f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\Delta x_k <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon.$$

И в силу произвольности $\varepsilon > 0$ по критерию Дарбу 1.8 функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. □

Теорема 1.11 (об интегрируемости непрерывной функции)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

■ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме Кантора (см. теорему 3.18 первой части курса) она равномерно непрерывна на этом отрезке, то есть,

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \forall \, x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta.$$

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(\tau) < \delta$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ из второй теоремы Вейерштрасса (см. теорему 3.8 первой части курса) следует, что

$$\exists \, p_k, q_k \in [x_{k-1}, x_k] : f(p_k) = M_k^f, \; f(q_k) = m_k^f, \; k = 1, 2, \cdots, n.$$

Так как $|p_k - q_k| \le d(\tau) < \delta$, то $f(p_k) - f(q_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно,

$$S^f(\tau) - s^f(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(p_k) - f(q_k)\right) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Из последнего неравенства, как и в теореме 1.10, получаем интегрируемость функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. $\square$

Еще одна теорема, но об интегрируемости функций, имеющих конечное число точек разрыва, будет доказана после того, как будут рассмотрены основные свойства интегрируемых функций (см. теорему 1.19).

Замечание. Пример 1.1 показывает, что интегрируемая на отрезке функция не обязана быть непрерывной: функция Римана ϕ непрерывна во всех иррациональных точках и точке $x = 0$, имеет разрыв второго рода в каждой рациональной точке, но интегрируема на $[0,1]$.

1.5 Свойства определенного интеграла

1.5.1 Свойства, связанные с операциями над функциями

Теорема 1.12. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то для любых действительных чисел α и β функция $(\alpha f + \beta g)(x)$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.14}$$

■ Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то положим

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx, \quad I(g) = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Пусть $S^{\alpha f+\beta g}(\tau,\xi)$, $S^f(\tau,\xi)$, $S^g(\tau,\xi)$ — интегральные суммы для функций $(\alpha f + \beta g)(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, составленные по заданному разбиению τ отрезка $[a,b]$ и фиксированной выборке ξ. Имеет место равенство

$$S^{\alpha f+\beta g}(\tau,\xi) = \alpha S^f(\tau,\xi) + \beta S^g(\tau,\xi).$$

Если диаметр разбиения τ стремится к нулю, то правая часть этого равенства, в силу интегрируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a,b]$, имеет конечный предел, равный $\alpha I(f) + \beta I(g)$. А поэтому существует предел левой части, значением которого является число

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx.$$

В силу единственности предела справедливо равенство (1.14). $\square$

Теорема 1.13. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f \cdot g$ также интегрируема на этом отрезке.*

$\blacksquare$ Из интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ следует, что эти функции ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists M > 0 : \quad |f(x)| \le M \quad \text{и} \quad |g(x)| \le M, \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{1.15}$$

Следовательно, $|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \le M^2$, $\forall\, x \in [a, b]$, что означает ограниченность функции $f \cdot g$ на отрезке $[a, b]$.

Так как функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то по теореме 1.8

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n},\ d(\tau) < \delta,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_k^g \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2M},$$

где ω_k^f и ω_k^g — колебания на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функций f и g, соответственно.

Выберем разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(\tau) < \delta$. Пусть x и y — произвольные точки отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, тогда из равенства

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)\big(g(x) - g(y)\big) + g(y)\big(f(x) - f(y)\big)$$

согласно условию (1.15) получаем неравенство

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le M\big(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|\big).$$

Но тогда, по лемме 1.2, $\omega_k^{fg} = \sup\limits_{x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le$

$$\le M \left(\sup_{x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)| + \sup_{x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| \right) =$$

$$= M(\omega_k^f + \omega_k^g), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Умножая последнее неравенство на Δx_k и, суммируя по k, находим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^{f \cdot g} \Delta x_k \le M \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^g \Delta x_k \Big) < M \Big(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \Big) = \varepsilon.$$

По теореме 1.8 функция $f \cdot g$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 1.14. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ то функция $|f|$ также интегрируема на нем.*

■ Из интегрируемости функции f на отрезке $[a,b]$, следует ее ограниченность на нем, а поэтому функция $|f|$ ограничена на отрезке $[a,b]$. По свойству модуля действительного числа

$$\big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \le |f(x) - f(y)|, \, \forall\, x, y \in [a,b].$$

Тогда из леммы 1.2 следует, что для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a,b]$ на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$

$$\omega_k^{|f|} = \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} \big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \le \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} |f(x) - f(y)| = \omega_k^f, \quad (1.16)$$

Из неравенств (1.16), учитывая интегрируемость функции f на отрезке $[a,b]$, согласно теореме 1.8 получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta = \delta > 0 : \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{|f|} \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k < \varepsilon, \, \forall\, \tau \in \mathcal{N}[a,b], \, d(\tau) < \delta.$$

Отсюда, по теореме 1.8 получаем интегрируемость функции $|f|$ на отрезке $[a,b]$. □

Замечание. Утвержение, обратное теореме 1.14, неверно. Подтверждением является функция (аналог функции Дирихле из примера 1.2)

$$f(x) = \begin{cases} \;\;1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -1, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Она не интегрируема на отрезке $[a,b]$, но $|f(x)| = 1$ на $[a,b]$, а поэтому функция $|f|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

1.5.2 Свойства, связанные с отрезками интегрирования

До сих пор рассматривался интеграл Римана на отрезке $[a,b]$ в предположении, что $a < b$. Расширим определение интеграл Римана и на те ситуации, когда последнее неравенство не имеет места.

Определение 1.5. *Когда функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, по определению полагаем, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \qquad (1.17)$$

Когда функция $f(x)$ определена в точке a, по определению полагаем, что

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (1.18)$$

Теорема 1.15. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то она интегрируема на любом отрезке* $[c,d] \subset [a,b]$.

■ В силу интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ из теоремы 1.8 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k < \varepsilon, \ \forall \tau = \{x_k\}_{k=1}^{n} \in \mathcal{N}[a,b], \ d(\tau) < \delta.$$

Здесь, как и раньше, ω_k^f — колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ с $d(\tau) < \delta$ такое, что $x_{k_0} = c$, $x_{k_0+m} = d$, $0 \le k_0 \le n-1$, $1 \le m \le n-k_0$. Тогда система точек $\tau' = \{x_k\}_{k=k_0}^{k_0+m}$ является разбиением отрезка $[c,d]$, и выполняется условие

$$S^f(\tau') - s^f(\tau') = \sum_{k=k_0+1}^{k_0+m} \omega_k^f \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k < \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau' \in \mathcal{N}[c,d] : S^f(\tau') - s^f(\tau') < \varepsilon$, и по условию 5) теоремы 1.9 функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$. □

Теорема 1.16. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и* $a < c < b$, *то справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.19}$$

■ Интегралы в правой части равенства (1.19) существуют по теореме 1.15. Выберем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} \in \mathcal{N}[a,b]$ такое, что c является точкой деления, то есть $c = x_{k_0}$, $1 \le k_0 < n$. Тогда $\tau' = \{x_k\}_{k=0}^{k_0}$ и $\tau'' = \{x_k\}_{k=k_0}^{n}$ являются разбиениями отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ — произвольная выборка для разбиения τ, тогда $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{k_0})$, $\xi'' = (\xi_{k_0+1}, \cdots, \xi_n)$ являются выборками для разбиений τ' и τ'', соответственно, и для интегральных сумм справедливо равенство

$$S^f(\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_0} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=k_0+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= S^f(\tau',\xi') + S^f(\tau'',\xi'').$$

Так как $d(\tau') \le d(\tau)$, $d(\tau'') \le d(\tau)$, то $d(\tau') \to 0$, $d(\tau'') \to 0$, если $d(\tau) \to 0$,. В силу существования интегралов, существуют пределы соответствующих интегральных сумм $S^f(\tau,\xi)$, $S^f(\tau',\xi')$, $S^f(\tau'',\xi'')$ при $d(\tau) \to 0$ и справедливо равенство (1.19). □

Теорема 1.17. *Если $a < c < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

■ Докажем, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $f \in \mathcal{R}_{[a,c]}$ и $f \in \mathcal{R}_{[c,b]}$, то, согласно условию 5) теоремы 1.9 5), существуют разбиения

$$\tau' = \{x'_k\}_{k=0}^{n} \in \mathcal{N}[a, c] : \sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x'_k < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\tau'' = \{x''_k\}_{k=0}^{m} \in \mathcal{N}[c, b] : \sum_{k=1}^{m} \omega_k^f \Delta x''_k < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\omega_k'^f$ — колебание функции f на отрезке $[x'_{k-1}, x'_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega_k''^f$ — колебание функции f на отрезке $[x''_{k-1}, x''_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m,$. Тогда $\tau = \tau' \cup \tau'' = \{x_k\}_{k=0}^{n+m}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и, если ω_k^f — колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n + m$, то

$$\sum_{k=1}^{n+m} \omega_k^f \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k'^f \Delta x'_k + \sum_{k=1}^{m} \omega_k''^f \Delta x''_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Из условия 5) теоремы 1.9 следует, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c_1, c_2, c_3 — любые различные точки этого отрезка, тогда*

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx. \tag{1.20}$$

■ Пусть $c_1 < c_2 < c_3$. Тогда равенство (1.20) справедливо в силу теорем 1.15 и 1.16. Докажем, что формула (1.20) справедлива и для случая, когда $c_1 < c_3 < c_2$ (другие случаи рассматриваются аналогично). В силу теорем 1.15 и 1.16

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx.$$

Так как по определению (1.5) $\int_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx = -\int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx$, то

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx. \; \square$$

1.5.3 Свойства, связанные с неравенствами

Теорема 1.18. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$ $(a<b)$ и $f(x)\le g(x)$, $\forall\, x\in[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

■ Пусть $I(f)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $I(g)=\int\limits_a^b g(x)\,dx$. По определению 1.1 функции, интегрируемой на отрезке $[a,b]$, для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n\in\mathcal{N}[a,b]$ с диаметром $d(\tau)<\delta$ и для любой выборки ξ выполняются неравенства

$$|S^f(\tau,\xi)-I(f)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |S^g(\tau,\xi)-I(g)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как в силу условия теоремы $S^f(\tau,\xi)\le S^g(\tau,\xi)$, то

$$I(f)<S^f(\tau,\xi)+\frac{\varepsilon}{2}\le S^g(\tau,\xi)+\frac{\varepsilon}{2}<I(g)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=I(g)+\varepsilon.$$

Откуда, в силу произвольности $\varepsilon>0$, получаем, что $I(f)\le I(g)$. □

Следствие 1. *Если функция g интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $g(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$, то* $\int\limits_a^b g(x)\,dx\ge 0$.

Следствие 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и числа m и M таковы, что $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$, тогда справедливы неравенства*

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

Следствие 3. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ то справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\le\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

■ Так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то по теореме 1.14 функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$. По свойству функции модуля действительного числа

$$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|,\quad \forall x\in[a,b],$$

откуда по теореме 1.18 получаем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Так как $|f(x)| \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \ge 0$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx. \ \square$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке с концами a, b, то справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Замечание 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$ и $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

1.6 Интегрируемость кусочно непрерывной функции

Рассмотрим класс интегрируемых функций, более широкий по сравнению с классом непрерывных функций. Для этого потребуется следующая лемма, указывающая еще одно достаточное условие интегрируемости функции.

Лемма 1.3. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Изменение значения функции в конечном числе точек не влияет на ее интегрируемость на $[a,b]$ и на величину интеграла.*

■ 1) Если $f(x) = 0$ на $[a,b]$, то $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Изменим значение этой функции в одной точке. Пусть $\alpha \in [a,b]$ и

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b] \setminus \{\alpha\}, \\ A, & x = \alpha. \end{cases}$$

Пусть, для определенности, $A > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{N}[a,b]$ с диаметром $d(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{2A}$.

Точка α может принадлежать только одному отрезку разбиения, если α не является точкой из разбиения τ, или двум отрезкам, если α является точкой из разбиения τ, не совпадающей с a или b. В любом случае

$$S^{\widetilde{f}}(\tau) < 2A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon, \quad s^{\widetilde{f}}(\tau) = 0,$$

и потому $S^{\widetilde{f}}(\tau) - s^{\widetilde{f}}(\tau) < \varepsilon$. Из пункта 3) теоремы 1.9 следует, что $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. А так как $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} s^{\widetilde{f}}(\tau) = 0$, то из пункта 2) теоремы 1.9 следует, что

$$I(\widetilde{f}) = \int\limits_a^b \widetilde{f}(x)\,dx = 0.$$

2) Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$,

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \setminus \{\alpha\}, \\ A, & x = \alpha, \end{cases} \quad \text{и } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b] \setminus \{\alpha\}, \\ A - f(\alpha), & x = \alpha. \end{cases} \tag{1.21}$$

Тогда $\widetilde{f}(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, и по теореме 1.12 функция $\widetilde{f}$ интегрируема на $[a,b]$, при этом

$$\int\limits_a^b \widetilde{f}(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если изменение значения функции происходит в конечном числе точек отрезка $[a,b]$, то для каждой такой точки следует построить функцию, аналогичную функции g, которая будет интегрируема на $[a,b]$, составить сумму, аналогичную (1.21), и применить теорему 1.12. $\square$

Определение 1.6. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ за исключением конечного числа точек, которые являются ее точками разрыва первого рода.*

Теперь мы можем доказать результат, расширяющий класс интегрируемых по Риману функций.

Теорема 1.19. *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ кусочно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

■ Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ одну точку разрыва первого рода $c \in (a,b)$, то есть существуют конечные предельные значения $f(c+0)$ и $f(c-0)$. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,c), \\ f(c-0), & x = c, \end{cases} \quad \text{и } f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (c,b], \\ f(c+0), & x = c. \end{cases}$$

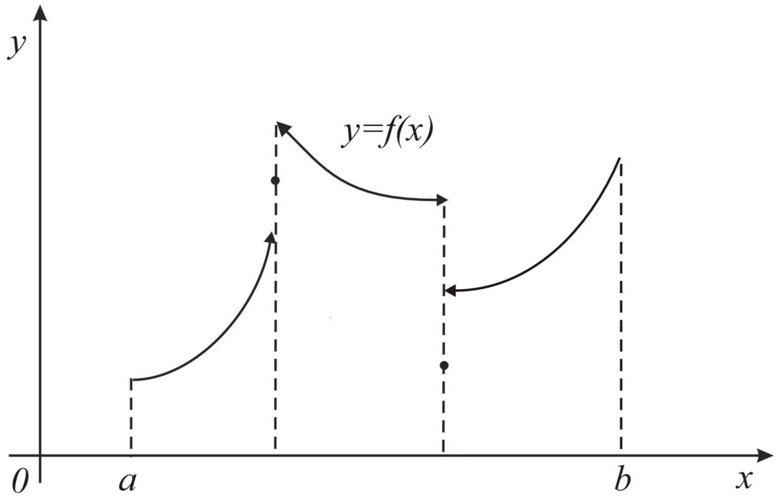


Рис. 1.1: Пример кусочно непрерывной функции

Так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, то они интегрируемы на этих отрезках. Тогда по лемме 1.3 функция $f(x)$, отличающаяся от функции $f_1(x)$ значением в одной точке, интегрируема на отрезке $[a, c]$. Аналогично, $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[c, b]$. Тогда по теореме 1.17 $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. $\square$

Замечание. Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем и для вычисления определенного интеграла от такой функции отрезок $[a, b]$ разбивается на конечное число отрезков $[a_k, b_k]$ так, что $f(x)$ является непрерывной и ограниченной функцией на интервалах (a_k, b_k).

1.7 Первая интегральная теорема о среднем

Теорема 1.20. *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:*

1) f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$;

2) числа m и M такие, что $m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a, b]$;

3) функция g не меняет знак на отрезке $[a, b]$, то есть

$$g(x) \ge 0, \forall\, x \in [a, b], \quad \textit{или} \;\; g(x) \le 0, \forall\, x \in [a, b].$$

Тогда

$$\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.22}$$

$\blacksquare$ Пусть, например, $g(x) \ge 0, \forall\, x \in [a, b]$, тогда из условия 2) следует, что $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), \quad \forall x \in [a, b]$. Так как функции f и g

интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $f\cdot g$ также интегрируема на этом отрезке и в силу теоремы 1.18

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.23}$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то из (1.23) следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и в этом случае равенство (1.22) выполняется при любом μ.

Если же $\int\limits_a^b g(x)\,dx \ne 0$, то $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$. Поэтому неравенство (1.23) равносильно неравенству

$$m \le \mu \le M, \text{ где } \mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}.$$

Из определения μ следует равенство (1.22). Аналогично доказывается теорема и в случае, когда $g(x)\le 0$ на $[a,b]$. $\square$

Следствие 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M, \quad \forall x\in[a,b]$, то*

$$\exists\,\mu\in[m,M]: \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ интегрируема и не меняет на нем знак, то*

$$\exists\,c\in[a,b]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.24}$$

В частности, если $g(x)\equiv 1$ на $[a,b]$, то

$$\exists c\in[a,b]: \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{1.25}$$

■ Из непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует, что она интегрируема на нем. Согласно второй теореме Вейерштрасса

$$\exists p,q\in[a,b]: f(p) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = M^f, \quad f(q) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = m^f,$$

то есть $m^f \le f(x) \le M^f,\ \forall x \in [a,b]$. Все условия теоремы 1.20 выполнены, поэтому

$$\exists \mu \in [m^f, M^f]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

По теореме Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции, существует точка c, принадлежащая отрезку с концами в точках p и q, а значит, $c \in [a,b]$, такая, что $f(c) = \mu$. Таким образом,

$$\exists c \in [a,b]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $g(x) \equiv 1$ на $[a,b]$, то из (1.24) следует (1.25). $\square$

Замечание. Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется средним интегральным функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Пример 1.1. Найти среднее интегральное следующих функций на заданном отрезке:

$$a)\ f(x) = \cos x,\ x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]; \quad b)\ f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in [-1,2].$$

■ a) В этом случае $\mu = \dfrac{2}{3\pi}\displaystyle\int\limits_0^{3\pi/2} \cos x\,dx = -\dfrac{2}{3\pi}$. Отметим, что непрерывная функция $\cos x$ принимает на отрезке $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ значение $\mu = -\dfrac{2}{3\pi}$ в точке $\xi = \arccos\left(-\dfrac{2}{3\pi}\right)$.

b) Так как $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in [-1,0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,2] \end{cases}$, то функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ интегрируема на отрезке $[-1,2]$ и

$$\int\limits_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\,dx + \int\limits_{0}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx = \int\limits_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int\limits_{0}^{2} 1 \cdot dx = -1 + 2 = 1.$$

Значит, $\mu = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx = \dfrac{1}{3}$ и в этом случае кусочно непрерывная функция $\operatorname{sgn} x$ не принимает на отрезке $[-1,2]$ значение $\mu = \dfrac{1}{3}$. $\square$

1.8 Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда по теореме 1.15 функция f интегрируема на отрезке $[a,x]$ для любого $x \in [a,b]$, и потому на отрезке $[a,b]$ определена функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

которая называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 1.21 (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом)**.** *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция F непрерывна на этом отрезке.*

■ Так как функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть $\exists M > 0:$

$$|f(x)| \le M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Зафиксируем произвольное $x_0 \in [a,b]$ и зададим приращение

$$\Delta x \ne 0: \ (x_0 + \Delta x) \in [a,b].$$

Используя теоремы 1.15 и 1.16, получаем

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Откуда, в силу следствий 2 и 3 теоремы 1.18,

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \right| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \le M|\Delta x|.$$

Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0)$, что по определению означает непрерывность $F(x)$ в точке x_0. А так как точка x_0 из $[a,b]$ взята произвольно, то функция F непрерывна на $[a,b]$. □

Теорема 1.22 (о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция F дифференцируема на этом отрезке и*

$$F'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x), \, \forall\, x \in [a,b].$$

■ Зафиксируем некоторое число $x_0 \in [a,b]$ и зададим приращение $\Delta x \neq 0$: $(x_0 + \Delta x) \in [a,b]$. Рассмотрим отношение

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

По следствию 2 теоремы 1.20 существует точка $c_{\Delta x}$, принадлежащая отрезку с концами в точках x_0, $x_0 + \Delta x$, такая, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(c_{\Delta x})\,\Delta x.$$

Таким образом, $\dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(c)$. Так как $c \to x_0$ при $\Delta x \to 0$, а функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(c) \to f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

следовательно, существует $F'(x)$ в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. В силу произвольности выбора точки x_0 теорема доказана. □

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1.22, то*

1) *функция F непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$;*
2) *любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f имеет на этом отрезке первообразную в виде интеграла с переменным верхним пределом*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Замечание 1. Если точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a,b]$, то под $F'(x_0)$ следует понимать соответствующую одностороннюю производную функции $F(x)$.

Замечание 2. Точно так же можно ввести понятие интеграла с переменным нижним пределом $G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$, и доказать, что он обладает аналогичными свойствами, то есть является непрерывной функцией на $[a,b]$, если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, и непрерывно дифференцируемой функцией в каждой точке из $[a,b]$, если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, при этом $G'(x) = -f(x)$ (предлагаем сделать это самостоятельно).

Теорема 1.23 (формула Ньютона–Лейбница). *Если функция f непрерывна на $[a,b]$ и Φ ее первообразная на этом отрезке, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.26}$$

■ По следствию теоремы 1.22 функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для f на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме 5.1 из [4]существует постоянная C такая, что $\Phi(x) = F(x) + C,\ x \in [a,b]$. Таким образом,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + C - \left(\int\limits_a^a f(t)\,dt + C\right) = \int\limits_a^b f(t)\,dt. \ \square$$

Формулу Ньютона-Лейбница (1.26) еще называют *основной формулой интегрального исчисления* и записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Замечание. Можно доказать, что формула Ньютона-Лейбница справедлива при выполнении следующих условий:

1) $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$,
2) $f \in C[a,b]$,
3) функция F дифференцируема на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек x_k, $k = \overline{1,k_0}$ и $F'(x) = f(x)$ в точках $x \in [a,b] \setminus \{x_k\}_0^{k_0}$.

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$.

■ Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, $\Phi(x) = \operatorname{arctg} x$ — ее первообразная на $[0,1]$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}. \ \square$$

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{4\pi} x\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

■ Функция $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[0, 4\pi]$ (имеет на нем четыре точки разрыва первого рода), следовательно, интегрируема на этом отрезке в силу теоремы 1.19. Разобьем отрезок $[0, 4\pi]$ на четыре отрезка:

$$[0, 4\pi] = [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [3\pi, 4\pi].$$

Тогда

$$\int\limits_0^{4\pi} x\,\mathrm{sgn}(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\,dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\,dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{\pi}^{2\pi} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{2\pi}^{3\pi} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{3\pi}^{4\pi} = -2\pi^2. \ \square$$

1.9 Методы вычисления определенного интеграла

1.9.1 Метод замены переменной

Теорема 1.24. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$,

тогда справедлив о равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt, \tag{1.27}$$

которое называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

■ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем (теорема 1.11) и имеет первообразную $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ (следствие теоремы 1.22). Тогда по формуле Ньютона - Лейбница (1.26)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1.28}$$

Из условий теоремы следует, что функция $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$ непрерывна, и потому интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Так как функция $F(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, а функция φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, то суперпозиция функций

$\big(F\circ\varphi\big)(t)$ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и

$$\big(F\circ\varphi\big)'(t)=F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)=f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t),\quad \forall t\in[\alpha,\beta].$$

Следовательно, функция $\big(F\circ\varphi\big)(t)$ является первообразной для функции $\big((f\circ\varphi)\,\varphi'\big)(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. Применяя к функции $\big((f\circ\varphi)\varphi'\big)(t)$ формулу Ньютона - Лейбница и, учитывая, что $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, получаем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt=F\big(\varphi(\beta)\big)-F\big(\varphi(\alpha)\big)=F(b)-F(a). \tag{1.29}$$

Из равенств (1.28) и (1.29) теперь следует формула (1.27). $\square$

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

$\blacksquare$ Положим $f(x)=\sqrt{R^2-x^2},\ \ x\in[0,R]$, $\varphi(t)=R\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,R]$, а функция $\varphi:[0,\dfrac{\pi}{2}]\to[0,R]$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ и $\varphi(0)=0$, $\varphi(\pi/2)=R$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.24, поэтому, полагая $x=R\sin t$, получим, что $dx=R\cos t\,dt$ и

$$\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=R^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{R^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^2}{4}.\ \square$$

1.9.2 Метод интегрирования по частям

Теорема 1.25. *Если функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Bigg|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{1.30}$$

$\blacksquare$ Из дифференцируемости функций $u(x)$ и $v(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует дифференцируемость произведения $u(x)v(x)$ на $[a,b]$ и

$$\big(u(x)v(x)\big)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

Так как функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ и $\big(u(x)v(x)\big)'$ — непрерывны, а, следовательно, интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то из последнего равенства получаем, что

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int\limits_a^b \big(u(x)v(x)\big)'\,dx - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \qquad (1.31)$$

По формуле Ньютона - Лейбница

$$\int\limits_a^b \big(u(x)v(x)\big)'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

поэтому равенство (1.31) можно записать в виде (1.30). $\square$

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln x\,dx\,.$

■ Положим $u = \ln x$, $dv = xdx$, откуда $v = \dfrac{x^2}{2}$. Функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[1,2]$, поэтому

$$\int\limits_1^2 x\ln x\,dx = \Big(\frac{x^2}{2}\ln x\Big)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\,dx = 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}. \square$$

Определенный интеграл можно использовать для вычисления предела последовательности, если ее можно рассматривать как последовательность интегральных сумм некоторой интегрируемой функции.

Пример 1.3. Найти предел последовательности

$$S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\ \alpha > 0,\ n \geq 1.$$

■ Представим S_n в виде $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$, и заметим, что S_n — интегральная сумма для функции $f(x) = x^\alpha$ на отрезке $[0,1]$, соответствующая разбиению $\tau = \left\{\dfrac{k}{n}\right\}_{k=0}^{n}$. Длина отрезка разбиения $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ равна $\dfrac{1}{n}$, а в качестве точки $\xi_k \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ выбран правый конец отрезка, то есть

$\xi_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Так как $d(\tau) = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$, а функция x^α непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int\limits_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}. \ \Box$$

1.10 Вторая интегральная теорема о среднем

Теорема 1.26. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ неотрицательна и не убывает на нем. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx = g(b) \int\limits_c^b f(x)\, dx. \tag{1.32}$$

■ В силу теоремы 1.10 функция g интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если $g(b) = 0$, то равенство (1.32) выполняется для любого $c \in [a, b]$. Пусть $g(b) > 0$. Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[a, b]$

$$\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^n,\ x_k^{(n)} = a + k \cdot \frac{b-a}{n},\ n \geq 1.$$

Тогда $d(\tau_n) = \delta_n = (b - a)/n$, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Зафиксируем разбиение $\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^n$. Из интегрируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ отрезке $[a, b]$ следует их ограниченность на $[a, b]$. Положим $M^f = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Так как $g(x)$ не убывающая функция, для $k = 1, \ldots, n$, $\omega_k^g = \sup\limits_{x,y\in[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]} |g(x) - g(y)| = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^n \omega_k^g = g(b) - g(a) \leq g(b)$. Пусть

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n g(x_k^{(n)}) \int\limits_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(x)\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Используя теоремы 1.14, 1.16, 1.18 и лемму 1.3, получим, что

$$\Big|\sigma_n - \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx\Big| = \Big|\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} \big(g(x_k^{(n)}) - g(x)\big) f(x)\, dx\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \omega_k^g \int\limits_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} |f(x)|\, dx \leq M^f \delta_n \sum_{k=1}^{n} \omega_k^g \leq M^f \delta_n g(b), \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx.$

Функция $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\, dt$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$, как интеграл с переменным нижним пределом от интегрируемой функции (см. теорему 1.21 и замечание 2 после теоремы 1.22), и, согласно 2-ой теореме Вейерштрасса,

$$\exists\, p, q \in [a, b] : F(p) = \max_{x\in[a,b]} F(x) \ \text{ и } \ F(q) = \min_{x\in[a,b]} F(x).$$

Учитывая, что $F(b) = 0$, преобразуем сумму σ_n. По теореме 1.16

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k^{(n)})\Big(\int\limits_{x_{k-1}^{(n)}}^{b} f(x)\, dx - \int\limits_{x_k^{(n)}}^{b} f(x)\, dx\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k^{(n)})F(x_{k-1}^{(n)}) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k^{(n)})F(x_k^{(n)}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1}^{(n)})F(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k^{(n)})F(x_k^{(n)}) =$$

$$= g(x_1^{(n)})F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(g(x_{k+1}^{(n)}) - g(x_k^{(n)})\big)F(x_k^{(n)}).$$

Так как для $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $F(q) \leq F(x) \leq F(p)$, а $g(x) \geq 0$ и $g(x)$ не убывает на $[a, b]$, то из последнего неравенства для σ_n получаем:

$$\sigma_n \leq g(x_1^{(n)})F(p) + F(p)\big(g(b) - g(x_1^{(n)})\big) = g(b)F(p), \ n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sigma_n \geq g(x_1^{(n)})F(q) + F(q)\big(g(b) - g(x_1^{(n)})\big) = g(b)F(q), \ n \in \mathbb{N}.$$

Итак, $g(b)F(q) \leq \sigma_n \leq g(b)F(p), \quad n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$g(b)F(q) \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx \leq g(b)F(p),$$

то есть

$$F(q) \le \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le F(p).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме Больцано—Коши о промежуточном значении непрерывной функции найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$F(c) = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx, \text{ то есть } \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx. \ \square$$

Теорема 1.27. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ неотрицательна и не возрастает на нем. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx. \tag{1.33}$$

■ Положим $t = -x$, $f_1(t) = f(-x)$, $g_1(t) = g(-x)$. Тогда в силу того, что функция $g(x)$ не возрастает на отрезке $[a,b]$, функция $g_1(t)$ не убывает на отрезке $[-b,-a]$. Поэтому к функциям $f_1(t)$ и $g_1(t)$ можно применить теорему 1.26. Отсюда следует, что на отрезке $[-b,-a]$ найдется точка $-c$ такая, что

$$\int\limits_{-b}^{-a} f_1(t)g_1(t)\,dt = g_1(-a)\int\limits_{-c}^{-a} f_1(t)\,dt.$$

В интегралах последнего равенства сделаем замену $x = -t$ и получим

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx, \quad c \in [a,b]. \ \square$$

Теорема 1.28 (Бонне). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ монотонна на нем. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{1.34}$$

■ Рассмотрим случай, когда функция $g(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $g_1(x) = g(x) - g(a)$ неотрицательна и не убывает на этом отрезке. Следовательно, по теореме 1.26

$$\exists c \in [a, b]: \quad \int\limits_a^b f(x) g_1(x)\, dx = g_1(b) \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Подставляя выражение для $g_1(x)$ получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\big(g(x) - g(a)\big)\, dx = \big(g(b) - g(a)\big) \int\limits_c^b f(x)\, dx$$

или

$$\int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int\limits_a^b f(x)\, dx - g(a) \int\limits_c^b f(x)\, dx + g(b) \int\limits_c^b f(x)\, dx =$$

$$= g(a) \int\limits_a^c f(x)\, dx + g(b) \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Пусть теперь функция $g(x)$ не возрастает на $[a, b]$. Тогда положим $g_1(x) = g(x) - g(b)$. Функция $g_1(x)$ неотрицательна и не возрастает на $[a, b]$, и потому к функциям $f(x)$ и $g_1(x)$ применима теорема 1.27. Откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание. Формулы (1.32), (1.33) и (1.34) обычно называют формулами Бонне.

Пример 1.1. Пусть $0 < a < b$. Доказать неравенство

$$\Big| \int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| \le \frac{2}{a}.$$

$\blacksquare$ Действительно, функция $\dfrac{1}{x}$ положительна и не возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда по теореме 1.26 найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\Big| \int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| = \Big| \frac{1}{a} \int\limits_a^c \sin x\, dx \Big| = \frac{|\cos c - \cos a|}{a} \le \frac{2}{a}. \square$$

1.11 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что если диаметр разбиения $d(\tau) \to 0$, то число точек разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$ стремится к бесконечности. Верно ли обратное утверждение?

2. Привести пример функции, определенной на $[a,b]$, непрерывной на (a,b), но не интегрируемой по Риману на $[a,b]$

3. Привести пример дифференцируемой на всей прямой функции, производная которой не интегрируема по Риману на $[-1,1]$.

4. Доказать, что неограниченная на отрезке $[a,b]$ функция не является интегрируемой на нем.

5. Доказать, что если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$, то $\forall\delta>0$, $\forall A>0$ существует такое разбиение $\tau=\{\xi\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a,b]$ с $d(\tau)<\delta$ и соответствующая ему выборка точек ξ_k, $k=1,2,\cdots,n$, такие, что $|S^f(\tau,\xi)|>A$. Получить из этого утверждения необходимое условие интегрируемости.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, то $\exists M\in\mathbb{R}$: любая интегральная сумма $S^f(\tau,\xi)$ функции $f(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет неравенству $|S^f(\tau,\xi)|\leq M$.

7. Доказать, что существует такая интегрируемая на отрезке $[0,1]$ функция, для которой последовательность интегральных сумм
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right),\ 0\leq\theta\leq 1,$$
имеет предел, который не зависит от выбора точки θ.

8. Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Пусть $M^f=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m^f=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, а $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Доказать, что если присоединить к τ l точек разбиения $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$, не совпадающих с концами отрезков разбиения, образуя разбиение τ', то
$$S^f(\tau)-S^f(\tau')\leq(M^f-m^f)l\cdot d(\tau),\ s^f(\tau')-s^f(\tau)\leq(M^f-m^f)l\cdot d(\tau).$$

9. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$, $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Доказать, что
$$\lim_{d(\tau)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$
где $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $\theta_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$.

10. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций на отрезке $[a,b]$ интегрируемость слагаемых на $[a,b]$? Ответ обосновать примерами. Рассмотреть аналогичные вопросы для разности, произведения и частного.

11. Интегрируема ли сумма двух функций, если одно слагаемое интегрируемо, а другое нет? Рассмотреть аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

12. Интегрируема ли сумма двух неинтегрируемых функций? Привести соответствующие примеры. Рассмотреть аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух неинтегрируемых функций.

13. Известно, что функция $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Что можно сказать об интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$? Привести примеры.

14. Привести пример неинтегрируемой на отрезке $[0, 1]$ функции, квадрат которой есть интегрируемая функция на этом отрезке.

15. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, c]$ и не интегрируема на $[c, b]$. Что можно сказать об интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$?

16. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Следует ли тогда, что $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$? Привести примеры.

17. Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx > 0$. Доказать, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ такой, что $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

18. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция f непрерывна. Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x)\,dx > 0$.

19. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx$, $a < b$. Следует ли отсюда, что $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [a, b]$? Привести примеры.

20. Пусть функция f — непрерывна на отрезке $[a, b]$. Доказать, что для того чтобы $\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

21. Доказать, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то выполняется неравенство Коши-Буняковского:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

22. Доказать, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, то справедливо неравенство Минковского:

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

23. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и существует число $C > 0 : |f(x)| \geq C$, $\forall x \in [a, b]$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

24. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и $\exists \alpha > 0 : g(x) \geq \alpha$, $\forall x \in [a, b]$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

25. Доказать, что если функция разрывна в каждой точке отрезка, то она не интегрируема на этом отрезке.

26. Привести пример монотонной на отрезке $[a, b]$ функции, имеющей на нем бесконечно много точек разрыва. Интегрируема ли такая функция на отрезке $[a, b]$?

27. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x = 0, \end{cases}$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

28. Пусть функция $f : [a, b] \to [c, d]$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, функция $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[c, d]$. Доказать, что функция $g \circ f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

29. Привести пример таких функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно, что $c \leq f(x) \leq d$, $\forall x \in [a, b]$, а композиция $g \circ f$ не интегрируема на отрезке $[a, b]$.

30. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ и существует точка $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) <$

$g(x_0)$, причем функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в этой точке. Доказать, что справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

31. Доказать, что для ограниченной и монотонной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$ существует $C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| < \frac{C}{n}.$$

32. Доказать, что если на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ непрерывная функция $f(x)$ принимает свое среднее значение на этом отрезке только в одной точке отрезка $[\alpha,\beta]$, то $f(x)$ — монотонна на отрезке $[a,b]$.

33. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ее среднее значение на каждом отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ имеет одно и то же значение равное λ, то $f(x) \equiv \lambda$ на отрезке $[a,b]$.

34. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и возрастают на отрезке $[0,1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx \geq \int\limits_0^1 f(x)\,dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)\,dx.$$

35. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x \in [a,b]$, то функция $G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x и $G'(x) = -f(x)$.

36. Доказать, что если функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, периодическая, то она имеет наименьший положительный период.

37. Доказать, что если функция $f(x)$ отлична от постоянной, периодическая и интегрируема на любом конечном отрезке, то она имеет наименьший положительный период.

38. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, непрерывна и периодическая с периодом T. Найти необходимое и достаточное усло-

вие для того, чтобы функция $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ была периодическая с периодом T.

39. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ интегрируема на отрезке $[-1, 1]$, а функция $F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)\,dt$ дифференцируема на интервале $(-1, 1)$. Найти $F'(0)$.

40. Известно, что функция $f(x)$ имеет первообразную на $[a, b]$. Интегрируема ли функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$?

41. Пусть
$$g(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Доказать, что существует $C \in \mathbb{R}$: $\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right| \leq Cx^2, \quad |x| \leq 1.$

42. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$, то существует
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\Big(\frac{1}{n}\Big) \cdot f\Big(\frac{2}{n}\Big) \cdots f\Big(\frac{1}{n}\Big)} = \exp\Big(\int\limits_0^1 \ln f(x)\,dx\Big).$$

43. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$, то
$$\frac{d}{dx}\Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\Big) = \psi'(x)f(\psi(x)) - \varphi'(x)f(\varphi(x)),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

44. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx, \quad \alpha > 0, n \in \mathbb{N}.$

45. Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место равенство
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(a + b - x)\,dx.$$

46. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

47. Доказать, что для интегрируемой на $[-l, l]$ функции $f(x)$ справедливы равенства:

a) $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_0^l f(x)\,dx$, если $f(x)$ — четная функция;

b) $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$, если $f(x)$ — нечетная функция.

Дать геометрическую интерпретацию этих равенств.

48. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

49. Доказать, что для любой непрерывной на $\mathbb{R}$ и периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T > 0$ выполняется равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad \text{для любого } a \in \mathbb{R}.$$

50. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и для любого числа $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция.

51. Доказать, что при нечетном n функции

$$f(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt \quad \text{и} \quad g(x) = \int_0^x \cos^n t\,dt$$

являются периодическими с периодом 2π, а при четном n каждая из этих функций является суммой линейной функции и периодической.

52. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем производная $g'(x)$ неотрицательна на этом

отрезке. Доказать, что на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

53. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=0$. Доказать равенство

$$M^2 \le (b-a)\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx, \text{ где } M = \sup_{a\le x\le b}|f(x)|.$$

Глава 2

Функции многих переменных

2.1 Пространство $\mathbb{R}^n$ и его подмножества

Пусть n — натуральное число. Набор из n вещественных чисел называется упорядоченным, если указано, которое из чисел в нем — первое, которое — второе, которое n–ое. Упорядоченный набор будем записывать в виде $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, либо $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение 2.1. *Множество всех упорядоченных наборов из n чисел называется n-мерным координатным пространством, каждый упорядоченный набор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется точкой этого пространства, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются, соответственно, 1-ой, 2-ой, ..., n-ой координатами точки x.*

Две точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из n-мерного координатного пространства совпадают или, иначе, равны, если $x_i = y_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. При этом пишут: $x = y$. Точка, все координаты которой равны нулю, называется нулем или нуль–точкой координатного пространства и обозначается 0.

Лемма 2.1 (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых двух точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

■ Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda x_k + y_k)^2$. Тогда $f(\lambda) \ge 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. При этом

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda^2 x_k^2 + y_k^2 + 2\lambda x_k y_k) = \lambda^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + 2\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) =$$

$$= A\lambda^2 + 2B\lambda + C, \text{ где } A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,\ C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Итак, $f(\lambda)$ — неотрицательный для всех λ из $\mathbb{R}$ квадратный трёхчлен. Как хорошо известно из курса математики средней школы, это возможно только тогда, когда $B^2 - AC \leq 0$. Остаётся заменить A, B, C их значениями, чтобы получить нужное. $\square$

Выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ называется скалярным (или внутренним) произведением точек x, y и обозначается символом $< x, y >$.

Лемма 2.2 (неравенство Минковского). *Для любых двух точек* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *из* $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2.$
Для оценки в этом равенстве скалярного произведения точек x и y воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и получим

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}\right]^2. \square$$

В n-мерном координатном пространстве определим операции сложения точек, умножения точки на число. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — точки n-мерного координатного пространства. Точку $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ из n-мерного координатного пространства будем обозначать $x + y$ и называть суммой точек x и y, а точку $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, где λ — вещественное число, будем обозначать λx и называть произведением точки x на число λ. Эти операции определяют в n-мерном координатном пространстве алгебраическую структуру, превращая его в линейное пространство.

Определение 2.2. *Расстоянием между двумя точками x, y в n-мерном координатном пространстве называется число*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}.$$

Определение 2.3. *Если в n-мерном координатном пространстве с введенными операциями сложения и умножения на число, расстоянием*

$\rho(x,y)$ между точками $x = (x_1,\dots,x_n)$ и $y = (y_1,\dots,y_n)$, введённым в определении 2.2, называется n-мерным евклидовым пространством и обозначается через $\mathbb{R}^n$, а расстояние $\rho(x,y)$ — евклидовой метрикой.

Заметим, что при $n = 1$, пространство $\mathbb{R}^1$ — это изучавшееся ранее пространство $\mathbb{R}$ вещественных чисел, расстояние между точками x и y которого вычисляется по формуле

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|\,.$$

Теорема 2.1. *Расстояние $\rho(x,y)$ между точками пространства $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:*

1) $\rho(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n\ ;\ \rho(x,y) = 0\ \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x), \forall x,y \in \mathbb{R}^n$;
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Первые два свойства расстояния очевидным образом следуют из определения 2.2. Последнее свойство называется неравенством треугольника и, например, в $\mathbb{R}^2$, означает, что длина стороны в любом треугольнике не превосходит суммы длин двух других его сторон.

■ При доказательстве свойства 3) воспользуемся неравенством Минковского. Для любых точек x, y, z из $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k+z_k-y_k)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2\right)^{1/2} = \rho(x,z) + \rho(y,z). \ \square$$

Определим в $\mathbb{R}^n$ важнейшие подмножества и приведем необходимые для дальнейшего свойства этих подмножеств.

Определение 2.4. *Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Множество*

$$S_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n\ : \rho(x,a) < \varepsilon\ \}$$

называется открытым шаром с центром в точке a и радиуса ε или шаровой ε-окрестностью точки a.

Заметим, что при $n = 1,\ S_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}\ : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Определение 2.5. *Пусть $\varepsilon > 0$. Открытым ε-кубом с центром в точке $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ или прямоугольной ε-окрестностью точки a называется множество*

$$\Pi_a(\varepsilon) = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ |x_k - a_k| < \varepsilon, \quad k = 1,\dots,n\}\,.$$

В пространстве $\mathbb{R}$, как легко видеть, $\Pi_a(\varepsilon) = S_a(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а при $n \geq 2$ имеет место такой результат

Лемма 2.3.

1) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ S_a(\varepsilon) \supseteq \Pi_a(\delta)$.

2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \Pi_a(\varepsilon) \supseteq S_a(\delta)$.

■ 1) Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $S_a(\varepsilon) \supseteq \Pi_a(\delta)$. Пусть x — произвольная точка ε-куба $\Pi_a(\delta)$, тогда $|x_k - a_k| < \delta$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$\rho(x, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} < \sqrt{n}\ \delta.$$

Если $\delta \leq \varepsilon/\sqrt{n}$, то $x \in S_a(\varepsilon)$, а значит $\Pi_a(\delta) \subseteq S_a(\varepsilon)$.

2) Покажем, что $S_a(\delta) \subseteq \Pi_a(\varepsilon)$, если $\delta \leq \varepsilon$. Действительно, для любой точки $x \in S_a(\delta)$ и для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$|x_k - a_k| = \sqrt{(x_k - a_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} = \rho(x, a) < \delta \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $x \in \Pi_a(\varepsilon)$ и $S_a(\delta) \subseteq\ \Pi_a(\varepsilon)$. □

Доказательство этой леммы позволяет говорить об ε-окрестности точки a в $\mathbb{R}^n$, не уточняя, какая она — шаровая или прямоугольная. Будем обозначать ε-окрестность точки a из $\mathbb{R}^n$ через $U_a(\varepsilon)$ или, короче, через U_a. Проколотую окрестность точки a, то есть множество $U_a(\varepsilon)\backslash\{a\}$, будем обозначать через $\overset{\circ}{U}_a\ (\varepsilon)$ или $\overset{\circ}{U}_a$.

Определение 2.6. *Сферой с центром в точке a из $\mathbb{R}^n$ и радиуса $r > 0$ называется множество $V_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \rho(x, a) = r\}$.*

Определение 2.7. *Замкнутым ε-шаром с центром в точке a из $\mathbb{R}^n$ называется множество $\overline{S}_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$.*

Очевидно, что $\overline{S}_a(\varepsilon) = S_a(\varepsilon) \cup V_a(\varepsilon)$.

Определение 2.8. *Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — точки из $\mathbb{R}^n$. Если $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то множество*

$$\Pi(a, b) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ a_k < x_k < b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2.1}$$

называется открытым параллелепипедом, определяемым точками a и b.

Если $a_k \leq b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то множество

$$\overline{\Pi}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2.2}$$

называется замкнутым параллелепипедом, определяемым точками a и b.

Определение 2.9. *Пусть G — подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $a \in G$. Точка a называется внутренней точкой множества G, если существует такая окрестность $U_a(\varepsilon)$ точки a, что $U_a(\varepsilon) \subset G$. Множество, состоящее из всех внутренних точек множества G, называется внутренностью множества G и обозначается* $\operatorname{int} G$ *(interior (англ.) — внутренность). Множество G называется открытым, если $G = \operatorname{int} G$.*

Отметим, что пустое множество по определению считается открытым.

Пример 2.1. Множество $S_a(\varepsilon)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

■ Зафиксируем точку c в $S_a(\varepsilon)$ и найдем такое $\delta > 0$, что $S_c(\delta) \subseteq S_a(\varepsilon)$. Пусть $\delta = \varepsilon - \rho(a, c)$ и x — произвольная точка шара $S_c(\delta)$. Тогда

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, c) + \rho(x, c) < \delta + \rho(a, c) = \varepsilon,$$

то есть $x \in S_a(\varepsilon)$, что, в силу произвольности x из $S_c(\delta)$, доказывает вложение $S_c(\delta)$ в $S_a(\varepsilon)$ и вместе с этим открытость $S_a(\varepsilon)$. □

Теорема 2.2. *Объединение любого семейства открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств является открытым множеством. Пересечение конечного числа открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств является открытым множеством.*

■ Пусть $A \neq \emptyset$, множества X_α, $\alpha \in A$, являются открытыми в $\mathbb{R}^n$, а $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $x_0 \in X$, то найдется такое $\alpha_o \in A$, что $x_0 \in X_{\alpha_o}$. Поскольку X_{α_o} — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то существует окрестность $U_{x_0} \subset X_{\alpha_o}$. Поэтому $U_{x_0} \subset X$, а значит x_0 — внутренняя точка множества X и X — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество.

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_m$ — открытые в $\mathbb{R}^n$ множества и $X = \bigcap\limits_{k=1}^{m} X_k$. Может случиться, что $X = \emptyset$, тогда X — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество. Если $X \neq \emptyset$ и x_0 — некоторая точка из X, то $x_0 \in X_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому найдутся окрестности $U_{x_0}(\delta_k) \subset X_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $\delta = \min\{\delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда $U_{x_0}(\delta) \subset U_{x_0}(\delta_k)$, $k = \overline{1, m}$, и $U_{x_0}(\delta) \subset X$, то есть x_0 — внутренняя точка множества X. В силу произвольности выбора точки x_0, множество X является открытым в $\mathbb{R}^n$. □

Замечание. Пересечение бесконечного набора открытых множеств может не быть открытым. Подтверждением служит семейство множеств $X_k = U_{x_0}\left(\dfrac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, пересечение которых состоит из точки x_0.

Определение 2.10. *Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если любая проколотая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества X.*

Определение 2.11. *Операция присоединения к множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ всех его предельных точек называется замыканием X, полученное мно-*

жество обозначается $\overline{X}$ и называется замыканием множества X. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, то есть $X = \overline{X}$.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы множество X было замкнутым в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы множество $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ было открытым.*

■ *Необходимость.* Пусть множество X содержит все свои предельные точки. Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Так как X — замкнутое множество, то x_0 не является предельной точкой множества X, поэтому $\exists U_{x_0} : U_{x_0} \bigcap X = \emptyset$. Последнее означает, что $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n \setminus X$ или, иными словами, x_0 — внутренняя точка множества $\mathbb{R}^n \setminus X$, и $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым множеством.
Достаточность. Пусть $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ — открытое множество, тогда для любого $x_0 \in Y$ найдется такая окрестность U_{x_0}, что $U_{x_0} \subset Y$. Следовательно, x_0 не является предельной точкой множества X, а, значит, X содержит все свои предельные точки, то есть X — замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество. □

Определение 2.12. *Точка x_0 называется граничной точкой множества X, если в любой ее окрестности содержатся как точки из X, так и точки из $\mathbb{R}^n \setminus X$. Совокупность всех граничных точек множества X называется его границей и обозначается ∂X.*

Замечание. Граничная точка множества X может как принадлежать множеству X так и не принадлежать ему. Так, например, любая точка x сферы $V_a(r)$ с центром в точке a и радиуса r является граничной точкой как открытого шара $S_a(r)$, так и замкнутого шара $\overline{S}_a(r)$. Но x не принадлежит $S_a(r)$ и принадлежит $\overline{S}_a(r)$.

Лемма 2.4. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$. Тогда $\partial X = \partial Y$, то есть множества X и Y имеют общую границу.*

■ Если $x_0 \in \partial X$, то любая окрестность U_{x_0} содержит как точки из X, так и точки из Y, а потому $x_0 \in \partial Y$. Аналогично, если $x_0 \in \partial Y$, то $x_0 \in \partial X$. Следовательно, границы множеств X и Y совпадают. □

Теорема 2.4. *Для того чтобы множество $X \subset \mathbb{R}^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его граница содержалась в нем, то есть $\partial X \subset X$.*

■ Если множество X замкнуто, то множество $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ открыто, точки его границы ∂Y не принадлежат Y, а значит, они принадлежат X, то есть $\partial Y \subset X$. Но, так как $\partial X = \partial Y$, то $\partial X \subset X$.

Если же $\partial X \subset X$, то $\partial X = \partial Y \not\subset Y$, поэтому Y открыто, а значит X замкнуто. □

Определение 2.13. *Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если существует такое число $M > 0$, что $G \subset \overline{S}_0(M)$.*

Примерами ограниченных множеств являются введенные ранее множества $S_a(\varepsilon)$, $V_a(\varepsilon)$, $\overline{S}_a(\varepsilon)$, $\overline{V}_a(\varepsilon)$, $\Pi_a(\varepsilon)$, $\Pi(a,b)$, $\overline{\Pi}(a,b)$. (Предлагаем доказательство этих фактов провести самостоятельно.) Мы же только отметим, что в силу леммы 2.3, в определении 2.13 можно шар $\overline{S}_0(M)$ заменить прямоугольником $\overline{\Pi}_0(M)$.

Очень удобным, сокращающим запись при проведении различных выкладок, является следующее обозначение: $\| x \| = \rho(x, 0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Это число называется нормой элемента x. Из определения 2.2 следует, что $\|\lambda x\| \le |\lambda|\, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

В пространстве $\mathbb{R}^1$ $\| x \| = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Например, пользуясь тем, что $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$, для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, и определением нормы, множество $S_a(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \| x - a \| < \varepsilon\}.$$

Используя определение скалярного произведения, неравенство Коши—Буняковского можно переписать в виде:

$$| < x, y > | \le \| x \| \, \| y \|, \; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Часто бывает удобно вместо $\mathbb{R}^n$ писать $\mathbb{R}^n_x$ или $\mathbb{R}^n_{x_1,\ldots,x_n}$, когда произвольную точку пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаем через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В частности, если в пространстве $\mathbb{R}^2$ произвольную точку обозначать (x, y), а в $\mathbb{R}^3$ — (x, y, z), то двумерное евклидово пространство естественно обозначать $\mathbb{R}^2_{x,y}$, а трехмерное евклидово пространство — $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$.

2.2 Сходящиеся последовательности в $\mathbb{R}^n$

Если каждому натуральному числу k ставится в соответствие точка $x^{(k)}$ из пространства $\mathbb{R}^n$, то говорят, что определена последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$, которую обозначают $\{x^{(k)}\}$.

Определение 2.14. *Будем говорить, что точка a из $\mathbb{R}^n$ есть предел последовательности $\{x^{(k)}\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, a) = 0$. В этом случае еще говорят, что последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$ к точке a, и пишут: $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, $\lim x^{(k)} = a$, или $x^{(k)} \to a$.*

Это определение предела последовательности $\{x^{(k)}\}$ точек из $\mathbb{R}^n$ сформулировано через определение предела числовой последовательности $\{\rho_k\} = \{\rho(x^{(k)}, a)\}$. Если выписать последнее определение в терминах "$\varepsilon - N$ то получим эквивалентное определению 2.14

Определение 2.15. *Говорят, что последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *сходится к точке* a *в* $\mathbb{R}^n$*, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon,\ \forall\,k > N.$$

Определение, эквивалентное предыдущим, можно сформулировать и в терминах окрестностей.

Определение 2.16. *Говорят, что последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *сходится к точке* a *в* $\mathbb{R}^n$, *если*

$$\forall\,U_a,\ \exists\,N = N(U_a) \in \mathbb{N} : x^{(k)} \in U_a,\ \forall\,k > N.$$

По произвольной последовательности $\{x^{(k)}\}$ из $\mathbb{R}^n$ можно построить, кроме числовой последовательности $\rho(x^{(k)}, a)$, еще n числовых последовательностей: $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}$, которые являются последовательностями одноименных координат точек $x^{(k)}$ и называются координатными последовательностями последовательности $\{x^{(k)}\}$. Наоборот, задание n числовых последовательностей $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}$, определяет последовательность $\{x^{(k)}\}$ точек $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.17. *Говорят, что последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *покоординатно сходится к точке* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *из* $\mathbb{R}^n$, *если* $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j$ *для любого* $j = 1, \ldots, n$; *другими словами, если каждая координатная последовательность сходится к соответствующей координате точки* a.

Теорема 2.5. *Определения 2.14 и 2.17 эквивалентны, то есть последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *точек пространства* $\mathbb{R}^n$ *сходится к точке* a *этого пространства тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно к точке* a.

■ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, то есть

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon,\ \forall\,k > N.$$

Тогда для $k > N$ и всех $j = 1, \ldots, n$, $|x_j^{(k)} - a_j| \le \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$. Согласно определению предела числовой последовательности, последнее означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Пользуясь теоремами об арифметических операциях с пределами числовых последовательностей и непрерывностью функций возведения в степень и извлечения квадратного корня, получим

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \lim_{k\to\infty} (x_j^{(k)} - a_j)^2\right)^{1/2} = 0,$$

то есть $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},a)=0$ и, по определению 2.14, $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=a$. $\square$

Доказанная теорема позволяет легко вычислять пределы последовательностей точек из $\mathbb{R}^n$ опираясь только на вычисление пределов координатных последовательностей. Так, например, если $x^{(k)}=(1/k,e^{-k})$, то $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=(0,0)$. Так как числовая последовательность $\{(-1)^k\}$ не имеет предела, то последовательность $x^{(k)}=(1/k,(-1)^k)$ не имеет предела в $\mathbb{R}^2$. Теорема 2.5 позволяет без труда переформулировать и доказать для последовательностей точек пространства $\mathbb{R}^n$ аналоги теорем о сходящихся числовых последовательностях.

Определение 2.18. *Последовательность $\{x^{(k)}\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется ограниченной, если существует такое число $M>0$, что для всех $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $\rho(x^{(k)},0)\le M$.*

Иными словами, ограниченность последовательности $\{x^{(k)}\}$ означает, что все точки этой последовательности принадлежат замкнутому шару радиуса M с центром в начале координат.

Лемма 2.3, очевидно, позволяет дать следующее определение, равносильное определению 2.18.

Определение 2.19. *Последовательность точек $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется ограниченной, если все её координатные последовательности ограничены, то есть существуют такие числа $M_i>0$, $i=1,2,\dots,n$, что для всех $k\in\mathbb{N}$ и всех $i=1,2,\dots,n$ выполняются неравенства $|x_i^{(k)}|\le M_i$.*

Таким образом, последовательность $\{x^{(k)}\}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$, если все точки $x^{(k)}$ её принадлежат замкнутому параллелепипеду $\overline{\Pi}_0(M)$, $M=(M_1,\dots,M_n)$, с центром в начале координат.

Теорема 2.6. *Если последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$, то*

1) предел единственен;

2) $\{x^{(k)}\}$ — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ последовательность;

3) любая подпоследовательность $\{x^{(k_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{j\to\infty}x^{(k_j)}=\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}$.

$\blacksquare$ Докажем, например, утверждение 2). Так как последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$, то она покоординатно сходится. Следовательно, ее координатные последовательности ограничены в $\mathbb{R}$, что означает ограниченность последовательности $\{x^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 2.20. *Последовательность $\{x^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется фундаментальной, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \rho(x^{(k)}, x^{(s)}) < \varepsilon,\ \forall\, k, s > N.$$

Теорема 2.7 (критерий Коши)**.** *Последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна в $\mathbb{R}^n$.*

Теорема 2.8 (об арифметических операциях с пределами)**.** *Если $\{x^{(k)}\}, \{y^{(k)}\}$ — сходящиеся последовательности в $\mathbb{R}^n$, $\{\lambda_k\}$ — сходящаяся последовательность в $\mathbb{R}$, то последовательности $\{x^{(k)} \pm y^{(k)}\}$, $\{\lambda_k x^{(k)}\}$ сходятся в $\mathbb{R}^n$ и*

$$\lim_{k\to\infty} (x^{(k)} \pm y^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} + \lim_{k\to\infty} y^{(k)},$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k x^{(k)} = \lambda \lim_{k\to\infty} x^{(k)}.$$

Теорема 2.9 (критерий предельной точки)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Точка a из $\mathbb{R}^n$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x^{(k)}\}$ точек из X такая, что*

$$x^{(k)} \neq a,\ \forall\ k = 1, 2, \ldots, \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a.$$

Доказательство этих теорем студент может провести самостоятельно, опираясь на соответствующий материал из теории числовых последовательностей и теорему 2.5. Мы же ограничимся одним важным для дальнейшего примером.

Пример 2.1. Шар $\overline{S}_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leq r\}$ является замкнутым в $\mathbb{R}^n$ множеством.

■ Пусть $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — предельная в $\mathbb{R}^n$ точка множества $\overline{S}_a(r)$. По теореме 2.9 $\exists\,\{x_{(k)}\} : x^{(k)} \in \overline{S}_a(r)\backslash\{c\}, \lim x^{(k)} = c$. Поскольку в $\mathbb{R}^n$ сходимость равносильна покоординатной, то $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = c_i, \forall\, i = 1, \ldots, n$. Но $x^{(k)} \in \overline{S}_a(r)$, поэтому $(x_1^{(k)} - a_1)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2 \leq r^2$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$(c_1 - a_1)^2 + \ldots + (c_n - a_n)^2 \leq r^2.$$

Следовательно, $c \in \overline{S}_a(r)$ и $\overline{S}_a(r)$ — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. □

Используя этот пример легко показать, что замыкание открытого шара $S_a(r)$ совпадает с замкнутым шаром $\overline{S}_a(r)$.

С помощью теоремы 2.5 легко доказать обобщение теоремы Больцано—Вейерштрасса на случай пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.10 (Больцано–Вейерштрасса)**.** *Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

■ Чтобы избежать громоздких обозначений, рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $\{x^{(k)}\}$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^2$. По условию ее координатные последовательности $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}$ ограничены в $\mathbb{R}$. По теореме Больцано—Вейерштрасса для $\mathbb{R}$ из последовательности $\{x_1^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся в $\mathbb{R}$ к некоторому числу a_1 подпоследовательность $\{x_1^{(k_j)}\}$. Рассмотрим ограниченную последовательность $\{x_2^{(k_j)}\}$. Из неё выделим сходящуюся в $\mathbb{R}$ к некоторому числу a_2 подпоследовательность $\left\{x_2^{(k_{j_s})}\right\}$. В силу теорем 2.5 и 2.6 подпоследовательность $\left\{(x_1^{(k_{j_s})}, x_2^{(k_{j_s})})\right\}$ последовательности $\{x^{(k)}\}$ сходится в $\mathbb{R}^2$ к точке (a_1, a_2). □

2.3 Компактные множества в $\mathbb{R}^n$

Определение 2.21. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$. Совокупность открытых множеств $X_\alpha \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, называется открытым покрытием множества X, если для любого элемента $x \in X$ найдется $\alpha \in A$ такое, что $x \in X_\alpha$, то есть $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $A_1 \subset A$ и совокупность множеств $X_\alpha, \alpha \in A_1$, является покрытием множества X, то ее называют подпокрытием исходного покрытия.*

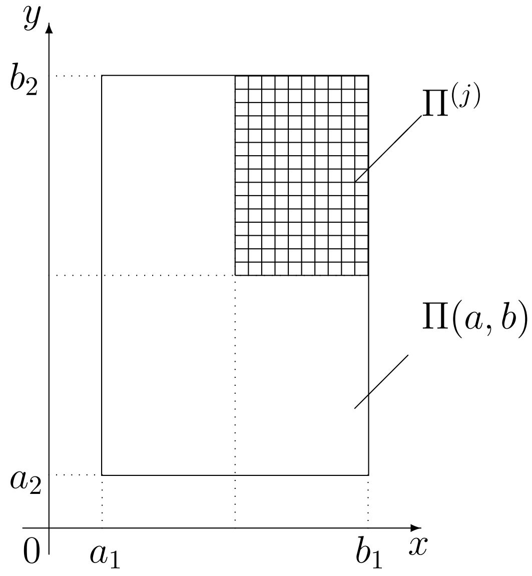
Определение 2.22. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным, или компактом, если каждое открытое покрытие его содержит конечное подпокрытие.*

Лемма 2.5 (о компактности замкнутого параллелепипеда)**.** *Любой замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ является компактом.*

■ Ради простоты, проведем доказательство в пространстве $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Воспользуемся методом от противного и предположим, что параллелепипед

$$\overline{\Pi}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$$

имеет бесконечное покрытие открытыми множествами $X_\alpha, \alpha \in A$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.



Через середины отрезков $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ проведем прямые, параллельные осям координат OX и OY, соответственно. Они разделят параллелепипед $\overline{\Pi}(a, b)$ на 4 замкнутых параллелепипеда (прямоугольника). Среди них есть хотя бы один, который не имеет конечного подпокрытия множествами $X_\alpha, \alpha \in A$. Обозначим его $\overline{\Pi}^{(1)} = [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \times [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}]$, где

$$[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \subset [a_1, b_1], \qquad [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}] \subset [a_2, b_2],$$

$$b_1^{(1)} - a_1^{(1)} = \frac{1}{2}(b_1 - a_1), \qquad b_2^{(1)} - a_2^{(1)} = \frac{1}{2}(b_2 - a_2).$$

Разделим $\overline{\Pi}^{(1)}$ на 4 прямоугольника, проведя через середины отрезков $[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}]$, $[a_2^{(1)}, b_2^{(1)}]$ прямые, параллельные осям OY и OX, соответственно. Среди полученных прямоугольников есть хотя бы один, который не имеет конечного подпокрытия множествами $X_\alpha, \alpha \in A$. Обозначим такой прямоугольник через $\overline{\Pi}^{(2)} = [a_1^{(2)}, b_1^{(2)}] \times [a_2^{(2)}, b_2^{(2)}]$. Заметим, что

$$[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}] \subset [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}], \qquad [a_2^{(2)}, b_2^{(2)}] \subset [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}],$$

$$b_1^{(2)} - a_1^{(2)} = \frac{1}{2^2}(b_1 - a_1), \qquad b_2^{(2)} - a_2^{(2)} = \frac{1}{2^2}(b_2 - a_2).$$

Продолжая этот процесс, получим систему замкнутых параллелепипедов

$$\overline{\Pi}^{(k)} = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times [a_2^{(k)}, b_2^{(k)}],\ \overline{\Pi}^{(k+1)} \subset \overline{\Pi}^{(k)},$$

$$b_j^{(k)} - a_j^{(k)} = \frac{1}{2^k}(b_j - a_j)\ ,\ j = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Pi}^{(k)} \neq \varnothing$. Система отрезков $\{[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}]\}$ — проекций $\overline{\Pi}^{(k)}$ на ось OX, является системой вложенных отрезков, а длины $\{b_1^{(k)} -$

$a_1^{(k)}\}$ образуют бесконечно малую последовательность. Потому существует единственная точка $\overset{\circ}{x}_1$, принадлежащая всем отрезкам системы, причем

$$\overset{\circ}{x}_1 = \lim_{k\to\infty} a_1^{(k)} = \lim_{k\to\infty} b_1^{(k)}.$$

Аналогично получаем, что существует единственная точка

$$\overset{\circ}{x}_2 \in [a_2^{(k)}, b_2^{(k)}],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \text{и}\ \overset{\circ}{x}_2 = \lim_{k\to\infty} a_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty} b_2^{(k)}.$$

Заметим, что $\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) \in \overline{\Pi}^{(k)},\ \forall k \in \mathbb{N}$, то есть пересечение прямоугольников $\overline{\Pi}^{(k)}$ содержит точку $\overset{\circ}{x}$, которая является единственной. Поскольку $\overset{\circ}{x} \in \overline{\Pi}(a,b)$, то существует $\alpha_o \in A$ такое, что $\overset{\circ}{x} \in X_{\alpha_o}$. Но X_{α_o} — открытое множество, поэтому существует окрестность

$$U_{\overset{\circ}{x}}(\varepsilon) = (\overset{\circ}{x}_1 - \varepsilon, \overset{\circ}{x}_1 + \varepsilon) \times (\overset{\circ}{x}_2 - \varepsilon, \overset{\circ}{x}_2 + \varepsilon)\ \subset X_\alpha.$$

Так как $a_1^{(k)} \to \overset{\circ}{x}_1$, $b_1^{(k)} \to \overset{\circ}{x}_1$, то

$$\exists K_1 \in \mathbb{N} : a_1^{(k)}, b_1^{(k)} \in (\overset{\circ}{x}_1 - \varepsilon, \overset{\circ}{x}_1 + \varepsilon), \forall k > K_1.$$

Аналогично, $\exists K_2 \in \mathbb{N} : a_2^{(k)}, b_2^{(k)} \in (\overset{\circ}{x}_2 - \varepsilon, \overset{\circ}{x}_2 + \varepsilon), \forall k > K_2$, то есть

$$\overline{\Pi}^{(k)} \subset U_{x_0} \subset X_{\alpha_o}, \forall k > K = \max\{K_1, K_2\}.$$

Последнее означает, что прямоугольники $\overline{\Pi}^{(k)},\ \forall k > K$, покрыты одним множеством X_{α_o}, что противоречит выбору системы $\overline{\Pi}^{(k)}$. Следовательно, сделанное предположение неверно и из любого покрытия параллелепипеда $\overline{\Pi}(a,b)$ открытыми множествами всегда можно выделить конечное подпокрытие, то есть $\overline{\Pi}(a,b)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. □

Теорема 2.11 (о компактности замкнутого подмножества компакта)**.** *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и X — замкнутое подмножество K, тогда X — компакт.*

■ Пусть совокупность открытых множеств $X_\alpha,\ \alpha \in A$, является бесконечным покрытием множества X, и $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$. Заметим, что Y — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество. Совокупность множеств $X_\alpha,\ \alpha \in A$ и Y является покрытием компакта K. Поэтому существует конечное подпокрытие компакта K. Возможно, что оно состоит из множеств $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_m}$, тогда выделено конечное подпокрытие X. Если же выделенное подпокрытие состоит из $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_m}, Y$, то, замечая, что $Y \bigcap X = \varnothing$, получаем что $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_m}$ — конечное подпокрытие X. Значит, X — компакт. □

Теорема 2.12 (Гейне–Бореля)**.** *Для того, чтобы множество X было компактом в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и ограничено.*

■ *Необходимость.* Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим совокупность шаров $\{U_0(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что она является открытым покрытием всего пространства $\mathbb{R}^n$, а значит и покрытием компакта X. Поэтому существует конечное подпокрытие $U_0(k_1), \ldots, U_0(k_i)$, (где $k_1 < k_2 < \cdots < k_i$) множества X. Но $U_0(k)$ — вложенные шары, поэтому $U_0(k_i) \supset X$, что означает ограниченность X.

Для доказательства замкнутости X покажем, что $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым множеством, то есть для любого $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ найдется окрестность $U_y : U_y \bigcap X = \varnothing$. Пусть y_o — предельная точка множества $\mathbb{R}^n \setminus X$. Введем в рассмотрение функцию $\rho(x, y_o) = \delta(x),\ x \in X$. Ясно, что

$$U_x\left(\frac{\delta(x)}{2}\right) \bigcap U_{y_o}\left(\frac{\delta(x)}{2}\right) = \varnothing.$$

Совокупность шаров $U_x\left(\dfrac{\delta(x)}{2}\right)$, $x \in X$, является открытым покрытием множества X. Поскольку X — компакт, то

$$\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_m \in X : \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k}\left(\frac{\delta(x_k)}{2}\right) \supset X.$$

Положим $\delta_0 = \min\{\delta(x_k) : k = 1, \ldots, m\}$. Тогда $U_{y_o}\left(\dfrac{\delta_0}{2}\right) \bigcap U_{x_k}\left(\dfrac{\delta(x_k)}{2}\right) = \varnothing$, $\forall k = 1, \ldots, m$ и $U_{y_o}\left(\dfrac{\delta_0}{2}\right) \bigcap X = \varnothing$, то есть $U_{y_o}\left(\dfrac{\delta_0}{2}\right) \subset Y$. Следовательно, y_o — внутренняя точка множества $\mathbb{R}^n \setminus X$ и множество $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым, а X — замкнутым в $\mathbb{R}^n$ множеством.

Достаточность. Пусть множество X замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует $\overline{\Pi}(a, b) \supset X$, а значит X — компакт в силу теоремы 2.11. □

2.4 Функции многих вещественных переменных и их предел

Определение 2.23. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $n > 1$. Действительнозначную функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют функцией многих вещественных (действительных) переменных или иначе скалярной функцией многих переменных и записывают ее одним из следующих способов :*

$$f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f.$$

Множество X, на котором определена функция многих переменных f, как и для функции одного переменного, называется множеством (областью) определения функции и часто обозначается $D(f)$ или D_f. Множество всех значений, принимаемых функцией f в точках из X, называется множеством (областью) значений этой функции и обозначается $f(X)$.

Пример 2.1. Пусть функция f определена по закону

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1.$$

Естественная область определения этой функции — пространство $\mathbb{R}^n_x$ а множество значений — пространство $\mathbb{R}$.

Пример 2.2. Пусть функция f определена по закону

$$f(x, y) = x \sin(x/y).$$

Очевидно, что естественной областью определения этой функции является множество $G = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\big\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Определение 2.24. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ и a — предельная точка множества X. Говорят, что число или бесконечный символ A есть предел функции f в точке a, если для любой окрестности U_A точки A найдется такая окрестность U_a точки a, что $f(x) \in U_A$ для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}_a \cap X$. Тот факт, что величина A есть предел функции f в точке a, обозначается одним из следующих способов:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \ \lim_{a} f = A, \ \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = A.$$

Переформулируем определение 2.24 для случая, когда $A \in \mathbb{R}$ и в качестве окрестности точки a возьмем, например, шаровую окрестность.

Определение 2.25. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества X. Говорят, что число A есть предел функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любой точки $x \in \overset{\circ}{S}_a (\delta) \cap X$.*

Символически это определение можно записать так

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \ A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 :$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \forall\, x \in X \setminus \{a\} : \rho(x, a) < \delta.$$

Обратите внимание на то, что

1) a — точка сгущения области определения функции f;
2) существование предела функции f в точке a и его величина, если предел существует, не зависят от значения f в точке a и, более того, функция f в точке a может быть не определена;

3) определения 2.24 и 2.25 формально не отличаются от соответствующих определений предела функции одной вещественной переменной.

Как и в случае функции одной переменной, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то функцию $f(x)$ будем называть бесконечно малой (б.м.) в точке a. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ равен ∞ ($+\infty$ или $-\infty$), то функцию $f(x)$ будем называть бесконечно большой (б.б.) в точке a.

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству соответствующего результата для функции одной переменной и предлагается студенту провести самостоятельно.

Теорема 2.13 (Гейне). *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X. Величина $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции в точке a тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x^{(k)}\}$ такой, что*

$$x^{(k)} \in X,\ x^{(k)} \neq a,\ \forall\, k \geq 1,\ \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = a,$$

числовая последовательность $\{f(x^{(k)})\}$ имеет A своим пределом.

Следствие. Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X. Функция f не имеет предела в точке a, если существуют две последовательности $\{x^{(k)}\}$ и $\{y^{(k)}\}$ такие, что

1) $x^{(k)},\ y^{(k)} \in X,\ x^{(k)} \neq a,\ y^{(k)} \neq a,\ \ \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a, \lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = a,$

2) хотя бы одна из последовательностей $\{f(x^{(k)})\}, \{f(y^{(k)})\}$ не имеет предела в $\mathbb{R}$, либо обе последовательности имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$, которые не равны между собой.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление предела функции многих переменных в точке.

Пример 2.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to0,y\to0} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

■ Естественной областью определения функции $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ является множество $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, для которого точка $(0,0)$ — предельная точка. Поскольку для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $x^2+y^2 \geq 2|xy|$, то для всех $(x,y) \in G$ $|f(x,y)-0| = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}|x| \leq \dfrac{|x|}{2}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = 2\varepsilon$. Для точек (x,y) из $G \cap \overset{\circ}{\Pi}_{(0,0)}(\delta)$, то есть для тех точек из G, для которых $0 < |x| < \delta$, $0 < |y| < \delta$, получим неравенство: $|f(x,y)-0| \leq \dfrac{|x|}{2} < \dfrac{\delta}{2} = \varepsilon$. Следовательно,

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = 2\varepsilon : |f(x)-0| < \varepsilon,\ \forall\ (x,y) \in G \cap \overset{\circ}{\Pi}_{(0,0)}(\delta),$$

то есть $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x) = 0$. $\square$

Пример 2.4. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{x^2+y^2} = +\infty$.

■ Функция $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ определена на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и $(0,0)$ — точка сгущения G. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такую δ-окрестность U_0 точки $(0,0)$, что $|f(x,y)| > \varepsilon$ в $\overset{\circ}{U}_o\ (\delta)$. Очевидно, $(x^2 + y^2)^{-1} > \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $0 < x^2+y^2 < 1/\varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon^{-1}$, тогда $f(x,y) > \varepsilon$, $\forall\,(x,y) \in \overset{\circ}{S}_{(0,0)}\ (\delta)$, а поэтому $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = +\infty$. $\square$

Пример 2.5. Доказать, что в точке $(0,0)$ не существует предела функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

■ Функция $f(x,y)$ определена на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и $(0,0)$ — точка сгущения G. Зафиксируем произвольное $\alpha \in \mathbb{R}$ и рассмотрим в G точки $M_\alpha^{(k)} = (1/k; \alpha/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\lim\limits_{k\to+\infty} M_\alpha^{(k)} = (0,0)$. Так как $f(M_\alpha^{(k)}) = \alpha/(1+\alpha^2)$, то $\lim\limits_{k\to+\infty} f(M_\alpha^{(k)}) = \alpha/(1+\alpha^2)$, то есть зависит от α. По следствию из теоремы 2.13 функция $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$. $\square$

Пример 2.6. Доказать, что в точке $(0,0)$ не существует предела у функции $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$.

■ Функция $f(x,y)$ определена на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = -y\}$ и $(0,0)$ — предельная точка множества G. Зафиксируем произвольное $\alpha \neq -1$ и рассмотрим точки $M_\alpha^{(k)} = (1/k; \alpha/k), k \in \mathbb{N}$. Они принадлежат G и $\lim\limits_{k} M_\alpha^{(k)} = (0,0)$. Так как

$$f(M_\alpha^{(k)}) = (1 - \alpha + 1/k + \alpha^2/k)/(1+\alpha),$$

то $\lim\limits_{k} f(M_\alpha^{(k)}) = (1-\alpha)/(1+\alpha)$, то есть зависит от α. По следствию из теоремы 2.13 функция f не имеет предела в точке $(0,0)$. $\square$

Продолжим исследование. Зафиксируем произвольное $y \neq 0$. Функция f определена на множестве

$$G_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in G\} = \mathbb{R}^1_y \setminus \{-y\},$$

для которого $x = 0$ является предельной точкой. Более того, существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = y - 1$, который определяет на множестве $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функцию $g(y) = y-1$. Точка $y = 0$ является предельной точкой множества

Y и $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = -1$. Следовательно,

$$\exists \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1.$$

Аналогично, при каждом фиксированном $x \neq 0$, функция f определена на множестве

$$G_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in G\} = \mathbb{R}^1_x \setminus \{-x\},$$

для которого $y = 0$ является предельной точкой. При этом

$$\exists \lim_{y\to 0} f(x,y) = x+1, \quad \exists \lim_{x\to 0}(x+1) = 1,$$

то есть на множестве $X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ определена функция $h(x) = x+1$, $x = 0$ — предельная точка множества X и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1$. Найденные таким образом пределы называются повторными. Дадим точное определение повторного предела функции 2-х переменных в точке.

Определение 2.26. *Пусть* $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ *и* (x_0, y_0) *— предельная точка множества* G*, причем* $\exists\ \delta_0 > 0$ *такое, что для всех* $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}$ *точка* y_0 *— предельная точка множества* $G_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in G\}$. *Если*

1) $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}$,

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

то величину $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *называют повторным пределом функции* f *в точке* (x_0, y_0) *и обозначают* $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

Аналогично вводится и второй повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, который отличается от первого порядком предельных переходов.

Заметим, что об обоих повторных пределах в точке (x_0, y_0) можно говорить, если множество G обладает следующим свойством: $\exists\,\delta_0 > 0$ такое, что для любого $x' \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}$ точка y_0 — предельная точка множества $G_{x'}$ и $\forall\, y' \in (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}$ точка x_0 — предельная точка множества $G_{y'} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y') \in G\}$. Примером множества G, в котором можно говорить о повторных пределах функции $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ является, например, множество $G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| \neq |y|\big\}$.

В примере 2.6 выполнены все перечисленные выше условия, наложенные на множество G в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0,0)$, повторные пределы существуют, но

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1.$$

При этом еще заметим, что **не существует** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Пример 2.7. Выяснить, существует ли предел и повторные пределы у функции $f(x,y) = x\ \sin(1/y)$ в точке $(0,0)$?

■ Областью определения функции f является множество

$$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) :\ y \neq 0\}.$$

Точка $(0,0)$ — предельная точка G, и множество G в окрестности точки $(0,0)$ удовлетворяет условиям определения 2.26. Так как $|x\sin(1/y)| \le |x|$ для всех $(x,y) \in G$, то существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

В то же время, для всех $x' \neq 0$ $G_{x'} = R\setminus\{0\}$ и $\nexists \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, но для всех $y' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $G_{y'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x,y') = 0$. Поэтому,

$$\exists \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 \text{ и } \nexists \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0. \ \square$$

Пример 2.8. Выяснить, существует ли предел и повторные пределы у функции $f(x,y) = (x+y)^{-1}\ (y^2\ \sin(1/x) + y)$ в точке $(0,0)$.

■ Областью определения этой функции является множество

$$G = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in R\}\right),$$

точка $(0,0)$ — предельная точка G. Пусть $M_k^\alpha = \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{\alpha}{k}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, тогда $M_k^\alpha \in G$, $M_k^\alpha \neq (0,0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k^\alpha = (0,0)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$f\left(M_k^\alpha\right) = \frac{k}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{k^2}\sin k + \frac{\alpha}{k}\right) \longrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ при } k \to +\infty.$$

Поэтому не существует предела функции f в точке $(0,0)$.

Далее, для всех $y' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $G_{y'} = \mathbb{R}\setminus\{0; -y'\}$ и $x_0 = 0$ — предельная точка множества $G_{y'}$. Поскольку для всех $y' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ не существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y')$, то не существует $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Аналогично, для всех $x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $G_{x'} = \mathbb{R}\setminus\{-x'\}$ и $y_0 = 0$ — предельная точка $G_{x'}$. Так как $\lim\limits_{y\to 0} f(x',y) = 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$. $\square$

Вопрос о связи предела и повторных пределов в точке функции двух переменных решается следующей теоремой.

Теорема 2.14 (о повторных пределах)**.** *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, (x_0,y_0) — предельная точка G, и в окрестности точки (x_0,y_0) множество G удовлетворяет условиям, отмеченным в определении 2.26. Если*

1) $\exists \lim\limits_{(x_0,y_0)} f = A$, $A \in \mathbb{R}$;

2) $\exists\,\delta_0>0:\forall\,x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}\ \exists\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)\in\mathbb{R}$,

то существует повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$*).*

■ Из определения 2.25 с учётом леммы 2.3 имеем:

$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\delta_0)\,|\,\forall\,(x,y)\in G\setminus\{(x_0,y_0)\}\,:\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,$

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon/2. \tag{2.3}$$

Учитывая условие 2) теоремы, в неравенстве (2.3) при фиксированном x из $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ перейдем к пределу при $y\to y_0$ и получим:

$$|\varphi(x)-A|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\ \forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}.$$

Последнее означает, что существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, то есть существует $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$. □

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2.14, x_0 — предельная точка множества $G_y,\forall\,y\in\ (y_0-\delta,y_0+\delta)\setminus\{y_0\}$ и, кроме того,

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\xi(x)\in\mathbb{R},\ \forall\,y\in(y_0-\delta_0,y_0+\delta_0)\setminus\{y_0\}.$$

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$.

Следствие 2. Если $\exists\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\alpha$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\beta$, причем $\alpha\ne\beta$, то не существует $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$.

Приведенные примеры 2.6–2.8 показывают существенность каждого из условий теоремы о повторных пределах.

Замечание. Теорема остается в силе, если $A=\infty$, $A=+\infty$ или $A=-\infty$. Предлагаем эти случаи рассмотреть самостоятельно.

2.5 Непрерывность функции многих переменных

Начнем с основного определения.

Определение 2.27. *Пусть* $f:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},a\in X$. *Говорят, что функция* f *является непрерывной в точке* a, *если для любой окрестности* $U_{f(a)}$ *точки* $f(a)$ *существует такая окрестность* U_a *точки* a, *что*

$$f(x)\in U_{f(a)},\ \forall\ x\in X\cap U_a.$$

Если вспомнить, что $f(a)\in\mathbb{R}$ и определение окрестностей в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^n$, то, переходя с языка окрестностей на язык "$\varepsilon-\delta$ можно дать следующее определение непрерывности, эквивалентное определению 2.27.

Определение 2.28. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in X$. Говорят, что функция f непрерывна в точке a, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in X : |x_k - a_k| < \delta,\ k = \overline{1,n}.$$

Следует обратить внимание на то, что в отличие от определения предела функции в точке, точка a обязательно принадлежит области определения функции f и величина $f(a)$ существенна для непрерывности функции f в точке a.

В случае, если a — изолированная точка множества X (a такая точка, что $\exists\ U_a\ :\ U_a \cap X = \{a\}$), то f непрерывна в точке a. Если же a — предельная точка множества X, то определения 2.27 и 2.28 эквивалентны следующему.

Определение 2.29. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in X$, a — предельная точка X. Говорят, что функция f непрерывна в точке a, если существует предел функции f в точке a, равный значению функции в этой точке, то есть $\exists\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Из определения 2.29 и сказанного выше, пользуясь теоремой Гейне (теорема 2.13), получаем равносильное предыдущим определение.

Определение 2.30. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}, a \in X$. Функцию f называют непрерывной в точке a, если для любой последовательности $\{x^{(k)}\}$ точек множества X, сходящейся к a, последовательность образов $\{f(x^{(k)})\}$ сходится к значению функции в точке a, то есть*

$$\lim_{k \to +\infty} f(x^{(k)}) = f(a).$$

Определение 2.31. *Если функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке $x \in X$, то говорят, что f непрерывна на множестве X.*

Множество всех функций, непрерывных на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, будем обозначать через $C(X)$ (*continuous* (англ.) — непрерывный).

Формально, определение непрерывности (в точке и на множестве) функции многих переменных ничем не отличается от определения непрерывности функции одной переменной, поэтому легко формулируются и доказываются большинство свойств непрерывных в точке и на множестве функций. Мы же в последующем обратим внимание лишь на те результаты, которые существенно зависят от многомерности области определения. Для доказательства непрерывности конкретных функций многих переменных, часто используется

Лемма 2.6. *Пусть $\varphi : X \subset \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$, $f : X \times \mathbb{R}^{n-1}_y \subset \mathbb{R}^n_{x,y} \to \mathbb{R}$, $n > 1$ и $f(x,y) = \varphi(x)$, $\forall\, (x,y) \in X \times \mathbb{R}^{n-1}_y$. Если функция φ непрерывна в точке x_0, то функция f непрерывна в точке (x_0, y_0), $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}_y$.*

■ Так как функция φ непрерывна в точке x_0, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,\, \forall\, x \in X : |x - x_0| < \delta.$$

Зафиксируем $y_0 \in \mathbb{R}_y^{n-1}$. Тогда для всех (x, y) из $X \times \mathbb{R}_y^{n-1} \bigcap \Pi_{(x_0,y_0)}(\delta)$ выполняется неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, что означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0). □

Приведем несколько примеров, использующих это предложение.

Пример 2.1. Доказать непрерывность в $\mathbb{R}^n$ функций $\pi_j(x) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$.

■ Так как функция $\varphi(t) = t$ непрерывна в $\mathbb{R}$, то, применяя лемму 2.6, сразу получаем нужное. □

Функция примера 2.1 называется j-тым проектором из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Пример 2.2. Найти точки непрерывности функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \ln x_1.$$

■ Функция f определена на множестве $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$. Если $\varphi(x_1) = \ln x_1$, то φ — непрерывна на $(0, +\infty)$, и по лемме 2.6 функция f непрерывна на X. □

Теперь обратимся к понятию раздельной непрерывности функции многих переменных. Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$, то есть $\exists\,\Pi_a(\delta_0) \subset X$, $f : X \to \mathbb{R}$. Множество

$$\{(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ |t - a_j| < \delta_0\}$$

содержится в $\Pi_a(\delta_0)$ и потому на интервале $(a_j - \delta_0, a_j + \delta_0)$ определена функция

$$\zeta_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Определение 2.32. *Если функция ζ_j непрерывна в точке a_j, то говорят, что функция f непрерывна в точке a по переменной x_j.*

Эквивалентное определение на языке "$\varepsilon - \delta$" выглядит так:

Определение 2.33. *Будем говорить, что функция многих переменных f непрерывна в точке a из $\operatorname{int} X$ по переменной x_j, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)\ :\ \forall\, t \in (a_j - \delta,\, a_j + \delta)$$

$$|f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл непрерывности функции f в точке a, например, по переменной x_1 наиболее просто просматривается в случае функции двух переменных $f : X \subset \mathbb{R}_x^2 \to \mathbb{R}$. Именно, если точку $x = (x_1, x_2)$ устремить к точке $a = (a_1, a_2)$ по прямой, параллельной оси OX_1 и проходящей через точку a, то есть по точкам $(x_1, a_2) \in U_a(\delta_0)$, то $f(x_1, a_2) \to f(a_1, a_2)$.

Определение 2.34. *Пусть* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. *Функция многих переменных* f *называется раздельно непрерывной в точке* a, *если* f *непрерывна в точке* a *по каждой переменной* x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Для изучения связи между понятиями непрерывности и раздельной непрерывности функции многих переменных в точке рассмотрим следующий пример.

Пример 2.3. Доказать раздельную непрерывность в точке $(0,0)$ функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{, если } \ x^2+y^2 \neq 0, \\ \quad 0 & \text{, если } \ x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

■ Функция f симметрична относительно переменных, поэтому достаточно изучить ее непрерывность в точке $(0,0)$ по одной из переменных, например, по x. Очевидно, что $\zeta_1(x) = f(x,0) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Функция $\zeta_1(x)$ — непрерывна в нуле, поэтому f — непрерывна в точке $(0,0)$ по переменной x (аналогично, по переменной y), а значит функция f раздельно непрерывна в точке $(0,0)$. Но функция f не имеет предела в точке $(0,0)$ (см. пример 2.5), поэтому она не является непрерывной в точке $(0,0)$. □

Итак, из раздельной непрерывности функции в точке не следует ее непрерывность в этой точке. А обратное утверждение имеет место.

Теорема 2.15. *Пусть* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. *Если функция* f *непрерывна в точке* a, *то она раздельно непрерывна в этой точке.*

■ По условию f непрерывна в точке a, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \, \forall x \in \Pi_a(\delta) \subset X.$$

Как легко видеть, $(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in \Pi_a(\delta)$ тогда и только тогда, когда $|t - a_j| < \delta$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall t \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$

$$|f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)| < \varepsilon.$$

Последнее означает непрерывность функции f в точке a по переменной x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Непрерывная в точке функция многих переменных обладает теми же свойствами, что и функция одной переменной, и доказываются они аналогично.

Теорема 2.16. *Если функция* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $x_0 \in G$, *то она локально ограничена в ней, то есть существует число* $M > 0$ *и окрестность* U_{x_0} *такие, что* $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in G \bigcap U_{x_0}$. *Если, кроме того,* $f(x_0) \neq 0$, *то существует окрестность точки* x_0, *в которой функция* f *сохраняет знак, то есть* $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$, $\forall x \in G \bigcap U_{x_0}$.

■ Докажем, например, первую часть. Так как функция f непрерывна в точке x_0, то по числу $\varepsilon = 1$ найдется окрестность U_{x_0} такая, что

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon = 1, \text{ то есть } f(x_0)-1 < f(x) < f(x_0)+1, \forall\, x \in G \bigcap U_{x_0},$$

а потому $f(x) \in [f(x_0) - 1, f(x_0) + 1], \forall\, x \in G \bigcap U_{x_0}$. □

Теорема 2.17 (об арифметических операциях). *Если функции f и φ определены на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x_0, то их сумма $f \pm \varphi$, произведение $f \cdot \varphi$ и, если $\varphi(x_0) \neq 0$, частное f/φ непрерывны в точке x_0.*

Теперь рассмотрим свойства функций многих переменных, непрерывных на компакте.

Теорема 2.18 (Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на компакте $G \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на нем и существуют точки $p, q \in G$ такие, что $f(p) = \sup\limits_{x \in G} f(x)$, $f(q) = \inf\limits_{x \in G} f(x)$.*

■ Так как функция f непрерывна на G, она локально ограничена в каждой точке $x \in G$, то есть существуют число $M_x > 0$ и окрестность U_x такие, что $|f(x')| \le M_x$, $\forall\, x' \in U_x \bigcap G$. Семейство $\{U_x : x \in G\}$ является открытым покрытием компакта G, поэтому $\exists x_1, \dots, x_{n_0} \in G : \bigcup\limits_{k=1}^{n_0} U_{x_k} \supset G$. Поскольку $|f(x)| \le M_{x_k}$, $\forall\, x \in G \bigcap U_{x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n_0$, то, полагая $M = \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_{n_0}}\}$, получим

$$\forall\, x \in G\, \exists\, U_{x_k} : x \in U_{x_k} \quad \text{и} \quad |f(x)| \le M_{x_k} \le M.$$

Последнее означает, что функция f ограничена на компакте G.

Вторую часть теоремы можно доказать точно также, как доказывается соответствующий результат для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции одной переменной. □

Определение 2.35. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$. Функция $f : G \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве G, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x', x'' \in G$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.19 (Кантора). *Если функция многих переменных непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем.*

■ Пусть функция f непрерывна на компакте $G \subset \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $x' \in G$ найдется число $\delta_{x'} = \delta(x', \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in G \bigcap U_{x'}(\delta_{x'})$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Семейство окрестностей $\{U_{x'}(\delta_{x'}/2) : x' \in G\}$ является открытым покрытием компакта G, поэтому существует конечное число точек $x_1, x_2, \ldots, x_m \in G$ таких, что семейство $\{U_{x_k}(\delta_{x_k}/2),\ k = 1, \ldots, m\}$ является конечным подпокрытием G. Положим $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}\}$ (очевидно, $\delta > 0$). Зафиксируем любые две точки $x', x'' \in G,\ \rho(x', x'') < \delta/2$. По определению покрытия существует $1 \le k \le m$ такое, что $x' \in U_{x_k}(\delta_{x_k}/2)$. Тогда $\rho(x', x_k) < \delta_{x_k}/2$ и

$$\rho(x'', x_k) \le \rho(x'', x') + \rho(x', x_k) < \delta/2 + \delta_{x_k}/2 \le \delta_{x_k}/2 + \delta_{x_k}/2 = \delta_{x_k}.$$

Поэтому $|f(x') - f(x_k)| < \varepsilon/2$ и $|f(x'') - f(x_k)| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f(x_k)| + |f(x'') - f(x_k)| < \varepsilon,$$

что означает равномерную непрерывность функции f на G. $\square$

Приведем определение точки разрыва функции.

Определение 2.36. *Пусть функция f определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, кроме быть может самой точки x_0. Точку x_0 называют точкой разрыва функции f, если либо f не определена в точке x_0, либо определена в ней, но не является непрерывной.*

Последнее возможно, если либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо этот предел существует, но не равен значению функции в точке x_0.

2.6 Отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$

Перенося на функции многих переменных результаты, доказанные для функции одной переменной, мы пока не рассмотрели две очень важные теоремы: теорему о промежуточном значении и теорему о непрерывности суперпозиции. Чтобы провести эти обобщения наиболее естественным образом, введем новые понятия, полезные во многих приложениях математического анализа.

Определение 2.37. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и на X определены функции многих переменных $f_j,\ j = 1, 2, \ldots, p\,(p \ge 2)$. Закон, который каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие точку $y = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$, называют вектор-функцией или отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$.*

Вектор-функцию обычно обозначают или $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, где $f = (f_1, \ldots, f_p)$, или $y = f(x)$, или $y = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Учитывая, что y — точка $\mathbb{R}^p$, можно сказать, что последнее равенство равносильно следующим

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots\ ,\ y_p = f_p(x_1, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что при $p = 1$ мы имеем дело с функцией многих переменных. Если $n = 1$, а $p \ge 2$, то соответствующее отображение f из $\mathbb{R}$ в

$\mathbb{R}^p$ называют вектор-функцией скалярного аргумента. Для отображения $f : X \subset \mathbb{R}_x^n \to \mathbb{R}^p$, всегда можно определить функцию $f_j = \pi_j \circ f$, которая каждому элементу x из X ставит в соответствие j-координату точки $f(x)$. Функцию f_j, $j = 1, \ldots, p$, называют j-той координатной функцией отображения f. Очевидно, что отображение f задано тогда и только тогда, когда задано p координатных функций.

Определение 2.38. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$, $a \in X$. Будем говорить, что отображение f непрерывно в точке a, если каждая его координатная функция f_j, $j = 1, \ldots, p$, непрерывна в точке a. Аналогично, будем говорить, что отображение f непрерывно на множестве X, если каждая его координатная функция непрерывна на множестве X.*

Определение непрерывности отображения можно дать как в терминах "$\varepsilon - \delta$, так и терминах последовательностей и окрестностей.

Примером отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ может служить хорошо известное преобразование полярной системы координат в декартову систему координат, которое обозначается через $pd(\rho,\ \varphi)$ и действует по правилу:

$$\forall(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2_{\rho,\varphi} \ : \ \rho \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi) \xrightarrow{pd} (x, y) \in \mathbb{R}^2_{(x,y)} \ :$$

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Определение 2.39. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}_x^n \to \mathbb{R}, \varphi : T \subset \mathbb{R}_t^p \to X \subset \mathbb{R}^n$, причем $\varphi(T) \subseteq X$. Функцию $F = f{\circ}\varphi : T \subset \mathbb{R}_t^p \longrightarrow \mathbb{R}$, ставящую в соответствие каждой точке t из T число*

$$F(t) = f{\circ}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

называют суперпозицией функций многих переменных.

Теорема 2.20 (о непрерывности суперпозиции функции многих переменных)**.** *Пусть заданы функция $f : X \subset \mathbb{R}_x^n \to \mathbb{R}$ и отображение $\varphi : T \subset \mathbb{R}_t^p \to X$. Если отображение φ непрерывно в точке $t_0 \in T$, а функция f непрерывна в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то функция $F = f{\circ}\ \varphi$ непрерывна в точке t_0.*

■ Воспользуемся определением 2.30 и теоремой 2.13. Зафиксируем последовательность $\{t_k\}$ точек множества T такую, что $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = t_0$. Рассмотрим числовую последовательность $\{F(t_k)\} = \{f(\varphi(t_k))\}$. Так как отображение φ непрерывно в точке t_0, то его координатные функции φ_j непрерывны в точке t_0, поэтому $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_j(t_k) = \varphi_j(t_0),\ j = 1, \ldots, p$. Поскольку $\varphi(t_k) = (\varphi_1(t_k), \ldots, \varphi_p(t_k))$, то последовательность $\{\varphi(t_k)\}$ покоординатно сходится в $\mathbb{R}^p$ к точке

$$\varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_p(t_0)) = x_0.$$

Учитывая непрерывность функции f в точке x_0, получим, что

$$\lim_{k\to+\infty} F(t_k) = \lim_{k\to+\infty} f(\varphi(t_k)) = f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0).$$

Поскольку t_k — произвольная последовательность, обладающая свойствами: $t_k \in T, t_k \to t_0$, то функция F непрерывна в точке t_0. $\square$

Одним из важных типов отображений являются вектор-функции скалярного аргумента, которые отображают отрезок $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.40. *Непрерывное отображение $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется кривой (непрерывной кривой, непрерывным контуром) в $\mathbb{R}^n$. Множество точек*

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\,,\, t \in [\alpha, \beta]\}$$

называется линией (непрерывной линией или непрерывным контуром) в $\mathbb{R}^n$ или носителем кривой в $\mathbb{R}^n$. При этом точка $A = \varphi(\alpha)$ называется началом кривой (или линии L), а точка $B = \varphi(\beta)$ — концом кривой (линии).

Определение 2.41. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, A, $B \in G$. Будем говорить, что точки A и B можно соединить непрерывной кривой (или линией) в G, если существует непрерывное отображение $\varphi : [\alpha,\ \beta] \to G$ такое, что $\varphi(\alpha) = A,\ \varphi(\beta) = B$.*

Примером непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$, соединяющей в $\mathbb{R}^n$ точки

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

является линейное отображение $\xi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, координатные функции которого определяются правилами:

$$\xi_1(t) = (1-t)x_1 + ty_1,\ \ldots,\ \xi_n(t) = (1-t)x_n + ty_n,\ \forall\, t \in [0, 1].$$

Пользуясь операциями сложения и умножения на число в $\mathbb{R}^n$, точку $\xi(t)$ из $\mathbb{R}^n$ можем представить в виде $\xi(t) = (1-t)x + ty$, $\forall\, t \in [0, 1]$. Множество точек $\{z = (1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n \mid\ t \in [0, 1]\}$ (или соответствующую кривую) называют прямолинейным отрезком (или сегментом) в $\mathbb{R}^n$, соединяющим точки x и y, и обозначают $[x, y]$.

Определение 2.42. *Множество G из $\mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две точки множества G можно соединить непрерывной кривой в G.*

Определение 2.43. *Открытое линейно связное множество в $\mathbb{R}^n$ называется областью.*

Определение 2.44. *Множество G из $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если любые две точки множества G можно соединить в G прямолинейным отрезком.*

Очевидно, что открытое выпуклое множество является областью (выпуклой областью).

Лемма 2.7. *Шар $S_0(\varepsilon)$ является выпуклой областью в $\mathbb{R}^n$.*

■ Открытость шара доказывается в примере 2.1. Докажем его выпуклость и, одновременно, связность. Зафиксируем произвольные две точки x и y из $S_0(\varepsilon)$. Рассмотрим отрезок L, соединяющий точки $x,\ y$ в $\mathbb{R}^n$:

$$L = \{\xi(t) = (1-t)x + ty : t \in [0,1]\}.$$

Оценим сверху $\rho(\xi(t), 0)$, $\forall\, t \in [0,1]$. В силу свойств расстояния $\rho(x,y)$, учитывая, что $\rho(x,0) < \varepsilon$, $\rho(y,0) < \varepsilon$, получим для всех t из отрезка $[0,1]$:

$$\rho(\xi(t),0) = \rho((1-t)x+ty,0) \le \rho((1-t)x,0) + \rho(ty,0) =$$
$$= (1-t)\rho(x,0) + t\rho(y,0) < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.$$

Последнее означает, что все точки отрезка L лежат в шаре $S_0(\varepsilon)$, а поэтому $S_0(\varepsilon)$ — связное в $\mathbb{R}^n$ множество. □

Теорема 2.21 (Больцано–Коши о промежуточном значении). *Пусть функция многих переменных f непрерывна на линейно связном множестве G пространства $\mathbb{R}^n$ и принимает в двух его точках A и B различные значения $(f(A) \ne f(B))$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(A)$ и $f(B)$, на любой непрерывной линии L, соединяющей точки A и B в G, найдется точка c_L такая, что $f(c_L) = C$.*

■ Пусть L — некоторая непрерывная линия, соединяющая точки A и B в G, а $\varphi : [\alpha,\, \beta] \to L \subset G$ — соответствующая ей непрерывная кривая. Тогда $\varphi \in C([\alpha,\, \beta])$, $\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$. Пусть $F = f \circ \varphi$. По теореме о непрерывности суперпозиции, функция F непрерывна на $[\alpha,\, \beta]$, при этом

$$F(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(A),\ F(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(B).$$

Применяя к F теорему о промежуточном значении функции одной переменной, получим, что для любого числа C, заключенного между $F(\alpha)$ и $F(\beta)$, найдется такая точка $\gamma \in (\alpha,\, \beta)$, что $F(\gamma) = C$. Но $F(\gamma) = f(\varphi(\gamma))$, и потому в точке $\varphi(\gamma) = c_L \in L$ функция f принимает значение C. □

2.7 Принцип сжимающих отображений

Определение 2.45. *Пусть X — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $f : X \to X$, причем существует число $\alpha \in (0,1)$ такое, что для любых*

x и y из X $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x, y)$. Тогда отображение f называется сжимающим.

Теорема 2.22 (принцип сжимающих отображений)**.** *Если f — сжимающее отображение на замкнутом множестве X, то в X существует единственная точка x_0 такая, что $f(x_0) = x_0$. (Точка x_0 называется неподвижной точкой сжимающего отображения f.)*

■ Пусть x_1 — некоторая точка множества X. Положим

$$x_2 = f(x_1),\, x_3 = f(x_2),\, \dots,\, x_{k+1} = f(x_k), \dots\ .$$

Докажем, что последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho(f(x_{k-1}), f(x_k)) \le \alpha\rho(x_{k-1}, x_k).$$

Продолжая использовать определение сжимающего отображения, получим, что $\rho(x_k, x_{k+1}) \le \alpha^{k-1}\rho(x_1, x_2)$. Итак, для всех $k, p \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_k, x_{k+p}) \le \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + \rho(x_{k+p-1}, x_{k+p}) \le$$

$$\le \alpha^{k-1}\rho(x_1, x_2) + \alpha^k\rho(x_1, x_2) + \dots + \alpha^{k+p-2}\rho(x_1, x_2) < \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_2).$$

Поскольку $\alpha \in (0, 1)$, то $\dfrac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_2) \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,:\, \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_2) < \varepsilon,\, \forall\, k > N.$$

Таким образом, для всех $k > N$ и всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\rho(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon$, а это означает фундаментальность последовательности $\{x_k\}$ в $\mathbb{R}^n$. По критерию Коши (теореме 2.7) существует такая точка $a \in \mathbb{R}^n$, что $\lim x_k = a$. В силу замкнутости X, $a \in X$.

Теперь докажем, что $f(a) = a$. Предположим, что $f(a) = b \ne a$. Тогда $0 \le \rho(x_{k+1}, b) = \rho(f(x_k), f(a)) \le \alpha\rho(x_k, a) < \rho(x_k, a)$ и так как $\lim\rho(x_k, a) = 0$, то $\lim\rho(x_{k+1}, b) = 0$, то есть $\lim x_{k+1} = b$ и $a = b$.

Итак, a — неподвижная точка отображения f. Это единственная неподвижная точка отображения f. Поскольку, если бы a и b были неподвижными точками отображения f, то $f(a) = a,\ f(b) = b$ и

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \le \alpha\rho(a, b) < \rho(a, b),$$

что невозможно. □

2.8 Частные производные и дифференциал

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in \operatorname{int} X$, то есть $\exists\, \Pi_a(\delta) \subset X$. Как и при изучении раздельной непрерывности функции многих переменных, на интервалах $(a_j-\delta, a_j+\delta)$, $j=1,\dots,n$, введем функции

$$\zeta_j(t)=f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n).$$

Определение 2.46. *Если функция ζ_j (функция одной переменной) дифференцируема в точке a_j, то ее производную в точке a_j будем называть частной производной функции многих переменных f в точке a по переменной x_j и обозначать одним из символов:*

$$f'_{x_j}(a),\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\quad D_jf(a).$$

Так как $\zeta'_j(a_j)=\lim\limits_{t\to a_j}\dfrac{\zeta_j(t)-\zeta_j(a_j)}{t-a_j}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to a_j}\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a)}{t-a_j}.$$

Если в каждой точке x из открытого множества X функция f имеет частную производную по переменной x_j, то определена функция, действующая по правилу:

$$\forall x\in X\longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Эту функцию многих переменных называют частной производной функции f по переменной x_j на множестве X и обозначают одним из символов: f'_{x_j}, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, D_jf.

Так как частная производная функции f по переменной x_j в точке a является производной соответствующей функции ζ_j одной переменной, то вычисление частной производной производится по тем же правилам, что и вычисление производной функции одной переменной.

Пример 2.1. Найти в точке $M_0(1,0)$ частные производные функции $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

■ Функция $f(x,y)$ определена на множестве $G=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 1\big\}$. Дифференцируя функцию $\zeta(x)=f(x,0)=\operatorname{arctg}x$ по переменной x, получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\zeta'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\zeta'(1)=\frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)=\left(\operatorname{arctg}\frac{1+y}{1-y}\right)'=\frac{(1-y)^2}{(1-y)^2+(1+y)^2}\cdot\frac{(1-y)+(1+y)}{(1-y)^2}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1.$$

Заметим, что при вычислении частных производных функции многих переменных (как и при вычислении производных функций одной переменной), использовать формулы для производных элементарных функций и правила их дифференцирования можно только в тех точках, в которых значение функции в самой точке и в точках из некоторой ее окрестности заданы одним и тем же аналитическим выражением. В противном случае, приходится находить производные другим способом, например, ее непосредственным вычислением через предел. Вычисление частных производных функции многих переменных в такой «особой» точке $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ иногда упрощается тем, что точка $x_i^{(0)}$ не будет «особой» для соответствующей функции одной переменной

$$\zeta_i(t) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Пример 2.2. Найти в точке $M_0(1,0,0)$ частные производные функции

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & \text{если } \ y^2+z^2 \neq 0; \\ x^2, & \text{если } \ y^2+z^2 = 0 \end{cases}$$

■ Так как $\zeta_1(x) = f(x,0,0) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = \zeta_1'(1) = 2$. Так как $\zeta_2(y) = f(1,y,0) = 1$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = 0$. □

Рассмотрим связь между существованием у функции многих переменных частных производных в точке и непрерывностью функции в этой точке.

Пример 2.3. Найти частные производные функции $f(x,y) = |x|$ в тех точках $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, в которых они существуют.

■ Найдем сначала $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ в точке $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Так как в каждой точке x из $\mathbb{R}$ $\zeta_1(x) = f(x,y_0) = |x|$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \zeta_1'(x_0) = \operatorname{sgn} x_0$ для $x_0 \neq 0$. Так как функция $\zeta_1(x)$ не имеет производной в нуле, то $\nexists\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$, $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$. Соответственно, $\zeta_2(y) = f(x_0,y) = |x_0|$, $\forall y \in \mathbb{R}$, и потому

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \zeta_2'(y_0) = 0, \ \forall\, (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2. \ \square$$

Учитывая, что функция $f(x,y) = |x|$ является непрерывной в $\mathbb{R}^2$, делаем следующий вывод: непрерывность функции многих переменных в точке не влечет существования у нее в этой точке частных производных.

Теорема 2.23. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. Если функция f имеет в точке a частную производную по переменной x_j, то f непрерывна по переменной x_j в точке a.*

■ Так как f имеет в точке a частную производную по переменной x_j, то по определению 2.46 соответствующая функция одной переменной

$$\zeta_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

дифференцируема в точке a_j. Следовательно, функция ζ_j непрерывна в точке a_j, а поэтому ф.м.п. f непрерывна в точке a по переменной x_j. □

Следствие. *Если функция многих переменных имеет в точке частные производные по всем переменным, то она раздельно непрерывна в этой точке.*

Определение 2.47. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если существуют такие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что для всех точек $(a + \Delta x)$ из X, $\Delta x \neq 0$, справедливо равенство:*

$$\Delta f_a(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) =$$
$$= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + o(\|\Delta x\|),\ \Delta x \to 0.$$

При этом функцию $A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n$ называют дифференциалом функции f в точке a, соответствующим приращению независимых переменных $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, и обозначают одним из следующих символов:

$$df_a(\Delta x), \quad (df)_a(\Delta x), \quad Df_a(\Delta x).$$

Определение 2.47 при $n = 1$ является определением дифференцируемой в точке функции одной переменной, так как в этом случае $\|\Delta x\| = |\Delta x|$. Как и в случае $n = 1$, дифференциал функции многих переменных в точке представляет собой линейную относительно переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ функцию, отличающуюся от приращения $\Delta f_a(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$ на величину $o(\|\Delta x\|)$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом независимой переменной x_j является ее приращение Δx_j, то есть $dx_j = \Delta x_j$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому дифференциал дифференцируемой в точке a функции f можно представить в виде

$$df_a(dx) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n = \sum_{j=1}^{n} A_j dx_j.$$

В приложениях часто полезно представление функции $o(\|\Delta x\|)$ в виде

$$o(\|\Delta x\|) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\Delta x)\Delta x_j, \tag{2.4}$$

где $\alpha_j(\Delta x) = \alpha_j(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Докажем справедливость представления 2.4. При $\Delta x \neq 0$ имеем:

$$o(\|\Delta x\|) = \frac{o(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}\frac{\|\Delta x\|^2}{\|\Delta x\|} = \frac{o(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\Delta x_j)^2}{\|\Delta x\|} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\Delta x)\Delta x_j,$$

где

$$\alpha_j(\Delta x) = \frac{o(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}\frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|},\ \forall\, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $\left|\dfrac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|}\right| \leq 1$, $\forall\, \Delta x \neq 0$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\alpha_j(\Delta x) = \frac{o(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}\frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|} \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

С другой стороны, любая функция вида $\alpha(\Delta x) = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(\Delta x)\Delta x_j$, где $\alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$, является функцией класса $o(\|\Delta x\|)$, поскольку

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\Delta x)\frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|} = \sum_{j=1}^{n}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_j(\Delta x)\frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|} = 0.$$

Таким образом, пользуясь представлением 2.4, приходим к еще одному определению дифференцируемой в точке функции многих переменных, эквивалентному определению 2.47.

Определение 2.48. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если существуют такие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что для всех точек $(a + \Delta x)$ из X, справедливо равенство:*

$$\Delta f_a(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n}A_j\Delta x_j + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\Delta x)\Delta x_j,$$

где $\alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\alpha_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2.24 (необходимое условие дифференцируемости в точке)**.** *Если функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} X$, то функция f имеет в точке a частные производные по всем переменным, причем $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = A_j$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$.*

■ Так как функция f дифференцируема в точке a, то по определению 2.48 для всех $a + \Delta x \in X$

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n}A_j\Delta x_j + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\Delta x)\,\Delta x_j,$$

где $\alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть приращение Δx таково, что $\Delta x_k = 0$, если $k \neq j$, и $\Delta x_j \neq 0$ для некоторого $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \Delta x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a) = A_j \Delta x_j + \alpha_j(\Delta x)\Delta x_j,$$

причем $\alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x_j \to 0$. Отсюда следует, что

$$\exists \lim_{\Delta x_j \to 0} (A_j + \alpha_j(\Delta x)) = A_j, \text{ то есть } \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = A_j, \ \forall\, j = 1, \ldots, n. \ \square$$

Следствие. *Если $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$ и f — дифференцируемая функция в точке a, то*

$$\Delta f_a(\Delta x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\Delta x_j + o(\|\Delta x\|), \ \Delta x \to 0,$$

$$df_a(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j, \ dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n).$$

Обратное теореме 2.24 утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 2.4. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } \ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $(0, 0)$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, но не является дифференцируемой в этой точке.

■ Функция f определена на $\mathbb{R}^2$. Найдем частные производные функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Так как $\zeta_1(x) = f(x, 0) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, то $\zeta_1'(0) = 0$ и потому $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Докажем, что функция f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Предположим противное. По определению дифференцируемой в точке функции, с учетом теоремы 2.24,

$$\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right), \ \Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0.$$

Но при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \neq 0$

$$\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Значит, при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, должно выполняться равенство

$$\frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

что невозможно, так как, полагая, например, $\Delta x = \Delta y \neq 0$, получим, что

$$\frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\Delta x}{2} \neq o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, функция $f(x, y)$ не дифференцируема в точке $(0, 0)$. $\square$

Как и в случае функции одной переменной, из определения дифференцируемости функции многих переменных в точке следует её непрерывность в этой точке.

Теорема 2.25 (необходимое условие дифференцируемости). *Если $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$ и f — дифференцируемая функция в точке a, то f непрерывна в точке a.*

Предлагаем это утверждение доказать самостоятельно.

Обратное теореме 2.25 утверждение, вообще говоря неверно.

Пример 2.5. Доказать, что функция $f(x,\, y,\, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ непрерывна в точке $(0, 0, 0)$, но не дифференцируема в этой точке.

$\blacksquare$ Функция непрерывна в точке $(0, 0, 0)$ так как

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0 = f(0, 0, 0).$$

Покажем, что функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0, 0)$. Рассмотрим соответствующую функцию одной переменной

$$\zeta_1(x) = f(x, 0, 0) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Она не имеет производной в точке $x = 0$, следовательно, не существует частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)$ и потому функция $f(x, y, z)$ не дифференцируема в точке $(0, 0, 0)$. Аналогично показывается, что не существуют $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$, следовательно, $\square$

Обратите внимание на следующие моменты.

1) Теоремы 2.24 и 2.25 дают необходимые, но не достаточные, условия дифференцируемости функции многих переменных в точке. Подтверждением этого являются функции, рассмотренные в примерах 2.4 и 2.5.

2) О дифференциале функции многих переменных f в точке a можно говорить только тогда, когда функция f дифференцируема в этой точке. Составить же линейную относительно Δx_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, функцию $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \Delta x_j$ можно и тогда, когда функция f не является дифференцируемой в точке a, а лишь имеет в ней частные производные по

всем переменным. Но в этом случае $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\Delta x_j$ не является дифференциалом функции f в точке a.

3) Если функция f дифференцируема в точке a, то

$$\Delta f_a(\Delta x) = df_a(\Delta x) + o(\|\Delta x\|),\ \Delta x \to 0.$$

В этой формуле функция $\Delta f_a(\Delta x)$ определена для тех Δx, для которых точка $a + \Delta x$ принадлежит области определения функции f, в то время как линейная относительно Δx_j, $j = 1, \ldots, n$, функция $df_a(\Delta x)$ определена на $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.6. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Показать, что линейная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

■ Так как для любого $\Delta x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots + a_n\Delta x_n,$$

то

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\Delta x_k + o(\|\Delta x\|), \|\Delta x\| \to 0.$$

Следовательно, линейная функция f дифференцируема в любой точке x_0 из $\mathbb{R}^n$, причем её дифференциал совпадает с самой функцией, в силу определения 2.47. □

Пример 2.7. Доказать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|\ xy\ |}$ не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

■ Исходя из определения частных производных, имеем:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|}}{\Delta x} = 0.$$

Функция f симметрична относительно переменных, потому $f'_y(0,0) = 0$. Если функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$, то при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

то есть, $\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Но,

$$\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

поэтому в случае дифференцируемости функции f в точке $(0, 0)$ должно выполняться равенство

$$\sqrt{|\Delta x\Delta y|} = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),\ \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,$$

что невозможно, так как $\sqrt{|\Delta x \Delta x|} = |\Delta x| \neq o(|\Delta x|)$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому функция f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. $\square$

Приведем достаточные условия дифференцируемости функции многих переменных во внутренней точке ее области определения.

Теорема 2.26. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$ и f имеет в некоторой окрестности точки a частные производные по всем переменным. Если функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, непрерывны в точке a, то функция f дифференцируема в точке a.*

$\blacksquare$ Ради простоты, доказательство проведем для случая $n = 2$. Итак, пусть $f : X \subset \mathbb{R}^2_x \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} X$ и функция f имеет конечные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ в $\Pi_a(\delta) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset X$, которые непрерывны в точке a. Зафиксируем в $\Pi_a(\delta)$, например, точку вида $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)$, $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 \neq 0$, и рассмотрим разность

$$\Delta f_a(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2) + f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2).$$

Так как функция f имеет частную производную по x_1 в точках

$$(x_1, a_2 + \Delta x_2),\ \forall\, x_1 \in (a_1 - \delta, a_1 + \delta),$$

то функция $\zeta_1(t) = f(t, a_2 + \Delta x_2)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках a_1 и $a_1 + \Delta x_1$. При этом $\zeta_1'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t, a_2 + \Delta x_2)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists\ \theta_1 \in (0,1)$:

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2) = \zeta_1(a_1 + \Delta x_1) - \zeta_1(a_1) =$$

$$= \zeta_1'(a_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)\Delta x_1.$$

Аналогично, вводя в рассмотрение функцию $\zeta_2(t) = f(a_1, t)$, на интервале $(a_2 - \delta, a_2 + \delta)$ найдем точку $\theta_2 \in (0,1)$:

$$f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2) = \zeta_2(a_2 + \Delta x_2) - \zeta_2(a_2) =$$

$$= \zeta_2'(a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2.$$

Следовательно, для любой точки $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)$ из $\Pi_a(\delta)$ найдутся точки $\theta_1 \in (0,1)$ и $\theta_2 \in (0,1)$ такие, что

$$\Delta f_a(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2.$$

Поскольку функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ непрерывны в точке a и при $\Delta x \to 0$

$$(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) \longrightarrow (a_1, a_2), \quad (a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2) \longrightarrow (a_1, a_2),$$

то при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2), \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).$$

Последнее означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x),$$

где $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $j = 1, 2$. Следовательно,

$$\Delta f_a(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2,$$

и потому функция f дифференцируема в точке a. При $\Delta x_1 = 0$ или $\Delta x_2 = 0$, но $(\Delta x_1, \Delta x_2) \neq (0, 0)$, получаем аналогичное равенство. $\square$

Замечание. Доказательство в случае $n > 2$ проводится аналогично.

Следует отметить, что доказанные достаточные условия дифференцируемости функции многих переменных в точке не являются необходимыми. Дифференцируемая в точке функция может иметь в некоторой окрестности этой точки частные производные по всем переменным, которые терпят разрыв в самой точке.

Пример 2.8. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{если } \; x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \; x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0, 0)$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, которые разрывны в точке $(0, 0)$ и не ограничены в любой ее окрестности, а функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

■ Функция $f(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^2$. Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ находим, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

В точке $(0,0)$ частные производные находим по определению:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\,\sin\frac{1}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Поэтому $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. В силу симметрии функции относительно переменных, получаем, что и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Покажем, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ разрывны в точке $(0,0)$ и не ограничены в любой ее окрестности. Выберем последовательность точек (x_n,y_n) такую, что

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\ n\geq 1.$$

Тогда $\lim(x_n,y_n)=(0,0)$ и

$$\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = \sqrt{2n\pi},\quad \cos\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 1,\quad \sin\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 0,\ n\geq 1.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(-2\sqrt{n\pi}) = -\infty$. Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$ и не ограничена в любой ее окрестности. Аналогичные выводы справедливы и относительно $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, а приращение $\Delta f_{(0,0)}(\Delta x,\Delta y) =$

$$= (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \rho^2\sin\frac{1}{\rho^2} = \rho\left(\rho\sin\frac{1}{\rho^2}\right) = o(\rho)$$

при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$. $\square$

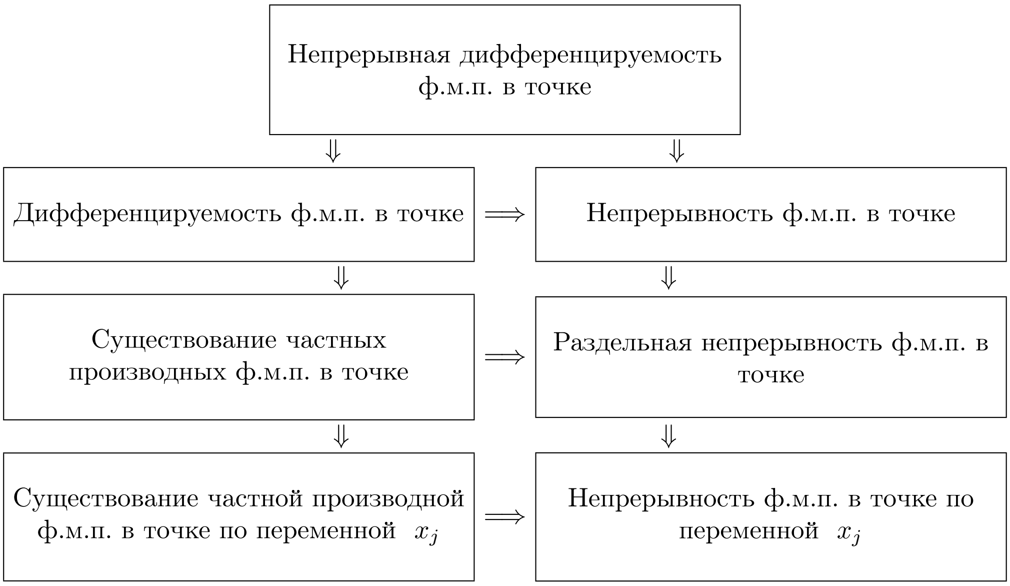
Определение 2.49. *Пусть $f : X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in\operatorname{int}X$. Функция f называется непрерывно дифференцируемой в точке a, если существует такая окрестность точки a, что в ней функция f имеет частные производные по всем переменным, которые непрерывны в точке a. Если X — открытое множество и функция f непрерывно дифференцируема в любой точке x из X, то функции многих переменных f называется непрерывно дифференцируемой на множестве X.*

Примером непрерывно дифференцируемой функции многих переменных является функция $f(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta$

С учетом последнего определения теорема 2.26 примет такой вид

Теорема 2.27. *Пусть* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} X$. *Если функция* f *непрерывно дифференцируема в точке* a, *то она дифференцируема в точке* a.

Связи между изученными свойствами функции многих переменных можно наглядно представить следующей схемой, в которой, как показывают приведенные ранее примеры, ни одну из стрелок нельзя обратить.



Дадим, наконец, геометрическую интерпретацию частной производной и условию дифференцируемости в точке функции двух переменных. Выясним, например, смысл $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой окрестности $\Pi_{(x_0,y_0)}(\delta)$ точки (x_0, y_0). По определению, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \zeta_1'(x_0)$, где $\zeta_1(x) = f(x, y_0)$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Следовательно, нас интересует функция f на множестве точек (x, y_0), где $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Это значит, что нас интересует линия пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$, когда $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Уравнение этой линии записывается, как известно из аналитической геометрии, следующим образом:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0. \end{cases}$$

Исключим в системе переменную y. В пространстве $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ функция $z = f(x, y_0)$ является уравнением цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси OY, а направляющая лежит в плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,z)}$ и имеет уравнение $z = f(x, y_0)$ или $z = \zeta_1(x)$. Так как $\zeta_1'(x_0)$ — тангенс угла, образуемого с осью OX касательной, проведенной в точке $(x_0, \zeta_1(x_0))$ к линии $z = \zeta_1(x)$ в $\mathbb{R}^2_{(x,z)}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ есть тангенс угла, образуемого с осью OX касательной, проведенной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Для выяснения геометрического смысла условия дифференцируемости функции двух переменных в точке, введем понятие касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Определение 2.50. *Невертикальная плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, аппликата которой отличается от значения функции f в точке (x, y) на бесконечно малую более высокого порядка малости по сравнению с $\rho((x, y), (x_0, y_0))$ при $\rho \to 0$ называется невертикальной касательной плоскостью к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.*

Известно, что уравнение невертикальной плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет вид

$$z - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

В силу определения 2.50 такая плоскость является касательной тогда и только тогда, когда

$$f(x, y) - (f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)) = o(\rho) \text{ при } \rho \to 0,$$

или

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho) \text{ при } \rho \to 0.$$

Последнее равенство означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0). Следовательно, график функции f имеет в точке M_0 невертикальную касательную плоскость тогда и только тогда, когда функция f является дифференцируемой в точке (x_0, y_0). Более того, в силу необходимых условий дифференцируемости, коэффициенты A и B равны, соответственно, значениям частных производных функции f по переменным x и y в точке (x_0, y_0). Поэтому, в случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0), уравнение касательной плоскости может быть записано в виде

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{2.5}$$

Нами доказана

Теорема 2.28. *График функции $z = f(x, y)$ имеет невертикальную касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0). При этом уравнение касательной плоскости имеет вид (2.5).*

Следствие. *Если функция* $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} X$, *то ее график имеет в точке* $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *вектор нормали* $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

2.9 Дифференцируемость отображения и суперпозиции

Пусть f — отображение из множества $X \subset \mathbb{R}^n_x$ в $\mathbb{R}^p$, то есть $f = (f_1, \ldots, f_p)$, где каждая координатная функция f_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и действует в $\mathbb{R}$.

Определение 2.51. *Отображение* f *называют дифференцируемым (непрерывно дифференцируемым) в точке* $a \in \operatorname{int} X$, *если для каждого* $j = 1, 2, \ldots, p$, *функция многих переменных* f_j *дифференцируема (непрерывно дифференцируема) в точке* a. *При этом матрицу*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

называют матрицей Якоби отображения f *в точке* a.

Матрицу Якоби отображения f в точке a обозначают одним из следующих символов: $\mathcal{J}_f(a)$, $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right)_{j=1,k=1}^{p,n}$, $\left\|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right\|_{j=1,k=1}^{p,n}$, $f'(a)$. В связи с последним обозначением матрицу Якоби называют также матрицей–производной (и даже просто производной) отображения f в точке a. Обозначение $f'(a)$ очень компактно, удобно и при формулировке теорем сохраняет обозначения, принятые ранее для функции одной переменной.

Если определение 2.51 применить к функции f одной переменной, то ее матрица Якоби — одноэлементная матрица $\left(\dfrac{df}{dx}(a)\right)$, если же f — функция многих переменных, то ее матрица Якоби — матрица–строка вида

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)_{k=1}^{n}.$$

Далее, при работе с матрицами Якоби следует помнить, что $f'(a)$ — не число, а матрица, и все производимые преобразования — операции с матрицами!

Теорема 2.29 (о дифференцируемости суперпозиции). *Пусть* $\varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} T$, $b = \varphi(a) \in \operatorname{int} X$. *Если отображение* φ *дифференцируемо в точке* a, *а функция многих переменных* f *дифференцируема в точке* b, *то функция* $F = f \circ \varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* a *и для любого* $k = 1, 2, \ldots, m$,

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(a)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(a).$$

■ Ради простоты изложения рассмотрим случай $n = m = 2$. Сначала докажем дифференцируемость функции F в точке $a \in \operatorname{int} T$, то есть покажем существование таких чисел A_1, A_2, что

$$\Delta F_a(\Delta t) = F(a + \Delta t) - F(a) = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + o(\|\Delta t\|),\ \Delta t \to 0,$$

когда точка $\Delta t = (\Delta t_1, \Delta t_2)$ выбрана так, что $a + \Delta t \in \operatorname{int} T$. Подсчитаем $\Delta F_a(\Delta t)$, учитывая, что $F = f \circ \varphi$.

$$\Delta F_a(\Delta t) = F(a + \Delta t) - F(a) = (f \circ \varphi)(a + \Delta t) - (f \circ \varphi)(a) =$$
$$= f(\varphi_1(a + \Delta t), \varphi_2(a + \Delta t)) - f(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) =$$
$$= f(b_1 + (\Delta\varphi_1)_a(\Delta t), b_2 + (\Delta\varphi_2)_a(\Delta t)) - f(b_1, b_2) = \Delta f_b(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке b, для любого приращения $\Delta x \neq 0$ такого, что $b + \Delta x \in \operatorname{int} X$,

$$\Delta f_b(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\, \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\, \Delta x_2 + \alpha_1(\Delta x)\, \Delta x_1 + \alpha_2(\Delta x)\, \Delta x_2,$$

где $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Положим $\alpha_j(0) = 0$, $j = 1, 2$, то есть определим α_j как непрерывные функции в точке $(0, 0)$.

В силу условий теоремы, $\varphi(a + \Delta t) = b + \Delta\varphi \in X$, поэтому и для приращения $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2)$, имеет место равенство

$$\Delta f_b(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\, \Delta\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\, \Delta\varphi_2 + \alpha_1(\Delta\varphi)\, \Delta\varphi_1 + \alpha_2(\Delta\varphi)\, \Delta\varphi_2.$$

Но тогда, поскольку $\Delta F_a(\Delta t) = \Delta f_b(\Delta\varphi)$,

$$\Delta F_a(\Delta t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\Delta\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\Delta\varphi_2 + \alpha_1(\Delta\varphi)\Delta\varphi_1 + \alpha_2(\Delta\varphi)\Delta\varphi_2.$$

Так как каждая функция φ_j дифференцируема в точке a, то для $j = 1, 2$,

$$\Delta\varphi_j = (\Delta\varphi_j)_a(\Delta t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(a)\Delta t_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_2}(a)\Delta t_2 + o(\|\Delta t\|),\ \Delta t \to 0. \quad (2.6)$$

Следовательно, при $\Delta t \to 0$

$$\Delta F_a(\Delta t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(a)\Delta t_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}(a)\Delta t_2 + o(\|\Delta t\|) \right) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(a)\Delta t_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(a)\Delta t_2+o(\|\Delta t\|)\right)+\alpha_1\Delta\varphi_1+\alpha_2\Delta\varphi_2=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(a)\right)\Delta t_1+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(a)\right)\Delta t_2+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\,o(\|\Delta t\|)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\,o(\|\Delta t\|)\right)+\alpha_1(\Delta\varphi)\Delta\varphi_1+\alpha_2(\Delta\varphi)\Delta\varphi_2.$$

Покажем, что при $\Delta t\to 0$ Заметим, что по свойствам бесконечно малых в точке функций,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\,o(\|\Delta t\|)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\,o(\|\Delta t\|)=o(\|\Delta t\|)\text{ при }\Delta t\to 0.$$

Так как $|\Delta t_j|\le\|\Delta t\|, j=1,2$, то $|\Delta t_j|/\|\Delta t\|\le 1, j=1,2$, и потому, с учетом (2.6),

$$\frac{|\alpha_j(\Delta\varphi)\Delta\varphi_j|}{\|\Delta t\|}\le|\alpha_j(\Delta\varphi)|\left(\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(a)\frac{\Delta t_1}{\|\Delta t\|}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}(a)\frac{\Delta t_2}{\|\Delta t\|}\right|+\frac{o_j(\|\Delta t\|)}{\|\Delta t\|}\right)$$

$$\le|\alpha_j(\Delta\varphi)|\left(\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(a)\right|+\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}(a)\right|+\frac{o_j(\|\Delta t\|)}{\|\Delta t\|}\right).$$

Функции φ_j дифференцируемы в точке a, значит непрерывны в ней, и потому $(\Delta\varphi_j)_a(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Учитывая непрерывность функций α_j в точке $(0,0)$ получим, что $\alpha_j(\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2)\to 0$ при $\Delta t\to 0$, $j=1,2$. Поэтому из последнего неравенства следует, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\alpha_j(\Delta\varphi)\Delta\varphi_j|}{\|\Delta t\|}=0,\ j=1,2,$$

то есть $\alpha_j(\Delta\varphi)\Delta\varphi_j=o(\|\Delta t\|)$ при $\Delta t\to 0$. Следовательно, при $\Delta t\to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\,o(\|\Delta t\|)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\,o(\|\Delta t\|)+\alpha_1(\Delta\varphi)\Delta\varphi_1+\alpha_2(\Delta\varphi)\Delta\varphi_2=o(\|\Delta t\|)\,.$$

Возвращаясь к $\Delta F_a(\Delta t)$ заключаем, что для любого $t=a+\Delta t\in T$

$$\Delta F_a(\Delta t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(a)\right)\Delta t_1+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(a)\right)\Delta t_2+o(\|\Delta t\|),\ \Delta t\to 0,$$

то есть функция F дифференцируема в точке a.

Учитывая, что $b=\varphi(a)=(\varphi_1(a),\varphi_2(a))$, из теоремы 2.24 следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(a))\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(a))\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(a),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(a))\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(a))\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}(a). \ \square$$

Следствие 1. В условиях теоремы 2.29 $F'(a) = f'(b)\,\varphi'(a)$.

Приведем еще три следствия, часто полезные в приложениях.

Следствие 2. Пусть $\varphi : T \subset \mathbb{R}^1_t \to X \subset \mathbb{R}^n,\ f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R},$ $a \in \operatorname{int} T,\ b = \varphi(a) \in \operatorname{int} X$. Если отображение φ дифференцируемо в точке a, а функция f дифференцируема в точке b, то функция одной переменной $F = f \circ \varphi : T \subset \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, при этом $F'(a) = f'(b)\varphi'(a)$, то есть

$$\frac{dF}{dt}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)\,\frac{d\varphi_j}{dt}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(a))\,\frac{d\varphi_j}{dt}(a).$$

Следствие 3. Пусть $\varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to X \subset \mathbb{R},\ f : X \subset \mathbb{R}_x \to \mathbb{R},$ $a \in \operatorname{int} T,\ b = \varphi(a) \in \operatorname{int} X$. Если функция многих переменных φ дифференцируема в точке a, а функция одной переменной f дифференцируема в точке b, то функция многих переменных $F = f \circ \varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, при этом $F'(a) = f'(b)\varphi'(a)$, то есть

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(a) = \frac{df}{dx}(b)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(a) = \frac{df}{dx}(\varphi(a))\,\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(a),\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Непосредственно из полученных формул получаем

Следствие 4. Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве X, а отображение $\varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to X$ непрерывно дифференцируемо на открытом множестве T. Тогда функция $F = f \circ \varphi$ непрерывно дифференцируема на T.

■ По теореме 2.26 функция f дифференцируема на X, а отображение φ на T, поэтому по теореме 2.29 сложная функция F дифференцируема на множестве T и для любого $t \in T$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

то есть на множестве T $\dfrac{\partial F}{\partial t_k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi\right) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда, учитывая теорему 2.20 о непрерывности сложной функции и теорему 2.17 об арифметических операциях с непрерывными функциями, получаем непрерывность на T функций $\dfrac{\partial F}{\partial t_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, что означает непрерывную дифференцируемость функции F на T. $\square$

Замечание. Формулу вычисления частных производных функции $F = f \circ \varphi$ удобно выписывать из равенства $F'(a) = f'(b)\,\varphi'(a)$, записанного в матричной форме:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}(a)\ \frac{\partial F}{\partial t_2}(a)\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial t_m}(a)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(b)\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}(a) & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m}(a) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}(a) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}(a) & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_m}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(a) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}(a) & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m}(a) \end{pmatrix}$$

Пример 2.1. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ и $f(x, x^3) = x^4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x^3) = x^2 \sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x^3)$.

■ Рассмотрим отображение $\varphi(x) = (x, x^3)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и функцию одной переменной $g(x) = (f \circ \varphi)(x) = f(x, x^3), x \in \mathbb{R}$. Координатные функции отображения φ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$, поэтому отображение φ непрерывно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, а функция одной переменной g непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём

$$g'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi\right)(x) + 3x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi\right)(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

По условию $g(x) = x^4$, поэтому $g'(x) = 4x^3, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Учитывая, что $f'_x(x, x^3) = x^2 \sin x$, получаем равенство

$$x^2 \sin x + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3) = 4x^3.$$

Отсюда, при $x \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x^3) = \dfrac{4x - \sin x}{3}$. Так как $f'_y(x, x^3)$ непрерывна в точке $x = 0$, то последнее равенство имеет место для всех $x \in \mathbb{R}$. □

2.10 Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int} X$ и функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$df_{x_0}(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) dx_j. \tag{2.7}$$

В этом случае $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные, $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, где $dx_k = \Delta x_k$ — произвольные приращения, $k = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь x — отображение, $x : T \subset \mathbb{R}^m_t \to X$, которое дифференцируемо в точке $t_0 \in \operatorname{int} T$, причем $x_0 = x(t_0)$. По теореме 2.29 сложная функция $f \circ x$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d(f \circ x)_{t_0}(dt) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial(f \circ x)}{\partial t_k}(t_0)\, dt_k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0))\, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}(t_0)\, dt_k =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0)) \sum_{k=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial t_k}(t_0)\, dt_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, (dx_i)_{t_0}(dt). \tag{2.8}$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (2.7), замечаем формальное их сходство. То есть имеет место, как и в случае функции одной переменной, свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Однако в этих формулах есть и существенное различие: если в формуле (2.7) $dx_k = \Delta x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то в формуле (2.8) $(dx_k)_{t_0}(dt)$ отличается от $(\Delta x_k)_{t_0}(dt) = x_k(t_0 + \Delta t) - x_k(t_0)$ при $\Delta t \to 0$ на $o(\|\Delta t\|)$.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет легко установить следующие правила дифференцирования функций многих переменных.

Теорема 2.30. *Пусть T — открытое подмножество в $\mathbb{R}^m_t$ и функции $\varphi, \xi : T \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на T. Тогда*

1) *функция $c\varphi$ дифференцируема на T и $d(c\varphi) = c d\varphi$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$,*

2) *функции $\varphi \pm \xi$ дифференцируемы на T и $d(\varphi \pm \xi) = d\varphi \pm d\xi$,*

3) *функция $\varphi \cdot \xi$ дифференцируема на T и $d(\varphi \cdot \xi) = \xi\, d\varphi + \varphi\, d\xi$,*

4) *если $\xi(t) \neq 0$, $\forall\, t \in T$, то функция $\dfrac{\varphi}{\xi}$ дифференцируема на T и*

$$d\left(\frac{\varphi}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi^2}\,(\xi\, d\varphi - \varphi\, d\xi).$$

■ Докажем только правило 4), а доказательство остальных предлагаем читателю в качестве упражнения. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$, которая, очевидно, дифференцируема на множестве

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$$

и

$$df(dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 = \frac{1}{x_2^2}\,(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2).$$

В силу свойства инвариантности формы первого дифференциала выражение вида $\dfrac{1}{x_2^2}\,(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2)$ является дифференциалом функции $\dfrac{x_1}{x_2}$ и в том случае, когда x_1 и x_2 — дифференцируемые функции некоторых переменных. Например, если $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \xi(t)$, то для любого $t \in T$

$$d\left(\frac{\varphi}{\xi}\right)_t (dt) = \frac{1}{\xi^2(t)} \left(\xi(t) \cdot d\varphi_t(dt) - \varphi(t) \cdot d\xi_t(dt)\right). \ \square$$

Пример 2.1. Найти дифференциал функции $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{y}$.

■ Пусть $\varphi(u) = \operatorname{arctg} u$, а $\xi(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$, тогда $f = \varphi \circ \xi$. Функция φ дифференцируема на $\mathbb{R}$, а ξ определена и дифференцируема на множестве $G = \mathbb{R}^2_{(x,y)} \setminus \{(x, 0),\, x \in \mathbb{R}\}$. Согласно теореме 2.29, функция f дифференцируема на G. Так как

$$d\varphi = \frac{1}{1 + u^2}\, du,\ d\xi = \frac{1}{y^2}\, (2xy\, dx - x^2 dy),$$

то, в силу свойства инвариантности формы 1-го дифференциала, для всех (x, y) из G

$$df = \frac{1}{1 + (x^2/y)^2}\, \frac{1}{y^2}\, (2xy\, dx - x^2 dy) = \frac{2xy\, dx - x^2 dy}{y^2 + x^4}\,.\ \square$$

2.11 Производная по направлению, градиент

Будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ введена декартова система координат с базовыми векторами $\vec{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_{x_0}(\delta)$ точки $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и $\vec{\ell}$ — некоторый единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\vec{\ell} = \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j\, \vec{e}_j = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n),$$

где α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ — углы, которые образует вектор $\vec{\ell}$ с базовыми векторами $\vec{e_j}$. Множество $P_{\vec{\ell}} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + t\vec{\ell},\, t \in [0, +\infty)\}$ — это луч, проходящий через точку x_0 в направлении $\vec{\ell}$. Поскольку функция f определена в δ-окрестности точки x_0, то можно считать, что она определена на δ-интервале $\{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + t\vec{\ell},\, t \in [0, \delta)\}$ луча $P_{\vec{\ell}}$. Очевидно, что функция f, рассмотренная на указанном δ-интервале, определяет на $[0, \delta)$ функцию φ одной переменной по закону:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\,\vec{\ell}),\ \forall\, t \in [0, \delta).$$

Определение 2.52. *Если функция φ дифференцируема в точке $t = 0$ (то есть существует конечная производная функции φ в точке $t = 0$),* *то* $\varphi'(0)$ *называют производной функции* f *в точке* x_0 *по направлению, определяемому единичным вектором* $\vec{\ell}$*, обозначают одним из следующих символов*

$$f'_{\vec{\ell}}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(x_0), \quad \partial_{\vec{\ell}} f(x_0), \quad D_{\vec{\ell}} f(x_0),$$

и говорят, что f *дифференцируема в точке* x_0 *по направлению* $\vec{\ell}$*.*

Следует заметить, что $\varphi'(0)$ является правосторонней производной функции φ в точке 0. Из определения 2.52 следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\,\vec{\ell}) - f(x_0)}{t},$$

если последний предел существует и конечен. Поскольку для $t \in [0, \delta)$

$$f(x_0 + t\vec{e_j}) = f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0) = \zeta_j(t),\ j = 1, \ldots, n,$$

то частная производная функции f в точке x_0 по переменной x_j, в случае ее существования, есть производная функции f в точке x_0 по направлению j–ого базового вектора.

Выясним связь между дифференцируемостью функции в точке x_0 и её дифференцируемостью в точке x_0 по любому направлению $\vec{\ell}$ и получим формулу вычисления производной по направлению $\vec{\ell}$ через частные производные функции f в точке x_0.

Теорема 2.31. *Если функция* f *дифференцируема в точке* x_0*, то она дифференцируема в точке* x_0 *по любому направлению* $\vec{\ell}$*, причем*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\, \cos\alpha_k. \tag{2.9}$$

■ Пусть $\vec{\ell} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — произвольный фиксированный единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Введем отображение

$$\psi(t) = (x_1^0 + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^0 + t\cos\alpha_n),\ t \in [0, \delta),$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(\psi(t)) = f(x_0 + t\vec{\ell}) = f(x_1^0 + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^0 + t\cos\alpha_n).$$

По теореме 2.29 о дифференцируемости сложной функции, функция φ дифференцируема в точке $t = 0$ и

$$\varphi'(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\, \frac{d\psi_k}{dt}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\, \cos\alpha_k.$$

Таким образом, функция f дифференцируема в точке x_0 по любому направлению $\vec{\ell}$ и производная функции f в точке x_0 по направлению $\vec{\ell}$ вычисляется по формуле (2.9). $\square$

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть дифференцируемость функции f в точке x_0 по любому направлению не влечет её дифференцируемости в точке x_0. Для подтверждения сказанного рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0, & \text{если} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

недифференцируема в точке $(0,0)$, но дифференцируема в ней по любому направлению.

$\blacksquare$ Функция f не является непрерывной в точке $(0,0)$ так как

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{a}{n^2}\right)=\frac{a}{1+a^2},\ \forall\, a\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{N}),$$

и потому не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Покажем, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$ по направлению $\vec{\ell}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ для всех $\alpha\in[0,2\pi)$. Действительно,

$$\varphi(t)=f(t\vec{\ell})=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\begin{cases}\dfrac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Заметим, что $\varphi(t)\equiv 0$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{2}m$, $m=0,1,2,3$. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}}(0,0)=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\ \text{если}\ \alpha\neq\pi\, m,\ m=0,1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}}(0,0)=0,\ \text{если}\ \alpha=\pi\, m,\ m=0,1.\ \square$$

Определение 2.53. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Вектор с координатами* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$ *называется градиентом функции f в точке x_0 и обозначается* $\operatorname{grad} f\,\Big|_{x_0}$ *или* $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Итак, $\operatorname{grad} f(x_0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\vec{e_j}$. С помощью градиента формула (2.9) вычисления производной функции f в точке x_0 по направлению единичного вектора $\vec{\ell}$ записывается в виде скалярного произведения векторов

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(x_0) = < \operatorname{grad} f(x_0), \vec{\ell} > = \| \operatorname{grad} f(x_0) \| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{\ell}$ и $\operatorname{grad} f(x_0)$. Из формулы видно, что

1) если $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$, то производная функции f в точке x_0 по направлению, определяемому градиентом этой функции в точке x_0, имеет максимальное значение по сравнению с производной этой функции в точке x_0 по любому другому направлению;

2) значение производной функции f в точке x_0 по направлению, определяемому градиентом $\operatorname{grad} f(x_0)$, равно $\| \operatorname{grad} f(x_0) \|$, то есть равно длине вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$.

2.12 Частные производные и дифференциалы старших порядков

Всюду далее, если не оговорены другие условия, множество G из $\mathbb{R}^n$, на котором определена функция f, будем считать открытым множеством. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ и в каждой точке $x \in G$ существует $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, то есть на G определена функция многих переменных $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Определение 2.54. *Если существует частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке a, то есть существует частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$, то ее называют частной производной второго порядка функции f по переменным x_j, x_k в точке a и обозначают одним из символов:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(a),\ \ f^{(2)}_{j,k}(a),\ \ D^2_{j,k} f(a), f''_{x_j\, x_k}$$

Если $k \neq j$, эту частную производную называют смешанной, а в случае $k = j$, например, первое из этих обозначений принимает вид $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)$.

Частные производные порядка выше 2-го определяются по индукции.

Определение 2.55. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ и в каждой точке $x \in G$ существует $\dfrac{\partial^{s-1} f}{\partial x_{j_{s-1}} \ldots \partial x_{j_1}}(a)$, $s > 1$, $1 \leq j_k \leq n$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда*

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{j_s}\, \partial x_{j_{s-1}} \ldots \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\left(\frac{\partial^{s-1} f}{\partial x_{j_{s-1}} \ldots \partial x_{j_1}}\right)(a),$$

если последняя частная производная существует. Если среди номеров j_k найдутся два неравных, то частная производная называется смешанной частной производной указанного порядка в точке a.

Пример 2.1. Найти частные производные второго порядка функции $f(x,y)=x^2y^3$.

■ Так как $f'_x(x,y)=2xy^3$, $f'_y(x,y)=3x^2y^2$, то

$$f''_{x^2}(x,y)=2y^3,\ f''_{y^2}(x,y)=6x^2y,\ f''_{xy}(x,y)=6xy^2,\ f''_{yx}(x,y)=6xy^2.$$

Заметим, что $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ для всех $x\in\mathbb{R}$. □

Теорема 2.32 (Шварца)**.** *Пусть* $f : G\subset\mathbb{R}^2_{(x,y)}\to\mathbb{R}$, $G=\operatorname{int}G$, *и существуют* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ *в* G. *Если функции* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ *непрерывны в точке* (x_0,y_0) *из* G, *то* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)$.

Замечание. Если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)$, то говорят, что смешанные частные производные второго порядка функции f в точке (x_0,y_0) из G не зависят от порядка дифференцирования.

■ Выберем число $\delta>0$ столь малым, что $\Pi_{(x_0,y_0)}(\delta)\subset G$. Зафиксируем точку (x,y) в $\Pi_{(x_0,y_0)}(\delta)$, отличную от (x_0,y_0). Рассмотрим число

$$W(x,y)=f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0).$$

Так как $W(x,y)=\left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)-\left(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\right)$, то $W(x,y)$ совпадает с приращением $\Delta\sigma=\sigma(x)-\sigma(x_0)$ дифференцируемой на интервале $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ функции $\sigma(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$ одной переменной x. При этом $\sigma'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$, $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. К функции σ применим теорему Лагранжа о конечных приращениях и в интервале с концами в точках x_0 и x найдем точку η такую, что

$$W(x,y)=\Delta\sigma=\sigma'(\eta)(x-x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)\right)(x-x_0)\,,$$

где $\eta=x_0+\theta_1(x-x_0)$, $\theta_1\in(0,1)$. Если положить $\tau(y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(\eta,y)$, $\forall\,y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, то получим, что

$$W(x,y)=(\tau(y)-\tau(y_0))(x-x_0).$$

Из условий теоремы следует, что функция τ дифференцируема на интервале $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ и $\tau'(y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\eta,y)$. Вновь, применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях к функции τ, в интервале с концами в точках y_0 и y найдем точку $\zeta = y_0 + \theta_2(y - y_0)$, $\theta_2 \in (0,1)$, такую, что

$$W(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\eta, \zeta)(y - y_0)(x - x_0)\,.$$

Поскольку число $W(x,y)$ можно представить в виде

$$W(x,y) = (f(x,y) - f(x_0,y)) - (f(x,y_0) - f(x_0,y_0)),$$

аналогично предыдущему, найдутся точка μ из интервала с концами в точках y и y_0, и точка λ из интервала с концами в точках x и x_0 такие, что

$$W(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\lambda, \mu)(y - y_0)(x - x_0).$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\eta, \zeta)(y - y_0)(x - x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\lambda, \mu)(y - y_0)(x - x_0)$. Сократим на отличный от нуля множитель $(x - x_0)(y - y_0)$, и получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\eta, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\lambda, \mu).$$

Из непрерывности в точке (x_0, y_0) функций $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, переходя к пределу при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, получим требуемое равенство. $\square$

Определение 2.56. *Функция $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \longrightarrow \mathbb{R}$ называется p раз непрерывно дифференцируемой в открытом множестве G, если она имеет в G все частные производные до порядка p включительно и они непрерывны в G. Если функция f имеет в G непрерывные частные производные любого порядка, то функция f называется бесконечно дифференцируемой в G.*

Класс p раз непрерывно дифференцируемых в G функций (бесконечно дифференцируемых в G функций) обозначается $C^p(G)$ (соответственно, $C^\infty(G)$). Заметим , что класс $C^0(G)$ совпадает с классом непрерывных на G функций $C(G)$.

Определение 2.57. *Функция $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G = \operatorname{int} G$ называется p раз дифференцируемой в точке $x \in G$, если все ее частные производные порядка $(p-1)$ определены в некоторой окрестности точки x и дифференцируемы в этой точке. Функция, p раз дифференцируемая в любой точке $x \in G$, называется p раз дифференцируемой в G.*

Очевидно, что если функция p раз непрерывно дифференцируема в точке $x \in G$, то она p раз дифференцируема в ней.

Определение 2.58. *Отображение* $f = (f_1, \ldots, f_m) : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^m$ *называется* p *раз дифференцируемым* (p *раз непрерывно дифференцируемым*) *в* G, *если таким свойством обладает каждая координатная функция отображения* f.

Из теоремы 2.32 и определения 2.56 следует

Теорема 2.33. *Если функция* f *дважды непрерывно дифференцируема в* $G = \operatorname{int} G \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, *то* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$, $\forall\, (x, y) \in G$.

Замечание 1. Из теоремы Шварца по индукции можно получить, что если функция n переменных p раз непрерывно дифференцируема в открытом множестве G, то в нем смешанные частные производные до p-го порядка включительно не зависят от порядка дифференцирования. Факт следует из того, что любые две смешанные частные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие при этом остаются фиксированными.

Замечание 2. Равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ возможно и в случае, если функция f дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0). Непрерывность смешанных частных производных — это только достаточное условие их совпадения. Вообще же, значение смешанной частной производной в точке зависит от порядка, в котором проводится дифференцирование.

Пример 2.2. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

■ Прежде всего отметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в $\mathbb{R}^2$. Поскольку, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \begin{cases} x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} -y\,, & y \neq 0 \\ 0\,, & y = 0 \end{cases}$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$. $\square$

Обратимся к понятию дифференциалов старших порядков функции многих переменных. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R},\ G = \operatorname{int} G$. Предположим, что $f \in C^p(G),\ p \geq 2$. Тогда функция f дифференцируема в G и

$$(df)_x(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j.$$

При фиксированном приращении $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ последнее равенство определяет на G новую функцию многих переменных

$$df(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

В силу теорем 2.26 и 2.30 функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, и $df(dx)$ дифференцируемы в G, поэтому для любой точки $a \in G$ и для любого приращения $\delta x = (\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ определена величина $(d(df(dx)))_a(\delta x)$ дифференциала в точке a от функции $df(dx)$, соответствующая приращению δx n-мерной независимой переменной x. В случае $\delta x = dx$ эту величину называют вторым дифференциалом функции f в точке a, соответствующим приращению dx, и обозначают $(d^2 f)_a(dx)$. Учитывая теорему 2.32, продифференцируем в точке a функцию $df(dx) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$ и получим следующую формулу для вычисления второго дифференциала функции f в точке a:

$$(d^2 f)_a(dx) = (d(df(dx)))_a(dx) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_a (dx)\, dx_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(a) \, dx_k \right) \, dx_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) \, dx_k \, dx_j.$$

Так как $f \in C^p(G)$, $p \geq 2$, то при фиксированном dx определена на G функция многих переменных

$$d^2 f(dx) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \, dx_k \, dx_j.$$

Ее называют вторым дифференциалом функции f на G, соответствующим приращению dx.

Дифференциалы более высокого порядка определяются по индукции: если $f \in C^p(G)$, $p > 1$ и $1 < m \leq p$, то величину

$$(d^m f)_a(dx) = \big(d(d^{m-1} f)(dx)\big)_a \, (dx)$$

называют дифференциалом порядка m функции f в точке $a \in G$, соответствующим приращению dx. По индукции нетрудно показать, что

$$(d^m f)_a(dx) = \sum_{j_m=1}^{n} \ldots \sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}(a) \, dx_{j_1} \, \ldots \, dx_{j_m},$$

то есть, если $f \in C^p(G)$, $p \geq 2$, то дифференциал порядка m ($m \leq p$) функции f в точке a, соответствующий приращению $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$ независимых переменных, равен сумме произведений частных производных m-го порядка по всем переменным, вычисленных в точке a, на приращения соответствующих независимых переменных.

2.13 Дифференциалы старших порядков суперпозиции

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $\varphi : T \subset \mathbb{R}^m_t \to \mathbb{R}^n$, причем G и T — открытые множества и $\varphi(T) \subset G$, а f и φ — дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующих множествах G и T. Согласно следствию 4 теоремы 2.29, функция $F = f \circ \varphi$ непрерывно дифференцируема на T, а, в силу инвариантности формы первого дифференциала, для всех $t \in T$

$$(dF)_t(dt) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t)) \, (d\varphi_k)_t(dt) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \varphi \right) (t) \, (d\varphi_k)_t(dt).$$

Так как отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ дважды непрерывно дифференцируемо в T, а функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ — непрерывно дифференцируемы в G, то функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \circ \varphi$, $d\varphi_k(dt)$, $k = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы в T и для каждой точки $a \in T$

$$(d^2F)_a(dt) = d\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi\right)(d\varphi_k)(dt)\right)_a(dt) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi\right)_a(dt)\cdot(d\varphi_k)_a(dt) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi\right)(a)\cdot(d(d\varphi_k)(dt))_a(dt).$$

По определению $(d(d\varphi_k)(dt))_a(dt) = (d^2\varphi_k)_a(dt)$, а, в силу свойства инвариантности формы первого дифференциала,

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi\right)_a(dt) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\circ\varphi\right)(a)\cdot(d\varphi_j)_a(dt),$$

следовательно, $(d^2F)_a(dt) =$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(\varphi(a))\cdot(d\varphi_k)_a(dt)\cdot(d\varphi_j)_a(dt)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi\right)(a)\cdot(d^2\varphi_k)_a(dt).$$

Сравнивая полученную формулу для $(d^2F)_a(dt)$ с формулой

$$(d^2f)_b(dx) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(b)\,dx_k\,dx_j, \tag{2.10}$$

замечаем, что эти формулы различны, следовательно, свойство инвариантности формы для дифференциала второго, а значит и более высокого порядков, не имеет места. Однако, есть такие отображения φ, что $(d^2(f\circ\varphi))(dt)$ имеет форму, сходную с (2.10). Так будет в том случае, когда $(d^2\varphi_k)(dt) \equiv 0$ на T для всех $k = 1,\dots,n$. Рассмотрим подробно один частный случай.

Теорема 2.34. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, причем G — открытое множество, функция f p раз непрерывно дифференцируема в G, $p \geq 2$, а отображение $\varphi : (\lambda,\mu) \subset \mathbb{R}^1_t \to \mathbb{R}^n$ таково, что $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^n$, и $\varphi((\lambda,\mu)) \subset G$. Тогда функция одной переменной $F = f\circ\varphi : (\lambda,\mu) \to \mathbb{R}$ является p раз непрерывно дифференцируемой на интервале (λ,μ) и для $2 \leq m \leq p$ и всех $t \in (\lambda,\mu)$*

$$(d^mF)_t(dt) = \sum_{j_m=1}^{n}\dots\sum_{j_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}(\varphi(t))\,\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_m}(dt)^m =$$

$$= (d^mf)_{\varphi(t)}(dx)\,\Bigg|_{dx_k=\alpha_k\,dt,\,k=1,\dots,n.}$$

■ Так как по условию $p \geq 2$, то функция $f \in C^2(G)$. Отображение φ непрерывно дифференцируемо на интервале (λ, μ). По следствию 4 теоремы 2.29 функция $F = f \circ \varphi$ непрерывно дифференцируема на (λ, μ) и для всех $t \in (\lambda, \mu)$

$$dF_t(dt) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))\, \alpha_j \, dt = (df)_{\varphi(t)}(dx) \,\Big|_{dx_j = \alpha_j\, dt,\, j=1,2,\ldots,n.}$$

Поскольку $f \in C^2(G)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1(G)$, $j = 1, \ldots, n$, и $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi \in C^1(\lambda, \mu)$. Значит, $dF(dt)$ — дифференцируемая на (λ, μ) функция и

$$(d^2F)_t(dt) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi\right)_t (dt)\, \alpha_j \, dt = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(\varphi(t))\, \alpha_k \, \alpha_j \, dt^2 =$$

$$= (d^2 f)_{\varphi(t)}(dx) \,\Bigg|_{dx_j = \alpha_j\, dt,\, j=1,2,\ldots n.}$$

Применение метода математической индукции завершает доказательство теоремы. □

2.14 Формула Тейлора для функций многих переменных

Прежде всего напомним формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции одной переменной в нужной нам для дальнейшего форме (см. [4, следствия 1 теоремы 4.21]).

Теорема 2.35. *Пусть $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — $(p + 1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Тогда для любой точки $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $x \neq a$, найдется точка $\eta = \eta(x)$, лежащая между x и a, такая, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(p+1)}(\eta)}{(p + 1)!}(x - a)^{p+1}. \tag{2.11}$$

Если положить $dx = x - a$, и учесть, что $(d^k f)_c(dx) = f^{(k)}(c)(dx)^k$ для всех $k = 1, \ldots, p + 1$ и всех $c \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, то формулу (2.11) можно переписать в виде

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}(d^k f)_a(dx) + \frac{1}{(p + 1)!}(d^{p+1} f)_\eta(dx).$$

В таком виде представление функции f можно обобщить на случай функций многих переменных.

Теорема 2.36 (Тейлора–Лагранжа)**.** *Пусть* $f : S_a(\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и функция* f $(p+1)$ *раз непрерывно дифференцируема в* $S_a(\delta)$. *Тогда*

$$\forall\, x \in \overset{\circ}{S}_a(\delta)\, \exists\, \eta = \eta(x) \in \overset{\circ}{S}_a(\delta) :$$

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}(d^k f)_a(dx) + \frac{1}{(p+1)!}(d^{p+1} f)_\eta(dx). \tag{2.12}$$

■ Зафиксируем $x^\circ \in \overset{\circ}{S}_a(\delta)$ и выберем $\varepsilon > 0$ такое, что$1 + \varepsilon < \dfrac{\delta}{\|x^\circ - a\|}$. Точки $M_t = (1-t)a + tx^\circ$ принадлежат шару $S_a(\delta)$ при $|t| < 1+\varepsilon$, так как

$$\rho(a, M_t) = \|a - M_t\| = \|a - (1-t)a - tx^\circ\| = \|t(a - x^\circ)\| =$$

$$= |t|\|a - x^\circ\| < (1+\varepsilon)\|a - x^\circ\| < \delta.$$

На множестве $T = \{t \in \mathbb{R} : |t| < 1+\varepsilon\}$ введём отображение $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\varphi(t) = (1-t)a + tx^\circ$. В силу предыдущего, $\varphi(t) \in S_a(\delta)$ для всех $t \in T$ и на T определена функция $F = f \circ \varphi$. Так как отображение φ непрерывно дифференцируемо любое число раз, то в силу теоремы 2.34 функция F одной переменной $(p+1)$ раз непрерывно дифференцируема на T и для всех $t \in T$ и всех $1 \le k \le p+1$

$$(d^k F)_t(dt) = (d^k f)_{\varphi(t)}(dx) \Big|_{dx_j = (x_j^\circ - a_j)dt,\ 1 \le j \le n} .$$

Применяя теорему 2.35 к функции F на T в точке $t = 0$, для любой точки $t \in T \setminus \{0\}$ найдем точку γ, лежащую между точками 0 и t, такую, что

$$F(t) - F(0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}(d^k F)_0(dt) + \frac{1}{(p+1)!}(d^{p+1} F)_\gamma(dt). \tag{2.13}$$

Переходя от функции F к функции f, замечаем, что

$$F(1) = f(x^\circ), \quad F(0) = f(a),$$

$$(d^k F)_0(dt) = (d^k f)_a(dx)\,|_{dx_j = (x_j^\circ - a_j)dt,\ 1 \le j \le n}\,,\ 1 \le k \le p,$$

$$(d^{p+1} F)_\gamma(dt) = (d^{p+1} f)_\eta(dx)\,|_{dx_j = (x_j^\circ - a_j)dt,\ 1 \le j \le n}\,,\ \eta = \varphi(\gamma) \in S_a(\delta).$$

Так как при $t = 1$, $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$, $dx = \Delta x = x^\circ - a$, то из формулы (2.13) следует нужный результат. □

Замечание 1. В доказанной теореме точка η принадлежит прямолинейному отрезку, соединяющему точки a и x°, и не совпадает с его концами.

Замечание 2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива и для функции f, которая $(p+1)$ раз дифференцируема в окрестности $S_a(\delta)$.

Теорема 2.37 (Тейлора–Пеано). *Пусть выполнены условия теоремы 2.36. Тогда*

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k!}(d^k f)_a(dx) + o(\|x-a\|^{p+1}) \quad \textit{при } x \to a. \tag{2.14}$$

■ Поскольку условия теоремы 2.36 выполнены, воспользуемся формулой (2.12). Так как функция f $(p+1)$ раз непрерывно дифференцируема в $S_a(\delta)$, то частные производные $(p+1)$-го порядка функции f непрерывны в точке a. Следовательно, справедливо представление

$$\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{p+1}}}(x) = \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{p+1}}}(a) + \alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(x),$$

где $\lim\limits_{x\to a} \alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(x) = 0$ и можно считать, что $\alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(0) = 0.$. В силу замечания 1 к теореме 2.36, точка η лежит на прямолинейном отрезке, соединяющем точки a и x, поэтому $\lim\limits_{x\to a} \eta(x) = a$ и для всевозможных допустимых наборов индексов j_s существует $\lim\limits_{x\to a} \alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(\eta(x)) = 0$. Учитывая все это, получим

$$(d^{p+1} f)_\eta(dx) = (d^{p+1} f)_a(dx) + \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_{p+1}=1}^{n} \alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(\eta) dx_{j_1} \dots dx_{j_{p+1}}.$$

Тогда $f(x) - f(a) =$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k!}(d^k f)_a(dx) + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_{p+1}=1}^{n} \alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(\eta) dx_{j_1} \dots dx_{j_{p+1}}.$$

Обозначим последнюю сумму этого выражения через $\beta(x)$ и покажем, что $\beta(x) = o(\|x-a\|^{p+1})$ при $x \to a$. Так как $dx_j = \Delta x_j$, $|\Delta x_j| \cdot \|\Delta x\|^{-1} \le 1$, $j = 1, \dots, n$, то

$$0 \le \frac{|\beta(x)|}{\|x-a\|^{p+1}} \le \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_{p+1}=1}^{n} |\alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(\eta)| \frac{|dx_{j_1}|}{\|x-a\|} \dots \frac{|dx_{j_{p+1}}|}{\|x-a\|} \le$$

$$\le \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_{p+1}=1}^{n} |\alpha_{j_1,\dots,j_{p+1}}(\eta)|.$$

Все слагаемые последней суммы стремятся к нулю при $x \to a$ и по теореме о переходе к пределу в неравенствах (см. [4, теорема 2.39]) , получаем, что $\beta(x) = o(\|x-a\|^{p+1})$ при $x \to a$. □

Теорема 2.37 имеет место и при менее жестких условиях на функцию f (см., например, [3, т.1, с.591–592]).

Теорема 2.38 (Тейлора–Пеано). *Пусть $f : S_a(\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и функция f p раз дифференцируема в $S_a(\delta)$ и $p+1$ раз дифференцируема в точке a. Тогда имеет место представление* (2.14).

Пример 2.1. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1,-2)$ функцию $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$.
■ Функция f непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^2$, а ее частные производные выше второго порядка равны нулю. Поэтому $(d^p f)(dx, dy) = 0$, если $p \geq 3$, и, согласно теореме 2.36,

$$f(x,y) - f(1,-2) = (df)_A(dx,dy) + \frac{1}{2}(d^2 f)_A(dx,dy),$$

где $dx = x - 1, dy = y + 2$. Пользуясь правилами дифференцирования функции многих переменных, получаем, что

$$(df)_{(x,y)}(dx,dy) = (4x - y - 6)dx - (x + 2y + 3)dy,$$
$$(d^2 f)_{(x,y)}(dx,dy) = 4(dx)^2 - 2dxdy - 2(dy)^2.$$

Тогда

$$(df)_A(dx,dy) = (4 + 2 - 6)dx - (1 - 4 + 3)dy = 0,$$
$$(d^2 f)_A(dx,dy) = 4(dx)^2 - 2dxdy - 2(dy)^2.$$

Поэтому, учитывая еще, что $f(1,-2) = 5$ получаем

$$f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \ \square$$

Пример 2.2. Найти приращение, получаемое функцией

$$f(x,y) = x^2 y + xy^2 - 2xy,$$

при переходе от точки $A(1,-1)$ к точке $B(1+h, -1+k)$.
■ Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - 2x$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 2x + 2y - 2,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(x,y) = 2,$$

а все частные производные, начиная с 4-го порядка равны нулю, то в данном случае разложение функции $f(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,-1)$ можно записать в виде

$$f(x,y) - f(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,(y+1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\,(x-1)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A)(x-1)(y+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y+1)^2\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A)(x-1)^3+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}(A)(x-1)^2(y+1)+\right.$$

$$\left.+\,3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(A)(x-1)(y+1)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A)(y+1)^3\right)=$$

$$=(x-1)-3(y+1)+\frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2-4(x-1)(y+1)+2(y+1)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(6(x-1)^2(y+1)+6(x-1)(y+1)^2\right).$$

Поэтому, если $A(1,-1)$, $B(1+h,-1+k)$, то

$$f(B)-f(A)=h-3k-h^2-2kh+k^2+h^2k+hk^2.\ \square$$

2.15 Локальный экстремум функции многих переменных

Определение 2.59. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $G = \operatorname{int} G$, $a \in G$. Точка a называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если $\exists\, S_a(\delta) \subset G : f(x) \le f(a)$ (соответственно, $f(x) \ge f(a)$), $\forall\, x \in S_a(\delta)$.*

О функции, имеющей в точке a локальный максимум или минимум, говорят, что эта функция имеет в точке a локальный экстремум. Прежде всего, найдем необходимые условия существования в точке локального экстремума функции многих переменных.

Теорема 2.39. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^1$, $G = \operatorname{int} G$, $a \in G$. Если a — точка локального экстремума функции f и в ней существует $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.*

■ Пусть, для определенности, a — точка локального максимума функции f, тогда

$$\exists\, S_a(\delta) \subset G : f(x) \le f(a),\ \forall\, x \in S_a(\delta).$$

В частности, $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n) \le f(a)$, $\forall\, t \in (a_k-\delta, a_k+\delta)$. Рассмотрим функцию $\zeta_k(t) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ на $(a_k-\delta, a_k+\delta)$. Так как f имеет в точке a конечную частную производную по переменной x_k, то функция ζ_k дифференцируема в точке a_k, $\zeta'(a_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. Кроме этого, $\zeta_k(t) \le \zeta_k(a_k)$ для всех t из $(a_k-\delta, a_k+\delta)$. Поэтому, функция одной переменной ζ_k имеет в точке a_k локальный максимум и дифференцируема в ней. Следовательно, по необходимому условию локального экстремума функции одной переменной ([4, теорема 4.22]), $\zeta_k'(a) = 0$. Потому

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. Аналогично проводятся рассуждения и в случае, когда a — точка локального минимума функции f. $\square$

Следствие. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $G = \operatorname{int} G$, $a \in G$. Если a — точка локального экстремума функции f и в точке a функция f дифференцируема, то $(df)_a(dt) = 0$, $\forall\, dt \in \mathbb{R}^n$.*

$\blacksquare$ Доказательство следствия сразу следует из теорем 2.39 и 2.23. $\square$

Определение 2.60. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} G$. Точка a называется стационарной точкой функции f, если в ней функция f имеет частные производные по всем переменным и $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.*

Как и для функции одной переменной не всякая стационарная точка функции многих переменных является точкой локального экстремума.

Пример 2.1. Доказать, что точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума функции $f(x, y) = xy$, хотя является ее стационарной точкой.

$\blacksquare$ Функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Поэтому точка $(0, 0)$ — единственная стационарная точка функции $f(x, y)$, $f(0, 0) = 0$. Так как при $x < 0$ и $y < 0$ $f(x, y) > 0$, а при $x < 0$, $y > 0$ $f(x, y) < 0$, то в любой окрестности $U_{(0,0)}$ существуют как точки, в которых $f(x, y) > 0$, так и точки, в которых $f(x, y) < 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума функции. $\square$

Заметим, что, как и в случае $n = 1$, функция многих переменных может иметь локальный экстремум в точке, в которой она не является дифференцируемой. Изучение поведения функции в окрестности такой точки осуществляется обычно с помощью рассмотрения приращения функции $\Delta f(\Delta x)$ в этой точке.

Укажем достаточные условия локального экстремума функции в стационарной точке.

Теорема 2.40. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$, $G = \operatorname{int} G$, f дифференцируема в G, a — стационарная точка f в G и f дважды дифференцируема в точке a.*

1) *Если $(d^2 f)_a(dx) > 0$, $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то в точке a функция f имеет локальный минимум.*

2) *Если $(d^2 f)_a(dx) < 0$, $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то в точке a функция f имеет локальный максимум.*

3) *Если $(d^2 f)_a(dx)$ принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, то в точке a функция f не имеет локального экстремума.*

■ 1). По теореме 2.38 при $p = 1$ в G имеет место представление

$$f(x) - f(a) = (df)_a(\Delta x) + \frac{1}{2}(d^2 f)_a(\Delta x) + o(\|\Delta x\|^2), \text{ при } x \to a,$$

где $\Delta x = x - a$. Так как a — стационарная точка, то $(df)_a(\Delta x) = 0$ для всех x из $\mathbb{R}^n$. Учитывая общий вид дифференциала второго порядка, получаем для точек $x \in G \setminus \{a\}$ представление

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\Delta x_i \Delta x_j + o(\|\Delta x\|^2) =$$

$$= \|\Delta x\|^2 \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}\frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|} + \frac{o(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2}\right), \ x \to a.$$

Введем обозначение: $h_j = \dfrac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|}, \quad \alpha(\Delta x) = \dfrac{o(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2}$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to a}\alpha(\Delta x) = 0 \text{ и } f(x) - f(a) = \|\Delta x\|^2 \left[\frac{1}{2}(d^2 f)_a(h) + \alpha(\Delta x)\right].$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j^2 = \dfrac{1}{\|\Delta x\|^2}\sum\limits_{j=1}^{n}|\Delta x_j|^2 = 1$, то точки $h = (h_1, ..., h_n)$ расположены в пространстве $\mathbb{R}^n$ на единичной сфере $V_0(1)$ с центром в нуле. Функция

$$(d^2 f)_a(h) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j,$$

очевидно, непрерывна в $\mathbb{R}^n$, а потому и на единичной сфере $V_0(1)$. По второй теореме Вейерштрасса, она принимает на $V_0(1)$ значение своей точной нижней границы m_f, то есть

$$\exists\, h^\circ \in V_0(1) : (d^2 f)_a(h^\circ) = \inf_{h \in V_0(1)}(d^2 f)_a(h) = m_f.$$

Так как $(d^2 f)_a(\Delta x) > 0, \forall\, \Delta x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $m_f > 0$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to a}\alpha(\Delta x) = 0$, поэтому

$$\exists\, \delta > 0 : S_0(\delta) \subset G \text{ и } \|\alpha(\Delta x)\| < \frac{m_f}{4}, \forall\, \Delta x \in \overset{\circ}{S_0}(\delta).$$

Следовательно, для всех $x \in S_a(\delta) \setminus \{a\}$,

$$f(x) - f(a) \geq \|\Delta x\|^2 \left[\frac{m_f}{2} - \frac{m_f}{4}\right] = \frac{m_f}{4}\|\Delta x\|^2 > 0,$$

то есть $f(x) > f(a), \forall\, x \in S_a(\delta) \setminus \{a\}$ и потому точка a — точка локального минимума функции f.

2). Доказывается аналогично.

3). Пусть $d^2 f_a(\Delta x)$ принимает в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ значения разных знаков, то есть существуют $\Delta x' = x' - a$ и $\Delta x'' = x'' - a$ из $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ такие, что

$$d^2 f_a(\Delta x') > 0,\ d^2 f_a(\Delta x'') < 0.$$

Соединим точки a и $x' = a + \Delta x'$ прямолинейным отрезком $[a, x']$. Если $M' \in [a, x']$, то $M' = a + t\Delta x'$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим разность $f(M') - f(a)$. Как и в части 1), согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(M') - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f_a(t\,\Delta x') + o(\|t\,\Delta x'\|^2) \text{ при } t \to 0.$$

Поскольку $d^2 f_a(t\Delta x') = t^2 d^2 f_a(\Delta x'),$ а $o(\|t\Delta x'\|^2) = o(t^2),$ при $t \to 0$, то

$$f(M') - f(a) = t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_a(\Delta x') + \frac{o(t^2)}{t^2} \right),\ t \to 0.$$

Учитывая определение символа o и тот факт, что $d^2 f_a(\Delta x') > 0$, получим, что $\exists\, \delta_1 > 0 : f(M') - f(a) > 0$, если $t \in (0, \delta_1)$.

Аналогично, рассматривая разность $f(M'') - f(a)$, где $M'' = a + t\Delta x''$, $t \in [0, 1]$, можно показать, что $\exists\, \delta_2 > 0 : f(M'') - f(a) < 0$, если $t \in (0, \delta_2)$. Так как в каждой окрестности точки a найдутся точки вида M' и M'', то функция f не имеет в точке a локального экстремума. $\square$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2.40 и* $n = 1$. *Если* $f^{(2)}(a) > 0$, *то в точке* a *функция* f *имеет локальный минимум. Если же* $f^{(2)}(a) < 0$, *то в точке* a *функция* f *имеет локальный максимум.*

$\blacksquare$ Результат очевиден, поскольку $(d^2 f)_a(\Delta x) = f^{(2)}(a)\,(\Delta x)^2$. $\square$

Отметим, что теорема 2.40 не дает полного ответа на вопрос о том, когда стационарная точка доставляет функции локальный экстремум, а когда нет. И дело не только в том, что функция может не быть дважды дифференцируемой в стационарной точке. Даже если условия теоремы выполнены, еще остаются случаи, когда $(d^2 f)_a(\Delta x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, или $(d^2 f)_a(\Delta x) \leq 0$ в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. В этих случаях функция f в точке a может как иметь, так и не иметь локальный экстремум. Покажем это на примерах.

Пример 2.2. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^4 + y^2$.

$\blacksquare$ Поскольку f является многочленом, то $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y,\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Значит $(0, 0)$ — единственная стационарная точка функции f. Так как $d^2 f_{(x,y)}(\Delta x, \Delta y) = 12x^2 \Delta x^2 + 2\Delta y^2$, то $d^2 f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 2\Delta y^2 > 0$ только для всех $\Delta y \neq 0$. Следовательно, дифференциал второго порядка не удовлетворяет условиям теоремы, и по нему о наличии экстремума в точке

$(0,0)$ ничего сказать нельзя. Но

$$\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^4 + \Delta y^2 > 0,\ (\Delta x, \Delta y) \neq (0,0),$$

поэтому функция f имеет в стационарной точке локальный минимум. $\square$

Пример 2.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^2 + y^3$.

$\blacksquare$ Функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Поэтому $(0,0)$ — единственная стационарная точка функции f. Как и в предыдущем примере,

$$d^2 f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 2\Delta x^2 \geq 0,\ \forall\,(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Но $\Delta f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^2 + \Delta y^3$, поэтому, например, $\Delta f_{(0,0)}(0, \Delta y) > 0$, если $\Delta y > 0$ и $\Delta f_{(0,0)}(0, \Delta y) < 0$, если $\Delta y < 0$. Значит функция f не имеет в точке $(0,0)$ локального экстремума. $\square$

Для применения теоремы 2.40 на практике надо знать, в каких случаях в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ $(d^2 f)_a(\Delta x) > 0$ или $(d^2 f)_a(\Delta x) < 0$. Для этого приведем некоторые сведения из теории квадратичных форм.

Функция вида $\varphi(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой от переменных $h_1, \ldots, h_n$, числа a_{ij} — ее коэффициентами, а симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы. Определители

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются угловыми минорами матрицы A.

Минором такой матрицы называется определитель квадратной матрицы, полученной вычеркиванием из исходной строк и столбцов. Главным минором называется такой минор, у которого номера занимаемых им строк совпадают с номерами столбцов.

Квадратичная форма $\varphi(h)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если $\varphi(h) > 0$ (соответственно, $\varphi(h) < 0$) для всех $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Квадратичная форма $\varphi(h)$ называется знакопеременной, если в $\mathbb{R}^n$ существуют точки h' и h'' такие, что $\varphi(h') > 0$, $\varphi(h'') < 0$, то есть функция $\varphi(h)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2.41. *Пусть* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— квадратичная форма.*

1) *Квадратичная форма* $\varphi(h)$ *является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее угловые миноры* A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *положительны.*

2) *Квадратичная форма* $\varphi(h)$ *является отрицательно определенной, тогда и только тогда, когда знаки ее угловых миноров* A_i, $i = 1, \ldots, n$, *чередуются, причем* $A_1 < 0$, *то есть* $\operatorname{sgn} A_i = (-1)^i, i = 1, \ldots, n$.

3) *Квадратичная форма* $\varphi(h)$ *является знакопеременной тогда и только тогда, когда у ее матрицы существует отрицательный главный минор четного порядка или существуют два главных минора нечетных порядков разных знаков.*

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема в точке a, то в силу теоремы Шварца (см. теорему 2.32) $(d^2 f)_a(\Delta x)$ — квадратичная форма, поэтому применение теоремы 2.40 сводится к применению критерия Сильвестра.

Рассмотрим случай функции двух переменных. Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция на множестве $G \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, a — стационарная точка функции f. Положим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Тогда для всех $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$

$$(d^2 f)_a(\Delta x, \Delta y) = a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x \Delta y + a_{22}(\Delta y)^2\,. \tag{2.15}$$

Матрицей квадратичной формы (2.15) является матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а ее угловые миноры равны $A_1 = a_{11},\ A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Теорема 2.42. *Пусть* G *— открытое множество в* $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$, *функция* $f : G \to \mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема в* G, $a \in G$ *— стационарная точка функции* f.

1) *Если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, *то при* $a_{11} > 0$ *функция* f *имеет в точке* a *локальный минимум, а при* $a_{11} < 0$ *— локальный максимум.*

2) *Если* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, *то в точке* a *функция* f *не имеет локального экстремума.*

■ Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то $a_{11} \neq 0$, поэтому утверждение 1) — прямое следствие теоремы 2.40 и критерия Сильвестра (частей 1 и 2).

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то существует отрицательный угловой (он же и главный) минор четного порядка, поэтому утверждение 2) — прямое следствие теоремы 2.40 и критерия Сильвестра (частей 3).

Но в случае функции двух переменных можно не обращаться к критерию Сильвества, а использовать тот факт, что в том случае, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, квадратный трехчлен (2.15) не имеет вещественных корней и потому его знак определяется знаком a_{11}. В том случае, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ и $a_{11} \neq 0$, квадратный трехчлен (2.15) имеет вещественные корни и потому меняет знак. Если же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ и $a_{11} = 0$, то $a_{12} \neq 0$ и при $\Delta y \neq 0$

$$(d^2 f)_a(\Delta x, \Delta y) = (\Delta y)^2 \left(2a_{12}\frac{\Delta x}{\Delta y} + a_{22}\right).$$

Выражение в скобках является при фиксированном Δy линейной функцией относительно переменной $t = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, которая принимает значения разных знаков на интервалах

$$\left(-\infty, -\frac{a_{22}}{2a_{12}}\right) \text{ и } \left(-\frac{a_{22}}{2a_{12}}, +\infty\right).$$

Поэтому второй дифференциал $d^2 f_a(\Delta x, \Delta y)$ принимает в $\mathbb{R}^2$ значения разных знаков, а значит по части 3) теоремы 2.40 функция f не имеет в точке a локального экстремума. □

Как и в случае функций одной переменной, рассмотрим задачу вычисления наибольшего и наименьшего значения функции f, непрерывной на $G \subset \mathbb{R}^n$, когда G — компакт в $\mathbb{R}^n$ (ограниченное замкнутое множество). Согласно первой и второй теоремам Вейерштрасса функция f ограничена на G и в G найдутся такие точки λ и μ, что

$$f(\lambda) = \sup_{x\in G} f(x),\ \ f(\mu) = \inf_{x\in G} f(x).$$

Заметим, что если λ (или μ) — точка из $\operatorname{int} G$, то $f(x) \leq f(\lambda)$ (соответственно, $f(x) \geq f(\mu)$) для всех точек из $\operatorname{int} G$ и по определению точка λ (точка μ) является точкой локального максимума (минимума) функции f на G. Поэтому, наибольшее или наименьшее значения функции f на G могут достигаться либо в точках локального экстремума, либо в точках границы множества G. Поскольку, ∂G — замкнутое множество, то существуют точки из ∂G, в которых функция f принимает значения, равные $\sup\limits_{x\in\partial G} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in\partial G} f(x)$.

Итак, можем сформулировать следующее достаточное условие вычисления $\sup\limits_{x\in G} f(x)$, $\inf\limits_{x\in G} f(x)$.

Теорема 2.43. *Пусть функция f непрерывна на компакте $G \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема на множестве* $\operatorname{int} G$ *за исключением, быть может, конечного числа точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n_0}$ и имеет конечное число стационарных точек $P_1, P_2, \ldots, P_{k_0}$. Если*

$$A = \sup \{f(x),\ x \in \partial G\},\ B = \inf \{f(x),\ x \in \partial G\},$$

то

$$\sup \{f(x),\ x \in G\} = \max \{A, f(M_1), \ldots, f(M_{n_0}), f(P_1), \ldots, f(P_{k_0})\},$$

$$\inf \{f(x),\ x \in G\} = \min \{B, f(M_1), \ldots, f(M_{n_0}), f(P_1), \ldots, f(P_{k_0})\}.$$

Пример 2.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ на множестве $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

■ Функция f дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ и в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(df)(\Delta x, \Delta y) = 2x\,\Delta x - 2y\,\Delta y,\ \forall\,(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому точка $(0, 0)$ — единственная стационарная точка f в $\operatorname{int} G$ и $f(0, 0) = 0$. Границей множества G является окружность

$$\partial G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Чтобы найти $\sup\limits_{\partial G} f(x)$ и $\inf\limits_{\partial G} f(x)$, применим следующий прием — окружность ∂G запишем в параметрической форме:

$$\partial G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Тогда множество значений f на ∂G совпадает с множеством значений функции $\varphi(t) = f(2\cos t,\ 2\sin t) = 4\cos 2t$ на $[0, 2\pi]$. Так как

$$\sup_{\partial G} f(x) = \varphi(0) = f(2, 0) = 4,\ \inf_{\partial G} f(x) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = f(0, 2) = -4,$$

то $\sup_G f(x) = \max\{0; 4\} = 4, \quad \inf_K f(x) = \min\{0; -4\} = -4$. □

Пример показывает, что задача вычисления наибольшего и наименьшего значений функции на компакте $G \subset \mathbb{R}^n$, может быть сейчас нами решена, если граница множества G достаточно проста. В общем случае задача поиска $\sup\limits_{\partial G} f(x)$ и $\inf\limits_{\partial G} f(x)$ сводится к задаче исследования на экстремум функции f на множестве точек x, которые подчинены некоторому условию (в нашем примере $x \in \partial G$). Общий метод решения задачи в этой ситуации мы рассмотрим позднее.

2.16 Неявная функция, определяемая уравнением

Во многих вопросах естествознания приходится сталкиваться с процессами, в которых переменная y зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть является функцией этих переменных, и задается с помощью функционального уравнения $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Чтобы познакомиться с этой ситуацией, рассмотрим пример.

Пример 2.1. Показать, что в $\mathbb{R}^2_{x,y}$ функциональное уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2.16}$$

определяет на сегменте $[-1, 1]$ y как функцию от x.

■ Совокупность точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению (2.16), есть окружность $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Зафиксируем число $x_0 \in \mathbb{R}$ и решим уравнение

$$x_0^2 + y^2 = 1 \tag{2.17}$$

относительно y. Если $|x_0| > 1$, то уравнение (2.17) не имеет решений. Если $|x_o| = 1$, то уравнение имеет единственное решение $y_0 = 0$. Если же $|x_0| < 1$, то уравнение (2.17) имеет два решения $\pm\sqrt{1 - x_o^2}$. Существует множество функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, которые каждому $x \in [-1, 1]$ ставят в соответствие одно из найденных чисел $y = +\sqrt{1 - x^2}$ или $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Например, функции $y = +\sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$, или функция

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in \ [-1,\, 1] \bigcap \mathbb{Q}, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in \ [-1,\, 1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

обладают тем свойством, что $x^2 + y^2(x) = 1$, $\forall\, x \in [-1, 1]$. □

Однако к вопросу о функции, определяемой уравнением, можно подойти иначе. Пусть заданы непустые множества $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$. Если для каждого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$ такое, что $x^2 + y^2 = 1$, то в этом случае функцию, определенную правилом

$$\forall\, x \in X \to y = f(x) \in Y \ : \ x^2 + f^2(x) = 1,$$

называют неявной функцией, определяемой уравнением (2.16). Если $X = [-1, 1]$, $Y = [0, +\infty)$ (или $Y = [0, 1]$), то можно сказать, что уравнение (2.16) определяет единственную неявную функцию $y = f(x)$, $f : X \to Y$, такую, что $x^2 + f^2(x) = 1$. При этом $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Если же $X = [-1,\, 1]$, а $Y = \ [-1,\, 1]$ или $X = [-2, 2]$, а $Y = [0, +\infty)$, то уравнение (2.16) не определяет неявную функцию.

Определение 2.61. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $Y \subset \mathbb{R}, F : X \times Y \to \mathbb{R}$. *Если для каждой точки* $x \in X$ *найдется единственная точка* $y = f(x) \in Y$ *такая, что* $F(x, f(x)) = 0$, *то говорят, что на множестве* $X \times Y$ *функциональное уравнение* $F(x, y) = 0$ *определяет неявную функцию* $y = f(x)$, *при этом* $f : X \subset \mathbb{R}^n_x \to Y \subset \mathbb{R}$.

Ясно, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на X. Если вернуться к уравнению (2.16), то можно сказать, что на множестве $X \times Y$, где $X = [-1,\, 1]$, $Y = [0,\, 1]$, уравнение (2.16) определяет неявную функцию $y = f(x)$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Такая функция — единственная. Ее графиком является верхняя полуокружность. Если же $X = [-1,\, 1]$, $Y = [-1,\, 0]$, то на $X \times Y$ уравнение (2.16) определяет неявную функцию $y = f(x)$, $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Наконец, отметим, что термин «неявная функция» отражает способ задания этой функции. Например, уравнение $y - \sin x = 0$ определяет на множестве $\mathbb{R} \times [-1,\, 1]$ неявную функцию $y = \sin x$.

Пример 2.2. Покажем, что на множестве $(0,\, +\infty) \times \mathbb{R}$ функциональное уравнение $y - x\, e^{-xy} = 0$ определяет y как неявную функцию переменной x.

■ Зафиксируем произвольное $x_0 \in (0,\, +\infty)$ и рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta(y) = y - x_0\, e^{-x_0 y}$. Очевидно, что функция $\zeta(y)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\zeta'(y) = 1 + x_0^2\, e^{-x_0 y} > 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$. Поэтому функция ζ возрастает на $\mathbb{R}$. Покажем, что существует точка $y_0 \in \mathbb{R}$, для которой $\zeta(y_0) = 0$, то есть $y_0 - x_0\, e^{-x_0 y_0} = 0$. Так как $x_0 > 0$, то

$$\lim_{y \to -\infty} \zeta(y) = \lim_{y \to -\infty} y - x_0\, e^{-x_0 y} = -\infty, \quad \lim_{y \to +\infty} \zeta(y) = \lim_{y \to -\infty} y - x_0\, e^{-x_0 y} = +\infty,$$

то найдутся такие числа a и b, что $a < 0 < b$ и $\zeta(a) < 0$, $\zeta(b) > 0$. Применяя к функции ζ на отрезке $[a, b]$ теорему Больцано–Коши о промежуточном значении ([4, теорема 3.6]), заключаем, что существует точка $y_0 \in (a, b)$, в которой $\zeta(y_0) = 0$. Учитывая возрастание функции ζ на $\mathbb{R}$, получаем, что y_0 — единственная точка множества $\mathbb{R}$ такая, что $y_0 - x_0\, e^{-x_0 y_0} = 0$. В силу произвольности $x_0 \in (0,\, +\infty)$, на множестве $(0,\, +\infty) \times \mathbb{R}$ функциональное уравнение $y - x\, e^{-xy} = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x)$. Так как рассмотренное уравнение нельзя разрешить относительно y, то неявная функция, определяемая уравнением, не имеет явного задания. □

Выясним, при каких условиях на функцию F, уравнение $F(x, y) = 0$ определяет на $X \times Y$ неявную функцию $y = f(x)$, $f : X \to Y$.

Теорема 2.44 (локальная теорема существования неявной функции, определяемой уравнением)**.** *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^1_y$, $F : G \to \mathbb{R}$ и выполняются условия:*

1) F — непрерывная функция на G;

2) $\exists\, M_0 = (x_0, y_0) = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_0) \in G \,:\, F(M_0) = 0$;

3) $\exists\, \Pi_{M_0}(\delta_0) \,:\, \Pi_{M_0}(\delta_0) \subset G$, $\exists\, \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, $\forall\, (x, y) \in \Pi_{M_0}(\delta_0)$;

4) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ — непрерывная функция в точке M_0 и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0 такие, что $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset G$ и на $U_{x_0} \times U_{y_0}$ уравнение $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, которая непрерывна на U_{x_0} и $f(x_0) = y_0$.

■ Ради простоты будем считать $n = 1$. Сначала докажем существование окрестностей U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0 с указанными в теореме свойствами, а затем — непрерывность на $U_{x_0} \times\ U_{y_0}$ функции f, определяемой уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

1) Для определенности будем считать, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. По условию 4) функция $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке (x_0, y_0), поэтому найдется окрестность $U_{(x_0,y_0)}$ точки (x_0, y_0), в которой $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ сохраняет знак. Можно считать, что $U_{(x_0,y_0)} = \Pi_{(x_0,y_0)}(\delta_0)$. Зафиксируем число $\varepsilon \in (0,\, \delta_0)$ и рассмотрим функцию F в точках (x_0, y), когда $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Функция $\varphi(y) = F(x_0, y)$ непрерывна на отрезке $[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]$ (в силу условия 1)), дифференцируема и $\varphi'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y)$. В силу выбора ε,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0,\ \forall\, y \in [y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon].$$

Поэтому функция φ возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon]$. Так как $\varphi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, то $\varphi(y_0 - \varepsilon) < 0, \quad \varphi(y_0 + \varepsilon) > 0$.

Итак, $F(x_0, y_0-\varepsilon) < 0,\ F(x_0, y_0+\varepsilon) > 0$. Теперь рассмотрим функцию F в точках $(x,\ y_0 - \varepsilon)$, $(x,\ y_0 + \varepsilon)$, когда $x \in (x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0)$. Положим

$$\psi_+(x) = F(x, y_0 + \varepsilon), \quad \psi_-(x) = F(x, y_0 - \varepsilon),\ x \in (x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0)$$

В силу условия 1) теоремы эти функции непрерывны, а так как

$$\psi_-(x_0) < 0, \quad \psi_+(x_0) > 0,$$

то, согласно теореме о сохранении знака (см. [4, теорему 3.2]), найдется число $\delta \in (0,\ \delta_0)$ такое, что

$$\psi_-(x) < 0, \quad \psi_+(x) > 0,\ \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta).$$

Последнее означает, что найдено такое число $\delta > 0$, что

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0,\ F(x, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = U_{x_0}(\delta).$$

Покажем, что окрестности $U_{x_0}(\delta)$ и $U_{y_0}(\varepsilon)$ являются искомыми. По построению, $U_{x_0}(\delta) \times U_{y_0}(\varepsilon) \subset G$. Покажем, что в $U_{x_0}(\delta) \times U_{y_0}(\varepsilon)$ уравнение

$F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x)$. Для этого зафиксируем точку $\overline{x} \in U_{x_0}(\delta)$ и рассмотрим функцию $F(\overline{x}, y)$ на $[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]$. Функция $\zeta(y) = F(\overline{x}, y)$ непрерывна на отрезке $[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]$, дифференцируема на нём и $\zeta'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, y) > 0$. Кроме того, $\zeta(y_0-\varepsilon) < 0,\ \zeta(y_0+\varepsilon) > 0$. По теореме Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной функции ([4, теорема 3.9]) найдется $\overline{y} \in (y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$ такое, что $\zeta(\overline{y}) = 0$, т.е. $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Так как $\zeta'(y) > 0$ на отрезке $[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]$, то функция ζ возрастает на нем, а поэтому значение, равное нулю, принимает в единственной точке. Подведем итог:

$$\forall\, \varepsilon \in (0,\ \delta_0)\, \exists\, \delta \in (0,\ \delta_0)\ :\ U_{x_0}(\delta) \times U_{y_0}(\varepsilon) \subset G$$
$$\text{и } \forall\, \overline{x} \in U_{x_0}(\delta)\, \exists\, !\, \overline{y} \in U_{y_0}(\varepsilon)\ :\ F(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Следовательно, на $U_{x_0}(\delta) \times U_{y_0}(\varepsilon)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x. Обозначим ее через f. По построению

$$f : U_{x_0}(\delta) \longrightarrow U_{y_0}(\varepsilon),\ f(x_0) = y_0.$$

2) В первой части мы доказали, что функция f обладает свойством:

$$\forall\, \varepsilon \in (0,\ \delta_0)\, \exists\, \delta \in (0,\ \delta_0)\ :\ \forall\, x \in U_{x_0}(\delta)\ f(x) \in\ U_{y_0}(\varepsilon),$$

или, учитывая, что $y_0 = f(x_0)$,

$$\forall\, \varepsilon \in (0,\ \delta_0)\, \exists\, \delta \in\ (0,\ \delta_0)\ :\ \forall\, x \in\ U_{x_0}(\delta)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнее означает непрерывность функции f в точке x_0.

Для доказательства непрерывности функции f в точке $\overline{x}\ \in \overset{\circ}{U}_{x_0}(\delta)$ следует повторить рассуждение первой части только относительно точки $(\overline{x}, \overline{y})$, где $\overline{y} = f(\overline{x})$. Здесь $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$ в $U_{x_0}(\delta) \times U_{y_0}(\varepsilon)$. $\square$

Теорема 2.45. *Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y}$ является открытым, $F : G \to \mathbb{R}$ и выполняются условия:*

1) F — непрерывно дифференцируемая в G функция;

2) $\exists\ M_0 = (x_0, y_0) = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y^\circ) \in G\ :\ F(x_0, y_0) = 0$;

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$.

Тогда существуют такие окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0, что $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset G$ и на $U_{x_0} \times U_{y_0}$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x)$, которая непрерывно дифференцируема в U_{x_0}, $f(x_0) = y_0$ и для всех точек $x \in U_{x_0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))},\ k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.18}$$

■ Условия теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 2.44, поэтому существуют такие окрестности U_{x_0} и U_{y_0}, что $U_{x_0}\times U_{y_0}\subset G$ и на $U_{x_0}\times U_{y_0}$ уравнение $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ определяет неявную функцию $y=f(x)$, которая непрерывна на U_{x_0}, $f: U_{x_0}\to U_{y_0}$ и $f(x_0)=y_0$.

Докажем, что функция f непрерывно дифференцируема на U_{x_0}. Для этого покажем существование и непрерывность в U_{x_0} частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ которая вычисляется по формуле (2.18). Фиксируем точку $\overline{x}\in U_{x_0}$, дадим этой точке приращение $\Delta\overline{x}=(\Delta x_1,0,\ldots,0)$ такое, что $\overline{x}+\Delta x\in U_{x_0}$. Положим $f(\overline{x})=\overline{y}$, $f(\overline{x}+\Delta x)=\overline{y}+\Delta f$, где $\Delta f=\Delta f_{\overline{x}}(\Delta x_1,0,\ldots,0)$. Тогда $\overline{y}\in U_{y_0}$, $\overline{y}+\Delta f\in U_{y_0}$. По определению неявной функции, определяемой уравнением, $F(\overline{x},\overline{y})=0$, $F(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta f)=0$. Следовательно,

$$\Delta F_{(\overline{x},\overline{y})}(\Delta x,\Delta f)=F(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta f)-F(\overline{x},\overline{y})=0.$$

По условию 1) теоремы $F\in C^1(U_{x_0}\times U_{y_0})$, поэтому по теореме Тейлора–Лагранжа (см. теорему 2.36) найдется точка $\eta_{\Delta x}$, принадлежащая отрезку, соединяющему точки $(\overline{x},\overline{y})$ и $(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta f)$, такая, что

$$\Delta F_{(\overline{x},\overline{y})}(\Delta x,\Delta f)=dF_{\eta_{\Delta x}}(\Delta x,\Delta f).$$

Учитывая выбор Δx, получим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\eta_{\Delta x})\,\Delta x_1+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta_{\Delta x})\,\Delta f=0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\eta_{\Delta x})\neq 0$, то

$$\frac{\Delta f_{\overline{x}}(\Delta x_1,0,\ldots,0)}{\Delta x_1}=-\frac{F'_{x_1}(\eta_{\Delta x})}{F'_y(\eta_{\Delta x})}\,. \tag{2.19}$$

Так как функция f непрерывна в точке $\overline{x}$, то $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}f(\overline{x}+\Delta x)=f(\overline{x})=\overline{y}$. По построению $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\eta_{\Delta x}=(\overline{x},\overline{y})$. Тогда, в силу непрерывности частных производных функции F, правая часть равенства (2.19) имеет предел при $\Delta x_1\to 0$, равный $-F'_{x_1}(\overline{x},f(\overline{x}))\Big/F'_y(\overline{x},f(\overline{x}))$. Следовательно, существует конечный предел и левой части равенства (2.19), то есть существует частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x})=-\frac{F'_{x_1}(\overline{x},\overline{y})}{F'_y(\overline{x},\overline{y})}\,.$$

Поскольку $\overline{x}$ — произвольная точка окрестности U_{x_0} и $\overline{y}=f(\overline{x})$, то на U_{x_0} определена функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)=-\dfrac{F'_{x_1}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}\,.$

Докажем ее непрерывность. Заметим, что функция $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x, f(x))$ является суперпозицией отображения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)), \ \varphi : U_{x_0} \longrightarrow U_{x_0} \times U_{y_0}$$

и функции $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$. Так как $\varphi \in C(U_{x_0})$, а $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} \in \ C(U_{x_0} \times U_{y_0})$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, f(x)) \in \ C(U_{x_0}).$$

По той же причине $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \in \ C(U_{x_0})$. Поскольку $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в $U_{x_0} \times U_{y_0}$, то функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ непрерывна в U_{x_0}.

Аналогично доказывается, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = \overline{2, n}$, существуют и непрерывны в U_{x_0}, а потому $f \in C^1(U_{x_0})$. $\square$

Замечание 1. Если выполнены условия 2)–3) теоремы 2.45, функция F дифференцируема в G и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке M_0, то можно доказать, что неявная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, дифференцируема в окрестности U_{x_0}.

Замечание 2. Если функция F p раз непрерывно дифференцируема на множестве G и выполнены условия 2)-3) теоремы 2.45, то найдутся такие окрестности U_{x_0} и U_{y_0}, что $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset G$ и на $U_{x_0} \times U_{y_0}$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x) \in C^p(U_{x_0})$, причем $f(x_0) = y_0$.

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 2.45, частные производные функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно найти без знания функции f и не пользуясь формулой (2.18).

■ Действительно, по определению неявной функции, определяемой уравнением, $F(x_1, \ldots, x_n,\, f(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$ на U_{x_0} Дифференцируя это тождество по переменной x_k, $k = 1, \ldots, n$, получим равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,\, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\, f(x))\, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0,$$

из которого легко найти $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. $\square$

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi : X \subset \mathbb{R}_x \to Y \subset \mathbb{R}_y$ и выясним, когда она имеет обратную в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$. Ясно, что обратную функцию к функции $y = \varphi(x)$, то есть функцию $x = \varphi^{-1}(y)$ можно рассматривать, как неявную функцию, определяемую функциональным уравнением $y - \varphi(x) = 0$. Поэтому ответ на поставленный вопрос является простым следствием предыдущих теорем (сравните с теоремой 4.6 из [4]).

Теорема 2.46. *Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}_x$, а Y — открытое множество в $\mathbb{R}_y$. Пусть функция $\varphi : X \to Y$ дифференцируема на X, и функция φ' непрерывна в X, а $\varphi'(x_0) \neq 0$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Тогда найдутся такие окрестности $U_{x_0} \subset X$ и $U_{y_0} \subset Y$, что $\varphi : U_{x_0} \to U_{y_0}$ и в U_{x_0} существует обратная функция $x = \varphi^{-1}(y)$, непрерывно дифференцируемая в U_{y_0} ($\varphi^{-1} : U_{y_0} \to U_{x_0}$) и*

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} \Bigg|_{x = \varphi^{-1}(y)}, \ \forall\, y \in U_{y_0}.$$

Пример 2.3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,1)$ до членов второго порядка включительно неявную функцию $z = z(x,y)$, определяемую функциональным уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$ в некоторой окрестности точки $M_0(1,1,1)$.

■ В данном случае $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$, а рассматриваемая функция $F(x,y,z) = z^3 - 2xz + y$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - 2x$, поэтому $\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 1 \neq 0$. Кроме того, $F(M_0) = 0$. В силу замечания 2 к теореме 2.45, данное уравнение в некоторой окрестности $U_{(1,1)} \times U_1$ точки M_0 определяет непрерывно дифференцируемую любое число раз неявную функцию $z = z(x,y)$ такую, что $z(1,1) = 1$. По определению неявной функции, определяемой уравнением, имеем на $U_{(1,1)}$ тождество $z^3(x,y) - 2xz(x,y) + y \equiv 0$. Продифференцируем его дважды в $U_{(1,1)}$:

$$3z^2(x,y)dz_{(x,y)}(dx,dy) - 2z(x,y)dx - 2x\,dz_{(x,y)}(dx,dy) + dy = 0,$$

$$6z(x,y)dz^2_{(x,y)}(dx,dy) + 3z^2(x,y)d^2z_{(x,y)}(dx,dy) -$$
$$- 4\,dz_{(x,y)}(dx,dy)dx - 2\,xd^2z_{(x,y)}(dx,dy) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $z(1,1) = 1$, получим, что

$$dz_{(1,1)}(dx,dy) = 2\,dx - dy,$$

$$d^2z_{(1,1)}(dx,dy) = -16\,dx^2 + 20\,dxdy - 6\,dy^2 = 0.$$

Теперь из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, при $dx \to 0,\ dy \to 0$ получаем представление

$$z(x,y) = z(1,1) + dz_{(1,1)}(dx,dy) + \frac{1}{2}\,d^2z_{(1,1)}(dx,dy) + o(\|\,(dx,dy)\,\|^2).$$

Но $dx = x - 1,\ dy = y - 1$, поэтому при $x \to 1,\ y \to 1$

$$z(x,y) = 1 + 2\,(x-1) - (y-1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\left(-16\,(x-1)^2 + 20\,(x-1)(y-1) - 6\,(y-1)^2\right) + o((x-1)^2 + (y-1)^2). \ \square$$

Пример 2.4. Найти точки локального экстремума и экстремальные значения неявной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением

$$x^2 + 6\,y^2 + z^2 + 4\,(xy + xz + yz) + 8\,(x + y + z) + 13 = 0.$$

■ Пусть $F(x, y, z) = x^2 + z^2 + 6\,y^2 + 4\,(xy + xz + yz) + 8\,(x + y + z) + 13$. Очевидно, что $F : \mathbb{R}^3_{x,y,z} \to \mathbb{R}$, F — бесконечно дифференцируемая функция и для любой точки $M(x, y, z)$ из $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 4\,x + 4y + 2z + 8$. Пусть

$$\Gamma = \{(x, y, z) : 4x + 4y + 2z + 8 = 0\},\ G = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}.$$

В силу теорем 2.44, 2.45, для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in\ G\backslash\Gamma$ существует окрестность $U_{M_0} = V_{(x_0,y_0)} \times W_{z_0}$, в которой уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет бесконечно дифференцируемую в $V_{(x_0,y_0)}$ функцию $z = z(x, y)$, причём $z(x_0, y_0) = z_0$ и $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ в окрестности $V_{(x_0,y_0)}$, то есть для всех точек $(x, y) \in V_{(x_0,y_0)}$ справедливо тождество

$$x^2 + 6y^2 + z^2(x, y) + 4\,(xy + xz(x, y) + yz(x, y)) +$$
$$+\ 8(x + y + z(x, y)) + 13 = 0$$

Найдем стационарные точки неявной функции $z = z(x, y)$, для чего продифференцируем последнее тождество в окрестности $V_{(x_0,y_0)}$, и, обозначая $dz = (dz)_{(x,y)}(dx, dy)$ получим

$$\begin{gathered} 2xdx + 12ydy + 2zdz + 4\,(xdy + ydx + xdz + \\ + zdx + ydz + zdy) + 8\,(dx + dy + dz) = 0. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Так как в стационарной точке $dz = (dz)_{(x,y)}(dx, dy) \equiv 0$, то

$$2xdx + 12ydy + 4\,(xdy + ydx + zdx + zdy) + 8\,(dx + dy) = 0, \forall\,(dx, dy) \in \mathbb{R}^2,$$

или $(2x + 4y + 4z + 8)\,dx + (4x + 12y + 4z + 8)\,dy = 0, \forall\,(dx, dy) \in \mathbb{R}^2$.

Так как в стационарной точке должно выполняться исходное уравнение, то для определения стационарной точки получаем систему:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z + 8 = 0, \\ 4x + 12y + 4z + 8 = 0, \\ x^2 + 6y^2 + z^2 + 4(xy + xz + yz) + 8(x + y + z) + 13 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y, \\ z = y - 2, \\ 5y^2 - 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

Её решением являются точки $M_1(-4, 1, -1)$ и $M_2(4/5, -1/5, -11/5)$. Так как точки M_1 и M_2, что легко проверить, лежат в $G\backslash\Gamma$, то существуют такие окрестности $U_k = V_k \times W_k$, $k = 1, 2$, точек M_k, в которых заданное функциональное уравнение определяет бесконечно дифференцируемые в окрестности V_k неявные функции $z = z_k(x, y)$, для которых

$$z_1(-4, 1) = -1, \quad z_2(4/5, -1/5) = -11/5.$$

Выясним, имеет ли функция $z = z_1(x, y)$ в точке $(-4, 1)$ локальный экстремум. Продифференцируем в точке $(-4, 1)$ тождество (2.20) :

$$(dx)^2 + 6(dy)^2 + (dz)^2 + zd^2z + 2(2\,dx\,dy + x\,d^2z + \\ + 2dx\,dz + y\,d^2z + 2dy\,dz) + 4d^2z = 0.$$

Учтём здесь, что $dz = (dz_1)_{(-4,1)}(dx, dy) = 0$, $z_1(-4, 1) = -1$ и получим

$$(d^2z_1)_{(-4,1)}(dx, dy) = \frac{1}{3}\left((dx)^2 + 4dxdy + 6(dy)^2\right) = \\ = \frac{1}{3}\left((dx + 2dy)^2 + 2(dy)^2\right) > 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}.$$

Так как квадратичная форма $(d^2z_1)_{(-4,1)}(dx, dy)$ положительно определена в $\mathbb{R}^2$, то в точке $(-4, 1)$ функция $z = z(x, y)$ имеет локальный минимум и $z(-4, 1) = -1$.

Определим теперь, имеет ли функция $z = z_2(x, y)$ локальный экстремум в точке $(4/5, -1/5)$. Аналогично предыдущему,

$$(d^{\,2}z_2)_{(4/5,-1/5)}(dx, dy) = -\frac{1}{3}\,\Big((dx)^2 + 4dx\,dy + 6(dy)^2\Big) =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\Big((dx + 2dy)^2 + 2(dy)^2\Big) < 0 \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Значит, квадратичная форма $(d^2z_2)_{(4/5,-1/5)}(dx, dy)$ отрицательно определена и, в точке $(4/5, -1/5)$ функция $z = z_2(x, y)$ имеет локальный максимум, причём $z_2(4/5, -1/5) = -11/5$. $\square$

Пример 2.5. Доказать, что уравнение

$$x^2y + x\,e^z + x = 0 \tag{2.21}$$

a) определяет в некоторой окрестности точки $M_0(-2, 1, 0)$ непрерывно дифференцируемую неявную функцию $x = x(y, z)$ и найти $x'_y(1, 0)$;

b) определяет в некоторой окрестности точки M_0 непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = y(x, z)$ и найти $dy_{(-2,0)}(\Delta x, \Delta z)$.

$\blacksquare$ a) Пусть $F(x, y, z) = x^2y + x\,e^z + x$. Функция F непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ и

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + e^z + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1, 0) = -2 \neq 0.$$

Согласно теореме 2.45, условия которой выполнены, существуют такие окрестности U_{-2}, $U_{(1,0)}$ точек $x = -2$ и $(y, z) = (1, 0)$, соответственно, что уравнение (2.21) определяет в окрестности $U_{-2} \times U_{(1,0)}$ точки M_0 непрерывно дифференцируемую неявную функцию $x = x(y, z)$, действующую из $U_{(1,0)}$ в U_{-2} и такую, что $x(1, 0) = -2$. В силу определения неявной функции, в окрестности $U_{(1,0)}$ имеет место тождество

$$x^2(y,z)\,y + x(y,z)\,e^z + x(y,z) \equiv 0.$$

Поэтому $2x(y,z)\,x'_y(y,z)\,y + x^2(y,z) + x'_y(y,z)\,e^z + x'_y(y,z) = 0$. Но так как $x(1,0) = -2$, то $x'_y(1,0) = 2$.

b) Так как $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = x^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(-2,1,0) = 4 \neq 0$, то существуют окрестности $U_1, U_{(-2,0)}$ точек $y = 1$ и $(x,z) = (-2,0)$, соответственно, такие, что на $U_1 \times U_{(-2,0)}$ уравнение (2.21) определяет непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = y(x,z)$, действующую из $U_{(-2,0)}$ в U_1 и такую, что $y(-2,0) = 1$. По определению неявной функции $x^2 y(x,z) + x\,e^z + x \equiv 0$ в окрестности $U_{(-2,0)}$. Поэтому

$$2x\,dx + x^2\,dy_{(x,z)}(dx,dz) + dx\,e^z + x\,e^z\,dzdx = 0,$$

и

$$-4dx + 4dy_{(-2,0)}(dx,dz) + dx - 2dz + dx = 0.$$

Отсюда следует, что $dy_{(-2,0)}(dx,dz) = \dfrac{1}{2}\,dx + \dfrac{1}{2}\,dz$. $\square$

Пример 2.6. Пусть $a > 0$ и функция $\varphi : (-a,a) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в $(-a,a)$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(y)| \le k < 1$, $\forall\, y \in (-a,a)$. Показать, что функция $x = y + \varphi(y)$ имеет в некоторой окрестности нуля $(-\varepsilon,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемую обратную функцию.

■ Так как функция $x(y)$ непрерывно дифференцируема в $(-a,a)$ и для всех y из $(-a,a)$, $x'(y) = 1 + \varphi'(y) > 0$, то, согласно теореме 2.46 существования обратной функции, существует такая окрестность $(-\varepsilon,\varepsilon)$ нуля, что на ней определена обратная непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x)$. $\square$

Некоторые задачи для неявных функций можно решить с помощью теории параметрически заданных функций.

2.17 Неявное отображение, определяемое системой уравнений

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $Y \subset \mathbb{R}^m_y$ и $F : X \times Y \to \mathbb{R}^m$, где $m \geq 2$. В этом случае соотношение $F(x, y) = 0$ принимает вид

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Если отображение F дифференцируемо в точке $M_0(x_0, y_0)$, то его матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(M_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{i_1}}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{i_2}}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{i_k}}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{j_1}}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{j_{m-k}}}(M_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{i_1}}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{i_2}}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{i_k}}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{j_1}}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{j_{m-k}}}(M_0) \end{vmatrix},$$

в котором $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{m-k} \leq m$, называют якобианом отображения F (или системы функций $F_1, \ldots, F_m$) по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{m-k}}$ в точке M_0 и обозначают одним из символов:

$$\frac{DF}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{m-k}})}(M_0), \ \ \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k}, \partial y_{j_1}, \ldots, \partial y_{j_{m-k}})}(M_0).$$

В частности, при $m = 1$, $\dfrac{D(F)}{D(y)}(M_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)$.

Определение 2.62. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $Y \subset \mathbb{R}^m_y$, $F : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$). Если для каждой точки $x \in X$ существует единственная точка $y = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in Y$ такая, что $F(x, f(x)) = 0$, то говорят, что на множестве $X \times Y$ система уравнений (2.22) (или отображение $F(x, y) = 0$) определяет неявное отображение $y = f(x)$, $f : X \to Y$, или систему неявных функций*

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что неявное отображение $y = f(x)$, определяемое системой уравнений (2.22) на $X \times Y$ обладает тем свойством, что для $k = 1, 2, \ldots, m$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0 \text{ на } X.$$

Теорема 2.47 (существования неявного отображения)**.** *Пусть G — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$, $F : G \to \mathbb{R}^m$ и выполнены следующие условия:*

1) $F \in C^1(G)$;

2) $\exists\, M_0 = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ) \in G \,:\, F(M_0) = 0$;

3) якобиан $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M_0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0 такие, что $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset G$ и на $U_{x_0} \times U_{y_0}$ система (2.22) определяет неявное, непрерывно дифференцируемое в U_{x_0} отображение $f : U_{x_0} \longrightarrow U_{y_0}$, причем $f(x_0) = y_0$.

■ Наметим схему доказательства теоремы. Теорема доказывается методом математической индукции. При $m = 1$ утверждение доказано (при $m = 1$ имеет место теорема 2.45). Предположим, что теорема верна для системы первых $m-1$ функциональных уравнений. Докажем результат для системы m уравнений. По предположению

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(M_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}(M_0) & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}(M_0) \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому, по крайней мере, один из миноров $(m-1)$-го порядка этого якобиана отличен от нуля. Без ограничения общности, будем считать, что отличен от нуля левый верхний минор порядка $m-1$. Тогда, в силу предположения индукции система из первых $m-1$ уравнений системы (2.22) разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Точнее, найдутся такие окрестности $U_{(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_m^\circ)}$ и $U_{(y_1^\circ, \ldots, y_{m-1}^\circ)}$ точек $M_0'(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_m^\circ)$ и $N_0(y_1^\circ, \ldots, y_{m-1}^\circ)$ соответственно, что в $U_{M_0'} \times U_{N_0}$ система первых $m-1$ уравнений системы (2.22) определяет неявное, непрерывно дифференцируемое отображение

$$\varphi : U_{M_0'} \longrightarrow U_{N_0},\ y_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n, y_m) = \varphi_k(x, y_m),\ k = 1, \ldots, m-1.$$

Подставим найденные функции в левую часть m-го уравнения системы:

$$\Phi(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m).$$

Тогда в $U_{M'_O}$ справедливо тождество $\Phi(x, y_m) = 0$. Функция Φ непрерывно дифференцируема в $U_{M'_0}$ и можно доказать, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m}(M'_0) \neq 0$. Применяя к уравнению $\Phi(x, y_m) = 0$ теорему 2.45, получим окрестности U_{x_0} и $U_{y^o_m}$ такие, что в $U_{x_0} \times U_{y^o_m}$ данное уравнение определяет неявную непрерывно дифференцируемую в U_{x_0} функцию $y_m = f_m(x)$, для которой $f_m(x_0) = y^o_m$. Рассматривая систему функций $y_k = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, где

$$f_k(x) = \varphi_k(x, f_m(x)), k = 1, \ldots, m-1,\ y_m = f_m(x),$$

можно доказать, что она является решением системы (2.22) в U_{x_0}, причём единственным. $\square$

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 2.47 и функции F_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, p раз непрерывно дифференцируемы в G, то неявное отображение f, определяемое системой уравнений (2.22), p раз непрерывно дифференцируемо на U_{x_0}.

Замечание 2. Чтобы выяснить, будет ли система уравнений (2.22) определять систему из m неявных функций в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), следует вычислить ранг матрицы Якоби отображения F в точке (x_0, y_0). Если он равен m и отличным от нуля является якобиан

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{m-k}})}(x_0, y_0),$$

то система (2.22) определяет $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k},\ y_{j_1}, \ldots, y_{j_{m-k}},$ как неявные функции остальных переменных.

Замечание 3. При выполнении условий теоремы можно вычислять в точке x_0 дифференциалы и все частные производные неявных функций $y_k = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, определяемых системой (2.22), без знания явного вида функций f_k.

■ Так как $y_k = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$ — система неявных функций, определяемая системой уравнений (2.22), то $F(x, f(x)) = 0$ для всех $x \in U_{x_0}$, то есть

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Левые части этих тождеств непрерывно дифференцируемы в U_{x_0}. Пользуясь свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка функции многих переменных, получим в точке x_0 следующие равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_0, f(x_0))\, dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(x_0, f(x_0))\, (df_j)_{x_0}(dx) = 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Определитель полученной системы линейных относительно дифференциалов $(df_j)_{x_0}(dx)$, $j = 1, \ldots, n$, уравнений отличен от нуля, поскольку совпадает с якобианом $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(x_0, y_0)$, а потому система имеет единственное решение. $\square$

Чтобы вычислить в точке x_0 частные производные по переменной x_i, $i = 1, \ldots, m$, неявных функций $y_k = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, подставим функции f_k, $k = 1, \ldots, m$ в систему (2.22), решением которой они являются в U_{x_0}, пользуясь теоремой о дифференцируемости суперпозиции, продифференцируем полученные тождества в окрестности U_{x_0} по переменной x_i, $i = 1, \ldots, m$, и получим:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x_0, f(x_0)) + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_p}(x_0, f(x_0)) \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x_0) = 0, \ k = 1, \ldots, m. \qquad (2.23)$$

Как и раньше, система уравнений (2.23) является системой линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)$, определителем которой является якобиан $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M_0) \neq 0$. Поэтому система (2.23) имеет единственное решение.

Пример 2.1. Показать, что в окрестности точки $M_0(2, -1, 1)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

определяет y и z как неявные функции от x и найти производные этих функций в точке $x_0 = 2$.

■ В данном случае $F_1(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 2z^2$, $F_2(x, y, z) = x + y + z - 2$. Ясно, что соответствующее отображение F непрерывно дифференцируемо в $\mathbb{R}^3$ и $F_k(M_0) = 0$, $k = 1, 2$. Кроме того,

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} -4\,y & -4\,z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4y + 4z.$$

Поэтому $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(M_0) = 8 \neq 0$. Требования теоремы 2.47 в точке M_0 выполнены. Значит найдутся окрестности U_2 точки $x = 2$ и $U_{(-1,1)}$ точки $(y, z) = (-1, 1)$ такие, что заданная система уравнений определяет в окрестности $U_2 \times U_{(-1,1)}$ систему неявных, непрерывно дифференцируемых в U_2 функций $y = y(x)$, $z = z(x)$. При этом для всех $x \in U_2$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2(x) - 2z^2(x) = 0 \\ x + y(x) + z(x) = 2 \end{cases}$$

Продифференцируем эти тождества в точках $x \in U_2$:

$$\begin{cases} 2x - 4y(x)y^{'}(x) - 4z(x)z^{'}(x) = 0 \\ 1 + y^{'}(x) + z^{'}(x) = 2 \end{cases}$$

При $x = 2$ относительно $y'(2)$ и $z'(2)$ получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4 + 4y^{'}(2) - 4z^{'}(2) = 0, \\ 1 + y^{'}(2) + z^{'}(2) = 2. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $y'(2) = -1$, $z'(2) = 0$. $\square$

По аналогии с понятием обратной функции к заданной функции одной вещественной переменной введём понятие обратного отображения.

Определение 2.63. *Пусть φ — биективное отображение из $X \subset \mathbb{R}^n$ в $Y \subset \mathbb{R}^n$. Отображение, действующее по правилу*

$$\forall\, y \in Y \to x \in X \;:\; \varphi(x) = y,$$

называют обратным к φ и обозначают φ^{-1}.

Таким образом, $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x$, $\forall\, x \in X$ и $(\varphi \circ \varphi^{-1})(y) = y$, $\forall\, y \in Y$.

Теорема 2.48 (об обратном отображении). *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n_x$ и отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : G \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:*

1) φ непрерывно дифференцируемо в G;

2) $\exists\, x_0 \in G \;:\; \dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда найдутся окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки $y_0 = \varphi(x_0)$ такие, что отображение $\varphi : U_{x_0} \to U_{y_0}$ имеет непрерывно дифференцируемое обратное отображение $\varphi^{-1} : U_{y_0} \to U_{x_0}$. При этом, для всех $y \in U_{y_0}$

$$\frac{D(\varphi_1^{-1}, \ldots, \varphi_n^{-1})}{D(y_1, \ldots, y_n)}(y) = \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(x)\right)^{-1}, \text{ где } x = \varphi^{-1}(y).$$

■ Рассмотрим отображение $F : G \times \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}^y_n$, $F(x, y) = \varphi(x) - y$. Тогда

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) - y_k,\; k = 1, \ldots, n.$$

Так как на $G \times \mathbb{R}^m_y$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i} = 0$, если $i \neq k$, $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_k} = -1$, $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$, то F непрерывно дифференцируемо на $G \times \mathbb{R}^n_y$, а его матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$

По условию $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x_0)\neq 0$. Поэтому $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x_0,y_0)\neq 0$. Согласно теореме 2.47 найдутся окрестности $U_{x_0}\subset G$ и $U_{y_0}\subset\mathbb{R}^y_n$ такие, что на $U_{x_0}\times U_{y_0}$ система уравнений

$$\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)-y_k=0,\quad k=1,\ldots,n,$$

определяет непрерывно дифференцируемое в U_{y_0} отображение $x=\psi(y)$, причём $x_0=\psi(y_0)$. По определению неявного отображения для всех $y\in U_{y_0}$ имеет место равенство $\varphi(\psi(y))-y=0$. Значит $\psi=\varphi^{-1}$. Наконец, в силу теоремы 2.29 о дифференцируемости суперпозиции, матрица Якоби $\mathcal{J}_{\varphi\circ\psi}$ отображения $\varphi\circ\psi$, являясь единичной матрицей, равна

$$\mathcal{J}_{\varphi\circ\psi}(y)=\mathcal{J}_\varphi(\psi(y))\cdot\mathcal{J}_\psi(y),\ \forall\, y\in U_{y_0}.$$

Следовательно, $\left|\mathcal{J}_\psi(y)\right|=\dfrac{1}{\left|\mathcal{J}_\varphi(x)\right|}\Bigg|_{x=\psi(y)}$. Но для всех $y\in U_{y_0}$

$$\left|\mathcal{J}_\psi(y)\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(y) & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(y)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}(y) & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}(y)\end{vmatrix}=\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}(y).$$

Аналогично, $\left|\mathcal{J}_\varphi(x)\right|=\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x)$. Утверждение доказано. $\square$

Теория существования неявных функций применяется во многих разделах математического анализа. Мы рассмотрим далее всего два примера: функциональную зависимость между функциями и условный экстремум функций многих переменных.

2.18 Функциональная зависимость

Определение 2.64. *Пусть функции $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на множестве $G\subset\mathbb{R}^n_x$, $m\le n$. Если найдется открытое множество $Q\subset\mathbb{R}^{m-1}$ и непрерывно дифференцируемая на Q функция F такие, что для всех $x\in G$*

$$1)\ \varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_{m-1}(x))\in Q,\quad 2)\ (F\circ\varphi)(x)=\varphi_m(x),$$

то говорят, что функция φ_m функционально зависит на G от функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1}$.

Определение 2.65. *Функции (или система функций) $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ называются функционально зависимыми на открытом множестве G, если хоть одна из них зависит на G от остальных. В противном случае эти функции называют функционально независимыми на G.*

Пример 2.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, бесконечно дифференцируемые функции

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n.$$

Так как функция $F(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_2$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ и

$$F(\varphi_1(x), \varphi_3(x)) = \varphi_2(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

то функция φ_2 зависит на любом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ от функций φ_1 и φ_3, а потому $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функционально зависимые на G функции.

Пример 2.2. Функции $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ являются функционально независимыми на любом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$.

■ Функции φ_1 и φ_2 бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что функция φ_2 является зависимой от φ_1 на некотором открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, то есть $\varphi_1 : G \to D \subset \mathbb{R}$, и существует непрерывно дифференцируемая функция $F : D \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi_2(x_1, x_2) = F(\varphi_1(x_1, x_2)),\ \forall\, (x_1, x_2) \in G. \tag{2.24}$$

Пусть $a = (a_1, a_2) \in G$. Поскольку G — открытое множество, то G содержит некоторый интервал прямой $x_1 + x_2 = a_1 + a_2$, проходящий через точку a. На этом интервале функция φ_1 принимает постоянное значение, равное $a_1 + a_2$, а функция φ_2 — переменные значения, равные $2x_1 - (a_1 + a_2)$. Поэтому равенство (2.24) на указанном участке прямой должно принять вид

$$2x_1 - (a_1 + a_2) = F(a_1 + a_2),$$

что невозможно, значит на G функция φ_2 не зависит от φ_1. □

В курсе линейной алгебры вводится понятие линейной зависимости функций: функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на G, если

$$\exists\, a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, m : \sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k \equiv 0 \text{ на } G, \text{ но } \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \neq 0.$$

Ясно, что если функции $\varphi_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы на G и линейно зависимы на G, то они функционально зависимы на G. Обратное неверно. Подтверждением этого являются функции, приведенные в примере 2.1.

Докажем необходимое условие существования функциональной зависимости между функциями.

Теорема 2.49. *Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n_x$, $m \le n$. Если система этих функций зависима на G, то в каждой точке множества G ранг матрицы Якоби соответствующего отображения φ меньше m.*

■ Не нарушая общности будем считать, что функция φ_m зависит на G от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, то есть существует открытое множество $Q \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и непрерывно дифференцируемая функция $F : Q \to \mathbb{R}$ такие, что

$$(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) \in Q, \, \forall\, x \in G$$

$$\varphi_m(x) = F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)), \, \forall\, x \in G.$$

По теореме 2.29 о дифференцируемости суперпозиции в точке $a \in G$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}(\varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots, \varphi_{m-1}(a)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(a), \; i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим, например, определитель $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(a)$ матрицы Якоби отображения φ. Если его k-ую строку ($k = 1, \ldots, m-1$) умножить на $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_k}(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_{m-1}(a))$ и полученные строки вычесть из m-ой строки, то, очевидно, последняя будет состоять из нулей. Но поскольку такое преобразование не меняет определителя, то

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(a) = 0, \forall a \in G.$$

Аналогично показывается, что любой другой определитель m-го порядка матрицы Якоби отображения φ (по другому набору из m переменных) в любой точке $a \in G$ равен нулю. □

Следствие. Если $m = n$ и система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ зависима на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то якобиан $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) = 0$ в любой точке $a \in G$.

Укажем достаточные условия функциональной независимости функций.

Теорема 2.50. *Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^x_n$, $m \le n$. Если в некоторой точке $a \in G$ ранг матрицы Якоби отображения φ равен m, то существует такая окрестность точки a, в которой функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ функционально независимы.*

■ Для определенности будем считать, что

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(a) \ne 0.$$

В силу локальных свойств непрерывной в точке функции, найдется окрестность U_a точки a, в которой этот определитель сохраняет знак. Доказательство теоремы проведём методом "от противного". Пусть функция φ_m в некоторой окрестности $U'_a \subset U_a$ точки a зависит от функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$. Тогда по теореме 2.49 ранг матрицы Якоби отображения φ в каждой точке $x \in U'_a$ должен быть меньше m, что противоречит сказанному ранее. $\square$

Теорема 2.51. *Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n_x$, $m < n$, и ранг матрицы Якоби отображения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ не выше s $(s < m)$ на множестве G и равен s в точке a. Пусть, не нарушая общности,*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}(a) \neq 0.$$

Тогда найдется лежащая в G окрестность $\widetilde{U}_a$ точки a, в которой система функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ не является зависимой, остальные же функции $\varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \ldots, \varphi_m$ зависят на $\widetilde{U}_a$ от функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, то есть существуют непрерывно дифференцируемые функции Φ_j, для которых выполняются тождества

$$\varphi_j(x) = \Phi_j(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)),\ \forall\, x \in \widetilde{U}_a,\ j = s+1, \ldots, m.$$

■ Поскольку для функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ в точке a выполнены условия теоремы 2.50, то найдется такая окрестность U_a точки a, в которой функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ являются функционально независимыми. Докажем теперь, например, что функция φ_{s+1} является зависимой от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ на некоторой окрестности $\widetilde{U}_a \subset U_a$. Положим $\varphi_j(a) = b_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, и

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_s) = \varphi_j(x) - y_j,\ j = 1, 2, \ldots, s.$$

Рассмотрим систему

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_s) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.25}$$

Заметим, что $F_j : G \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, функции F_j непрерывно дифференцируемы и $F_j(M_0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$ в точке $M_0 = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s)$. Матрица Якоби отображения $F = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{s+1}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_s} & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_{s+1}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_n} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку функции φ_j не зависят от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_s$, то

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}(M_0) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}(a) \neq 0.$$

Так как все условия теоремы 2.47 существования неявного отображения (системы неявных функций) выполнены, то существуют окрестности $U_{a'}$ точки $a' = (a_1, \ldots, a_s)$, $V_{a''}$ точки $a'' = (a_{s+1}, \ldots, a_n)$, V_b точки $b = (b_1, \ldots, b_s)$ такие, что $U_{a'} \times V_{a''} \subset U_a$ и на декартовом произведении $U_{a'} \times (V_{a''} \times V_b)$ система (2.25) определяет систему неявных функций

$$x_i = f_i(x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_s),\ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{2.26}$$

непрерывно дифференцируемых на $V_{a''} \times V_b$, при этом

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_s) : V_{a''} \times V_b \to U_{a'},$$

$$f_k(a_{s+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s) = a_k,\ k = 1, \ldots, s.$$

Заметим, что, если точка

$$(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \in U_{a'} \times V_{a''} \times V_b$$

и удовлетворяет системе (2.25), то ее координаты связаны равенствами (2.26). Далее, на множестве $V_{a''} \times V_b$

$$F_k(f(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s), x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \equiv 0,\ k = 1, \ldots, s. \tag{2.27}$$

Если положить

$$\psi(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) = (f(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s), x_{s+1}, \ldots, x_n),$$

то ψ будет непрерывно дифференцируемым на $V_{a''} \times V_b$ отображением и

$$\psi(V_{a''} \times V_b) \subset U_{a'} \times V_{a''} \subset U_a.$$

Учитывая представление функций F_k, получим, что тождества (2.27) на множестве $V_{a''} \times V_b$ имеют вид

$$\varphi_k \circ \psi(x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_s) - y_k \equiv 0,\ \ k = 1, 2, \ldots, s.$$

Левые их части непрерывно дифференцируемы на $V_{a''} \times V_b$. Продифференцируем полученные тождества по переменной x_l, $l = s+1, s+2, \ldots, n$, и получим

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \circ \psi\right) \frac{\partial f_1}{\partial x_l} + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} \circ \psi\right) \frac{\partial f_s}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \circ \psi \equiv 0,\ k = 1, 2 \ldots, s. \tag{2.28}$$

Теперь рассмотрим функцию $F_{s+1} = \varphi_{s+1} \circ \psi : V_{a''} \times V_b \to \mathbb{R}$. Она непрерывно дифференцируема на $V_{a''} \times V_b$ и $\dfrac{\partial F_{s+1}}{\partial x_l} =$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_1} \circ \psi\right) \frac{\partial f_1}{\partial x_l} + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_s} \circ \psi\right) \frac{\partial f_s}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_l} \circ \psi,\ l = s+1, \ldots, n.$$

По условию теоремы в окрестности U_a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_s} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_{s+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_s} & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_{s+1}} \\ - & - & - & - & \\ \dfrac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_s} & \dfrac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_{s+1}} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Поскольку минор s-ого порядка в левом верхнем углу отличен от нуля на U_a, то $(s+1)$-ая строка является линейной комбинацией остальных, то есть существуют числа γ_k, $k = 1, 2, \dots, s$, такие, что на U_a

$$\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}, \; j = 1, 2, \dots, s, s+1.$$

Учитывая тождества (2.28), получим на $V_{a''} \times V_b$

$$\frac{\partial F_{s+1}}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_j} \circ \psi\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_l} \circ \psi =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{s} \gamma_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j} \circ \psi\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l} \circ \psi\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \left(\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j} \circ \psi\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l} \circ \psi\right) \equiv 0, \; l = s+1, s+2, \dots, n.$$

Поэтому на $V_{a''} \times V_b$ функция F_{s+1} не зависит от переменных $x_{s+1}, \dots, x_n$, то есть

$$(\varphi_{s+1} \circ \psi)\,(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_s) = \Phi_{s+1}(y_1, y_2, \dots, y_s),$$

причем функция Φ_{s+1} непрерывно дифференцируема на V_b. По условию теоремы функции φ_j непрерывны на G. Поскольку они непрерывны в точке a, то по окрестности V_b точки b можно найти такие окрестности $\widetilde{U}_{a'} \subset U_{a'}$ и $\widetilde{V}_{a''} \subset V_b$, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in \widetilde{U}_{a'} \times \widetilde{V}_{a''} \subset U_a$ точка $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_s(x))$ принадлежит V_b. Поэтому

$$x_j = f_j(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_s), \; j = 1, 2, \dots, s.$$

Следовательно, для всех $x \in \widetilde{U}_a = \widetilde{U}_{a'} \times \widetilde{V}_{a''}$ получаем, что $\varphi_{s+1}(x) =$

$$= \varphi_{s+1}(f_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, f_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, x_n) = \quad (2.29)$$

$$= (\varphi_{s+1} \circ \psi)(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) = \Phi_{s+1}(y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Но, в силу сказанного, $y_j = \varphi_j(x)$, $\forall\, x \in \widetilde{U}_a$, $j = 1, 2, \ldots, s$, и

$$\varphi_{s+1}(x) = \Phi_{s+1}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)),\ \forall\, x \in \widetilde{U}_a. \ \Box$$

Вернемся к примеру 2.1. Пусть

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Матрица Якоби соответствующего отображения φ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 & x_1 + x_3 + x_4 & x_1 + x_2 + x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, в том, что все определители 3-го порядка тождественно равны нулю в $\mathbb{R}^4$, а в любой точке $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, у которой не все четыре координаты совпадают, ранг матрицы равен 2. Пусть для определенности точка $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ такова, что $x_1^0 \neq x_2^0$. Тогда в точке M_0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Согласно теореме 2.51, существует окрестность $\widetilde{U}_{M_0}$ такая, что в ней функции φ_1 и φ_2 являются функционально независимыми, а функция φ_3 является зависимой от φ_1 и φ_2.

В примере 2.2 матрица Якоби соответствующего отображения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

поэтому ее ранг равен 2 и функции φ_1 и φ_2 являются функционально независимыми в любом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$.

2.19 Условный экстремум функции многих переменных

В различных приложениях математического анализа часто встречается задача поиска экстремума (наибольшего или наименьшего значения) функции многих переменных, аргументы которой подчинены дополнительным условиям.

Пусть G — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}_{x,y}$ и $f : G \to \mathbb{R}$. Требуется найти в G точки экстремума функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ от $m + n$ переменных при наличии m условий

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0,\ k = 1, \ldots, m, \tag{2.30}$$

которые обычно называют условиями (или уравнениями) связи.

Обозначим через Γ_F множество тех точек $(x,y) \in G$, для которых выполняются условия связи, то есть для которых $F(x,y)=0$.

Определение 2.66. *Будем говорить, что точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой локального условного максимума (минимума) функции f при условиях связи (2.30), если $M_0 \in \Gamma_F$ и найдётся такая окрестность U_{M_0} точки M_0, что $U_{M_0} \subset G$ и $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ (соответственно, $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$) для всех точек $(x,y) \in U_{M_0} \bigcap \Gamma_F$.*

Часто, чтобы подчеркнуть ситуацию, точки локального экстремума функции многих переменных называют точками локального безусловного экстремума. Ясно, что если функция f имеет в точке M_0 локальный безусловный максимум (минимум) и $M_0 \in \Gamma_F$ при условиях связи (2.30), то f имеет в точке M_0 локальный условный максимум (минимум).

Далее будем считать, что функция f и отображение F непрерывно дифференцируемы в G, более того, якобиан $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(M_0)$ отображения F в точке $M_0 \in \Gamma_F$ отличен от нуля, то есть выполнены условия теоремы 2.47. Поэтому найдутся окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0 такие, что $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset G$ и в окрестности $U_{x_0} \times U_{y_0}$ система функциональных уравнений (2.30) определяет систему m неявных функций

$$y_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ y_m = \varphi_m(x_1,\ldots,x_n),$$

которые непрерывно дифференцируемы на U_{x_0} и

$$\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) : U_{x_0} \longrightarrow U_{y_0},\ \varphi(x_0) = y_0.$$

Лемма 2.8. *Если точка M_0 и функции $F_k,\ k=1,\ldots,m$, удовлетворяют всем перечисленным выше условиям, то*

$$\Gamma_F \bigcap (U_{x_0} \times U_{y_0}) = \{(x,y) \in G \mid y = \varphi(x),\ x \in U_{x_0}\}.$$

■ Пусть $D = \{(x,y) \in G \mid y = \varphi(x),\ x \in U_{x_0}\}$. Если $(\overline{x},\overline{y})$ — произвольная точка множества $\Gamma_F \bigcap (U_{x_0} \times U_{y_0})$, то $\overline{x} \in U_{x_0}$, $\overline{y} \in U_{y_0}$ и $F(\overline{x},\overline{y}) = 0$. Поскольку $\varphi : U_{x_0} \to U_{y_0}$ является неявным отображением, определяемым соотношением $F(x,y)=0$ на множестве $U_{x_0} \times U_{y_0}$, то $(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x},\varphi(\overline{x})) \in D$. Следовательно, $\Gamma_F \bigcap (U_{x_0} \times U_{y_0}) \subset D$.

Обратно, пусть $\overline{x}$ — произвольный элемент из U_{x_0} и $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$. Тогда $\varphi(\overline{x}) \in U_{y_0}$ и по определению 2.64 неявного отображения, определяемого системой уравнений (2.30), $F(\overline{x},\varphi(\overline{x})) = 0$. Поэтому

$$(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x},\varphi(\overline{x})) \in (U_{x_0} \times U_{y_0}) \bigcap \Gamma_F,\ \text{то есть } D \subset \Gamma_F \bigcap (U_{x_0} \times U_{y_0}). \ \square$$

Лемма 2.9 (критерий условного экстремума). *Пусть функция f и отображение F удовлетворяют всем перечисленным выше условиям. Чтобы функция f имела в точке $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей множеству Γ_F, условный локальный максимум (минимум), необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(x) = f(x, \varphi(x))$ имела в точке x_0 локальный безусловный максимум (минимум).*

■ Пусть функция f имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум при условии связи (2.30). Тогда существует окрестность $U^0_{M_0}$ точки M_0 такая, что $U^0_{M_0} = U^0_{x_0} \times U^0_{y_0} \subset G$ и для всех $(x, y) \in U^0_{x_0} \times U^0_{y_0} \bigcap \Gamma_F$ выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$. Не нарушая общности, можно считать, что $U^0_{x_0} \times U^0_{y_0} = U_{x_0} \times U_{y_0}$. Согласно лемме 2.8 каждую точку (x, y) из найденной окрестности, принадлежащую Γ_F, можно представить в виде $(x, y) = (x, \varphi(x))$. Поэтому найдена окрестность $U^0_{x_0}$ такая, что

$$f(x, \varphi(x)) \le f(x_0, y_0), \, \forall\, x \in U^0_{x_0}.$$

Но $y_0 = \varphi(x_0)$. Следовательно, $\psi(x) \le \psi(x_0)$, $\forall\, x \in U^0_{x_0}$, то есть функция ψ имеет в точке x_0 локальный максимум.

Наоборот, пусть функция ψ имеет в точке x_0 локальный максимум, то есть, существует такая окрестность $U^0_{x_0} \subset U_{x_0}$, что $\psi(x) \le \psi(x_0)$, для всех точек $x \in U^0_{x_0}$, или $f(x, \varphi(x)) \le f(x, \varphi(x_0))$, $\forall\, x \in U^0_{x_0}$. Учитывая лемму 2.8 и определение неявного отображения φ, определяемого системой уравнений (2.30), получим, что $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$, $\forall\, (x, y) \in (U^0_{x_0} \times U_{y_0}) \bigcap \Gamma_F$. Последнее означает, что функция f имеет в точке M_0 локальный условный максимум при условиях связи (2.30). □

Найдем необходимые условия для точки локального условного экстремума функции многих переменных. Так как функция f и отображение F принадлежат классу $C^1(G)$, то условие $d\psi_{x_0}(dx) = 0$, $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n$ является необходимым условием локального экстремума функции $\psi(x) = f(x, \varphi(x))$ в точке x_0. В силу свойства инвариантности формы первого дифференциала это значит, что

$$d\psi_{x_0}(dx) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(M_0) dy_k = 0, \tag{2.31}$$

Здесь $dy_k = (d\varphi_k)_{x_0}(dx)$, $k = 1, \ldots, m$. Выражение для $(d\varphi_k)_{x_0}(dx)$ можно найти, не зная явного представления функций φ_k, $k = 1, \ldots, m$. Поскольку $(d\varphi_k)_{x_0}(dx)$ являются функциями, линейными относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, то подставляя их в равенство (2.31), после приведения подобных членов, получим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \, dx_k = 0, \, \forall\, dx \in \mathbb{R}^n. \tag{2.32}$$

Здесь Q_k — функции от значений частных производных первого порядка функций f и F_i, $i = 1, \ldots, m$, вычисленных в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть Q_k являются функциями от x_0 и y_0. Поскольку тождество (2.32) выполняется для всех $dx \in \mathbb{R}^n$, то (2.32) равносильно системе

$$Q_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Наконец, учитывая, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям связи (2.30) ($M_0 \in \Gamma_F$ по определению 2.66), присоединим к полученной системе ещё m уравнений связи $F_k(x_0, y_0) = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Получим систему $n + m$ уравнений от неизвестных $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0$ — координат точки M_0. Эта система и представляет собой необходимые условия существования у функции f в точке $M_0(x_0, y_0)$ локального условного экстремума при условиях связи (2.30).

Предложенный путь поиска точек, в которых возможно имеется локальный условный экстремум функции f при условиях связи (2.30) часто приводит к сложным вычислениям. При этом часть переменных рассматриваются как независимые, а остальные — как функции первых. Упрощение возникает тогда, когда систему уравнений связи удаётся разрешить, то есть найти явное представление $y_k = \varphi_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$.

Пример 2.1. Исследовать функцию $f(x, y) = x\,y$, на условный экстремум, если $x + y = 1$.

■ В рассматриваемом случае $m = n = 1$, $F(x, y) = x + y - 1$. Из уравнения связи $x + y = 1$ получаем $y = 1 - x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, т.е. $\varphi(x) = 1 - x$. Поэтому $\psi(x) = f(x, \varphi(x)) = x - x^2$, $\forall\ x \in\ \mathbb{R}$. Исследуя функцию ψ, замечаем, что она имеет локальный максимум в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, функция f имеет в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2},\, 1 - \dfrac{1}{2}\right)$ локальный условный максимум при условии связи $x + y = 1$. $\square$

Лагранж предложил метод поиска точек возможного условного экстремума, симметризующий роль переменных.

Теорема 2.52 (метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть функции f, F_k, $k = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G из $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ и точка $M_0(x_0, y_0) \in G$ является точкой локального условного экстремума функции f при условиях связи (2.30). Если ранг матрицы Якоби отображения F в точке M_0 равен m, то найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что для функции $f_\lambda = f + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k\, F_k$ точка M_0 является стационарной точкой, то есть*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}(M_0)=0, \quad k=1,\ldots,n,\\
\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}(M_0)=0, \quad k=1,\ldots,m.
\end{cases}
$$

Функцию f_λ называют функцией Лагранжа задачи условного экстремума, а числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — множителями Лагранжа.

■ Для определенности будем считать, что $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(M_0)\neq 0$. Подберем множители Лагранжа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ так, чтобы $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}(M_0) = 0, k = 1,\ldots,m$. Поскольку

$$
\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial y_k}(M_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(M_0),
$$

то для нахождения множителей Лагранжа получаем следующую систему линейных уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0)+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(M_0)+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(M_0) = 0\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
\dfrac{\partial f}{\partial y_m}(M_0)+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(M_0)+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(M_0)+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(M_0) = 0
\end{cases}
$$

Определитель этой системы равен $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(M_0)\neq 0$. Поэтому существует единственный набор чисел $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0$, при котором $\dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y_k}(M_0)=0$, $k=1,\ldots,m$. В условиях теоремы найдутся окрестности U_{x_0} точки x_0 и U_{y_0} точки y_0 такие, что $U_{x_0}\times U_{y_0}\subset G$ и на $U_{x_0}\times U_{y_0}$ система уравнений (2.30) определяет непрерывно дифференцируемое неявное отображение $y=\varphi(x)$, $\varphi: U_{x_0}\to U_{y_0}$, $\varphi(x_0)=y_0$. Поэтому $F_k(x,\varphi(x))\equiv 0$, $k=1,\ldots,m$, на U_{x_0} и потому

$$
f_{\lambda_0}(x,\varphi(x))=f(x,\varphi(x)),\ \forall\, x\in U_{x_0}.
$$

Согласно лемме 2.9 функция $\psi_{\lambda_0}(x)= f_{\lambda_0}(x,\varphi(x))$ имеет в точке x_0 локальный экстремум. Поскольку функция ψ_{λ_0} дифференцируема на множестве U_{x_0}, то $\dfrac{\partial \psi_{\lambda_0}}{\partial x_k}(x_0)=0$, $k=1,\ldots,n$. Учитывая, что для всех $k=1,\ldots,n$

$$
\frac{\partial \psi_{\lambda_0}}{\partial x_k}(x_0)=\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y_j}(x_0,\varphi(x_0))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x_0)=\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x_k}(x_0,y_0),
$$

получаем: $\dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x_k}(x_0, y_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$ □

Практический вывод из теоремы Лагранжа.

При выполнении условий теоремы 2.52 точки, в которых функция f может иметь локальный условный экстремум при условиях связи (2.30), и соответствующие им множители Лагранжа находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}(x, y) & = & 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\[2ex] \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}(x, y) & = & 0, \quad k = 1, \ldots, m \\[2ex] F_k(x, y) & = & 0, \quad k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Точку (x_0, y_0, λ_0) — решение этой системы, называют стационарной точкой задачи условного экстремума функции f при условиях связи (2.30), найденной методом Лагранжа.

Теорема 2.53 (достаточные условия локального условного экстремума)**.** *Пусть функция f и отображение F дважды непрерывно дифференцируемы на G, точка (x_0, y_0, λ_0) — стационарная точка задачи условного экстремума функции f при условиях связи (2.30), найденная методом Лагранжа, и* $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M_0) \neq 0$, *где* $M_0 = (x_0, y_0)$. *Пусть, кроме того,* $y = \varphi(x)$ *— неявное отображение, определяемое системой (2.30) уравнений связи в* $U_{x_0} \times U_{y_0}$.

1). Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\Big|_{dy_k = (d\varphi_k)_{x_0}(dx)} < 0, \forall\, dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *то функция f имеет в точке M_0 локальный условный максимум.*

2). Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\Big|_{dy_k = (d\varphi_k)_{x_0}(dx)} > 0, \forall\, dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *то функция f имеет в точке M_0 локальный условный минимум.*

3). Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\Big|_{dy_k = (d\varphi_k)_{x_0}(dx)}$ *принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, то функция f не имеет в точке M_0 локального условного экстремума.*

■ Прежде всего заметим, что неявное отображение $y = \varphi(x)$, определяемое системой (2.30) уравнений связи в некоторой окрестности $U_{x_0} \times U_{y_0}$ точки M_0, дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности U_{x_0} точки x_0 и

$\varphi(x_0) = y_0$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 2.52

$$\psi_{\lambda_0}(x) = f_{\lambda_0}(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi(x)) = \psi(x),\ \forall\, x \in U_{x_0}.$$

В силу леммы 2.9 функция f имеет в точке M_0 локальный условный максимум (минимум) при условиях связи (2.30) тогда и только тогда, когда функция $\psi_{\lambda_0}(x)$ имеет в точке x_0 локальный безусловный максимум (минимум). Но x_0 — стационарная точка функции $\psi_{\lambda_0}(x)$. Поэтому, функция f имеет в M_0 локальный условный максимум (минимум), если $(d^2\psi_{\lambda_0})_{x_0}(dx) < 0$ (соответственно, $(d^2\psi_{\lambda_0})_{x_0}(dx) > 0$), $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Если же $(d^2\psi_{\lambda_0})_{x_0}(dx)$ принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, то функция f не имеет в точке M_0 локального условного экстремума. Поскольку для всех $k = 1, 2, \ldots, m$, $\dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y_k}(x_0, \varphi(x_0)) = 0$, а $(d^2\psi_{\lambda_0})_{x_0}(dx) =$

$$= (d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\,\Bigg|_{dy_k\, =\, (d\varphi_k)_{x_0}(dx)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y_k}(x_0, \varphi(x_0))\,(d^2\varphi_k)_{x_0}(dx),$$

то $(d^2\psi_{\lambda_0})_{x_0}(dx) = (d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\,\Bigg|_{dy_k\, =\, (d\varphi_k)_{x_0}(dx)}$. $\square$

Практический вывод из теоремы 2.53.

Для поиска методом Лагранжа точек условного экстремума функции f при условии связи (2.30) следует

1) составить функцию Лагранжа f_λ;
2) найти стационарные точки задачи условного экстремума;
3) найти $(d^2 f_\lambda)(dx, dy)$ и, если (M_0, λ_0) — найденная в пункте 2) точка, вычислить $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)$;
4) продифференцировать в точке M_0 систему уравнений связи, и если $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M_0) \neq 0$, решить полученную систему линейных уравнений относительно $dy_k = (d\varphi_k)_{x_0}(dx)$, $k = 1, \ldots, m$;
5) записать $d^2(f_{\lambda_0})_{M_0}(dx, dy)\,\Bigg|_{dy_k\, =\, (d\varphi_k)_{x_0}(dx)}$;
6) к полученной квадратичной форме применить критерий Сильвестра и сделать вывод о наличии или отсутствии у функции f в точке M_0 локального условного экстремума.

Пример 2.2. Найти точки локального условного экстремума функции $f(x, y, z) = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2$ и $y + z = 2\,(x > 0, y > 0, z > 0)$. Вычислить экстремальные значения заданной функции.

■ Заметим, что $F(x,y,z)=(x^2+y^2-2,\ y+z-2)$, и составим функцию Лагранжа

$$f_\lambda(x,y,z)=xy+yz+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2).$$

Она дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^3$. Координаты стационарной точки задачи условного экстремума найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} y+2\lambda_1 x=0\\ x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0\\ y+\lambda_2=0\\ x^2+y^2=2\\ y+z=2\end{cases}$$

Решение — точка $(1,\ 1,\ 1,\ -\dfrac{1}{2},\ -1)$, то есть $M_0=(1,\ 1,\ 1)$, $\lambda_1^0=-\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2^0=-1$. Так как

$$d^2 f_\lambda(dx,dy,dz)=2\lambda_1\,(dx)^2+2\lambda_1\,(dy)^2+2dx\,dy+2dy\,dz,$$

то

$$(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}(dx,dy,dz)=-dx^2-dy^2+2dx\,dy+2dy\,dz.$$

Продифференцируем в точке M_0 уравнения связи, получим систему

$$\begin{cases} dx+dy &= &0\\ dy+dz &= &0\end{cases} \tag{2.33}$$

Матрица Якоби соответствующего отображения F в точке M_0 равна

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,z)}(M_0)=\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Следовательно, система уравнений связи определяет в некоторой окрестности точки M_0 неявное отображение $x=\varphi_1(y),\ z=\varphi_2(y)$. Из системы (2.33) получаем, что $dx=(d\varphi_1)_{y_0}(dy)=-dy,\ dz=(d\varphi_2)_{y_0}(dy)=-dy$, где $y_0=1$. Поэтому

$$d^2(f_{\lambda_0})_{M_0}(dx,dy,dz)=d^2(f_{\lambda_0})_{M_0}(-dy,dy,-dy)=-6dy^2.$$

Последняя квадратичная форма отрицательна в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, потому функция f имеет в точке M_0 локальный условный максимум и $f(M_0)=2$. □

2.20 Задания для самостоятельной работы

1. Для евклидовой метрики $\rho(x,y)$ в $\mathbb{R}^n$ доказать следующие утверждения:

   (a) $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y),\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$;

(b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x,y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(c) $\rho(\lambda x, \mu x) = |\lambda - \mu|\rho(x,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(d) $\rho(x+a, y+b) \le \rho(x,y) + \rho(a,b)$, $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}^n$.

2. Доказать, что, наряду с евклидовой метрикой $\rho(x,y)$, метрику в n-мерном координатном пространстве можно ввести следующими формулами:

$$\rho'(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \qquad \rho''(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|,$$

при этом выполняются неравенства

$$\rho''(x,y) \le \rho'(x,y) \le n\,\rho''(x,y) \text{ и } \rho''(x,y) \le \rho(x,y) \le \sqrt{n}\,\rho''(x,y)\,.$$

3. Доказать, что $A \times B$ — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}_{x,y}$, если множества $A \subset \mathbb{R}^n_x$ и $B \subset \mathbb{R}^m_y$ являются открытыми множествами.

4. Доказать, что множество $\{a\} \times (c,d)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $c < d$, не является открытым и не является замкнутым в $\mathbb{R}^2$.

5. Доказать, что граница любого подмножества в $\mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

6. Доказать, что фундаментальность последовательности $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, в которой $M_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, эквивалентна фундаментальности всех её координатных последовательностей в $\mathbb{R}^1$.

7. Доказать, что объединение двух линейно связных в $\mathbb{R}^n$ множеств, имеющих общую точку, является линейно связным множеством.

8. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, причём функция f раздельно непрерывна на G и монотонна по y при каждом фиксированном x. Доказать, что функция f непрерывна на G.

9. Доказать, что образ компакта $G \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывном отображении есть компакт в $\mathbb{R}^1$.

10. Пусть функция $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на открытом ограниченном множестве G, M_0— предельная точка G, $M_0 \notin G$. Доказать, что $\exists \lim\limits_{(x,y)\to M_0} f(x,y) \in \mathbb{R}$.

11. Пусть функция $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y в некоторой области G, то есть $\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$, где $(x,y_1), (x,y_2) \in G$. Доказать, что f непрерывна на G.

12. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной x и равномерно непрерывна по y в некотором открытом множестве G. Доказать, что f непрерывна на G.

13. Доказать, что образ линейно связного в $\mathbb{R}^n$ множества X при непрерывном отображении $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейно связным в $\mathbb{R}^m$ множеством.

14. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном y и имеет ограниченную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в области G. Доказать, что функция f непрерывна на G.

15. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ имеет на $\mathbb{R}^2$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Доказать, что если $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, то функция f является постоянной.

16. Пусть G — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то есть вместе с любыми точками x и y из G оно содержит и прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки. Доказать, что если функция $f : G \to \mathbb{R}$ имеет в G ограниченные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$, то f равномерно непрерывна на G.

17. Доказать, что если функция $f : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности $U_a(\delta_0)$ точки a, то
$$\forall x \in U_a(\delta_0) \setminus \{a\} \,\exists\, \theta_x \in [a,x] : f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta_x)(x_k - a_k).$$

18. Может ли непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$ иметь бесконечное множество строгих локальных максимумов и ни одного минимума? Ответ подтвердить примером.

19. Верно ли утверждение: если непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^2$ функция $f(x,y)$ имеет только одну стационарную точку (x_0,y_0), в которой она имеет локальный минимум, то для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$?

20. Пусть функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности $U_{M_0}(\delta_0)$ точки M_0, $f(M_0) = 0$ и $df_{M_0}(dx,dy) = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что если $\exists M > 0$: $\forall (x,y) \in U_{M_0}(\delta_0) \setminus \{M_0\}$
$$|f''_{x^2}(x,y)| \leq M,\ |f''_{xy}(x,y)| \leq M,\ |f''_{y^2}(x,y)| \leq M,$$
то $|f(x,y)| \leq M\ \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right),\ \forall\,(x,y) \in U_{M_0}(\delta_0)$.

21. Пусть функция f имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в $U_{(x_0,y_0)} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = c$. Доказать, что существует $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = c$.

22. Пусть функция $f : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет в некоторой окрестности $U_{(0,0)}$ точки $(0, 0)$ условию $|f(x, y)| \leq x^2+y^2$. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$.

23. Пусть функция $F : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве G, $F(M_0) = 0$ и $F'_y(M_0) \neq 0$. Доказать, что в некоторой окрестности точки M_0 уравнение $F(x, y) = 0$ определяет дважды непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = f(x)$ и

$$f''_{x^2}(x) = \frac{F''_{x^2}(F'_y)^2 - 2F'_x F'_y + F''_{y^2}(F'_y)^2}{(F'_y)^3}\,.$$

Литература

[1] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1. — М. : Высшая школа, 2000.

[2] В. А. Зорич. Математический анализ, т. 1. — М. : Наука, 1993.

[3] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ, т. 1. — М.: Изд–во МГУ, 1979.

[4] Т.И. Коршикова, Ю.А. Кирютенко, Л.И. Калиниченко, В.А. Савельев. Курс лекций по математическому анализу, I курс, 1-й семестр. — Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2006.

[5] Л.Д. Кудрявцев. Математический анализ, т.1. — М.: Высшая школа, 1988.

[6] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. — М. : Наука, 1966.

[7] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. — М. : Наука, 1966.

[8] А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. — М.: Из–во МФТИ, 2000.

Оглавление