ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического анализа

Т. И. Коршикова, Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко

Курс лекций по математическому анализу
II курс, 3-й семестр

Ростов-на-Дону
2007 год

Т. И. Коршикова, Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко.
Курс лекций по математическому анализу, II курс, 3-й семестр. — ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2007 год

Изложен лекционный материал курса «Математический анализ», традиционно читаемый сотрудниками кафедры математического анализа ЮФУ (РГУ) в третьем семестре второго курса на отделениях «Математика» и «Механика». После каждого раздела приведены задачи теоретического характера для самостоятельной работы.

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Сходимость числового ряда

Определение 1.1. *Пусть* $\{a_n\}$ *— последовательность вещественных чисел. Символ*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

называется числовым рядом. Слагаемые $a_1, a_2, \ldots$*— членами ряда;* a_n*, отвечающее значению индекса* n*, называется* n*-ым или общим членом ряда.*

Для обозначения ряда (1.1) также используют символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.2}$$

При такой записи индекс n называют индексом суммирования или немым индексом, поскольку от его имени ничего не зависит, важны только начальное и конечное значение индекса.

Определение 1.2. *Сумму* k *первых членов ряда* (1.1) $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, *называют* k*-ой частичной суммой этого ряда.*

Согласно определению 1.2 числовой ряд (1.1) порождает последовательность $\{S_k\}$ частичных сумм ряда:

$$\begin{gathered}
S_1 = a_1, \\
S_2 = a_1 + a_2, \\
S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\
\cdots\cdots\cdots \\
S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Заметим, что если задана числовая последовательность $\{x_k\}$, то, полагая $a_1 = x_1,\ a_2 = x_2 - x_1,\ a_3 = x_3 - x_2,\ \ldots,\ a_n = x_n - x_{n-1},\ \ldots,$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого k-ая частичная сумма равна x_k:

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = x_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Другими словами, для всякой числовой последовательности $\{x_k\}$ всегда можно указать ряд, для которого $\{x_k\}$ является последовательностью его частичных сумм. Это означает, что рассмотрение ряда эквивалентно рассмотрению соответствующей последовательности $\{S_k\}$.

Определение 1.3. *Числовой ряд (1.1) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_k\}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $S = \lim S_k$, то число S называют суммой ряда и пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Таким образом, символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно употреблять как для обозначения ряда (1.1), так и для обозначения его суммы, если он сходится.

Определение 1.4. *Ряд (1.1) называется расходящимся, если соответствующая ему последовательность $\{S_k\}$ расходится.*

Приведем несколько примеров, показывающих взаимоотношение понятий ряда, суммы ряда и предела последовательности.

Пример 1.1. Исследовать поведение ряда, членами которого являются члены геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots . \tag{1.3}$$

■ Найдем n-ую частичную сумму ряда (1.3):

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{если } q \neq 1; \\ n, & \text{если } q = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Так как $\lim q^n = 0$ при $|q| < 1$, $\lim q^n = \infty$ при $|q| > 1$ и не существует предела последовательности $\{(-1)^n\}$, то:

a) $\lim S_n = \dfrac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$;

b) $\lim S_n = \infty$, если $|q| > 1$ или $q = 1$;

c) предела последовательности $\{S_n\}$ не существует, если $q = -1$.

Следовательно, ряд (1.3) сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$. $\square$

Пример 1.2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$\blacksquare$ Так как для данного ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad \forall n > 1,$$

то $\lim S_n = +\infty$, а поэтому рассматриваемый ряд расходится. $\square$

В приведённых примерах последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ соответствующего ряда выражалась достаточно просто, что позволяло, пользуясь определением, установить сходимость или расходимость ряда. Однако, часто непосредственный анализ последовательности $\{S_n\}$ не представляется возможным, поэтому основной задачей в теории рядов является установление необходимых и достаточных условий сходимости ряда.

Наличие критерия Коши сходимости числовой последовательности позволяет установить соответствующий критерий и для числового ряда.

Теорема 1.1 (критерий Коши сходимости числового ряда). *Для сходимости числового ряда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* ε *нашёлся номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что для всех* $k > N$ *и любого* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

$\blacksquare$ Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что величина, стоящая под знаком модуля в неравенстве (1.4), равна разности частичных сумм $S_{k+p} - S_k$. $\square$

Простым следствием критерия Коши является следующая важная

Теорема 1.2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если числовой ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n} a_n = 0$.

$\blacksquare$ Для доказательства этой теоремы достаточно в необходимой части критерия Коши положить $p = 1$ и получить тем самым определение того, что $\lim a_{n+1} = 0$. $\square$

Заметим, что стремление к нулю общего члена ряда не является достаточным условием сходимости ряда (см. пример 1.2). Приведем еще один пример такого ряда, часто используемого в приложениях.

Пример 1.3. Доказать, используя критерий Коши, расходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

■ Для каждого натурального n

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1/2$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $p = n$, будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geq \varepsilon_0.$$

Следовательно, согласно критерию Коши, гармонический ряд расходится. Поскольку последовательность его частичных сумм S_n является возрастающей, то $\lim S_n = +\infty$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Однако, заметим, что $\lim 1/n = 0$ и необходимое условие сходимости для гармонического ряда выполняется. □

Замечание. Критерий Коши из-за технических трудностей редко применяется для доказательства сходимости конкретного ряда, чаще он используется для доказательства сходимости одного ряда на основании сходимости другого или для установления расходимости рядов.

1.2 Простейшие свойства сходящихся рядов

Теорема 1.3. *Если $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ сходятся или расходятся одновременно и, в случае сходимости,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.5}$$

■ Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c\, a_k$, $n \geq 1$. Тогда $\sigma_n = c\, S_n$, $\forall n \geq 1$. Поскольку $c \neq 0$, то последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$, причём, в случае его существования, $\lim \sigma_n = c \lim S_n$. $\square$

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся, то для любого $c \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 1.4. *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы равны, соответственно,* A *и* B. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *сходится и его сумма равна* $A + B$.

■ Пусть $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n, B_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n,\ S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$. Тогда $S_k = A_k + B_k$. Так как $\lim A_k = A, \lim B_k = B,\ A, B \in \mathbb{R}$, то числовая последовательность $\{S_k\}$ сходится и $\lim S_k = A + B$. $\square$

Определение 1.5. *Ряд, полученный из ряда* (1.2) *отбрасыванием первых* m *его членов, то есть ряд* $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$, *называют* m*-ым остатком данного ряда.*

Теорема 1.5. *Если ряд* (1.2) *сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда* (1.2) *сходится, то ряд сходится.*

■ Пусть $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ — k-ая частичная сумма ряда (1.2), а $\sigma_k^{(m)} = \sum\limits_{n=m+1}^{m+k} a_n$ — k-ая частичная сумма его m-ого остатка. Очевидно, что для всех $k, m \in \mathbb{N}$, $S_{k+m} = S_m + \sigma_k^{(m)}$, Если ряд (1.2) сходится, то сходится последовательность $\{S_k\}$. Пусть $\lim S_k = S \in \mathbb{R}$. В силу свойств сходящихся последовательностей существует $\lim\limits_{n \to 0} S_{k+m} = S$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, а поэтому сходится последовательность $\{\sigma_k^{(m)}\}$ при каждом $m \in \mathbb{N}$, причём $\lim\limits_{k \to 0} \sigma_k^{(m)} = S - S_m$. Итак, m-ый остаток ряда (1.2) сходится и его сумма равна $S - S_m$.

Пусть сходится m_0 остаток ряда (1.2) и $\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_k^{(m_0)} = \sigma^{(m_0)} \in \mathbb{R}$. В силу предыдущего $S_{k+m_0} = S_{m_0} + \sigma_k^{(m_0)}$, поэтому последовательность $\{S_{k+m_0}\}$ сходится, а значит, сходится и последовательность $\{S_k\}$, то есть сходится ряд (1.2) и его сумма равна $S = S_{m_0} + \sigma^{(m_0)}$. $\square$

Следствие. *Отбрасывание или присоединение к данному ряду любого конечного числа членов не влияет на его сходимость или расходимость (хотя и меняет сумму ряда).*

1.3 Сходимость положительных рядов

Определение 1.6. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называют знакопостоянным, если для всех* $n \in \mathbb{N}$ *либо* $a_n \geq 0$, *либо* $a_n \leq 0$. *В первом случае ряд называют положительным, во втором — отрицательным. Если* $a_n > 0$, *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то ряд называют строго положительным.*

Теорема 1.6 (критерий сходимости положительного ряда)**.** *Положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, то есть*

$$\exists M > 0 : \forall\, k \in \mathbb{N} \quad S_k \leq M.$$

■ Если числовой ряд сходится, то по определению 1.3 последовательность $\{S_k\}$ его частичных сумм сходится, поэтому ограничена и, в частности, ограничена сверху.

Пусть теперь последовательность $\{S_k\}$ ограничена сверху. Поскольку $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \geq S_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{S_k\}$ не убывает. Следовательно, она сходится как монотонная ограниченная последовательность и $\lim S_k = \sup\{S_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. □

Следствие. *Если положительный ряд расходится, то* $\lim S_n = +\infty$. *В этом случае часто пишут:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Замечание. Если положительный ряд сходится и S — его сумма, то, очевидно, $S_k \leq S$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.7 (признак сравнения в непредельной форме)**.** *Пусть положительные ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.7}$$

таковы, что $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. *Если ряд (1.7) сходится, то ряд (1.6) сходится. Если же ряд (1.6) расходится, то ряд (1.7) расходится.*

■ Не нарушая общности рассуждений (см. теорему 1.5) можно считать, что $a_n \leq b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Пусть A_k и B_k — k-ые частичные суммы рядов (1.6) и (1.7) соответственно. Тогда $A_k \leq B_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Если ряд (1.7) сходится, то по теореме 1.6 последовательность $\{B_k\}$ ограничена сверху. Поэтому последовательность $\{A_k\}$ ограничена сверху и ряд (1.6) сходится.

Пусть ряд (1.6) расходится. Предположим, что ряд (1.7) сходится. Тогда, согласно первой части, сходится ряд (1.6), что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и ряд (1.7) расходится. □

Теорема 1.8 (признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть ряд (1.6) является положительным, а ряд (1.7) — строго положительным,* $\ell = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n/b_n$, $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n/b_n$ *. Если* $L < +\infty$, *то из сходимости ряда (1.7) следует сходимость ряда (1.6). Если* $\ell > 0$, *то из расходимости ряда (1.7) следует расходимость ряда (1.6).*

■ Пусть $L < +\infty$ и ряд (1.7) сходится. По числу $\varepsilon = 1 > 0$ найдём номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} < L + 1.$$

Тогда $a_n < (L+1)b_n,\ \forall\, n > N$, и в силу теорем 1.3, 1.7, сходится ряд (1.6).

Пусть теперь $\ell > 0$ и ряд (1.7) расходится. Если $\ell \in \mathbb{R}$, то по числу $\varepsilon = \ell/2$ найдётся номер N такой, что для всех $n > N$

$$\frac{a_n}{b_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2},$$

то есть $a_n > (\ell/2)b_n$, $\forall n > N$. Тогда из теорем 1.3, 1.7 следует расходимость ряда (1.6).

Если $\ell = +\infty$, то найдётся такой номер N, что $a_n/b_n > 1$ для всех $n > N$, а поэтому ряд (1.6) расходится. □

Следствие 1. *Если положительные ряды (1.6) и (1.7) таковы, что существует* $\lim a_n/b_n = c$, *то при* $c < +\infty$ *из сходимости ряда (1.7) следует сходимость ряда (1.6), а при* $c > 0$ *из расходимости ряда (1.7) следует расходимость ряда (1.6).*

Следствие 2. *Если для положительных рядов (1.6) и (1.7) существует* $\lim a_n/b_n = c$ *и* $c \in (0, +\infty)$, *то ряды (1.6) и (1.7) сходятся или расходятся одновременно.*

Ряды, удовлетворяющие условиям следствия 2, называют равносходящимися. В частности, если $a_n \sim b_n$, при $n \to \infty$, то ряды (1.6) и (1.7) являются равносходящимися.

Замечание. Если в теореме 1.8 $L = +\infty$, то из сходимости ряда (1.7), вообще говоря, не следует сходимость ряда (1.6). Подтверждением являются, например, ряды с общими членами $a_n = 1$, $b_n = q^n$, $q \in (0,1)$. Если $\ell = 0$, то из расходимости ряда (1.7), вообще говоря,не следует расходимость ряда (1.6). Подтверждением являются, например, ряды с общими членами $a_n = q^n$, $q \in (0,1)$, $b_n = 1$.

Теорема 1.9 (интегральный признак Маклорена-Коши)**.** *Пусть функция f определена на промежутке $[1, +\infty)$, неотрицательна и не возрастает на нём. Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.8}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится числовая последовательность $\{F(n)\}$, где $F(n) = \int\limits_1^n f(t)dt, n \in \mathbb{N}$.

■ Так как функция f монотонна на отрезке $[1, n]$, $\forall n \geq 2$, то она интегрируема на нём по Риману, а значит, $F(n) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку $f(t) \geq 0$, $\forall t \in [1, +\infty)$, то

$$F(n+1) - F(n) = \int\limits_1^{n+1} f(t)dt - \int\limits_1^{n} f(t)dt = \int\limits_n^{n+1} f(t)dt \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть числовая последовательность $\{F(n)\}$ является неубывающей. Следовательно, существует конечный или бесконечный (именно $+\infty$) предел $\lim F(n) = \sup\{F(n), \ n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$(F(2) - F(1)) + \cdots + (F(n+1) - F(n)) + \cdots \tag{1.9}$$

Поскольку функция f не возрастает на $[1, +\infty)$, то для всех $t \in [n, n+1]$ и всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по отрезку $[n, n+1]$ и получим:

$$f(n+1) = \int\limits_n^{n+1} f(n+1)dt \leq F(n+1) - F(n) \leq \int\limits_n^{n+1} f(n)dt = f(n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

В силу признака сравнения ряды (1.8) и (1.9) сходятся или расходятся одновременно. А так как n-ая частичная сумма ряда (1.9) равна $F(n+1) - F(1) = F(n+1)$, то ряд (1.9), а значит и ряд (1.8), сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел числовой последовательности $\{F(n)\}$. $\square$

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

$\blacksquare$ При $\alpha \leq 0$ общий член ряда $a_n = n^{-\alpha}$ не стремится к нулю, поэтому ряд (1.10) расходится. При $\alpha > 0$ функция $f(x) = x^{-\alpha}$ определена, положительна и убывает на промежутке $[1, +\infty)$, и $f(n) = n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае

$$F(n) = \int\limits_1^n x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^n, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \left.\ln x\,\right|_1^n, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln n, & \text{если } \alpha = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Следовательно, в силу признака Маклорена–Коши ряд (1.10) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$. Учитывая поведение ряда при $\alpha \leq 0$, окончательно получаем, что ряд (1.10) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. $\square$

Теорема 1.10 (признак Коши в непредельной форме)**.** *Пусть ряд (1.2) положителен и* $K_n = \sqrt[n]{a_n}$, $\forall\, n \geq 2$. *Если существует такое число* $q \in (0,1)$, *что* $K_n \leq q$, $\forall\, n \geq n_0$, *то ряд (1.2) сходится. Если же существует подпоследовательность* $\{K_{n_k}\}$ *такая, что* $K_{n_k} \geq 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, *то ряд (1.2) расходится.*

$\blacksquare$ Пусть существует число $q \in (0,1)$ такое, что $K_n \leq q$, $\forall n \geq n_0$, то есть $a_n \leq q^n$, $\forall n \geq n_0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in (0;1)$, то в силу теоремы 1.5 и признака сравнения 1.7 ряд (1.2) сходится.

Если подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$ такова, что $K_{n_k} \geq 1$, то $a_{n_k} \geq 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой и ряд (1.2) расходится (см. теорему 1.2). $\square$

Теорема 1.11 (признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть ряд (1.2) положителен и* $K = \overline{\lim}\, K_n$. *Если* $K < 1$, *то ряд (1.2) сходится; если* $K > 1$, *то ряд (1.2) расходится.*

■ Пусть $\overline{\lim} K_n = K$, $0 \le K < 1$. Тогда по числу $\varepsilon_0 = \dfrac{1-K}{2} > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что

$$K_n < K + \varepsilon_0 = \frac{1+K}{2} < 1, \ \forall\, n > N.$$

Отсюда по теореме 1.10 $\left(q = \dfrac{1+K}{2} < 1\right)$ следует сходимость ряда (1.2).

Если $K \in (1, +\infty)$, то по числу $\varepsilon_0 = K - 1 > 0$ найдётся подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$ такая, что $K_{n_k} > K - \varepsilon_0 = 1, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Значит, ряд (1.2) расходится в силу теоремы 1.10. Если же $K = +\infty$, то найдётся бесконечно большая подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$, поэтому ряд (1.2) расходится в силу той же теоремы 1.10. □

Замечание. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $K = 1$. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ соответствующие $K_n \to 1$, однако, первый ряд расходится, а второй сходится.

Теорема 1.12 (признак Даламбера в непредельной форме). *Пусть ряд (1.2) является строго положительным и* $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \ge 1$. *Если существует такое число* $q \in (0, 1)$, *что* $D_n \le q$, $\forall\, n \ge n_0$, *то ряд (1.2) сходится. Если* $D_n \ge 1$, $\forall\, n \ge n_1$, *то ряд (1.2) расходится.*

■ Поскольку первые члены ряда не влияют на сходимость, то можно считать, что $n_0 = 1$. Пусть для ряда (1.2) существует $q \in (0, 1)$ такое, что $D_n \le q$, $\forall n \ge 1$. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{a_2}{a_1} \le q, \ \frac{a_3}{a_2} \le q, \ \ldots, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q, \quad n \in \mathbb{N},$$

перемножая которые получим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \le q^n, \ \text{то есть } a_{n+1} \le a_1\, q^n, \ \forall\, n \ge 1.$$

Из примера 1.1 и теорем 1.3 и 1.7 следует сходимость ряда (1.2).

Если же $D_n \ge 1$, $\forall\, n \ge n_1$, то $\{a_n\}$ не убывает, а значит $a_n \not\to 0$ и ряд (1.2) расходится. □

Теорема 1.13 (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть ряд (1.2) строго положителен. Если* $\overline{\lim} D_n = D < 1$, *то ряд (1.2) сходится. Если* $\underline{\lim} D_n = d > 1$, *то ряд (1.2) расходится. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых*

$$\underline{\lim} D_n \le 1 \le \overline{\lim} D_n.$$

Следствие. Если ряд (1.2) является строго положительным и существует $\lim D_n = D$, то при $D > 1$ ряд (1.2) расходится, при $D < 1$ ряд (1.2) сходится. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $D = 1$.

Доказательство этих утверждений оставляем читателю и обратимся к примерам.

Пример 1.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ e^n}{n^n}$.

■ Заметим, что $D_n = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \to 1$, поэтому по признаку Даламбера в предельной форме ничего определённого о сходимости данного ряда сказать нельзя. Однако, учитывая монотонное возрастание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$, получим, что последовательность $\{D_n\}$ монотонно убывая стремится к 1, то есть $D_n > 1$, $\forall n \geq 1$. Последнее означает расходимость ряда (см. признак Даламбера в непредельной форме). □

Замечание 1. Признак Коши в предельной форме "сильнее" соответствующего признака Даламбера в следующем смысле: если признак Даламбера указывает на сходимость ряда, то признак Коши также укажет на его сходимость, но не наоборот. Подтверждением последнему является ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots .$$

Замечание 2. Если при исследовании положительного ряда доказана с помощью признака Даламбера (или Коши) его расходимость, то общий член этого ряда не стремится к нулю, то есть нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Замечание 3. Признаки Коши и Даламбера основаны на сравнении исследуемого ряда с геометрической прогрессией и не дают ответа на вопрос о поведении ряда, если общий член его стремится к нулю медленнее, чем последовательность вида $\{q^n\}$, $q \in (0,1)$. В последнем случае бывают полезны признаки, основанные на сравнении поведения ряда с другими стандартными рядами. Примерами таких признаков являются признаки Раабе и Гаусса, в которых сравнение исследуемого ряда ведется с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Теорема 1.14 (признак Раабе)**.** *Пусть ряд (1.2) является строго положительным и* $R_n = n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$. *Если существует пре-*

дел $\lim R_n = R$*, то при* $R > 1$ *ряд (1.2) сходится, а при* $R < 1$ *ряд (1.2) расходится.*

Заметим, что если существует предел $\lim D_n = D$ и $D < 1$, то для R_n существует предел $R = +\infty$, а если $D > 1$, то $R = -\infty$. Таким образом, если признак Даламбера в предельной форме дает ответ на вопрос о поведении строго положительного ряда (1.2), то признак Раабе и подавно его дает, то есть признак Раабе "сильнее" признака Даламбера в предельной форме.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

■ Так как $D_n = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\lim D_n = 1$, то признаки Даламбера не дают ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Но

$$R_n = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to \alpha$$

при $n \to +\infty$. Поэтому в силу теоремы 1.14 данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. □

Теорема 1.15 (признак Гаусса)**.** *Пусть ряд (1.2) строго положителен и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где μ *— некоторое число,* $\{\theta_n\}$ *— ограниченная последовательность. Тогда ряд сходится, если* $\mu > 1$, *и расходится, если* $\mu \le 1$.

Доказательство признаков Раабе и Гаусса и некоторых других признаков можно найти, например, в [12, с. 273–280].

Пример 1.7. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots, \quad p > 0.$$

■ Поскольку $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^p = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^p$ для всех $n \ge 1$, то ничего определённого о сходимости данного ряда по признаку Даламбера сказать нельзя. Но по формуле Тейлора

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p\,(p+1)}{2!}\frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ при } n \to +\infty,$$

то есть $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{p/2}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^2}$, где $\theta_n = \dfrac{p\,(p+1)}{4\cdot 2!} + o(1)$, при $n \to +\infty$. Поэтому последовательность $\{\theta_n\}$ ограничена. В силу признака Гаусса исследуемый ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $0 < p \le 2$. □

1.4 Сходимость знакопеременных рядов

Определение 1.7. *Числовой ряд называется знакопеременным, если у него бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.*

Начнем их изучение с преобразования Абеля. Пусть дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k,\ \ a_k,\ b_k \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Обозначим через S_n n-ые частичные суммы ряда (1.11), а через B_n — n-ые частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если положить $B_0 = 0$, то $b_n = B_n - B_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Это преобразование n-ой частичной суммы ряда (1.11) называют преобразованием Абеля.

Лемма 1.1 (Абеля). *Если числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонна, а последовательность $\{B_n\}$ ограничена, то есть $\exists B > 0 :$ $|B_n| \le B$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то*

$$|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le B(|a_1| + 2|a_n|),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

■ В силу преобразования Абеля

$$|S_n| \le |\sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1})| + |a_n||B_n| \le B\left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку разности $a_k - a_{k+1}$ для всех $k \ge 1$ имеют один и тот же знак или равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = |\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})| = |a_1 - a_n| \le |a_1| + |a_n|,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $|S_n| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$, $\ \forall n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 1.16 (признак Дирихле). *Если в ряде (1.11) последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность $\{B_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, то ряд (1.11) сходится.*

■ Доказательство проведём с помощью критерия Коши сходимости числового ряда. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Оценим сверху сумму

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{k+n}b_{k+n}|,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},$$

применяя к ней лемму 1.1. Прежде всего заметим, что

$$\left|\sum_{k=1}^{p} b_{k+n}\right| = |B_{n+p} - B_n| \le |B_{n+p}| + |B_n| \le 2B,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Из леммы 1.1 получаем неравенство

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{k+n}b_{k+n}| \le 2B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|),\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой, то существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{6B}, \forall\, n > n_0$. Поэтому

$$|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}a_{n+k}| < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0.$$

Последнее означает сходимость ряда (1.11). □

Теорема 1.17 (признак Абеля). *Если в ряде (1.11) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (1.11) сходится.*

■ По условию последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, поэтому является сходящейся. Положим, что $a = \lim a_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм $\{B_n\}$ ограничена. Поскольку

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ сходится по теореме 1.16, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ab_n$ сходится по следствию теоремы 1.3, то ряд (1.11), являясь суммой этих двух рядов, сходится согласно теореме 1.4. □

Замечание. Признаки Дирихле и Абеля нецелесообразно применять к положительным рядам, поскольку для них они являются частными случаями теорем сравнения.

Пример 1.8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n}, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

■ Прежде всего заметим, что при $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \alpha n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, поэтому ряд (1.12) сходится. Если же $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) = \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\, 2\sin\frac{(n+1)\,\alpha}{2}\sin\frac{n\,\alpha}{2},$$

откуда следует, что $|B_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ является монотонной бесконечно малой последовательностью, то при $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ряд (1.12) сходится по признаку Дирихле.

Таким образом, ряд (1.12) сходится для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. □

1.5 Ряд лейбницевского типа и его свойства

Определение 1.8. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется знакочередующимся, если любые его два соседних члена имеют противоположные знаки, то есть* $\operatorname{sgn}(a_n \cdot a_{n+1}) = -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что знакочередующийся ряд всегда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{где } a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Далее будем всегда использовать первое представление такого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,\ a_n > 0. \tag{1.13}$$

Теорема 1.18 (признак Лейбница)**.** *Знакочередующийся ряд, у которого* $\{a_n\}$ *— монотонная и бесконечно малая при* $n \to +\infty$ *последовательность, сходится, его сумма неотрицательна и не превосходит* a_1.

■ Поскольку $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{a_n\}$ является невозрастающей бесконечно малой. Частичные суммы B_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

образуют ограниченную последовательность. Следовательно, ряд (1.13) сходится по признаку Дирихле.

Оценим сумму ряда (1.13), для чего рассмотрим подпоследовательности $\{S_{2n}\}$ и $\{S_{2n+1}\}$, его частичных сумм. Так как для всех $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

и $a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, то $S_{2n} \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и потому $S = \lim S_{2n} \geq 0$.

Поскольку $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

то $S_{2n+1} \leq a_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и потому $S = \lim S_{2n+1} \leq a_1$. $\square$

Определение 1.9. *Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют монотонную бесконечно малую последовательность, называется рядом лейбницевского типа.*

С учётом определения 1.9 теорема 1.18 принимает вид.

Теорема 1.19. *Ряд лейбницевского типа сходится.*

Из доказанной теоремы вытекает следующий результат.

Следствие. *Число* $\sigma^{(k)} = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *— сумма k-го остатка ряда лейбницевского типа (1.13), по модулю не превосходит модуля его первого члена, то есть* $|\sigma^{(k)}| \leq a_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Пример 1.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

■ Исследуемый ряд является, очевидно, рядом лейбницевского типа, поэтому он сходится и $|\sigma^{(n)}| \leq a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то есть замена суммы S ряда величиной его n-ой частичной суммы допускает абсолютную погрешность, которая не превосходит $\dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.6 Абсолютная и условная сходимость ряда

Лемма 1.2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

■ Доказательство утверждения следует из критерия Коши сходимости числового ряда, поскольку для всех $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|. \ \square$$

Замечание. Обратное утверждение неверно: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится, а ряд из модулей его членов (гармонический ряд) расходится.

Определение 1.10. *Числовой ряд* (1.2) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{1.14}$$

Если же ряд (1.14) расходится, а ряд (1.2) сходится, то говорят, что ряд (1.2) сходится условно (не абсолютно).

Очевидно, что для знакопостоянного числового ряда понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Пример 1.10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}, \quad p\in\mathbb{R}_+. \tag{1.15}$$

■ Так как $\dfrac{|\sin n|}{n^p}\le\dfrac{1}{n^p}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$, то ряд (1.15) абсолютно сходится при $p>1$. Если же $p\in(0,1]$, то для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{|\sin n|}{n^p}\ge\frac{\sin^2 n}{n^p}=\frac{1-\cos 2n}{2n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2n}{2n^p}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\,n^p}$ расходится при $p\in(0,1]$ (см. пример 1.4), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2\,n^p}$ сходится при $p\in(0,1]$ по признаку Дирихле, то по теореме 1.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos 2n}{2n^p}$ расходится. Поэтому при $p\in(0,1]$ расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{n^p}$ и, значит, при $p\in(0,1]$ ряд (1.15) не является абсолютно сходящимся. По аналогии с примером (1.12), применяя к ряду (1.15) признак Дирихле, убеждаемся в его сходимости, а, следовательно, в его условной сходимости при $p\in(0,1]$. □

1.7 Свойства сходящихся рядов

Определение суммы ряда существенно отличается от определения суммы конечного числа слагаемых, поскольку в первом используется предельный переход. Поэтому известные свойства суммы чисел переносятся на сумму ряда не полностью: некоторые из свойств выполняются только при определённых условиях.

Рассмотрим ряд (1.2). Объединяя его члены произвольным образом в группы, не меняя при этом порядка их следования, получим ряд

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + \tag{1.16}$$
$$+(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

Теорема 1.20 (сочетательное свойство сходящегося ряда)**.** *Если ряд (1.2) сходится, то ряд (1.16), полученный из (1.2) произвольной группировкой его членов без нарушения порядка их следования, сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

■ Пусть S_n — n-ная частичная сумма ряда (1.2), σ_k — k-ая частичная сумма ряда (1.16). Тогда $\sigma_k = S_{n_k}$. Поскольку последовательность $\{S_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{S_n\}$, то из сходимости ряда (1.2) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = \lim S_n = S \in \mathbb{R}$, а это означает не только сходимость ряда (1.16), но и равенство сумм рядов (1.16) и (1.2). □

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из сходимости ряда (1.16), вообще говоря, не следует сходимость ряда (1.2). Подтверждением этому являются ряды

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

и

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots .$$

Однако в одном частном случае такое обращение имеет место.

Теорема 1.21. *Если внутри каждой скобки ряда (1.16) все члены имеют один и тот же знак, то из сходимости ряда (1.16) следует сходимость ряда (1.2).*

Доказательство этого результата оставляем читателю как упражнение (см. [12, с. 314]).

Пример 1.11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/3]}}{n}. \tag{1.17}$$

■ Рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}\right)$, полученный из ряда (1.17) отбрасыванием первых двух членов и группировкой последовательных членов одного знака. Этот ряд, очевидно, является рядом лейбницевского типа, поэтому сходится, а значит, согласно теореме 1.21, сходится и ряд (1.17). $\square$

Хорошо известно, что в конечной сумме от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Выясним, обладают ли сходящиеся ряды таким свойством (его называют переместительным свойством). Напомним, что биективное отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называют перестановкой. Ряд, полученный из (1.2) с помощью перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\sigma(k) = n_k$, $k \in \mathbb{N}$) его членов, принимает вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} = a_{n_1} + a_{n_2} + a_{n_3} + \cdots + a_{n_k} + \cdots . \tag{1.18}$$

Теорема 1.22. *Если положительный числовой ряд (1.2) сходится, то ряд (1.18), полученный из (1.2) с помощью перестановки σ, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (1.2).*

■ Пусть S_n и U_k — частичные суммы рядов (1.2) и (1.18) соответственно:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ n \in \mathbb{N},$$

$$U_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

По условию ряд (1.2) является положительным сходящимся, поэтому, если S — сумма ряда (1.2), то в силу замечания, сделанного после теоремы 1.6, имеем, что $S_n \le S$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Если $p_k = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$U_k \le S_{p_k} \le S, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

По теореме 1.6 ряд (1.18) сходится и его сумма U удовлетворяет условию $U \le S$. Но ряд (1.2) получается из ряда (1.18) перестановкой σ^{-1}, тогда, в силу доказанного, $S \le U$. Значит $S = U$. $\square$

Рассмотрим знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Положим

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0 \\ 0, & \text{если } a_n \le 0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{если } a_n < 0 \\ 0, & \text{если } a_n \ge 0 \end{cases}.$$

Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{1.19}$$

являются положительными и к их исследованию применимы признаки сравнения.

Теорема 1.23. *Для знакопеременного ряда (1.2) справедливы следующие утверждения:*

1) ряд (1.2) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды (1.19) ;

2) если один из рядов (1.19) сходится, а другой расходится, то ряд (1.2) расходится;

3) если ряд (1.2) сходится условно, то ряды (1.19) расходятся.

■ 1). Пусть S_n, σ_n^+, σ_n^- — n-ые частичные суммы рядов (1.2), (1.19), соответственно. Так как ряд (1.2) абсолютно сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Если S_n^* — n-ая частичная сумма последнего ряда, то, согласно теореме 1.6, существует число $M > 0$ такое, что $S_n^* \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Но $S_n^* = \sigma_n^+ + \sigma_n^-$, поэтому

$$\sigma_n^+ \leq M,\ \ \sigma_n^- \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

что означает сходимость рядов (1.19) , а значит, и рядов, составленных из положительных и отрицательных членов.

Докажем обратное утверждение. Пусть ряды (1.19) сходятся. По теореме 1.6 существуют числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что

$$\sigma_n^+ \leq M_1,\quad \sigma_n^- \leq M_2,\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$S_n^* = \sigma_n^+ + \sigma_n^- \leq M_1 + M_2,\quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и ряд (1.2) сходится абсолютно.

2). Пусть первый ряд (1.19) сходится, а второй ряд расходится. Тогда по теореме 1.6 и её следствию существует $M_1 > 0$ такое, что $\sigma_n^+ \leq M_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, а $\sigma_n^- \to +\infty$. Но для частичной суммы ряда (1.2) имеет место представление

$$S_n = \sigma_n^+ - \sigma_n^-,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

поэтому последовательность $\{S_n\}$ является бесконечно большой и ряд (1.2) расходится.

3). Пусть ряд (1.2) сходится условно. Предположим, что ряды (1.19) не являются одновременно расходящимися. Тогда, если эти ряды одновременно сходятся, то по первой части этой теоремы ряд (1.2) абсолютно сходится, что противоречит условию. Если же один из рядов (1.19) сходится, а второй расходится, то по второй части этой теоремы ряд (1.2) расходится, что также противоречит условию. Следовательно, ряды (1.19) расходятся. □

Теорема 1.24 (переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов)**.** *Если ряд (1.2) абсолютно сходится, то ряд (1.18), полученный* *из (1.2) произвольной перестановкой его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (1.2).*

■ По условию ряд (1.2) абсолютно сходится, поэтому по теореме 1.22 сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|$, соответствующий ряду (1.18), а значит ряд (1.18) абсолютно сходится. Докажем, что суммы рядов (1.2) и (1.18) совпадают. В силу теоремы 1.23 ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^-$$

сходятся. Поскольку последние ряды положительны, то по теореме 1.22

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^-.$$

Наконец, так как $a_k = a_k^+ - a_k^-, k \geq 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^- = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^+ - a_{n_k}^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}. \quad \square$$

Покажем, что условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают: в каждом таком ряде с помощью перестановки членов можно изменить сумму и даже нарушить сходимость.

Теорема 1.25 (Римана)**.** *Если ряд (1.2) сходится условно, то для любого $L \in [-\infty, +\infty]$ существует такая перестановка его членов, что при $L \in (-\infty; \infty)$ соответствующий ряд (1.18) сходится и его сумма равна L, а при $L = +\infty$ или $L = -\infty$ соответствующий ряд (1.18) расходится и последовательность его частичных сумм является, соответственно, положительной или отрицательной бесконечно большой.*

■ 1). Пусть $L = +\infty$. Так как ряд (1.2) сходится условно, то согласно теореме 1.23 ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся. Удалим в этих рядах нулевые элементы, получим соответственно

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+ \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k}^-.$$

Последовательности частичных сумм этих рядов являются положительными бесконечно большими. Следовательно,

$$\exists p_1 \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{p_1} a^+_{n_k} > 1 + a^-_{m_1};$$

$$\exists p_2 \in \mathbb{N}, p_2 > p_1 : \sum_{k=p_1+1}^{p_2} a^+_{n_k} > 2 + a^-_{m_2};$$

$$\exists p_3 \in \mathbb{N}, p_3 > p_2 : \sum_{k=p_2+1}^{p_3} a^+_{n_k} > 3 + a^-_{m_3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассмотрим ряд

$$a^+_{n_1} + \cdots + a^+_{n_{p_1}} - a^-_{m_1} + a^+_{n_{p_1+1}} + \cdots + a^+_{n_{p_2}} - a^-_{m_2} + a^+_{n_{p_2+1}} + \cdots \qquad (1.20)$$

Покажем, что ряд (1.20) искомый. В силу выбора последовательности $\{p_k\}$ частичные суммы V_k ряда (1.20) обладают свойствами :

$$V_{p_k+1} > k, \text{ и } V_{p_k} > k + a^-_{m_k} > k, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

$$V_{p_k+1} < V_n < V_{p_{k+1}}, \ \forall\, n \in (p_k + 1, p_{k+1}).$$

Значит последовательность $\{V_n\}$ является положительной бесконечно большой и ряд (1.20) расходится.

Аналогично рассматривается ситуация $L = -\infty$.

2). Пусть теперь L — положительное число. Согласно теореме 1.23 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^+_{n_k}$ расходится. Поэтому найдётся $p_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \cdots + a^+_{n_{p_1}} > L, \text{ но } a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \cdots + a^+_{n_{p_1-1}} \le L$$

(если $a^+_{n_1} > L$, то будем считать $p_1 = 1$). Сумму $\sum\limits_{k=1}^{p_1} a^+_{n_k}$ возьмём в качестве первого члена вспомогательного ряда. Для построения второго члена этого ряда из первого члена будем последовательно вычитать члены положительного расходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^-_{m_k}$ до тех пор, пока не получим неравенство

$$(a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \cdots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + a^-_{m_2} + \cdots + a^-_{m_{q_1}}) \le L,$$

но

$$(a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \cdots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + a^-_{m_2} + \cdots + a^-_{m_{q_1-1}}) > L.$$

Величину $-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})$ примем за второй член конструируемого вспомогательного ряда. На следующем шаге будем последовательно прибавлять следующие за $a^+_{n_{p_1}}$ члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a^+_{n_k}$ до тех пор, пока не получим, что

$$(a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}})-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}})>L,$$

но

$$(a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}})-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2-1}})\le L.$$

Сумма добавленных на этом шаге элементов $(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}})$ будет третим членом вспомогательного ряда. Далее будем вычитать последовательно члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a^-_{n_k}$, начиная с $a^-_{n_{q_1+1}}$, пока не получим неравенства

$$(a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}})-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}})-$$
$$-(a^-_{m_{q_1+1}}+\cdots+a^-_{m_{q_2}})\le L,$$
$$(a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}})-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}})-$$
$$-(a^-_{m_{q_1+1}}+\cdots+a^-_{m_{q_2-1}})>L,$$

и так далее.

В результате получим ряд

$$(a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}})-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}})+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}})-\cdots \tag{1.21}$$

Пусть σ_k — его частичные суммы. Тогда

$$\sigma_1=a^+_{n_1}+\cdots+a^+_{n_{p_1}},\ |\sigma_1-L|<a^+_{n_{p_1}},$$
$$\sigma_2=\sigma_1-(a^-_{m_1}+\cdots+a^-_{m_{q_1}}),\ |\sigma_2-L|<a^-_{m_{q_1}},$$
$$\sigma_3=\sigma_2+(a^+_{n_{p_1+1}}+\cdots+a^+_{n_{p_2}}),\ |\sigma_3-L|<a^+_{n_{p_2}},$$
$$\sigma_4=\sigma_3-(a^-_{m_{q_1+1}}+\cdots+a^-_{m_{q_2}}),\ |\sigma_4-L|<a^-_{m_{q_2}},$$

. . . .

то есть $|\sigma_{2k-1}-L|<a^+_{n_{p_k}}$, $|\sigma_{2k}-L|<a^-_{m_{q_k}}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$.

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и потому $\lim a_n=0$. Но тогда

$$a^+_{n_{p_k}}\to 0,\ a^-_{m_{q_k}}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Следовательно, $\sigma_{2k-1} \to L, \sigma_{2k} \to L$, а значит и $\sigma_n \to L$ при $n \to \infty$, то есть ряд (1.21) сходится и его сумма равна L. Отсюда, согласно теореме 1.21, ряд

$$a_{n_1}^+ + \cdots + a_{n_{p_1}}^+ - a_{m_1}^- - \cdots - a_{m_{q_1}}^- + a_{n_{p_1+1}}^+ + \cdots + a_{n_{p_2}}^+ - \cdots$$

сходится и его сумма равна L.

Следует отметить, что если $L \in (-\infty, 0)$, то в качестве первого слагаемого вспомогательного ряда (1.21) нужно брать первые члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m_k}^-$. Последующие рассуждения аналогичны тем, которые проводятся в пункте 2). При $L = 0$ в качестве первого члена вспомогательного ряда можно взять $a_{n_1}^+$ (при этом $p_1 = 1$) или $a_{m_1}^-$ (тогда $q_1 = 1$). $\square$

1.8 Умножение рядов

Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{1.22}$$

Подражая правилу умножения конечных сумм, рассмотрим всевозможные произведения членов рядов (1.22), то есть числа $a_i\, b_k$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и составим из них бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

Перенумеруем все члены этой матрицы в произвольном порядке, получим последовательность $\{U_k\} : U_k = a_{i_k} b_{j_k}$. Соответствующий ряд

$$a_{i_1} b_{j_1} + a_{i_2} b_{j_2} + \cdots + a_{i_k} b_{j_k} + \cdots \tag{1.23}$$

называют произведением рядов (1.22). Чаще всего нумеруют элементы матрицы по диагоналям

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + \cdots$$

или по квадратам

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \cdots$$

Если произведение рядов выписано по диагоналям и члены, лежащие на одной диагонали, объединены, то ряд

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots \tag{1.24}$$

называют произведением рядов (1.22) в форме Коши. Заметим, что n-ый член ряда (1.24) имеет вид

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.26 (Коши). *Если ряды (1.22) абсолютно сходятся, то любой ряд, являющийся произведением этих рядов, абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм рядов (1.22).*

■ По условию ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \tag{1.25}$$

сходятся. Пусть A_n, B_n, A_n^*, B_n^* — n-ые частичные суммы рядов (1.22), (1.25), соответственно, σ_n — n-ая частичная сумма ряда (1.23) и σ_n^* — n-ая частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i_k}||b_{j_k}|$. Пусть $p_k = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $q_k = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n^* \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{p_n}|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{q_n}|) = A_{p_n}^* \cdot B_{q_n}^*.$$

Так как ряды (1.25) сходятся, то последовательности $\{A_n^*\}$ и $\{B_n^*\}$ ограничены (см. теорему 1.6), то есть $\exists M_1 > 0$, $\exists M_2 > 0 : |A_n^*| \leq M_1$, $|B_n^*| \leq M_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$\sigma_n^* \leq A_{p_n}^* \cdot B_{q_n}^* \leq M_1 \cdot M_2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

что влечёт сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i_k}||b_{j_k}|$, то есть абсолютную сходимость ряда (1.23). Заметим, что ряды, представляющие произведение двух рядов, отличаются друг от друга порядком следования членов, а поэтому получены друг из друга некоторой перестановкой. Согласно теореме 1.11 они имеют одну и ту же сумму. Для подсчёта суммы ряда (1.23) рассмотрим произведение, выписанное по квадратам. Поскольку для сходящихся рядов имеет место сочетательное свойство, то можно рассмотреть ряд

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \cdots \tag{1.26}$$

Если S_n — n-ая частичная сумма этого ряда, то

$$S_1 = a_1b_1 = A_1B_1,$$

$$S_2 = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = A_2B_2,$$

$$S_3 = a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + b_3) = A_3B_3,$$

. . . . ,

то есть $S_n = A_n B_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Если A, B — суммы рядов (1.22), соответственно, то $\lim S_n = A \cdot B$. Следовательно, сумма ряда (1.26), а, значит, и любого ряда (1.23), равна $A \cdot B$. $\square$

Теорема 1.27 (Мертенса)**.** *Если ряды (1.22) сходятся, и один из них сходится абсолютно, то их произведение в форме Коши сходится и его сумма равна произведению сумм данных рядов.*

Доказательство теоремы 1.27 читатель может найти в [12, с. 328].

Замечание. В теореме 1.27 требование абсолютной сходимости одного из рядов (1.22) существенно. Для подтверждения последнего утверждения рассмотрим следующий пример.

Пример 1.12. Пусть в рядах (1.22) $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряды (1.22) сходятся условно. Ряд (1.24) (произведение рядов в форме Коши) будет иметь вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = (-1)^k \left(\frac{1}{1^{1/2}(k-1)^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}(k-2)^{1/2}} + \dots + \frac{1}{(k-1)^{1/2} 1^{1/2}} \right).$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{1}{i^{1/2}(k-i)^{1/2}} \ge (k-1) \dfrac{1}{(k-1)^{1/2}(k-1)^{1/2}} = 1$, то, в силу необходимого условия сходимости ряда, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится. $\square$

1.9 Бесконечные произведения

Определение 1.11. *Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$, члены которой отличны от нуля. Символ*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots \quad \text{или} \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.27}$$

называют бесконечным произведением, а число, равное произведению его первых n сомножителей $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, — n-ым частичным произведением бесконечного произведения (1.27). Если числовая последовательность $\{P_n\}$ сходится к отличному от нуля числу P, то бесконечное произведение (1.27) называют сходящимся, в противном случае — расходящимся. Если бесконечное произведение сходится и

$P = \lim P_n$, *то число* P *называют значением этого произведения и пишут:* $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Каждому бесконечному произведению соответствует последовательность его частичных произведений. Верно и обратное: каждой числовой последовательности $\{P_n\}$, все члены которой отличны от нуля, соответствует бесконечное произведение чисел

$$a_1 = P_1,\ a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}},\ \forall\, n \geq 2,$$

для которого $\{P_n\}$ — последовательность частичных произведений.

Теорема 1.28 (необходимое условие сходимости)**.** *Если бесконечное произведение чисел (1.27) сходится, то* $\lim a_k = 1$.

■ Пусть бесконечное произведение (1.27) сходится к числу P. Тогда $P \neq 0$, $\lim P_{k-1} = \lim P_k = P$ и $\lim a_k = \lim \dfrac{P_k}{P_{k-1}} = 1$. □

Замечание. Условие $\lim a_k = 1$ является необходимым, но не достаточным условием для сходимости бесконечного произведения (1.27). Например, для бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{k}$

$$\lim a_k = \lim \frac{k+1}{k} = 1, \quad \text{но} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = (n+1) \to +\infty.$$

Поэтому рассматриваемое бесконечное произведение расходится.

Поскольку бесконечное произведение, у которого хотя бы один сомножитель равен нулю, считается расходящимся, то в дальнейшем мы не будем рассматривать такие бесконечные произведения. Из определения сходимости бесконечного произведения ясно, что присоединение или отбрасывание конечного числа первых отличных от нуля сомножителей не влияет на его сходимость или расходимость. В силу теоремы о сохранении знака для сходящейся последовательности (см. [8, следствие теоремы 2.5]), бесконечное произведение, у которого бесконечно много положительных и отрицательных сомножителей, расходится. Поэтому в дальнейшем, не нарушая общности, будем рассматривать только те бесконечные произведения, у которых все сомножители положительны.

Теорема 1.29. *Бесконечное произведение (1.27) с положительными сомножителями сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k. \tag{1.28}$$

В случае сходимости сумма S ряда (1.28) и значение P произведения (1.27) связаны соотношением $P = e^S$.

■ Пусть $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В силу непрерывности показательной функции на $\mathbb{R}$ и логарифмической функции на промежутке $(0, +\infty)$, последовательность $\{P_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{S_n\}$. При этом если $S = \lim S_n$, то $\lim P_n = e^S \in (0, +\infty)$. Если же $P = \lim P_n \neq 0$, то существует $\lim S_n = \ln P$ то есть $S = \ln P$. □

Часто удобно общий член бесконечного произведения (1.27) представдять в виде $a_k = (1 + u_k),\ k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.30. *Если $u_k \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то для сходимости бесконечного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k) \tag{1.29}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.30}$$

■ Необходимым условием сходимости бесконечного произведения (1.29) и ряда (1.30) является условие $\lim u_k = 0$, поэтому в дальнейшем будем считать, что $u_k \to 0$. По теореме 1.29 бесконечное произведение (1.29) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k). \tag{1.31}$$

По условию $u_k \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому $\ln(1 + u_k) \geq 0$. Учитывая следствие 2 теоремы 1.8 и то, что $\lim \dfrac{\ln(1 + u_k)}{u_k} = 1$, получаем, что ряд (1.31) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (1.30). □

Теорема 1.31. *Если ряды (1.30) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2$ сходятся, то сходится бесконечное произведение (1.29).*

■ Поскольку ряд (1.30) сходится, то $\lim u_k = 0$ и $1 + u_k > 0$, $\forall\, k > k_0$. Так как $\ln(1+u_k) = u_k - \dfrac{1}{2}u_k^2 + o(u_k^2)$ при $k \to \infty$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)\right)$$

сходится, то согласно теореме 1.4 сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k)$. Поэтому сходится бесконечное произведение (1.29). □

Пример 1.13. Исследовать на сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\sin k}{k}\right).$$

■ Для данного бесконечного произведения $u_k = \dfrac{\sin k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{u_k\}$ не является знакопостоянной, поэтому изучим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^2}.$$

Первый ряд сходится в силу признака Дирихле, а второй — в силу признака сравнения (теорема 1.7). По теореме 1.31 данное бесконечное произведение сходится. □

По аналогии с рядами введём следующее определение.

Определение 1.12. *Бесконечное произведение (1.27) называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд (1.28). Если ряд (1.28) условно сходится, то бесконечное произведение (1.27) называется условно сходящимся.*

Теорема 1.32 (критерий абсолютной сходимости произведения)**.** *Пусть* $u_k \in (-1, +\infty)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ *сходилось абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$.

■ *Необходимость.* Если бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ сходится абсолютно, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$ и $\lim u_k = 0$. Но

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\ln(1+u_k)|}{|u_k|} = 1,$$

и в силу следствия 2 теоремы 1.8 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ сходится.

Достаточность. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ сходится, тогда в силу той же теоремы сравнения сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$, что означает абсолютную сходимость бесконечного произведения. $\square$

Пример 1.14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\big(1+u_n\big)$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ Из необходимого условия сходимости бесконечного произведения следует, что при $\alpha \leq 0$ бесконечное произведение расходится. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и условно сходится при $\alpha \in (0,1]$, то данное бесконечное произведение абсолютно сходится при $\alpha > 1$. Так как при $1/2 < \alpha \leq 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится условно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ сходится абсолютно, то данное бесконечное произведение при таких α сходится условно. А так как

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \text{ при } \ n \to \infty,$$

то при $\alpha \in (0,1/2]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right)$ расходится, и потому данное бесконечное произведение также расходится. $\square$

1.10 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать,что если один из числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а другой расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ расходится.

2. Пусть числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$? Привести примеры.

3. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ сходятся, то сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

4. Привести пример двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что $a_n \geq b_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

5. Привести пример двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что $|a_n| \geq |b_n|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

6. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то последовательность сумм его остатков является бесконечно малой, то есть $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_n = 0$.

7. Доказать, что если положительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются бесконечно малыми одного порядка, то есть $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$ при $n \to +\infty$ то соответствующие ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

8. Доказать, что если положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходится. Верно ли обратное утверждение?

9. Доказать, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$.

10. Доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$.

11. Пусть $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ — сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{n}$ расходится, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

12. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость рядов:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+n\,a_n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n\,a_{n+1}}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$.

13. Пусть $\{b_n\}$—последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость рядов:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{1+b_n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n-1})$.

14. Доказать, что если $\lim n a_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

15. Пусть $\{a_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a_n = 0$.

16. Пусть положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, R_n^a и R_n^b — n-ые остатки этих рядов. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится медленнее ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R_n^a}{R_n^b} = 0$. Доказать, что для каждого положительного сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, который сходится медленнее его.

17. Пусть для последовательности положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Доказать, что тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

18. Доказать признак Раабе. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — строго положителен и $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right), n \geq 1$. Тогда:
    (a) если существует число $r > 1$ такое, что $R_n \geq r$, $\forall\, n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
    (b) если $R_n \leq 1$, $\forall\, n \geq n_1$, то ряд расходится.
19. Пусть $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и S — сумма ряда лейбницевского типа $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, . Доказать, что $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, где S_n — n-ая частичная сумма ряда.
20. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Доказать что характер сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ совпадает с характером сходится второго ряда.
21. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то
$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$
22. Привести пример расходящегося ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но существует такая группировка членов, что полученный ряд сходится.
23. Привести пример расходящихся рядов, для которых ряд произведения в форме Коши сходится.
24. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$ сходится.
25. Доказать, что если $\{a_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность, то ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |a_k - a_{k-1}|$ сходится. Верно ли это утверждение для монотонной неограниченной последовательности?
26. Доказать необходимое условие сходимости ряда, используя определение сходимости ряда.

27. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+\dots+a_{n+p})=0$ при любом $p\in\mathbb{N}$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?

28. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — некоторый числовой ряд, а $b_n=(a_{2n}+a_{2n+1}),\ n\in\mathbb{N}$. Являются ли ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ равносходящимися?

29. Пусть $\{b_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{a_n\}$ — положительная и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ сходится. Верно ли это утверждение, если $\{a_n\}$ является знакопеременной?

30. Верен ли признак сравнения в непредельной форме для знакопеременных рядов? Привести подтверждающие примеры.

31. Пусть $a_n\ge 0, b_n\ge 0, \forall n\in\mathbb{N}$, и $\exists\{a_{n_k}\}: a_{n_k}<b_{n_k}$. Доказать, что из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

32. Пусть $a_n\le b_n\le c_n, \forall n\in\mathbb{N}$, и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$?

33. Привести примеры таких сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится.

34. Показать, что монотонность функции f на $[1,+\infty)$ существенна для справедливости интегрального признака Маклорена-Коши.

35. Можно ли по признаку Даламбера исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n-n}$?

36. Пусть $c_n>0, \forall\, n\in\mathbb{N}$ и $c_n\downarrow 0$. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}c_n$?

37. Показать существенность условия монотонности последовательности $\{a_n\}$ в признаке Лейбница сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

38. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно (условно). Доказать, что для $c \neq 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится абсолютно (условно).

39. Найти произведение по Коши рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^n$, $0 < a,\, b < 1$.

Глава 2

Функциональные последовательности и функциональные ряды

2.1 Сходимость функциональных последовательностей

Пусть $\widetilde{X}$ — непустое подмножество в $\mathbb{R}$, $D(\widetilde{X})$ — совокупность всех вещественнозначных функций, определённых на множестве $\widetilde{X}$. Отображение $F : \mathbb{N} \to D(\widetilde{X})$ называют функциональной последовательностью, определённой (или заданной) на $\widetilde{X}$. Образ $F(n)$ числа n при этом отображении обычно обозначают через $f_n(x)$, а всю последовательность — через $\{f_n(x)\}$.

Каждому $x_0 \in \widetilde{X}$ функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сопоставляет числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Определение 2.1. *Если $x_0 \in \widetilde{X}$ и последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то x_0 называют точкой сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в точке x_0. Множество $X \subset \widetilde{X}$ всех точек сходимости функциональной последовательности называют областью её сходимости и говорят, что функциональная последовательность поточечно сходится на множестве X.*

Определение 2.2. *Пусть на множестве X функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится. Функцию*

$$f : x \in X \to \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

называют предельной функцией данной последовательности.

Тот факт, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится к функции f на множестве X символически записывают в виде

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \text{ или } f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x),\ \forall\, x \in X.$$

Таким образом, функция f является предельной для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X (или иначе, последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится к $f(x)$ на множестве X), если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in X$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon, x)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что из критерия Коши сходимости числовой последовательности вытекает критерий поточечной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 2.1. *Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходилась на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in X$ нашёлся номер $N = N(\varepsilon, x)$ такой, что неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N$, $m > N$.*

Пример 2.1. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, определена на $\mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ \infty, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

и не существует предела в точке $x_0 = -1$, то промежуток $(-1; 1]$ является областью сходимости данной последовательности, а функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

является предельной для нее на множестве $X = (-1, 1]$.

Отметим, что функция f терпит разрыв в точке $x = 1$, хотя все члены данной последовательности непрерывны в ней.

Определение 2.3. *Последовательность $\{f_n(x)\}$, определенная на X, называется равномерно сходящейся к функции f на множестве $X_0 \subset X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \; \forall n > N, \; \forall x \in X_0.$$

Тот факт, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве X_0 сходится к функции $f(x)$ символически будем записывать в виде

$$f_n(x) \overset{X_0}{\rightrightarrows} f(x).$$

Замечания.

1. В определении равномерной сходимости функциональной последовательности в отличие от определения поточечной сходимости номер N зависит только от ε и не зависит от точек x множества X_0.

2. Из определения 2.3 непосредственно вытекает, что если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции f на множестве X_0, то она поточечно сходится к f на X_0. Следовательно, равномерная сходимость является более сильной сходимостью по сравнению с поточечной.

3. Если каждая функция функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ является постоянной на множестве X, то есть $f_n(x) = c_n$, $\forall\, x \in X$ и для всех $n \in \mathbb{N}$, а числовая последовательность $\{c_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} c$.

4. На каждом конечном подмножестве (состоящем из конечного числа точек) множества X сходимости функциональной последовательности эта последовательность сходится равномерно.

5. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится к $f(x)$ на множестве X, равномерно сходится на множествах $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$ и $X = X_1 \bigcup X_2$, то она равномерно сходится на множестве X. Наоборот, если функциональная последовательность равномерно сходится на множестве X, то она равномерно сходится на любом подмножестве $Y \subset X$.

Геометрически равномерная сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции f на множестве X означает, что для любой ε-полосы $G_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon,\; x \in X\}$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что графики функций $y = f_n(x)$ с номерами $n > N$ будут лежать в полосе G_ε.

Пример 2.2. Показать, что последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится равномерно к предельной функции $f(x) \equiv 0$ на любом отрезке $[-q, q]$, если $0 < q < 1$, и неравномерно сходится на интервале $(0, 1)$.

■ В самом деле, для $q \in (0, 1)$ рассматриваемая последовательность сходится к функции $f(x) \equiv 0$ (см. пример 2.1) и

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n| \le q^n,\ \forall x \in [-q, q],\ \forall n > N. \tag{2.2}$$

Поскольку $\lim q^n = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Из неравенства (2.2) получаем, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in [-q, q].$$

Следовательно, $f_n(x) \overset{[-q,q]}{\rightrightarrows} 0$, если $q \in (0, 1)$.

Последовательность $\{x^n\}$ поточечно на $(0, 1)$ сходится к той же функции $f(x) \equiv 0$. Для доказательства неравномерной сходимости этой последовательности на интервале $(0, 1)$ следует найти такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ существует номер $n > N$ и точка $x_n \in (0,1)$, для которых

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Заметим, что точки

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0,1),\ \forall\, n \in N,\ \text{и}\ |f_n(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Поскольку $\lim \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$, то существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{2e}.$$

Тогда, если $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2e}$, то для любого $N > n_0$ найдётся такое $n > N$, что

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \in (0,1)\ \text{и}\ |f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} = \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что данная последовательность неравномерно сходится на $(0,1)$.

Неравномерную сходимость последовательности $\{x^n\}$ на $(0,1)$ можно доказать иначе. Предположим, что $x^n \overset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$. Тогда для числа $\varepsilon = 1/3$ существует номер N, такой, что для всех $n > N$ и для всех $x \in (0,1)$ выполняется неравенство $|x^n - 0| = x^n < \dfrac{1}{3}$. Однако, для $x_n = 1/\sqrt[n]{2} \in (0,1)$, получаем очевидное неравенство $(x_n)^n = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3},\ n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно и последовательность $\{x^n\}$ неравномерно сходится на интервале $(0,1)$. $\square$

Замечание. Из приведённых доказательств второй части примера 2.2 следует, что

$$x^n \overset{[0,1)}{\not\rightrightarrows} f(x) = 0, \quad x^n \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}.$$

Помимо понятия равномерной сходимости на множестве, часто используется понятие равномерной сходимости внутри множества.

Определение 2.4. *Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ внутри множества X, если она равномерно сходится к $f(x)$ на любом ограниченном, замкнутом подмножестве множества X. Символически этот факт записывают так: $f_n(x) \overset{(X)}{\rightrightarrows} f(x)$.*

Очевидно, что если X — ограниченное, замкнутое множество, то на X определения 2.4 и 2.3 совпадают.

С учётом последнего определения результат примера 2.2 можно сформулировать так: функциональная последовательность $\{x^n\}$ сходится равномерно внутри интервала $(0,1)$, и неравномерно сходится на интервале $(0,1)$.

2.2 Арифметические операции с равномерно сходящимися функциональными последовательностями

Теорема 2.2. *Если функциональные последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{\phi_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве X, то на множестве X равномерно сходится их сумма $\{f_n(x)+\phi_n(x)\}$.*

■ Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ и $\phi_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \phi(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению 2.3 $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N, \quad \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\phi_n(x) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поэтому $\forall n > N$, $\forall x \in X$

$$|(f_n(x)+\phi_n(x)) - (f(x)+\phi(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |\phi_n(x) - \phi(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2.3. *Если числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к числу α, а функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X к ограниченной на множестве X функции f, то произведение этих последовательностей $\{\alpha_n f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции αf.*

■ Очевидно, что последовательность $\{\alpha_n f_n(x)\}$ поточечно сходится на множестве X к функции $\alpha f(x)$ и

$$|\alpha_n f_n(x) - \alpha f(x)| \leq |\alpha_n|\,|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|\,|\alpha_n - \alpha| \tag{2.3}$$

Из ограниченности сходящейся последовательности $\{\alpha_n\}$ и ограниченности функции f на множестве X следует, что найдётся $M > 0$ такое, что

$$|\alpha_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{и } |f(x)| \leq M, \ \forall x \in X.$$

Далее, поскольку $\alpha_n \to \alpha$ и $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ \forall n > N, \ \text{и } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ \forall n > N, \ \forall x \in X.$$

Следовательно, $\forall\, n > N$ и $\forall\, x \in X$

$$|\alpha_n\, f_n(x) - \alpha\, f(x)| \le |\alpha_n|\, |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|\, |\alpha_n - \alpha| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

что завершает доказательство. $\square$

Замечание. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции f, то для любого числа α функциональная последовательность $\{\alpha\, f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $\alpha\, f$.

2.3 Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема 2.4. *Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится к функции $f(x)$ на множестве X. Для того чтобы $\{f_n(x)\}$ сходилась к $f(x)$ равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы была бесконечно малой числовая последовательность*

$$\alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \ n \in \mathbb{N}.$$

■ *Необходимость.* Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X. Тогда, согласно определению 2.3, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, n > N, \ \forall\, x \in X.$$

Поэтому $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall\, n > N$, то есть последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой.

Заметим, что для некоторого конечного числа номеров n величина α_n может быть равна $+\infty$, но, начиная с некоторого номера, $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Достаточность. Пусть $\lim \alpha_n = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\alpha_n < \varepsilon$, $\forall n > N$, то есть

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > N,$$

а потому

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, n > N, \forall\, x \in X.$$

Это значит, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. $\square$

Следствие. *Пусть на множестве X определена функция $f(x)$ и задана последовательность $\{f_n(x)\}$. Если существует такая бесконечно малая положительная последовательность $\{\gamma_n\}$, что для всех*

$n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| \le \gamma_n, \forall x \in X,$$

то $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* X.

Пример 2.3. Исследовать на равномерную сходимость на множествах $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, и $(0, +\infty)$ последовательность

$$\{f_n(x)\} : f_n(x) = \operatorname{arctg} nx.$$

■ Очевидно, что предельная функция данной последовательности равна $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$. Так как при $n \to \infty$

$$0 \le \sup_{x \ge \delta} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right| = \sup_{x \ge \delta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\delta \to 0,$$

то $\operatorname{arctg} nx \overset{[\delta;\infty)}{\rightrightarrows} \dfrac{\pi}{2}$. С другой стороны, $\operatorname{arctg} nx \overset{(0,+\infty)}{\not\rightrightarrows} \dfrac{\pi}{2}$, поскольку

$$\sup_{x > 0} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right| \ge \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(n \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \ \square$$

Теорема 2.5 (критерий Коши)**.** *Пусть* $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходилась на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in X. \quad (2.4)$$

■ *Необходимость.* Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на X и $f(x)$ — её предельная функция. По определению 2.3 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$, $\forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

то есть выполнено условие Коши (2.4) равномерной сходимости функциональной последовательности.

Достаточность. Пусть выполнено условие (2.4), тогда для каждого фиксированного $x \in X$ выполнено условие Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$, а потому она сходится. Следовательно, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится на множестве X.

Пусть $f(x)$ — предельная функция данной последовательности. Докажем, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. В силу условия (2.4) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ и $x \in X$

выполняется условие

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что $f(x) = \lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x)$, для любого $x \in X$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $p \to +\infty$, получим:

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall\, x \in X,\ \forall\, n > N.$$

По определению 2.3 это означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве X. $\square$

2.4 Сходимость функционального ряда

Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ с областью определения $\widetilde{X}$ из $\mathbb{R}$. Формально записанную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{или} \quad f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \tag{2.5}$$

называют функциональным рядом, а множество $\widetilde{X}$ — областью определения ряда (2.5). Как и для числовых рядов, изучение функционального ряда (2.5) эквивалентно изучению функциональной последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.5. *Множество X точек $x \in \widetilde{X}$, в которых сходится (абсолютно сходится) соответствующий числовой ряд, называют множеством сходимости (абсолютной сходимости) ряда* (2.5).

Иными словами: множество X сходимости ряда (2.5) есть множество сходимости соответствующей последовательности $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм. Часто X называют множеством поточечной сходимости ряда (2.5). На множестве X определена функция $S(x)$, которая является предельной функцией последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда (2.5), её называют суммой ряда (2.5).

Определение 2.6. *Говорят, что функциональный ряд* (2.5) *равномерно сходится на множестве X (внутри множества X), если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм равномерно сходится на X (внутри множества X).*

Из определения (2.6) и критериев 2.4 и 2.5 следуют

Теорема 2.6. *Пусть X — множество поточечной сходимости ряда* (2.5) *к сумме $S(x)$, и $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$. Для того, чтобы ряд* (2.5) *равномерно сходился на X, необходимо и бостаточно, чтобы была бесконечно малой последовательность*

$$\alpha_n = \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in X} |R_n(x)|.$$

Теорема 2.7 (критерий Коши)**.** *Для того, чтобы ряд* (2.5) *равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) : |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon,\, \forall\, n > N,\, \forall\, p \in \mathbb{N},\, \forall\, x \in X.$$

Теорема 2.8 (необходимое условие равномерной сходимости ряда)**.** *Если функциональный ряд* (2.5) *равномерно сходится на множестве X, то функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к 0, на множестве X.*

Пример 2.4. Исследовать на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.

■ При каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ данный ряд является рядом лейбницевского типа, поэтому в силу оценки остатков лейбницевского ряда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2} \right| \le \frac{1}{n+x^2+1} \le \frac{1}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда $\alpha_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \le \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и, согласно теореме 2.6, рассматриваемый ряд равномерно сходится на множестве $\mathbb{R}$. □

2.5 Достаточные признаки равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 2.9 (признак Вейерштрасса)**.** *Если для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что $|f_n(x)| \le c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$, то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве X.*

■ По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, поэтому по критерию Коши сходимости числового ряда $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon.$$

Но тогда $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon, \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall p \in \mathbb{N}$, то есть выполняется условие Коши равномерной сходимости функционального ряда. □

Следствие 1. *Пусть* $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x)|, \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *сходится, то функциональный ряд* (2.5) *равномерно и абсолютно сходится на множестве* X.

Следствие 2. *Если* $\alpha_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x)| \not\to 0$*, то функциональный ряд* (2.5) *не является равномерно сходящимся на множестве* X.

Замечание. Если $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ расходится, то ничего нельзя сказать о равномерной сходимости функционального ряда (2.5) на множестве X. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 2.5. Исследовать на отрезке [0,1] на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(x)$, в котором

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ x \in [0, 1/2^n) \bigcup (1/2^{n-1}, 1], \\ \dfrac{1}{n} \sin\left(2^n \pi x\right), & \text{если} \ \ x \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]. \end{cases}$$

■ Прежде всего заметим, что в точках $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2^k}\,(k \in \mathbb{N})$, $x \in (1/2, 1]$, все члены ряда равны нулю. А для любого $x \in (0, 1/2)$, $x \neq \dfrac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, существует единственное $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq 2$ такое, что $x \in \left(1/2^{k_0}, 1/2^{k_0 - 1}\right)$. Поэтому не более одного слагаемого в сумме $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ отлично от нуля, а это значит, что для всех $x \in (0, 1/2)$ $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Следовательно,

$$0 \le \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \le \frac{1}{n+1},\ n \ge 2,\ \text{и потому}\ \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = 0,$$

что означает равномерную сходимость данного ряда на отрезке [0,1] (см. теорему 2.6). С другой стороны, $\alpha_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$, $n \ge 2$ и потому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ расходится. □

Приведём еще пример на применение признака Вейерштрасса.

Пример 2.6. Доказать, что на $[1/2, 2]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n}).$$

■ Очевидно, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [1/2, 2]$

$$\frac{1}{n!}(x^n + 3x^{-n}) \le \frac{1}{n!}\left(2^n + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right) = \frac{4\cdot 2^n}{n!}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\cdot 2^n}{n!}$ сходится (достаточно воспользоваться признаком Даламбера), то в силу признака Вейерштрасса заданный функциональный ряд сходится равномерно на отрезке $[1/2, 2]$. □

Определение 2.7. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется равномерно ограниченной на множестве* X, *если существует такое число* $M > 0$, *что* $|f_n(x)| \le M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$.

Теорема 2.10 (признак Дирихле)**.** *Если члены функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{2.6}$$

таковы, что

1) $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$,

2) *для каждого* $x_0 \in X$ *последовательность* $\{a_n(x_0)\}$ *монотонна,*

3) *последовательность* $\{B_n(x)\}$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно ограничена на множестве* X,

то ряд (2.6) *равномерно сходится на множестве* X.

■ Доказательство теоремы основано на применении критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда и повторяет, почти дословно, доказательство признака Дирихле сходимости числового ряда. Предлагаем читателю восстановить доказательство самостоятельно. □

Пример 2.7. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+x} \tag{2.7}$$

а) на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \pi)$; б) на интервале $(0, 2\pi)$.

■ а) Для всех $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$,

$$|B_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

поэтому последовательность $\{B_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ равномерно ограничена на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \pi)$, и условие 3) признака Дирихле выполнено.

Рассмотрим теперь последовательность $\{a_n(x)\} = \left\{ \dfrac{1}{n+x} \right\}$. Очевидно, что в каждой точке $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ она является монотонно убывающей и бесконечно малой. А поскольку

$$\sup_{x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} |a_n(x)| = \frac{1}{n+\varepsilon} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

то в силу теоремы 2.4 $a_n(x) \overset{[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]}{\rightrightarrows} 0$.

Все требования признака Дирихле (теоремы 2.10) выполнены, поэтому ряд (2.7) равномерно сходится на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \pi)$.

б) На интервале $(0, 2\pi)$ оценка типа (2.8) не имеет места. Однако, для каждого $x \in (0, 2\pi)$ она дает право утверждать, что ряд (2.7) поточечно сходится на интервале $(0, 2\pi)$. Покажем, что ряд (2.7) сходится неравномерно на этом интервале. Для этого воспользуемся критерием Коши, то есть укажем такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие значения $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ и $x_n \in (0, 2\pi)$, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx_n}{k + x_n} \right| \geq \varepsilon_0.$$

Заметим, что $\sin kx_n \geq \dfrac{1}{2}$ в точках $x_n = \dfrac{\pi}{6n}$ при $k \in [n, 5n] \bigcap \mathbb{N}$. Поэтому для произвольного N, взяв $n > N$, $p = 4n$, $x_n = \dfrac{\pi}{6n}$, получим, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin kx_n}{k+x_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{5n}\frac{\sin\dfrac{\pi k}{6n}}{k+\dfrac{\pi}{6n}} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{5n}\frac{1}{k+1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{4n}{5n+1} \geq \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, если взять $\varepsilon_0 = 1/3$, из проведенных рассуждений следует, что ряд (2.7) сходится неравномерно на интервале $(0, 2\pi)$. $\square$

Теорема 2.11 (признак Абеля)**.** *Если члены функционального ряда* (2.6) *таковы, что*

1) последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно ограничена на X,

2) для каждого $x_0 \in X$ последовательность $\{a_n(x_0)\}$ монотонна,

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X,

то ряд (2.6) *равномерно сходится на множестве X.*

■ Согласно 1) существует $M > 0$ такое, что $|a_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу условия 3) существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$, всех $p \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Учитывая условие 2) и пользуясь преобразованием Абеля и его оценкой, для всех $n > N$, всех $p \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$ получим, что

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq \varepsilon.$$

Из критерия Коши следует равномерная сходимость ряда (2.6). $\square$

Замечание. Условие 2) в признаках Дирихле и Абеля является существенным. Рассмотрим пример, подтверждающий это.

Пример 2.8. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nx)\cos nx}{n} \text{ на множестве } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

■ Пусть $a_n(x) = \dfrac{1-\cos nx}{n}$, $b_n(x) = \cos nx$. Последовательность $\{B_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ равномерно ограничена на $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$, так

как
$$|B_n(x)| \le \frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{8}},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$
Поскольку, $0 \le \dfrac{1-\cos nx}{n} \le \dfrac{2}{n}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, то последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно стремится к нулю на множестве $\mathbb{R}$ (см. теорему 2.4), а значит и на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Далее, в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$
$$\frac{(1-\cos nx_0)\cos nx_0}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 4k, \\ 0, & \text{если} \quad n = 4k+1, \\ -\dfrac{1}{2k+1}, & \text{если} \quad n = 4k+2, \\ 0, & \text{если} \quad 4k+3 \end{cases} , k\in\mathbb{N},$$
Поэтому исходный функциональный ряд в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ является рядом $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2k+1}$, который расходится, и, значит, функциональный ряд не может равномерно сходиться на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Заметим, что для данного ряда выполнены условия 1) и 3) признака Дирихле, но в то же время, требование монотонности числовой последовательности $\{a_n(x_0)\}$ для любого $x_0 \in X$ не выполнено. $\square$

2.6 Функциональные свойства предельной функции и суммы ряда

Теорема 2.12 (о пределе предельной функции). *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, a — предельная точка множества X и для всех $n\in\mathbb{N}$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = a_n$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ сходится, существует конечный предел функции $f(x)$ в точке a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ то есть*
$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$
■ Прежде всего докажем, что последовательность $\{a_n\}$ является сходящейся. По условию $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, поэтому, в силу теоремы 2.5,
$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n > N,\ \forall\, p\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in X.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получим, что

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall\, n > N, \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Из критерия Коши сходимости числовой последовательности следует, что $\{a_n\}$ сходится.

Пусть $\lim a_n = d$. Докажем, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = d$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ Очевидно, что для любого $x \in X$ и любого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(x) - d| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - a_{n_0} + a_{n_0} - d| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - d|. \end{aligned}$$

Так как $\lim a_n = d$ и $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\exists\, N = N(\varepsilon)$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\text{ и }\; |a_n - d| < \frac{\varepsilon}{3},\; \forall\, n > N,\; \forall\, x \in X.$$

Если $n_0 > N$, то для него выполняются все предыдущие неравенства. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to a} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$, по $\varepsilon > 0$ найдем U_a — такую окрестность точки a, что $|f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\, x \in X \bigcap \overset{o}{U}_a$. Тогда для всех $x \in X \bigcap \overset{o}{U}_a$ имеет место неравенство

$$|f(x) - d| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{a} f(x) = d$. $\square$

Теорема 2.13 (о непрерывности предельной функции в точке)**.** *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$ и $a \in X$. Если все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке a, то предельная функция $f(x)$ непрерывна в точке a.*

$\blacksquare$ Если $a \in X$ и является изолированной точкой множества X, то $f(x)$ непрерывна в ней. Если $a \in X$ и является предельной точкой множества X, то в силу непрерывности функции $f_n(x)$ в точке a

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a),\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку выполнены все условия теоремы 2.12, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a),$$

что означает непрерывность функции $f(x)$ в предельной точке a. $\square$

Следствие 1. *Если последовательность непрерывных на множестве X функций сходится равномерно на X, то её предельная функция непрерывна на X.*

Следствие 2. *Пусть функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *поточечно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* X *и* $f_n(x) \in C(X)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Если функция* $f(x)$ *не является непрерывной на* X, *то* $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Теорема 2.14 (о пределе суммы функционального ряда)**.** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X *и его сумма равна* $S(x)$, a *— предельная точка множества* X, *и существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Тогда числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{2.9}$$

сходится, существует предел $\lim\limits_{x\to a} S(x)$ *и*

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \textit{то есть} \quad \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x). \tag{2.10}$$

Замечание. Теорему 2.14 часто называют теоремой о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.

■ Так как последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм функционального ряда равномерно сходится на множестве X к функции $S(x)$ и

$$\lim_{x\to a} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k,\ n \in \mathbb{N},$$

то по теореме 2.12 последовательность $\{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\}$ сходится и существует

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k$ — частичные суммы ряда (2.9), поэтому последнее равенство доказывает и сходимость ряда (2.9), и равенство (2.10). □

Теорема 2.15 (о непрерывности суммы функционального ряда)**.** *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X, $a \in X$ *и функции* $f_n(x)$ *непрерывны в точке* a *(на множестве* X*), то сумма ряда непрерывна в точке* a *(на множестве* X*).*

■ Теорема следует из теоремы 2.14 с учётом определения непрерывности функции в точке. □

Следствие. *Если функциональный ряд непрерывных на множестве X функций поточечно сходится на X и сумма ряда не является непрерывной на X функцией, то рассматриваемый ряд сходится неравномерно на множестве X.*

Требование равномерной сходимости ряда существенно для справедливости теоремы 2.15 и ее следствия. Для подтверждения сказанного рассмотрим пример.

Пример 2.9. Исследовать на равномерную сходимость на $[-1,1]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

■ Отметим, что члены ряда составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+x^2}$ и первым членом $a_1(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Поскольку $q < 1$, если $x \neq 0$, а $a_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то исходный ряд сходится в каждой точке из $\mathbb{R}$.

Докажем, что данный ряд на отрезке $[-1,1]$ сходится неравномерно. Действительно, $R_n(0) = 0$, а при $x \neq 0$

$$R_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)} = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |R_n(x)| \geq R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow \dfrac{1}{e}$, то $R_n(x) \overset{[-1,1]}{\not\rightrightarrows} 0$ и по теореме 2.4 исходный ряд сходится неравномерно на отрезке $[-1,1]$.

Доказать неравномерную на отрезке $[-1,1]$ сходимость ряда можно иначе. Пользуясь формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Сумма $S(x)$ терпит разрыв в точке $x = 0$, хотя члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$. Нужный результат теперь следует из следствия теоремы 2.15. □

Отметим еще, что требование равномерной сходимости ряда непрерывных на X функций является достаточным, но не необходимым условием непрерывности суммы ряда. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right)$$

имеет на отрезке $[0,1]$ сумму $S(x)=0$, члены ряда непрерывны на $[0,1]$, а сходится ряд неравномерно на $[0,1]$, поскольку для его частичных сумм имеет место неравенство

$$\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \geq \frac{nx}{1+n^2x^2}\ \Big|_{x=1/n} = \frac{1}{2},$$

из которого следует, что $S_n(x) \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} 0$.

Однако, в некоторых случаях равномерная сходимость последовательности или ряда на множестве X является необходимым условием непрерывности предельной функции (суммы ряда) на X.

Теорема 2.16 (Дини). *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке x замкнутого ограниченного множества $X\subset\mathbb{R}$ и сходится на X к функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ и все функции $f_n(x)$ непрерывны на X, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к $f(x)$.*

■ Для определённости будем считать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает в каждой точке $x\in X$. Положим $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$. Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1) функции $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на компакте X;

2) в каждой точке $x\in X$ последовательность $\{r_n(x)\}$ не возрастает;

3) в каждой точке $x\in X$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

Докажем, что сходимость последовательности $\{r_n(x)\}$ к $r(x)=0$ на X является равномерной. Воспользуемся методом "от противного". Допустим, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к функции $r(x)=0$ на X неравномерно, то есть для некоторого $\varepsilon_0>0$ и любого $N\in\mathbb{N}$ найдётся $n>N$ и точка x_n из множества X такая, что $r_n(x_n)\geq\varepsilon_0$. В силу ограниченности множества X и леммы Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $c\in X$, поскольку X — замкнутое множество. По условию функции $r_n(x)$ непрерывны в точке c, поэтому

$$r_n(x_{n_k})\to r_n(c) \text{ при } k\to\infty,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $r_{n_k}(x_{n_k})\geq\varepsilon_0$, а последовательность $\{r_n(x)\}$ не возрастает в каждой точке $x\in X$, то, выбирая для каждого $m\in\mathbb{N}$ любой номер $n_k>m$, будем иметь неравенство $r_m(x_{n_k})\geq r_{n_k}(x_{n_k})\geq\varepsilon_0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k\to+\infty$, получим, что

$$r_m(c)\geq\varepsilon_0,\ \forall\, m\in\mathbb{N},$$

чего быть не может, так как $r_m(c) \to 0$ при $m \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Замечание 1. Требование монотонности числовой последовательности $\{f_n(x)\}$ в точках множества X существенно для справедливости теоремы Дини. Например, последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, & \text{если } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right], \\ 0, & \text{если } x \in \left(\dfrac{\pi}{n}, \pi\right], \end{cases}$$

имеет на $[0, \pi]$ предельную функцию $f(x) \equiv 0$, но не сходится на этом отрезке равномерно, так как для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right| = \sin\left(n\frac{\pi}{2n}\right) = 1.$$

Замечание 2. Требование компактности множества X также существенно для справедливости теоремы Дини. Например, последовательность $\{x^n\}$ сходится поточечно к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве $X = [0, 1)$, каждая функция $f_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на X, в каждой точке $x \in [0, 1)$ числовая последовательность $\{x^n\}$ убывает. Однако $f_n(x) \overset{[0;1)}{\not\rightrightarrows} 0$.

Приведём формулировку теоремы Дини для функциональных рядов.

Теорема 2.17. *Пусть все члены функционального ряда непрерывны и не отрицательны (или не положительны) на компакте $X \subset \mathbb{R}$. Если ряд поточечно сходится на X и его сумма является непрерывной на X функцией, то ряд равномерно сходится на X.*

Теорема 2.18 (об интегрировании функциональной последовательности)**.** *Пусть функции f_n интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, и функциональная последовательность равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда предельная функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, числовая последовательность $\left\{ \int\limits_a^b f_n(x) dx \right\}$ сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ *то есть* } \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

■ Для доказательства интегрируемости функции f на $[a, b]$ воспользуемся критерием Дарбу. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, поэтому найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},\ \forall n > N,\ \forall x \in [a,b].$$

Следовательно, $|f_{N+1}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)},\ \forall x \in [a,b]$.

Из интегрируемости функции f_{N+1} на $[a,b]$ по критерию Дарбу найдётся такое разбиение $\tau_\varepsilon = \{x_k\}_{k=1}^m$ отрезка $[a,b]$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i^{f_{N+1}} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $\omega_i^f = \sup\limits_{x',x'' \in [x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|$, $i = 1, \ldots, m$. Для произвольных точек x', x'' из i-го отрезка найденного разбиения

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| \ &\le\ |f(x') - f_{N+1}(x')| + |f_{N+1}(x') - f_{N+1}(x'')| + \\ &+\ |f_{N+1}(x'') - f(x'')| < \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_i^{f_{N+1}}. \end{aligned}$$

Значит, $\omega_i^f \le \dfrac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_i^{f_{N+1}},\ i = 1, \ldots, m$, и для разбиения τ_ε

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i^f \,\Delta x_i \le \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \omega_i^{f_{N+1}} \Delta x_i < \varepsilon.$$

Тогда из критерия Дарбу следует, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Остаётся доказать вторую часть теоремы о том, что последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)dx\right\}$ сходится и её предел равен $\int\limits_a^b f(x)dx$. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на $[a,b]$ к $f(x)$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $x \in [a,b]$ и всех $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.11}$$

Из свойств определённого интеграла и равенства (2.11) получим, что

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n(x)dx - f(x))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x)dx - f(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall n > N. \ \square$$

Замечание. Если в условиях теоремы 2.18 дополнительно потребовать непрерывность функций $f_n(x),\ n \in \mathbb{N}$ на отрезке $[a,b]$, то доказательство интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ будет следовать из следствия 1 теоремы 2.13 и достаточных условий интегрируемости функции. В этом частном случае можно было бы доказать, что последовательность интегралов с переменным верхним пределом $\{F_n(x)\}$:

$$F_n(x) = \int\limits_c^x f_n(t)dt,\ c \in [a,b]$$

равномерно сходится на $[a,b]$ к функции $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$.

Сформулируем результат для функциональных рядов, соответствующий теореме 2.18.

Теорема 2.19 (о почленном интегрировании функционального ряда)**.** *Если функции* $f_n \in \mathcal{R}[a,b],\ n \in \mathbb{N}$, *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[a,b]$, *то его сумма* $S(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$, *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$, *полученный из данного почленным интегрированием на* $[a,b]$, *сходится и*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx,\ \text{\textit{то есть}}\ \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Замечание. Если в теореме 2.19 условие интегрируемости функций f_n на $[a,b]$ заменить их непрерывностью, то можно доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x f_n(t)\,dt,\ c \in [a,b]$, равномерно сходится на $[a,b]$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{c}^{x} f_n(t)\,dt = \int\limits_{c}^{x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt.$$

Теорема 2.20 (о почленном дифференцировании функциональной последовательности)**.** *Пусть все функции f_n дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, последовательность их производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ к функции $\phi(x)$, а последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$, которая дифференцируема на $[a,b]$ и*

$$f'(x) = \phi(x),\ \textit{то есть}\ \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),\ \forall\, x \in [a,b].$$

■ Воспользуемся критерием Коши и докажем равномерную сходимость на отрезке $[a,b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$.

Для любых фиксированных номеров n и p и $x \in [a,b]$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+p}(x) - f_n(x) - f_{n+p}(x_0) + f_n(x_0)| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|.$$

Функция $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, поэтому для каждого фиксированного $x \in [a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке, ограниченном точками x_0 и x. Значит между x_0 и x найдётся точка c_x такая, что

$$(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) = (f_{n+p}'(c_x) - f_n'(c_x))(x - x_0).$$

По условию теоремы $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \phi(x)$ и последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится. Согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и сходимости числовой последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, n > N$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [a,b]$

$$|f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\forall\, n > N$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \ &\le\ |f_{n+p}'(c_x) - f_n'(c_x)|\,|x - x_0| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \\ &<\ \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,|x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, в силу критерия Коши, равномерную сходимость на отрезке $[a,b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ к некоторой функции $f(x)$.

Докажем, что функция f дифференцируема на $[a,b]$, и найдем её производную. Зафиксируем точку $\widetilde{x}$ из отрезка $[a,b]$ и найдём

$$\lim_{\substack{x\to\widetilde{x}\\(x\in[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\})}} \frac{f(x)-f(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}.$$

Так как $\forall\, x\in[a,b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, то

$$\frac{f(x)-f(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}. \tag{2.12}$$

Итак, нам нужно найти $\lim\limits_{x\to\widetilde{x}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(x)-f_n(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}$. Пусть

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)-f_n(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}},\ \ x\in[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\},\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Докажем, что последовательность $\{g_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве $[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\}$. При фиксированных $n,p\in\mathbb{N}$ и $x\in[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\}$

$$g_{n+p}(x)-g_n(x)=\frac{1}{x-\widetilde{x}}\big((f_{n+p}(x)-f_{n+p}(\widetilde{x}))-(f_n(x)-f_n(\widetilde{x}))\big)=$$

$$=\frac{1}{x-\widetilde{x}}\big((f_{n+p}(x)-f_n(x))-(f_{n+p}(\widetilde{x})-f_n(\widetilde{x}))\big).$$

По теореме Лагранжа, примененной к функции $f_{n+p}(x)-f_n(x)$ на отрезке с концами в точках x и $\widetilde{x}$, найдём точку η_x между x и $\widetilde{x}$ такую, что

$$f_{n+p}(x)-f_n(x)-(f_{n+p}(\widetilde{x})-f_n(\widetilde{x}))=(f'_{n+p}(\eta_x)-f'_n(\eta_x))\,(x-\widetilde{x}).$$

Поэтому $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\}$

$$|g_{n+p}(x)-g_n(x)|=|f'_{n+p}(\eta_x)-f'_n(\eta_x)|. \tag{2.13}$$

Поскольку $f'_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\phi(x)$, то по критерию Коши $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, N=N(\varepsilon)$:

$$|f'_{n+p}(x)-f'_n(x)|<\varepsilon,\ \forall\, n>N,\ \forall\, p\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[a,b].$$

Возвращаясь к (2.13), получим, что $\forall\, n>N,\ \forall\, p\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\}$

$$|g_{n+p}(x)-g_n(x)|<\varepsilon.$$

Поэтому на множестве $[a,b]\setminus\{\widetilde{x}\}$ последовательность $\{g_n(x)\}$ равномерно сходится и, наконец, так как $\lim\limits_{x\to\widetilde{x}} g_n(x)=f'_n(\widetilde{x}),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$, воспользовавшись теоремой 2.12 и равенством (2.12), получим, что

$$\lim_{x\to\widetilde{x}}\frac{f(x)-f(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}=\lim_{x\to\widetilde{x}}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}=\lim_{n\to\infty}f'_n(\widetilde{x})=\phi(\widetilde{x}),\ \forall\,\widetilde{x}\in[a,b].$$

Последнее означает дифференцируемость функции f в точке $\widetilde{x}$ и справедливость равенства $f'(\widetilde{x})=\phi(\widetilde{x})$, $\forall\,\widetilde{x}\in[a,b]$. $\square$

Для функциональных рядов справедлив следующий результат.

Теорема 2.21 (о почленном дифференцировании функционального ряда). *Пусть все функции f_n дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, ряд из производных этих функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[a,b]$. Тогда последний ряд сходится равномерно на $[a,b]$, его сумма $S(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \forall\, x \in [a,b],$$

то есть производная суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ есть сумма ряда, полученного из данного почленным дифференцированием.

Замечание 1. Если в условиях теорем 2.20, 2.21 дополнительно потребовать, чтобы функции f_n были непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, то достаточно легко получим, что предельная функция $f(x)$ функциональной последовательности и, соответственно, сумма $S(x)$ функционального ряда будут непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$.

Замечание 2. Теоремы 2.20 и 2.21 справедливы на промежутках X, отличных от отрезка, если функции $f_n(x)$ дифференцируемы на X, а последовательность (ряд) из производных равномерно сходится на $\operatorname{int} X$.

Замечание 3. Равномерная сходимость последовательности производных $\{f_n'(x)\}$ на отрезке $[a,b]$ не вытекает даже из равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на этом отрезке. Приведем пример.

Пример 2.10. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\} : f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, и последовательность ее производных на отрезке $[0,1]$.

■ Для любого $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Поэтому предельная функция рассматриваемой последовательности — функция $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. В силу критерия 2.4 $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$. Поэтому $f_n(x) \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Очевидно, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, $\forall\, x \in [0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Поскольку $f_n'(0) = \sqrt{n}$, то $f_n'(0) \longrightarrow +\infty$ при $n \to +\infty$, и последовательность $\{f_n'(x)\}$ не является даже поточечно сходящейся на отрезке $[0,1]$. □

2.7 Степенные ряды

Определение 2.8. *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— числовая последовательность и* $a \in \mathbb{R}$. *Степенным рядом с центром в точке* a *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

при этом числа a_k *называются коэффициентами степенного ряда.*

Поскольку при $a \neq 0$ линейная функция $t = x - a$ переводит степенной ряд с центром в точке a в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ с центром в нуле, а свойства степенных рядов не меняются при таком линейном преобразовании, то удобно их формулировать для степенного ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2.14}$$

Определение 2.9. *Точка* $x_0 \in \mathbb{R}$, *в которой степенной ряд (2.14) сходится (то есть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ *сходится), называется точкой сходимости ряда (2.14). Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *всех точек сходимости степенного ряда (2.14) называется областью его сходимости.*

Замечание. Степенной ряд (2.14) сходится в точке $x = 0$, поэтому область сходимости любого степенного ряда не пуста.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.11. Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ состоит из одной точки $x = 0$, поскольку $\lim n!\, x^n = \infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Пример 2.12. Область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ совпадает с множеством $\mathbb{R}$, поскольку, в силу признака Даламбера, для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|x_0|^n}{n!}$.

Пример 2.13. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in [0, +\infty)$ сходится абсолютно в точках $x \in (-1, 1)$, расходится в точках $x : |x| > 1$. В точке $x = 1$ он сходится при $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \in [0, 1]$. В точке $x = -1$ он сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha = 0$. Поэтому его область сходимости совпадает с $(-1,1)$, если $\alpha = 0$; с $[-1,1)$, если $\alpha \in (0,1]$; с $[-1,1]$, если $\alpha > 1$.

Теорема 2.22 (первая теорема Абеля). *Если степенной ряд (2.14) сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющей неравенству* $|x| < |x_0|$.

■ Пусть ряд (2.14) сходится в $x_0 \neq 0$. В силу необходимого признака сходимости числового ряда $\lim a_n x_0^n = 0$, поэтому $\exists\, c > 0 : |a_n x_0^n| \leq c$ для всех $n \geq 0$. Тогда имеет место оценка

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leq c \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n, \ \forall\, n \geq 0.$$

Если $|x| < |x_0|$, то $\dfrac{|x|}{|x_0|} = q < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. По признаку сравнения для положительных рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится, а значит степенной ряд (2.14) сходится абсолютно в точке x такой, что $|x| < |x_0|$. □

Следствие. *Если степенной ряд (2.14) расходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он расходится в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *такой, что* $|x| > |x_0|$.

Определение 2.10. *Радиусом сходимости степенного ряда* (2.14) *называется величина (конечная или бесконечная)*

$$R = \sup \left\{ |x| : \ \textit{ряд} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \textit{сходится} \ \right\}.$$

Теорема 2.23. *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* (2.14).

1) *Если* $R = 0$, *то ряд* (2.14) *расходится в каждой точке* $x \neq 0$.

2) *Если* $R = +\infty$, *то ряд* (2.14) *абсолютно сходится в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$.

3) *Если* $R \in (0; +\infty)$, *то ряд* (2.14) *абсолютно сходится на интервале* $(-R, R)$, *расходится в тех точках* $x \in \mathbb{R}$, *для которых* $|x| > R$, *и может как сходиться, так и расходиться в точках* $x = \pm R$.

■ Пусть $X = \left\{ x : \ \text{ряд} \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \ \text{сходится} \ \right\}$.

1). Пусть $R = 0$, но найдется точка $x_0 \in X$ такая, что $x_0 \neq 0$. Тогда по определению $R \geq |x_0|$ и потому $R > 0$. Следовательно, утверждение 1) верно.

2). Если $R = +\infty$, то множество X неограниченно. Поэтому для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ найдётся точка $x \in X$ такая, что $|x_0| < |x|$. В силу первой теоремы Абеля степенной ряд (2.14) сходится абсолютно в точке x_0. Следовательно, ряд (2.14) сходится абсолютно в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

3). Пусть $R \in (0, +\infty)$ и $0 < |x_0| < R$. Положим $\varepsilon = R - |x_0| > 0$. По определению точной верхней границы числового множества существует точка $x_\varepsilon \in X$ такая, что

$$|x_0| = R - \varepsilon < |x_\varepsilon| \leq R.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_\varepsilon^n$ сходится, из первой теоремы Абеля получим, что ряд (2.14) абсолютно сходится в точке x_0, которая была взята произвольно из $(-R; R)$.

По определению R любая точка $x_0 \in \mathbb{R}$, для которой $|x_0| > R$, не принадлежит области сходимости степенного ряда. Поэтому степенной ряд расходится в такой точке x_0. $\square$

Пример 2.13 показывает, что для него $R = 1$, $\forall \alpha \in [0, +\infty)$, а в точках $x = \pm R$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться, в зависимости от его коэффициентов.

Определение 2.11. *Если R — радиус сходимости степенного ряда* (2.14)*, и $R \neq 0$, то интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда* (2.14). *Если $R = +\infty$, то область сходимости совпадает с интервалом сходимости — множеством $(-\infty, +\infty)$.*

Теорема 2.24 (формула Коши-Адамара)**.** *Если для степенного ряда* (2.14) $\rho = \overline{\lim\limits_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}$*, то его радиус сходимости R вычисляется по формуле*

$$R = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } \rho = +\infty, \\ 1/\rho, & \text{\textit{если} } \rho \in (0; +\infty), \\ +\infty, & \text{\textit{если} } \rho = 0. \end{cases}$$

Замечание. Формально формулу Коши-Адамара записывают в виде

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

■ Зафиксируем точку $x \neq 0$ и рассмотрим положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x|^n. \tag{2.15}$$

По свойству верхнего предела

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \, |x|^n} = \begin{cases} |x| \, \rho, & \text{если } \rho \in [0, +\infty), \\ +\infty, & \text{если } \rho = +\infty. \end{cases}$$

В силу признака Коши в предельной форме, при $\rho = +\infty$ ряд (2.15) расходится в точках $x \neq 0$, причём для него не выполняется необходимое условие сходимости. Значит, степенной ряд (2.14) расходится в каждой точке $x \neq 0$ и его радиус сходимости равен 0.

Если $\rho = 0$, то в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ ряд (2.15) сходится, а, значит, ряд (2.14) абсолютно сходится. Следовательно, степенной ряд (2.14) сходится абсолютно на $\mathbb{R}$ и его радиус сходимости бесконечен.

Если же $\rho \in (0, +\infty)$, то по признаку Коши в предельной форме ряд (2.15) сходится при $\rho |x| < 1$, то есть при $|x| < \dfrac{1}{\rho}$, и расходится при $|x| > \dfrac{1}{\rho}$, в последнем случае $|a_n|\,|x|^n \not\to 0$ при $n \to +\infty$. Поэтому степенной ряд (2.14) сходится абсолютно в точках $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ и расходится в точках $|x| > \dfrac{1}{\rho}$. Последнее означает, что $R = \dfrac{1}{\rho}$. $\square$

Замечание. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$, и для исследования сходимости ряда (2.15) использовать признак Даламбера, то легко доказать, что радиус сходимости степенного ряда (2.14) равен $\dfrac{1}{A}$.

Пример 2.14. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,x^n}{n^n}$.

■ Так как $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ и $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{e}$, то $R = e$ и интервал сходимости данного степенного ряда — $(-e, e)$.

Исследуем поведение этого ряда в точках $x = \pm e$. Если $x = e$, то исходный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$. Положим $b_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$, тогда

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to 1.$$

Но последовательность $\{(1 + 1/n)^n\}$ является возрастающей, поэтому последовательность $\left\{e\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$ является убывающей и $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} > 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно признаку Даламбера в непредельной форме, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$ расходится и $b_n \not\to 0$. Последнее означает, что и в точке $x = -e$ исходный ряд расходится, то есть область его сходимости совпадает с интервалом сходимости $(-e, e)$. $\square$

2.8 Функциональные свойства степенного ряда

Теорема 2.25 (о равномерной сходимости степенного ряда внутри интервала сходимости)**.** *Если радиус сходимости R степенного ряда* (2.14) *отличен от нуля, то степенной ряд равномерно и абсолютно сходится на любом отрезке* $[a,b] \subset (-R;R)$.

■ Зафиксируем отрезок $[a,b] \subset (-R,R)$. По аксиоме непрерывности множества действительных чисел $\mathbb{R}$ найдётся $r_0 > 0$ такое, что

$$[a,b] \subset [-r_0, r_0] \subset (-R,R).$$

Так как $r_0 \in (0,R)$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r_0^n$ сходится. Но

$$|a_n x^n| \leq |a_n|\, r_0^n, \ \forall\, x \in [a,b], \ \forall\, n \geq 0.$$

Поэтому степенной ряд (2.14), согласно признаку Вейерштрасса, абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. □

С учётом определения 2.6 теорема 2.25 может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 2.26. *Если радиус сходимости степенного ряда* (2.14) *отличен от нуля, то ряд* (2.14) *равномерно сходится внутри интервала сходимости.*

Из теоремы 2.26 и следствия теоремы 2.15 получаем такой результат.

Следствие. *Сумма степенного ряда с отличным от нуля радиусом сходимости непрерывна в интервале сходимости.*

Теорема 2.27. *Если степенной ряд имеет конечный, отличный от нуля радиус сходимости R, и сходится в точке $x = R$, то он равномерно сходится на отрезке* $[0,R]$.

■ По условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Так как

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, \ \forall\, x \in [0,R],$$

то в силу признака Абеля степенной ряд (2.14) равномерно сходится на отрезке $[0,R]$: последовательность $\{(\frac{x}{R})^n\}$ монотонна при каждом фиксированном $x \in [0,R]$ и равномерно ограничена, поскольку $\left|\frac{x}{R}\right|^n \leq 1$, $\forall x \in [0,R]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. □

Из теоремы 2.27 и теоремы 2.15 следует

Теорема 2.28 (2-ая теорема Абеля)**.** *Если степенной ряд* (2.14) *сходится в точке* $x = R$*, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна слева в точке* $x = R$*, то есть* $S(R-0) = S(R)$*.*

Замечание. Если степенной ряд (2.14) имеет конечный, отличный от нуля радиус сходимости R и сходится в точке $x = -R$, то, аналогично, он равномерно сходится на отрезке $[-R, 0]$ и его сумма непрерывна в точке $x = -R$ справа.

Теорема 2.29 (о почленном интегрировании степенного ряда)**.** *Если степенной ряд* (2.14) *имеет радиус сходимости* $R > 0$ *и сумму* $S(x)$ *в области* X *сходимости ряда, то ряд(2.14) можно почленно интегрировать на отрезке с концами в точках* 0 *и* x*, где* $x \in (-R, R)$*, и*

$$\int\limits_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{2.16}$$

Ряд, полученный почленным интегрированием, имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (2.14)*.*

■ Для любого x из области сходимости ряда (2.14), согласно теоремам 2.25 и 2.27, степенной ряд (2.14) равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x. Пусть, далее, для определенности, $x > 0$. Поскольку члены степенного ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, то в силу теоремы 2.19 сумма $S(x)$ ряда (2.14) интегрируема на отрезке $[0, x]$ и имеет место формула (2.16).

Найдём радиус сходимости ряда (2.16). Так как ряд в (2.16) сходится или расходится в точке $x \neq 0$ одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ и

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}\ \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|},$$

то радиус сходимости ряда (2.16) совпадает с радиусом R сходимости ряда (2.14). □

Теорема 2.30 (о почленном дифференцировании степенного ряда)**.** *Пусть степенной ряд* (2.14) *имеет радиус сходимости* $R > 0$*. Тогда его сумма* $S(x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией на интервале сходимости* $(-R, R)$ *и ее производная может быть получена почленным дифференцированием ряда* (2.14) *внутри интервала сходимости , то есть*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ x \in (-R, R). \tag{2.17}$$

■ После почленного дифференцирования ряда (2.14) на $(-R, R)$ получим ряд (2.17), который сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$. Пусть R_1 — радиус сходимости последнего степенного ряда, а значит и ряда (2.17). Так как $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n}\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$, то $R_1 = R$. Поэтому, в силу теоремы 2.25 и замечания к теореме 2.21, сумма ряда $S(x)$ непрерывно дифференцируема внутри интервала сходимости $(-R, R)$, (то есть на любом отрезке $[a, b]$, лежащем в $(-R, R)$), а, значит, в интервале $(-R, R)$ имеет место равенство (2.17). □

Следствие. *Пусть степенной ряд* (2.14) *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда его сумма* $S(x)$ *принадлежит классу функций* $C^{\infty}(-R, R)$ *и ее* k*-ая производная может быть получена* k*-кратным почленным дифференцированием степенного ряда* (2.14)*, то есть*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k},\ \ x \in (-R, R). \tag{2.18}$$

Замечание. Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда (2.14), то ряд, полученный его k-кратным ($k \in \mathbb{N}$) почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R.

2.9 Разложение функций в ряд Тейлора

Определение 2.12. *Будем говорить, что функция* f *может быть разложена в степенной ряд на интервале* $U_{x_0}(h) = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *если существует степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$*, сходящийся к функции* f *на интервале* $U_{x_0}(h)$.

Теорема 2.31. *Для того, чтобы функцию* f *можно было разложить в степенной ряд на интервале* $U_{x_0}(h) = (x_0 - h, x_0 + h)$*, необходимо, чтобы эта функция принадлежала классу* $C^{\infty}(U_{x_0}(h)$.

■ Теорема 2.31 вытекает из следствия к теореме 2.30. □

Теорема 2.32. *Если* $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$ *и* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $\forall\, x \in U_{x_0}(h)$*, то* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $\forall\, n \geq 0$.

■ Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n$, $\forall\, x \in U_{x_0}(h)$, тогда $f(x_0) = a_0$. Дифференцируя этот ряд почленно k раз, получим для всех $x \in U_{x_0}(h)$ равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k},$$

подставляя в которое $x = x_0$, находим, что

$$f^{(k)}(x_0) = a_k\, k!\,, \text{ то есть } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \forall\, k \geq 0. \ \square \tag{2.19}$$

Следствие. *Если $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$ и эту функцию можно разложить в степенной ряд на $U_{x_0}(h)$, то коэффициенты этого степенного ряда однозначно определяются формулой* (2.19).

Определение 2.13. *Если $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$, то степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{2.20}$$

называется рядом Тейлора функции f, а числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ — коэффициентами Тейлора. Если $x_0 = 0$, то ряд (2.20) *называют рядом Тейлора-Маклорена (или, короче, рядом Маклорена) функции f.*

Из теоремы 2.32 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 2.33. *Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет отличный от нуля радиус сходимости. Тогда этот ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

Замечание. Если $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$ и степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ является рядом Тейлора функции f, то есть a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, определяются по формуле (2.19), то этот ряд не обязательно сходится при $x \neq x_0$ и имеет суммой функцию $f(x)$. Подтвердим сказанное примером.

Пример 2.15. Найти разложение в ряд Тейлора функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

■ Ясно, что $f \in C(\mathbb{R})$ и для $x \neq 0$ имеем:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2},$$

$$f''(x) = -\frac{6}{x^4}\, e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6}\, e^{-1/x^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{24}{x^5}\, e^{-1/x^2} - \frac{36}{x^7}\, e^{-1/x^2} + \frac{8}{x^9}\, e^{-1/x^2}.$$

Пользуясь методом математической индукции можно показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ есть сумма конечного числа функций вида $\dfrac{A}{x^k}\, e^{-1/x^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} x^{-k}\, e^{-1/x^2} = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, то $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и функции $f^{(n)}$ непрерывны в точке $x = 0$. Следовательно, ряд Тейлора функции f в нуле представляет собой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$ (все его коэффициенты равны нулю). Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$, то есть ряд сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма $S(x) = 0$. Поскольку единственным степенным рядом, представляющим в некоторой окрестности нуля функцию f, может быть только её ряд Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$, то, рассматриваемая функция f не представляется степенным рядом в окрестности точки $x = 0$. $\square$

Замечание. Существуют функции $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, ряд Маклорена которых сходится лишь в одной точке $x = 0$ (см. [5, пример 24, с. 91]).

Теорема 2.34 (критерий разложения функции в ряд Тейлора)**.** *Пусть* $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + r_n(x)$ *— её разложение по формуле Тейлора с остаточным членом* $r_n(x)$ *на* $U_{x_0}(h)$*. Для того чтобы ряд Тейлора функции* f *сходился на интервале* $U_{x_0}(h)$ *к функции* f*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ \forall\, x \in U_{x_0}(h) = (x_0 - h, x_0 + h).$$

Утверждение очевидно.

Теорема 2.35 (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора)**.** *Пусть* $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$ *и существуют числа* $A > 0$, $B > 0$ *такие, что* $|f^{(n)}(x)| \le A \cdot B^n$, $\forall\, x \in U_{x_0}(h)$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$*. Тогда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall\, x \in U_{x_0}(h).$$

■ Так как $f \in C^{\infty}(U_{x_0}(h))$, то для любого $x \in U_{x_0}(h)$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ функцию $f(x)$ можно разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \theta_x = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta \in (0, 1).$$

В силу условий теоремы

$$|r_n(x)| \le \frac{A\cdot B^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1},\ \forall\, x\in U_{x_0}(h).$$

Но, как известно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(Bh)^{n+1}}{(n+1)!}=0$, и потому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. Таким образом, выполнено достаточное условие критерия разложения функции в ряд Тейлора. $\square$

Следствие. *Если $f\in C^\infty(U_{x_0}(h))$ и существует число $A>0$ такое, что $|f^{(n)}(x)|\le A$ для всех $x\in U_{x_0}(h)$ и всех $n\in\mathbb{N}_0$, то функция f разлагается в ряд Тейлора в $U_{x_0}(h)$.*

Найдем ряд Маклорена для некоторых элементарных функций.

Лемма 2.1. $\quad e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

■ Функция $f(x)=e^x\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$. Следовательно, $f^{(n)}(0)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$. Если $h>0$, то $|f^{(n)}(x)|=|e^x|\le e^h$, $\forall\, x\in(-h,h)$ и по следствию теоремы 2.15

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \forall\, x\in(-h,h).$$

Так как $h>0$ выбрано произвольно, нужное разложение получено. $\square$

Лемма 2.2. $\quad \sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$

■ Функция $f(x)=\sin x\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x)=\sin(x+\dfrac{n\,\pi}{2})$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}\ 0 & \text{, если } n=2k\\ (-1)^k & \text{, если } n=2k+1\end{cases},k\in\mathbb{N}_0.$$

Кроме того, $|f^{(n)}(x)|\le 1,\forall\, x\in\mathbb{R}$. По следствию теоремы 2.15 функция $f(x)=\sin x$ разлагается в указанный в условии леммы ряд Тейлора на любом промежутке $(-h,h)$, $h>0$, а, значит, на $\mathbb{R}$. $\square$

Аналогично доказывается, и следующий результат.

Лемма 2.3. $\quad \cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$

Лемма 2.4. *Для всех $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и всех $x\in(-1,1)$*

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n\,.$$

■ Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $D(f) = (-1, +\infty)$, $f \in C^\infty(D(f))$, $f(0) = 1$, и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Поэтому функции f соответствует ряд Маклорена

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n\,,$$

который называют биномиальным рядом. Заметим, что если $\alpha \in \mathbb{N}$, то биномиальные коэффициенты при $x^{\alpha+k}, k \in \mathbb{N}$, равны нулю.

Изучим остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора функции $f(x) = (1+x)^\alpha$. В форме Коши он имеет вид

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(\theta\, x)\,\frac{(1-\theta)^n}{n!}\,x^{n+1}, \ \forall\, x \in (-1,1), \text{ где } \theta \in (0,1).$$

Поэтому в данном случае

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}\,(1-\theta)^n\,x^{n+1}, \ \theta \in (0,1).$$

Положим

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,n}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!}\,x^n,\\
\gamma_{2,n}(x) &= \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},\\
\gamma_{3,n}(x) &= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.
\end{aligned}$$

Тогда $r_n(x) = \gamma_{1,n}(x)\cdot\gamma_{2,n}(x)\cdot\gamma_{3,n}(x)$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_{1,n}(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha-1|\dots|\alpha-n|}{n!}\cdot|x^n|$$

сходится на интервале $(-1,1)$ согласно признаку Даламбера, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{1,n}(x) = 0, \ \forall\, x \in (-1,1).$$

Далее, так как $1-|x| < 1+\theta x < 1+|x|$, $\forall x \in (-1;1)$, то последовательность $\{\gamma_{2,n}(x)\}$ ограничена на $(-1,1)$. Наконец, для всех $x \in (-1,1)$

$$|\gamma_{3,n}(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $\forall x \in (-1,1)$, и по критерию 2.34 на $(-1,1)$ функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ разлагается в указанный в условии леммы степенной ряд. □

Следствие 1. $\quad (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \forall\, x \in (-1,1).$

Следствие 2. $\quad (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall\, x \in (-1,1).$

Лемма 2.5. $\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1;1].$

■ Функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена и дифференцируема на $(-1,+\infty)$, причём $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. По следствию 1 леммы 2.4

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Интегрируя это равенство на отрезке $[0;x]$, когда $x \in (-1,1)$, получим

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x f'(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1},\ x \in (-1,1).$$

Так как последний степенной ряд сходится в точке $x=1$, то его сумма $S(x)$ непрерывна в точке $x=1$ слева, то есть $S(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} S(x)$. Но функция $\ln(1+x)$ непрерывна в точке $x=1$, поэтому

$$S(1) = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0}\ln(1+x) = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

и потому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}, \quad \forall x \in (-1,1]\,. \ \square$$

Лемма 2.6. $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \forall\, x \in [-1,1].$

■ Заметим, что функция $f(x) = \arcsin x$ дифференцируема на $(-1,1)$ и

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В силу леммы 2.4

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,x^{2n},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Интегрируя полученное тождество на отрезке $[0,x]$, $x \in (-1,1)$, имеем:

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

В точке $x = 1$ полученный ряд имеет вид $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{2n+1}$. Он сходится в силу признака Раабе

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\frac{6n+5}{4n^2+2n+1} \longrightarrow \frac{3}{2} > 1.$$

Ясно, что он сходится и в точке $x = -1$, то есть сходится на отрезке $[-1,1]$. Поэтому его сумма $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Учитывая непрерывность функции $\arcsin x$ на отрезке $[-1,1]$, получаем указанное разложение. $\square$

Следствие. $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{2n+1}.$

2.10 Задания для самостоятельной работы

2.10.1 Функциональные последовательности

1. Пусть функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на множестве $\overline{X}$ и функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на X. Доказать, что эта последовательность сходится равномерно на множестве $\overline{X}$ (замыкании X).

2. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$. Доказать, что $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, а функция $f(x)$ ограничена на множестве X. Доказать, что существуют такие числа $A > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x)| \le A$, $\forall\, n > N$, $\forall\, x \in X$, то есть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ равномерно ограничена на X.

4. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X, где функции $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, ограничены на X. Доказать, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на X.

5. Пусть функциональные последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся равномерно на множестве X. Доказать, что для любых

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функциональная последовательность $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве X.

6. Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, а функция $g(x)$ определена и ограничена на этом множестве. Доказать, что функциональная последовательность $\{g(x)\, f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве X к функции $g(x)\, f(x)$.

7. Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, $g_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} g(x)$, и функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ограничены на X. Доказать, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\, g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве X к функции $f(x)\, g(x)$.

8. Привести пример таких двух функциональных последовательностей $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящихся на $[0,1]$, что последовательность $\{f_n(x)\, g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на $[0,1]$ не равномерно.

9. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на (a,b). Доказать, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$f_n(x) = n \cdot \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right), \ n \in \mathbb{N},$$

сходится равномерно к $f'(x)$ внутри (a,b).

10. Может ли последовательность разрывных на сегменте $[a,b]$ функций равномерно сходиться на $[a,b]$ к непрерывной на $[a,b]$ функции? Если да, то привести пример, если нет — объяснить почему.

11. Может ли последовательность непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходиться на $[a,b]$ к функции, разрывной на $[a,b]$? Если да, то привести пример, если нет, то объяснить почему.

12. Привести пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящейся на $[0,1]$ к неограниченной функции $f(x)$.

13. Привести пример последовательности функций $f_n(x)$, $n \in N$, удовлетворяющей условиям:

    (a) функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на $(0,1)$;

    (b) для любого $x_0 \in (0,1)$ последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

    (c) функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится равномерно на $(0,1)$ к непрерывной на $(0,1)$ функции $f(x)$.

    Какое условие теоремы Дини нарушено?

14. Пусть последовательность непрерывных на $[a, +\infty)$ функций $f_n(x)$ сходится поточечно к непрерывной на $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и

    (a) существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = A_n$;

    (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$;

    (c) $\forall\, x \in [a, +\infty)$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна.

    Доказать, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на промежутке $[a, +\infty)$.

15. Привести пример последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, сходящейся поточечно на $[0, 1]$ к непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(x)$, и такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx \neq \int\limits_0^1 f(x)dx$.

16. Привести пример последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, неравномерно сходящейся на $[0, 1]$ к непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(x)$, и такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx$.

17. Привести пример последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций, сходящейся поточечно на $[0, 1]$ к функции $f(x) \notin R[0, 1]$.

18. Пусть H_m $(m \in \mathbb{N})$ — множество всех многочленов степени не выше m, функции $f_n(x) \in H_m$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$. Доказать, что:

    (a) $f(x) \in H_m$;

    (b) функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$.

19. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если

    $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x', x'' \in [a, b],\ |x' - x''| < \delta,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

    выполняется неравенство $|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$. Доказать, что если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных функций равномерно сходится на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

20. Доказать теорему Арцела: если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на $[a, b]$,

то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом отрезке.

2.10.2 Функциональные ряды

1. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, а функция $\varphi(x)$ определена и ограничена на этом множестве. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$ также равномерно сходится на множестве X.

2. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$ сходится равномерно на множестве X, а функции $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ определены на X и удовлетворяют условию $|u_n(x)| \leq |v_n(x)|$ для всех $x \in X$. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на X абсолютно и равномерно.

3. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_n|}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве, не содержащем точек $x = a_n,\ n \in \mathbb{N}$.

4. Показать, что из условий

   (a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X равномерно,

   (b) последовательность $v_n(x)$ ограничена в совокупности на X,

   вообще говоря, не следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ равномерно сходится на X. Какие дополнительные условия надо наложить на последовательность $\{u_n(x)\}$ или на последовательность $\{v_n(x)\}$, чтобы гарантировать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ на X?

5. Следует ли из абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на X? (Рассмотрите пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - x), X = [0, 1]$.)

6. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b, $a < b$, а функции $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, монотонны на отрезке $[a, b]$. Доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

7. Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2(x)$ сходится поточечно на множестве X и его сумма ограничена на X. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, u_n(x)$ абсолютно и равномерно сходится на множестве X.

8. Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$.

9. Пусть функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на $[a, b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ сходится.

10. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|$ сходится равномерно на множестве X, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} |a_n(x)| = 0$, а функциональная последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на X. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X.

11. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен R. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, если:

    (a) $b_n = (a_n)^k$ $(k \in \mathbb{N})$;

    (b) $b_n = \dfrac{a_n}{1 + |a_n|}$.

12. Доказать, что если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна

S, то существует $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = S$. Справедливо ли обратное утверждение?

13. Пусть функции $u_n(x), n\in\mathbb{N}$, непрерывны на $[a,b]$, $u_n(x)>0$ для всех $x\in[a,b]$ и всех $n\in\mathbb{N}$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ поточечно сходится на $[a,b]$ к непрерывной на $[a,b]$ функции $S(x)$. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.

14. Пусть $a>0$ и $b>0$ — фиксированные числа. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n$.

15. Пусть радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ равны R_1 и R_2, соответственно. Найти условия, которым должны удовлетворять радиусы сходимости следующих степенных рядов:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\,x^n$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot b_n\, x^n$.

16. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}_0$, и $l=\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Доказать, что $l\le R\le L$.

17. Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом $T=1$ и

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0,1/2],\\ 1-x, & \text{если } x\in(1/2,1].\end{cases}$$

Пусть $f_n(x)=\dfrac{f(4^n x)}{4^n}$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на $\mathbb{R}$, его сумма $S(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и не имеет производной ни в одной точке $x\in\mathbb{R}$.

18. Пусть $M>0$ и для всех коэффициентов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ выполняются неравенства $|a_n|<\dfrac{M}{n!}$. Доказать, что:

(a) сумма $f(x)$ этого ряда бесконечно дифференцируема в любой точке $a \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

19. Доказать, что $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n-1}$, $\forall x \in [-1,1]$.

20. Пусть функции $f_n(x) \in C([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b)$ к $S(x)$. Доказать, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ сходится и $S(x) \in C([a,b])$.

21. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n}$ сходится не равномерно на $(0,+\infty)$.

Глава 3

Несобственные интегралы

3.1 Определение несобственного интеграла

Определение интеграла Римана (или определенного интеграла) вводится для функций, заданных на отрезке вещественной оси. При этом, если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$), то она ограничена на нем, то есть,

$$\sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = K < +\infty.$$

Рассмотрим расширение понятия определённого интеграла как на функции, заданные на неограниченных промежутках, так и на функции, заданные на ограниченных промежутках из $\mathbb{R}$, но не ограниченные на них. В результате появится новый вид интегралов, которые называются несобственными, в отличие от определённых интегралов, называемых ещё собственными интегралами.

Напомним, что промежутком в $\mathbb{R}$ называют любое множество вида:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < a \le x \le b < +\infty\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < a \le x < b \le +\infty\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty \le a < x \le b < +\infty\},$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty \le a < x < b \le +\infty\}.$$

Определение 3.1. *Пусть X — промежуток в $\mathbb{R}$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f — локально интегрируемая функция на X, если f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset X$.*

Если $X = [a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и f — локально интегрируемая функция на $[a, b]$, то f, очевидно, интегрируема по Риману на $[a, b]$. Иными словами, для отрезка понятие интегрируемости по Риману и локальной интегрируемости совпадают. Если же $X = [a, b)$, где $b \in \mathbb{R}$, то среди функций, локально интегрируемых на X, есть функции, которые при любом доопределении в точке $x = b$ не будут интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Подтверждением этого является функция $f(x) = 1/(x - b)$.

Лемма 3.1. . *Пусть функция f локально интегрируема на промежутке $[a, b)$, $b \in \mathbb{R}$. Для того чтобы функция f, доопределёная некоторым образом в точке b, была интегрируемой по Риману на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на промежутке $[a, b)$.*

■ *Необходимость.* Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x \in [a, b) \\ d, & x = b \end{cases}$. Пусть она интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на отрезке $[a, b]$, а значит функция f ограничена на полуинтервале $[a, b)$.
Достаточность. Пусть функция f ограничена и локально интегрируема на полуинтервале $[a, b)$, а

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b), \\ d, & x = b. \end{cases}$$

Пользуясь критерием Дарбу, докажем, что $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Ясно, что функция $\tilde{f}$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то есть

$$\exists M > 0 : \left|\tilde{f}(x)\right| \leq M, \forall\, x \in [a, b].$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $c = b - \dfrac{\varepsilon}{4M} \in (a, b)$. Поскольку $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{[a,c]}$, то существует разбиение $\tau_1^{(\varepsilon)}$ отрезка $[a, c]$, для которого

$$S^{\tilde{f}}(\tau_1^{(\varepsilon)}) - s^{\tilde{f}}(\tau_1^{(\varepsilon)}) < \varepsilon/2.$$

Обозначим через $\tau^{(\varepsilon)}$ разбиение отрезка $[a, b]$, полученное из $\tau_1^{(\varepsilon)}$ добавлением к нему точки b. Тогда

$$S^{\tilde{f}}(\tau^{(\varepsilon)}) - s^{\tilde{f}}(\tau^{(\varepsilon)}) = S^{\tilde{f}}(\tau_1^{(\varepsilon)}) - s^{\tilde{f}}(\tau_1^{(\varepsilon)}) + \left(M^{\tilde{f}} - m^{\tilde{f}}\right)(b - c),$$

где $M^{\tilde{f}} = \sup\left\{\tilde{f}(x) : x \in [c, b]\right\}$, $m^{\tilde{f}} = \inf\left\{\tilde{f}(x) : x \in [c, b]\right\}$. Поскольку

$$M^{\tilde{f}} - m^{\tilde{f}} \leq 2M, \text{ то } S^{\tilde{f}}(\tau^{(\varepsilon)}) - s^{\tilde{f}}(\tau^{(\varepsilon)}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Дарбу $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Рассмотрим полуинтервал $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, и функцию f, локально интегрируемую на $[a, b)$. Тогда для каждой точки $t \in [a, b)$ можно вычислить определённый интеграл (интеграл Римана)

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\, dx.$$

Определение 3.2. *Если функция f локально интегрируема на $[a, b)$ и существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} F(t) = L, \tag{3.1}$$

то он называется сходящимся несобственным интегралом от функции f на промежутке $[a, b)$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а сама функция f называется интегрируемой на промежутке $[a, b)$ в несобственном смысле.

Определение 3.3. *Если функция f локально интегрируема на промежутке $[a, b)$, но конечного предела функции $F(t)$ при $t \to b$, $t < b$, не существует, то говорят, что функция f не интегрируема на $[a, b)$ в несобственном смысле, а формально записанный символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в этом случае называют расходящимся несобственным интегралом.*

Замечание. Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то $f \in \mathcal{R}_{[a,t]}$, $\forall\, t \in [a, b]$ и по свойству непрерывности интеграла Римана с переменным верхним пределом (см., например, [6, стр. 360], или [9, теорема 1.21])

$$\exists \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

где $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл Римана от функции f на $[a, b]$. Следовательно, в этом случае функция f будет интегрируемой на $[a, b)$ и в смысле определения 3.2. Это позволяет нам сделать вывод о том, что класс функций, интегрируемых на ограниченном промежутке $[a, b)$ в несобственном смысле, включает в себя класс функций, интегрируемых на $[a, b]$ по Риману. Кроме того, это оправдывает употребление для обозначения сходящегося несобственного интеграла обычного символа интегрирования.

Покажем, что в случае ограниченного промежутка $[a, b)$ существуют функции, интегрируемые на $[a, b)$ в несобственном смысле, но не интегрируемые на $[a, b]$ по Риману.

Пример 3.1. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Изучим вопрос об интегрируемости на $[a, b)$ функции $f(x) = (b - x)^{-\mu}$, μ — фиксированное число.

■ Если $\mu \le 0$, то функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и, следовательно, интегрируема по Риману на нем. Если же $\mu > 0$, то функция f неограничена на $[a,b)$ и не может быть интегрируемой по Риману на $[a,b]$ при любом доопределении в точке b. В то же время, для любого t из $[a,b)$ функция $(b-x)^{-\mu}$, $\mu > 0$, будет непрерывной функцией по x на $[a,t]$ и, значит, интегрируемой по Риману на $[a,t]$. При этом

$$\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\mu}(b-x)^{-\mu+1}\Bigg|_{x=a}^{x=t}, & \text{если } \mu > 0,\ \mu \ne 1, \\ -\ln(b-x)\,\Big|_{x=a}^{x=t}, & \text{если } \mu = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $0 < \mu < 1$

$$\lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}(b-a)^{-\mu+1} < +\infty,$$

а при $\mu \ge 1$

$$\lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\mu} = +\infty\,.$$

Таким образом, при $0 < \mu < 1$ функция $f(x) = (b-x)^{-\mu}$ интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле (или, что всё равно, несобственный интеграл $\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ сходится). Если же $\mu \ge 1$, то эта функция не интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле (то есть, несобственный интеграл $\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ расходится). □

Рассмотрим теперь неограниченный промежуток $[a,+\infty)$, $|a| < +\infty$. Для функций, определённых на этом промежутке нельзя говорить об интегрируемости по Риману. В то же время легко привести примеры функций, интегрируемых в несобственном смысле на $[a,+\infty)$.

Пример 3.2. Пусть $0 < a < +\infty$. Изучим вопрос об интегрируемости на $[a,+\infty)$ функции $f(x) = x^{-\alpha}$, α — фиксированное число.

■ Функция $x^{-\alpha}$ является непрерывной на луче $[a,+\infty)$ и, следовательно, локально интегрируемой на нём. При этом

$$\int\limits_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_{x=a}^{x=t}, & \text{если } \alpha \ne 1, \\ \ln x\,\Bigg|_{x=a}^{x=t}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

В случае, когда $\alpha > 1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{-\alpha+1}\ \Bigg|_{x=a}^{x=t} = -\frac{1}{1-\alpha}\, a^{-\alpha+1}.$$

Если же $\alpha \leq 1$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$$

Итак, функция $f(x) = x^{-\alpha}$ при $\alpha > 1$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ $(a > 0)$, и несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится. При $\alpha \leq 1$ функция $f(x) = x^{-\alpha}$ не интегрируема в несобственном смысле на $[a, +\infty)$ $(a > 0)$, то есть несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится. $\square$

Всюду далее, класс функций, интегрируемых на промежутке $[a, b)$ в несобственном смысле, будем обозначать символом $\mathcal{R}_{[a,b)}$.

Замечание. Если $[a, b)$ — ограниченный промежуток, и $\mathcal{R}_{[a,b]}$ — класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$, то $\mathcal{R}_{[a,b)} \supset \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Непосредственно из определения 3.2 и свойств интеграла Римана вытекают следующие простые свойства несобственных интегралов:

1) если $f,\ g \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ и

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\, dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\, dx;$$

2) если $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функция g локально интегрируема на $[a, b)$, но $g \notin \mathcal{R}_{[a,b)}$, то $\lambda f + \mu g \notin \mathcal{R}_{[a,b)}$;

3) если f — локально интегрируемая функция на $[a, b)$, и $c \in [a, b)$, то $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{R}_{[c,b)}$, при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx;$$

4) если $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, то $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int\limits_t^b f(x)\,dx = 0$.

Предлагаем студентам доказать эти свойства самостоятельно.

Замечание. Не все свойства, которыми обладают определённые интегралы, имеют место для несобственных интегралов. Например, для определённого интеграла справедливо утверждение: если $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Для несобственного интеграла аналогичное утверждение не имеет места. Действительно, если $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x \in [0,1)$, то несобственные интегралы $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ сходятся, в то же время несобственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ расходится (см. пример 3.1).

Вернёмся к вопросу о связи между определённым интегралом Римана на отрезке $[a,b]$ и несобственным интегралом, введённым определением 3.2, на $[a,b)$. Если f — локально интегрируемая функция на $[a,b)$, то возможны две ситуации:

1) функция f ограничена на промежутке $[a,b)$,
2) функция f неограничена на промежутке $[a,b)$.

В первом случае функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$ (лемма 3.1), при произвольном доопределении её в точке $x = b$. Во втором случае, так как f локально интегрируема на $[a,b)$, она ограничена на любом отрезке $[a,c]$, $a < c < b$. В то же время на промежутке $[a,b)$ f неограниченна. Последнее, очевидно, равносильно тому, что f неограниченна на любом промежутке $[c,b)$, $a < c < b$.

Определение 3.4. *Пусть $f : [a,b) \to \mathbb{R}^1$. Будем говорить, что точка $x = b$ — единственная особая точка функции f на промежутке $[a,b)$, если f локально интегрируема на $[a,b)$ и либо $b = +\infty$, либо $|b| < +\infty$, но функция f неограничена на $[a,b)$.*

Замечание. Аналогично предыдущему можно рассмотреть промежуток $(a,b]$, $-\infty \le a < b < +\infty$, функции, локально интегрируемые на нём, и дать определение сходящихся и расходящихся несобственных интегралов от таких функций, а также выделить интегралы от функции по промежутку $(a,b]$ с единственной особой точкой $x = a$. (Предлагаем студентам самостоятельно привести соответствующие определения.)

В дальнейшем, если не оговорено что-то другое, мы будем рассматривать лишь интегралы на промежутке $[a, b)$, для которых b — единственная особая точка функции f.

Пользуясь критерием Коши существования конечного предела функции (см., например, [6, с.141-142], [8, с.62, теорема 2.46]), можно доказать для несобственных интегралов следующий общий результат.

Теорема 3.1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** *Пусть* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *и функция* f *локально интегрируема на* $[a, b)$. *Для того, чтобы несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось число* $b_0 = b_0(\varepsilon)$ *из промежутка* $[a, b)$ *такое, что*

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall\, t', t'' \in (b_0, b).$$

■ Пусть $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx,\ t \in [a, b)$. По определению, $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t)$. Пользуясь критерием Коши существования конечного предела функции $F(t)$ при $t \to b, t < b$, получаем, что $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $b_0 \in [a, b) : \forall t', t'' \in (b_0, b)$

$$\Big|F(t') - F(t'')\Big| = \left|\int\limits_a^{t'} f(x)\,dx - \int\limits_a^{t''} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \quad \square$$

Заметим, что в теории числовых рядов из критерия Коши сходимости числового ряда следует необходимое условие его сходимости: если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. Аналогичное утверждение не имеет места для несобственных интегралов по неограниченному промежутку: если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $f(x)$ не обязательно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Приведём соответствующие примеры.

Пример 3.3. Рассмотрим на $[0, +\infty)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (n, n+1), \\ n, & x = n, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Тогда f локально интегрируема на $[0, +\infty)$ и $\int\limits_0^t f(x)\,dx = 0, \forall t \in [0, +\infty)$.

Следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^t f(x)\,dx = 0$, и по определению 3.2, f интегрируема в несобственном смысле на $[0, +\infty)$, причём $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. В то же время, как легко видеть, $0 = \varliminf\limits_{x\to+\infty} f(x) < \varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\square$

Рассмотренная в примере функция не является непрерывной на промежутке $[0, +\infty)$. Приведем пример неограниченной и непрерывной на $[0, +\infty)$ функции, интегрируемой в несобственном смысле, для которой

$$0 = \varliminf_{x\to+\infty} f(x) < \varlimsup_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Пример 3.4. Рассмотрим отрезки $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ для целых $n \geq 2$. Легко проверить, что отрезки не пересекаются. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \notin \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \ \left[n - \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{1}{n^3}\right], \\ n, \ \ x = n, \ n = 2, 3, \dots, \\ n^4(x - n) + n, \ \ x \in \left[n - \dfrac{1}{n^3}, n\right], \ n \geq 2, \\ n^4(n - x) + n, \ \ x \in \left[n, n + \dfrac{1}{n^3}\right], \ n \geq 2. \end{cases}$$

То есть на $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$ и на $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$ f — линейная функция, причём $f(n) = n$, $f\left(n \pm \frac{1}{n^3}\right) = 0$. Тогда, $0 = \varliminf\limits_{x\to+\infty} f(x) < \varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. На $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ локально интегрируема, поскольку непрерывна на $[0, +\infty)$. Как нетрудно установить, $f(x)$ интегрируема на $[0, +\infty)$ в несобственном смысле и

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

3.2 Методы вычисления несобственных интегралов

Теорема 3.2 (интегрирование по частям). *Пусть* $u(x)$, $v(x)$ *— непрерывно дифференцируемые функции на* $[a, b)$ *и*

$$\exists \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} u(x)v(x) = E \in \mathbb{R}.$$

Если сходится один из несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx, \qquad \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

то сходится второй, и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx, \tag{3.2}$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b = E - u(a)v(a)$.

■ Пусть $t \in (a, b)$. В силу условий теоремы, функции $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, $v'(x)$ непрерывны на $[a, t]$ и потому на $[a, t]$ справедлива теорема об интегрировании по частям для интеграла Римана:

$$\int\limits_a^t u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^t - \int\limits_a^t u'(x)v(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Пусть, например, $\int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx$ — сходящийся несобственный интеграл. Так как $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b, \\ x < b}} u(x)v(x) = E$ то, переходя в равенстве (3.3) к пределу при $t \to b$, $t < b$, получим, что сущестует конечный предел левой части этого равенства, то есть несобственный интеграл $\int\limits_a^b v'(x)u(x)\,dx$ сходится и справедлива формула (3.2). □

Пример 3.5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx.$$

■ Очевидно, что $x = 0$ — единственная особая точка подынтегральной функции. Пусть $u(x) = \ln\sin x, v(x) = x$. Легко проверить, что обе эти функции непрерывно дифференцируемы на $(0, \pi/2]$ и $\lim\limits_{x\to+0} x\ln\sin x = 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} u'(x)v(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} x\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$$

Функция $g(x) = x\,\dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна на $(0, \pi/2]$ и $\lim\limits_{x\to+0} g(x) = 1$. Доопределяя эту функцию по непрерывности в точке $x = 0$, получим функцию

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{\cos x}{\sin x}, & x \in (0, \dfrac{\pi}{2}], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна на отрезке $[0, \pi/2]$, а потому интегрируема на нем по Риману. Следовательно, функция $x\,\dfrac{\cos x}{\sin x}$, интегрируема в несобственном смысле на $(0, \pi/2]$. Тогда по теореме 3.2 $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ — сходящийся несобственный интеграл. При этом

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} x\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\operatorname{ctg} x\,dx. \ \Box$$

Теорема 3.3 (формула Ньютона–Лейбница)**.** *Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$ и F — ее первообразная. Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) \in \mathbb{R}$, и, в случае сходимости, справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t) - F(a). \tag{3.4}$$

■ Пусть $t \in [a, b)$. На отрезке $[a, t]$ к функции f применима формула Ньютона-Лейбница для определенного интеграла

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a).$$

Поэтому существование предела $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int\limits_a^t f(x)\,dx$ равносильно существованию предела $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t)$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to b$, $t < b$, с учетом определения 3.2, получаем равенство (3.4). $\square$

Пример 3.6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$\blacksquare$ Подынтегральная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Известно, что первообразной для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ на $\mathbb{R}$ является функция $\operatorname{arctg} x$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, то по теореме 3.3 данный несобственный интеграл сходится и

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}. \ \square$$

Пример 3.7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

$\blacksquare$ Подынтегральная функция непрерывна на $(1, 2]$ и $x = 1$ — её единственная особая точка, а функция $F(t) = \ln\ln t$ является её первообразной на $(1, 2]$. Так как $\lim\limits_{t\to1+0} F(t) = -\infty$, то исходный несобственный интеграл расходится. $\square$

Пример 3.8. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

и вычислить его, если он сходится.

$\blacksquare$ Подынтегральная функция непрерывна на $[\pi/2, +\infty)$, точка $x = +\infty$ — её единственная особая точка, и $F(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ — первообразная подынтегральной функции на $[\pi/2, +\infty)$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \cos 0 = 1$, то по теореме 3.3 исходный несобственный интеграл сходится и

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\sin\frac{1}{x}\,dx = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1. \ \square$$

Теорема 3.4 (о замене переменной)**.** *Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$, функция $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,b)$, и выполняются условия*

1) функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$;

2) функция $\varphi(t)$ возрастает на $[\alpha,\beta)$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{\substack{t\to\beta\\ t<\beta}}\varphi(t)=b$.

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно, и, если сходятся, равны.

■ 1). Пусть сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Выберем произвольно точку τ в $[\alpha,\beta)$. В силу условий 2)–3)

$$\varphi:[\alpha,\tau]\to[\varphi(\alpha),\varphi(\tau)],$$

причём отображение φ — биекция. Таким образом, для указанных отрезков выполнены все условия теоремы о замене переменной в интеграле Римана. Следовательно,

$$\int\limits_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int\limits_a^{\varphi(\tau)} f(x)\,dx.$$

Так как $\lim\limits_{\substack{\tau\to\beta\\ \tau<\beta}}\varphi(\tau)=b$, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то в последнем равенстве можно перейти к пределу при $\tau\to\beta,\ \tau<\beta$. При этом мы получим и сходимость интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, и равенство интегралов.

2). Пусть сходится интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$. Выберем произвольно точку c в $[a,b)$. В силу условий, наложенных на функцию $\varphi(t)$,

$$\varphi:[\alpha,\varphi^{-1}(c)]\to[a,c].$$

Здесь φ^{-1} — функция, обратная к φ, при этом φ^{-1} — непрерывна и возрастает на $[a,c]$ (см. [8, теорема 3.11]). В силу теоремы о замене переменной в интеграле Римана

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

По условию интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ сходится, а по свойству монотонной функции (см., например, [6, С. 151]) $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \varphi^{-1}(c) = \beta$. Переходя в последнем равенстве интегралов к пределу при $c \to b$, вновь убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. $\square$

Замечание. Легко видеть, что справедливо аналогичное теореме 3.4 утверждение, и тогда, когда функция f непрерывна на $[a, b)$, функция $\varphi : (\alpha, \beta] \to [a, b)$, и выполняются условия

1) функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $(\alpha, \beta]$;
2) $\varphi(\beta) = a$, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ t>\alpha}} \varphi(t) = b$;
3) функция $\varphi(t)$ убывает на $(\alpha, \beta]$.

Пример 3.9. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{1/x}\,\frac{dx}{x^2}\,.$$

■ Подынтегральная функция, очевидно, непрерывна на $[1, +\infty)$. Функция $\varphi(t) = 1/t$ удовлетворяет всем условиям замечания к теореме 3.4, если $(\alpha, \beta] = (0, 1]$. После замены $x = \dfrac{1}{t}$, получим интеграл $\int\limits_0^1 e^t dt$ — интеграл Римана (который сходится). Следовательно, исходный интеграл сходится и

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{1/x}\,\frac{dx}{x^2} = \int\limits_0^1 e^t\,dt = e^t\Big|_{t=0}^1 = e - 1. \ \square$$

Пример 3.10. Вычислить сходящийся интеграл Эйлера (пример 3.5) $J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

■ Подынтегральная функция, очевидно, непрерывна на $(0, \pi/2]$. Функция $\varphi(t) = 2t$ возрастает, непрерывно дифференцируема на $(0, \pi/4]$, $\varphi(0) = 0$,

$\varphi(\pi/4) = \pi/2$. Поэтому по теореме о замене переменной

$$J = 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln(2\sin t\cos t)\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln 2\;dt + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt.$$

Так как $\cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$, то

$$\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\,dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du.$$

Тогда

$$J = 2\,\frac{\pi}{4}\,\ln 2 + 2\left[\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2J.$$

Отсюда следует, что $J = -\dfrac{\pi}{2}\,\ln 2$. □

Пример 3.11. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

и вычислить его, если он сходится.

■ Применим теорему 3.4 о замене переменной в несобственном интеграле. Подынтегральная функция, очевидно, непрерывна на промежутке $[1, +\infty)$. Положим $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in [0, \pi/2)$. Все условия теоремы 3.4, наложенные на функцию $\varphi(t)$, как легко проверить, выполнены. Значит данный несобственный интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt/\cos^2 t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,$$

который является интегралом Римана на отрезке $[0, \pi/2]$ от непрерывной функции $\cos^2 t$, и, следовательно, сходится. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,. \ \square$$

3.3 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b)$, и функция f локально интегрируема на $[a,b)$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx, \quad t \in [a,b),$$

которая в силу свойств интеграла Римана (см. например, [9, с. 17–22]) неотрицательна и монотонно возрастает на $[a,b)$. По теореме о существовании предела монотонной функции (см. [6, с. 147], [8, с. 57, теорема 2.43]) предел $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t)$ существует тогда и только тогда, когда функция $F(t)$ ограничена сверху на $[a,b)$. Поэтому из определений 3.2 и 3.3 получаем следующую теорему.

Теорема 3.5. *Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b)$ и функция f локально интегрируема на $[a,b)$. $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists M > 0 \,:\, \forall t \in [a,b) \int\limits_a^t f(x)\,dx \leq M.$$

Из этого критерия сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций выведем полезные на практике теоремы сравнения.

Теорема 3.6 (первая теорема сравнения или признак сравнения в непредельной форме)**.** *Пусть $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для всех x из $[a,b)$, и функции f, g локально интегрируемы на $[a,b)$. Тогда:*

а) если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится;

б) если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.

■ Докажем утверждение а). Пусть интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. По теореме 3.5 $\exists\ M > 0 : \forall t \in [a,b)$ $\int\limits_a^t g(x)\,dx \leq M$. Тогда, в силу теоремы об интегрировании неравенств (см. например, [6, с. 357], или [9, с. 21, теорема 1.18]),

$$\int_a^t f(x)\,dx \le \int_a^t g(x)\,dx \le M, \quad \forall\, t \in [a,b).$$

Следовательно, по теореме 3.5 интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Утверждение б) легко следует из а) (докажите самостоятельно, пользуясь методом от противного). $\square$

Пример 3.12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda}\,dx,\ \lambda > 1.$$

$\blacksquare$ Очевидно, что $0 \le \dfrac{\sin^2 x}{x^\lambda} \le \dfrac{1}{x^\lambda}$, $\forall x \in [1,+\infty)$. Как показано в примере 3.2, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\lambda}\,dx$ сходится при $\lambda > 1$. В силу теоремы 3.6, при $\lambda > 1$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^\lambda}\,dx$. $\square$

Теорема 3.7 (вторая теорема сравнения или признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть функции f и g неотрицательны, $g \ne 0$, $\forall x \in [a,b)$, функции f, g локально интегрируемы на $[a,b)$ и существует предел* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

1) Если $K < +\infty$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2) Если $K > 0$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

■ 1). Пусть $K \in [0, +\infty)$. По определению предела функции в точке

$$\exists b_0 \in (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} < K + 1, \forall x \in [b_0, b).$$

Значит, $f(x) < (K + 1)\, g(x), \forall x \in [b_0, b)$. Отсюда в силу свойств несобственного интеграла и теоремы 3.6 следует сходимость интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

2). Пусть $K \in (0, +\infty]$. Если $K = +\infty$, то по определению бесконечно большой функции

$$\exists b_0 \in (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} > 1, \,\forall\, x \in [b_0, b).$$

Тогда $f(x) > g(x) > 0, \,\forall\, x \in [b_0, b)$, и по теореме 3.6 интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ расходится.

Если $K \in (0, +\infty)$, то $\exists\, b_0 \in (a, b) : \dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{K}{2}, \,\forall\, x \in [b_0, b)$. Как и выше, учитывая расходимость интеграла от функци g, в силу теоремы 3.6 и свойств несобственного интеграла получаем расходимость интеграла от функции f. □

Следствие 1. *Пусть $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ и функции f, g локально интегрируемы на $[a, b)$. Если функция g (или f) положительна в некоторой окрестности точки b и существует предел*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma, \quad 0 < \gamma < +\infty,$$

то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. *Пусть $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, и функции f, g локально интегрируемы на $[a, b)$. Если функция g (или f) положительна в некоторой окрестности точки b и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b$ (то есть $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$), то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3.13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x(e^x - e^{-x}))^{1/3}}.$$

■ Точка $x = 0$ — единственная особая точка подынтегральной функции. Так как $(x(e^x - e^{-x}))^{1/3} > 0$, $\forall x \in (0, 1]$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$, то есть $e^x - e^{-x} \sim 2x$ при $x \to 0$, то по следствию 2 теоремы 3.7, данный интеграл является равносходящимся с интегралом

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x^2)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}.$$

Последний интеграл сходится, поскольку $2/3 < 1$ (см. пример 3.2).

3.4 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Теорема 3.8. *Пусть* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *и* f *локально интегрируема на* $[a, b)$. *Если* $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, *то* $f \in \mathcal{R}[a, b)$ *и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

■ Прежде всего заметим, что если f локально интегрируема на $[a, b)$, то такой же будет и функция $|f|$, что следует из свойств интеграла Римана (см., например, [6, с. 357], или [9, с. 18, теорема 1.14]). Так как интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то по теореме 3.1 (критерию Коши)

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,b_0 = b_0(\varepsilon) \in [a, b) : \left|\int\limits_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon,\ \ \forall\,t', t'' \in [b_0, b).$$

Но для функции, интегрируемой по Риману, $\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right|$.

Тогда

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \forall\,t', t'' \in [b_0, b).$$

Вновь, применяя критерий Коши, убеждаемся, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Чтобы доказать нужное неравенство, достаточно перейти к пределу при $t \to b$, $t < b$, в следующем неравенстве

$$\left|\int\limits_a^t f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^t |f(x)|\,dx,$$

справедливом в силу свойств интеграла Римана для всех $t \in [a, b)$. $\square$

В связи с доказанной теоремой дадим такое определение.

Определение 3.5. *Пусть функция f локально интегрируема на $[a, b)$. Если $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, то будем говорить, что функция f абсолютно интегрируема в несобственном смысле на $[a, b)$, а несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится. Если же $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, $|f| \notin \mathcal{R}_{[a,b)}$, то будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится не абсолютно (условно).*

Приведём два признака сходимости несобственных интегралов, подынтегральная функция которых не обязательно положительна, а сами интегралы, возможно, не сходятся абсолютно.

Теорема 3.9 (признак Дирихле)**.** *Пусть функции f и φ удовлетворяют следующим условиям:*

1) функция f локально интегрируема на промежутке $[a, b)$, а функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)dx$ ограничена на $[a, b)$;

2) функция φ монотонна на $[a, b)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \varphi(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится.

■ Не нарушая общности будем считать, что $\varphi(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (x_0, b)$. Воспользуемся критерием Коши 3.1 сходимости несобственного интеграла. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\varphi(x)\,dx$, где

$$x_0 \leq t_1 < t_2 < b.$$

Поскольку функция f интегрируема на $[t_1, t_2]$, то к последнему интегралу применима вторая интегральная теорема о среднем (теорема Бонне — [8, теорема 1.28, с. 33]), согласно которой

$$\exists\, \eta \in (t_1, t_2) : \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(t_1)\int\limits_{t_1}^{\eta} f(x)\,dx + \varphi(t_2)\int\limits_{\eta}^{t_2} f(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\varphi(x)\,dx\right| \le |\varphi(t_1)|\left|\int\limits_{t_1}^{\eta} f(x)\,dx\right| + |\varphi(t_2)|\left|\int\limits_{\eta}^{t_2} f(x)\,dx\right|.$$

По условию $\exists\, M > 0 : \left|\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx\right| \le M, \forall t \in [a, b)$, поэтому

$$\left|\int\limits_{t_1}^{\eta} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{\eta} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{t_1} f(x)\,dx\right| \le 2M.$$

Аналогично, $\left|\int\limits_{\eta}^{t_2} f(x)\,dx\right| \le 2M$.

По условию теоремы $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = 0$, поэтому

$$\exists\, b_0 = b_0(\varepsilon) \in (x_0, b) : |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{4M},\ \forall\, x \in (b_0, b).$$

Следовательно, для всех $t_1, t_2 \in (b_0, b)$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\varphi(x)dx\right| < \frac{2M\varepsilon}{4M} + \frac{2M\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши (теореме 3.1) несобственный интеграл I сходится. □

Пример 3.14. Исследовать на сходимость при $\alpha > 0$ несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

■ Так как $\left|\int\limits_{1}^{t} \sin x\,dx\right| = \left|-\cos x\,\Big|_1^t\right| \le 2,\ \forall\, t \in [1, +\infty)$, а функция $1/x^\alpha$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$, то в силу признака Дирихле данный интеграл сходится. Заметим, что $\left|\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| \leq \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, и при $\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$ сходится (см. пример 3.2). Следовательно, при $\alpha > 1$ данный интеграл сходится абсолютно.

Докажем, что при $0 < \alpha \leq 1$ этот интеграл сходится условно, для чего покажем, что в этом случае интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |\sin x|\,\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится.

Для всех $x \in [1, +\infty)$

$$\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} \geq \frac{\sin^2 x}{2x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}. \tag{3.5}$$

Как было показано в примере 3.1, при $0 < \alpha \leq 1$ несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$ расходится.

Рассмотрим при $0 < \alpha \leq 1$ несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}\,dx$. Его подынтегральная функция имеет единственную особую точку $x = +\infty$. При этом

$$\left|\int\limits_{1}^{t} \cos 2x\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\sin 2x\,\Big|_1^t\right| \leq 1,\ \forall t \in [1, +\infty).$$

Кроме того, функция $2x^{-\alpha}$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$. По признаку Дирихле несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}\,dx$ сходится. Но тогда из равенства (3.5) и из свойства 2) несобственных интегралов (см. страницу 85) следует, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin^2 x\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится. Тогда, из теоремы 3.6 следует, что несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\,dx$ расходится.

Окончательно, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin x\,dx}{x^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$.

Заметим, что попутно мы установили расходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$$

при $\alpha \in (0, 1]$, а ранее (см. пример 3.12) было показано, что этот интеграл сходится (очевидно, абсолютно) при $\alpha > 1$. $\square$

Замечание. Остался без ответа вопрос о характере сходимости интегралов $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha \le 0$. Предлагаем студентам самостоятельно доказать, что в этом случае указанные интегралы расходятся.

Теорема 3.10 (признак Абеля). *Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b)}$, а $g(x)$ — монотонная и ограниченная функция на $[a, b)$. Тогда сходится несобственный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.*

■ Так как функция $g(x)$ монотонна и ограниченна на промежутке $[a, b)$, то $\exists \lim\limits_{t\to b, t<b} g(x) = l$. Тогда функция $\widetilde{g}(x) = g(x) - l$ удовлетворяет условиям 2) и 3), а функция f удовлетворяет условию 1) признака Дирихле, поскольку интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Значит, сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\widetilde{g}(x)\,dx$. В силу условий теоремы несобственный интеграл $\int\limits_a^b lf(x)\,dx$, сходится. Поэтому интеграл I сходится как сумма двух сходящихся несобственных интегралов. $\square$

Пример 3.15. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x\,dx.$$

■ Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится (см. пример 3.14), а на луче $[0, +\infty)$ функция $\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает $\left((\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} > 0\right)$

и ограничена $\left(0 \le \operatorname{arctg} x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, то данный несобственный интеграл сходится по признаку Абеля. $\square$

Замечание. В формулировках признаков Дирихле и Абеля ограничений на знаки подынтегральных функций нет. На деле, эти признаки нецелесообразно использовать для интегралов от знакопостоянных функций. Например, пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неотрицательны на (a, b). В этом случае ограниченность функции $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ эквивалентны. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ следует из первой теоремы сравнения и сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отметим, что проверка условий теорем Дирихле и Абеля обычно сложнее проверки условий признака сравнения.

3.5 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками

Определение 3.6. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Говорят, что точки a и b являются особыми точками функции f на (a, b), если f локально интегрируема на (a, b), и имеет место одно из следующих условий:*

1) $a = -\infty,\ b = +\infty$;

2) $a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}$, но f неограниченна в любой окрестности точки b;

3) $b = +\infty,\ a \in \mathbb{R}$, но f неограниченна в любой окрестности точки a;

4) $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$, но f неограниченна и в любой окрестности точки a, и в любой окрестности точки b.

Можно, опираясь на определение 3.4, дать другое определение, эквивалентное определению 3.6.

Определение 3.7. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что точки a и b являются особыми точками функции f на (a, b), если для некоторой точки $c \in (a, b)$ функция f имеет на $(a, c]$ и $[c, b)$ единственные особые точки a и b, соответственно.*

Замечание. Определение 3.7 не только эквивалентно определению 3.6, но и корректно в том смысле, что не зависит от выбора точки c из (a, b). Предлагаем студентам доказать это самостоятельно.

Определение 3.8. *Пусть a и b — особые точки функции f на (a, b). Если для некоторого $c \in (a, b)$ оба несобственных интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходятся (в смысле определения 3.2), то будем говорить, что функция f интегрируема в несобственном смысле на интервале (a, b), а символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будем называть сходящимся несобственным интегралом. При этом под его значением будем понимать величину*

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если хотя бы один из указанных несобственных интегралов расходится, то будем говорить, что функция f неинтегрируема в несобственном смысле на интервале (a, b), а формально записанный символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будем называть расходящимся несобственным интегралом.

Лемма 3.2. *Определение 3.8 корректно в том смысле, что ни сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, ни его величина в случае, когда он сходится, не зависят от выбора точки c из (a, b).*

■ Пусть $a < c' < c'' < b$. Так как f — локально интегрируемая функция на (a, b), то по свойствам интеграла Римана

$$\int\limits_t^{c''} f(x)\,dx = \int\limits_t^{c'} f(x)\,dx + \int\limits_{c'}^{c''} f(x)\,dx, \qquad \forall t \in (a, c')$$

$$\int\limits_{c''}^{y} f(x)\,dx = \int\limits_{c'}^{y} f(x)\,dx - \int\limits_{c'}^{c''} f(x)\,dx, \quad \forall y \in (c'', b).$$

Из первого равенства следует, что несобственные интегралы $\int\limits_a^{c'} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{c''} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно; из второго равенства следует, что несобственные интегралы $\int\limits_{c'}^{b} f(x)\,dx$, $\int\limits_{c''}^{b} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Следовательно, сходимость $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ не зависит от выбора точки $c \in (a,b)$.

Чтобы показать, что величина сходящегося несобственного интеграла $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ не зависит от выбора точки c из (a,b), воспользуемся свойством 2) несобственных интегралов (см. страницу 85) и запишем цепочку очевидных равенств:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c'} f(x)\,dx + \int\limits_{c'}^{b} f(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^{c''} f(x)\,dx + \int\limits_{c''}^{c'} f(x)\,dx + \int\limits_{c'}^{c''} f(x)\,dx + \int\limits_{c''}^{b} f(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^{c''} f(x)\,dx + \int\limits_{c''}^{b} f(x)\,dx. \quad \square$$

Класс функций, интегрируемых в несобственном смысле на (a,b), будем обозначать символом $\mathcal{R}_{(a,b)}$.

Если (a,b) — конечный интервал, то $\mathcal{R}_{(a,b)} \supset \mathcal{R}_{[a,b)} \cup \mathcal{R}_{(a,b]} \supset \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Замечание. На практике встречаются случаи, когда функция f имеет более двух особых точек или особые точки являются внутренними точками $[a,b]$. И в этих случае можно дать определение сходящихся и расходящихся несобственных интегралов (см., например, [11, стр. 365]).

Рассмотрим пример несобственного интеграла с двумя особыми точками.

Пример 3.16. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

■ У подынтегральной функции на $(0,\pi)$ две особые точки: $0,\pi$. Рассмотрим два несобственных интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx, \quad \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

Подынтегральная функция на $(0,\pi/2]$ имеет единственную особую точку $x=0$, а на $[\pi/2,\pi)$ — единственную особую точку $x=\pi$.

Так как $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \geq 0$ на $(0,\pi/2]$, $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to +0$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} x^{-1/2}\,dx$ сходится (см. пример 3.1), то по теореме 3.7 интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ сходится.

Так как $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \leq 0$ на $[\pi/2,\pi)$, $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \sim -\dfrac{1}{\sqrt{\pi - x}}$ при $x \to \pi - 0$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)^{-1/2}\,dx$ сходится (см. пример 3.1), то по теореме 3.7 интеграл $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ сходится. Пользуясь определением 3.8, делаем вывод о том, что несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ сходится. □

Определение 3.9. *Пусть* $f \in \mathcal{R}_{(a,b)}$. *Если* $|f| \in \mathcal{R}_{(a,b)}$, *то функцию* f *называют абсолютно интегрируемой в несобственном смысле на* (a,b), *а несобственный интеграл* $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *— абсолютно сходящимся. Если же* $|f| \notin \mathcal{R}_{(a,b)}$, *то говорят, что несобственный интеграл* $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится условно.*

Пример 3.17. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx, \ \ \alpha > 0.$$

■ На интервале $(0, +\infty)$ подынтегральная функция имеет две особые точки: $0, +\infty$. Рассмотрим два несобственных интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \quad \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

Так как $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \geq 0$ на $(0, \pi/2]$, $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x \to +0$, то по теореме 3.7 интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ сходится, если $\alpha < 2$, и расходится, если $\alpha \geq 2$. Второй интеграл (см. пример 3.14). абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и условно сходится при $0 < \alpha \leq 1$. Следовательно, исходный интеграл сходится абсолютно при $1 < \alpha < 2$ и условно при $0 < \alpha \leq 1$. □

3.6 Главное значение несобственного интеграла

Допустим, что на $[a, b]$ функция f имеет единственную особую точку $c \in (a, b)$ и функция f неограничена в любой окрестности точки c. По определению несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ будем называть в этом случае сходящимся, если существует конечный предел

$$\lim_{\delta \to +0} \int_a^{c-\delta} f(x)\, dx + \lim_{\delta' \to +0} \int_{c+\delta'}^b f(x)\, dx,$$

который и является значением исходного интеграла. Заметим, что δ и δ' стремятся к нулю независимо друг от друга.

В некоторых случаях, когда последний предел не существует, оказывается полезным рассмотреть предел того же выражения, но при условии, что $\delta = \delta'$ и $\delta \to +0$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\delta \to +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)\, dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\, dx \right),$$

то его называют (следуя Коши) главным значением несобственного интеграла и обозначают символом

$$v.p. \int_a^b f(x)\, dx$$

(v.p. — value principal — главное значение). В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует (сходится) в смысле главного значения. Очевидно, что если несобственный интеграл сходится, то он существует и в смысле главного значения; обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3.18. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ как несобственный расходится, так как расходятся интегралы $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}$. В то же время

$$\int\limits_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\big|_{-1}^{-\delta} + \ln|x|\big|_{\delta}^{1} = \ln\delta - \ln\delta = 0, \forall\delta \in (0,1).$$

Поэтому он существует в смысле главного значения и $v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$.

3.7 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Следует ли из этого, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Доказать, что если указанный несобственный интеграл сходится и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Пусть функция $f(x)$ монотонна на $[1, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha f(x)\,dx$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.
3. Пусть функция $f(x)$ монотонна на $(0, 1]$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^\alpha f(x)\,dx$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.
4. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция $\varphi(x)$

ограничена на $[a,+\infty)$. Сходится ли тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$?

5. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на $[0,+\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{f(x)}$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^2}\int\limits_0^{t} f(x)\,dx = +\infty$.

6. Привести пример функции, непрерывной и неограниченной на промежутке $[0,+\infty)$, для которой несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

7. Привести пример такой непрерывной, неотрицательной, неограниченной на $[0,+\infty)$ функции, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

8. Пусть функция $f(x)$ монотонна на $[1,+\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

9. Пусть $a > 0$, $+\infty$ — единственная особая точка функций f и g на $[a,+\infty)$. Доказать, что если несобственные интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} g^2(x)\,dx$$

сходятся, то сходятся и несобственные интегралы:

(a) $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)g(x)|\,dx$; (b) $\int\limits_a^{+\infty} (f(x)+g(x))^2\,dx$; (c) $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{|f(x)|}{x}\,dx$.

10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$ и $F(x)$— её первообразная на $[a,+\infty)$; функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,+\infty)$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx$ сходится. Доказать, что для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)g(x) \in \mathbb{R}$.

11. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n $(n > 1)$. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin f(x)\,dx$ сходится.

12. Пусть функция $f(x)$ положительна и не убывает на $[1, +\infty)$, а при $x \to +\infty$ справедливо соотношение $\int\limits_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt \sim x$. Доказать, что тогда $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$.

13. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, +\infty)$, $f'(x)$ возрастает на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Доказать, что несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} \sin f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \cos f(x)\,dx$ сходятся условно.

14. Пусть f — периодическая функция с периодом $T > 0$, локально интегрируемая на $[a, +\infty)$ и $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$. Пусть функция $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Доказать, что несобственный интеграл $J = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится. Если же $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = K \neq 0$, то несобственный интеграл J сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

15. Пусть $f(x) = \frac{x}{n}$, $g(x) = \cos\frac{x}{n}$, $x \in [\pi\, n\,(n-1), \pi\, n\,(n+1)]$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что функция $f(x)$ монотонна на $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, но несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

16. Пусть $f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{\sqrt{x}}$, $x \in [1, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и $\Phi(x) = \int\limits_1^{x} \cos t\,dt$ — ограниченная на $[1, +\infty)$ фун-

кция, но несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

17. Пусть $f(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\dfrac{x}{n}$, $x \in [\pi\, n\,(n-1), \pi\, n\,(n+1)]$. Показать, что несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} f(x)\,dx$ сходится.

18. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция на $[a,b)$ и

(a) $\exists\,\{x_n\} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n \ldots < b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$;

(b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$ сходится.

Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ сходится.

19. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и $+\infty$ — единственная особая точка функции f на $[a,+\infty)$. Доказать, что функция $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ непрерывна на $[a,+\infty)$.

20. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится и $+\infty$ — единственная особая точка функции f на $[a,+\infty)$. Следует ли отсюда, что несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f^2(x)\,dx$ сходится?

21. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, а функция φ ограничена и локально интегрируема на $[a,+\infty)$. Доказать, что то-

гда сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(x) f(x)|\, dx$. Показать, что утверждение перестаёт быть верным, если функция $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на $[a, +\infty)$, но не абсолютно.

Глава 4

Интегралы, зависящие от параметра

4.1 Равномерная сходимость функции к предельной

Будем считать, каждый раз не оговаривая этого, что $X \subset \mathbb{R}^1_x$, $Y \subset \mathbb{R}^1_y$, $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y. Обозначим через X_0 множество тех точек $x \in X$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Множество $X_0 \subset X$ называют множеством сходимости функции $f(x, y)$ при $y \to y_0$, а функцию $\varphi(x)$ — предельной функцией функции $f(x, y)$ при $y \to y_0$. При этом говорят, что функция $f(x, y)$ поточечно на множестве X_0 сходится (или стремится) к предельной функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$ или коротко: функция $f(x, y)$ сходится (или стремится) к $\varphi(x)$ на X_0 при $y \to y_0$ и пишут:

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),\ x \in X_0, \ \text{ или } \ f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x).$$

Приведем формальную запись поточечной сходимости $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ на X_0 при $y \to y_0$ в случае, когда $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x) \iff \forall x \in X_0\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, U_{y_0}(\delta), \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 :$$

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall\, y \in Y \bigcap \overset{\circ}{U}_{y_0} (\delta).$$

Очевидно, что частным случаем поточечной сходимости функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ на X_0 при $y \to y_0$ является поточечная сходимость функциональной последовательности $f_n(x)$ на множестве X_0 при $n \to +\infty$, поскольку $f_n(x) = f(x, n)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 4.1. Найти множество сходимости и предельную функцию при $y \to +\infty$ для функции $f(x, y) = \sin x^y$, $x \geq 0$, $y > 0$.

■ Если $x \in [0, 1)$, то при $y \to +\infty$ имеем: $x^y \to 0$. Поскольку функция $\sin x$ непрерывна в точке $x = 0$, то $f(x, y) = \sin x^y \to \sin 0 = 0$ при $y \to +\infty$. Если $x = 1$, то при любом $y \geq 0$ $f(1, y) = \sin 1$, поэтому $f(1, y) \to \sin 1$ при $y \to +\infty$. Если $x > 1$, то $x^y \to +\infty$ при $y \to +\infty$, а значит функция $f(x, y)$ в этом случае не имеет предела при $y \to +\infty$.

Следовательно, множеством сходимости функции $f(x,y)$ при $y \to +\infty$ является отрезок $[0,1]$, а предельная функция совпадает с функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases} \qquad \square$$

Определение 4.1. *Пусть функция $f(x,y)$ поточечно на множестве X сходится к предельной функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Говорят, что функция $f(x,y)$ равномерно на множестве X сходится к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, если для любого положительного числа ε найдется такая окрестность U_{y_0} точки y_0, что для всех $y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$ и всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.*

Если функция $f(x,y)$ сходится поточечно на X при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, но не удовлетворяет определению 4.1, то говорят, что функция $f(x,y)$ сходится не равномерно на X к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Равномерную сходимость функции $f(x,y)$ на X при $y \to y_0$ к предельной функции $\varphi(x)$ далее обозначается через $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$. Формальная запись равномерной сходимости $f(x,y)$ к $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$ имеет вид:

$$f(x) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall\, y \in Y \bigcap \overset{\circ}{U}_{y_0}(\delta),\ \forall\, x \in X.$$

Непосредственно из определения 4.1 следуют следующие утверждения.

Лемма 4.1. *1) Если функция $f(x,y)$ равномерно сходится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$ и $X_1 \subset X$, то $f(x,y)$ равномерно сходится на множестве X_1 к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$.*

2) Если функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ равномерно сходятся на множестве X к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответственно, при $y \to y_0$, то любая их линейная комбинация $\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)$, где α, $\beta \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$ на множестве X при $y \to y_0$.

3) Если функция $f(x,y)$ равномерно сходится на множествах X_1 и X_2 к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, то $f(x,y)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на множестве $X_1 \cup X_2$ при $y \to y_0$.

Докажем полезную в дальнейшем лемму.

Лемма 4.2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\prod} = [a,b] \times [c,d]$ и $y_0 \in [c,d]$. Тогда $f(x,y)$ равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к функции $\varphi(x) = f(x,y_0)$ при $y \to y_0$.*

■ Так как функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{\Pi}$, то она раздельно непрерывна в каждой его точке. Поэтому при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = f(x,y_0)$. Покажем, что эта сходимость является равномерной относительно x на $[a,b]$. В силу теоремы Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на $\overline{\Pi}$, поэтому для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $(x',y'),(x'',y'')$ из $\overline{\Pi}$, для которых $\rho((x',y'),(x'',y'')) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon.$$

Поэтому для $y \in [c,d]$ таких, что $|y-y_0| < \delta$, и любых $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x,y)-f(x,y_0)| < \varepsilon$. Последнее означает равномерную сходимость $f(x,y)$ к $f(x,y_0)$ на отрезке $[a,b]$ при $y \to y_0$. □

Как и для функциональной последовательности имеет место

Теорема 4.1 (критерий Коши равномерной сходимости функции к предельной)**.** *Для того чтобы функция $f(x,y)$ равномерно сходилась на множестве X при $y \to y_0$ к предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлась такая окрестность U_{y_0} точки y_0, что для любых точек y', $y'' \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$ и всех $x \in X$ было справедливо неравенство $|f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon$.*

■ *Необходимость.* Пусть функция $f(x,y)$ равномерно сходитсяк $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\overset{\circ}{U}_{y_0}$ точки y_0 такая, что для любых $y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$ и любых $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, для любых точек y', $y'' \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$ и $x \in X$, получим, что

$$|f(x,y') - f(x,y'')| = |(f(x,y') - \varphi(x)) - (f(x,y'') - \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши равномерного стремления функции $f(x,y)$ на X при $y \to y_0$ к предельной. Зафиксируем точку $x \in X$. Тогда для функции $h(y) = f(x,y)$ выполняется условие Коши существования конечного предела функции при $y \to y_0$. Следовательно, для каждого $x \in X$ существует конечный предел

$$\varphi(x) = \lim_{y\to y_0} h(y) = \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Покажем, что полученная сходимость является равномерной на X. Действительно, пусть для фиксированного $\varepsilon > 0$ окрестность U_{y_0} точки y_0 найдена по условию Коши равномерного стремления функции $f(x,y)$ к предельной при $y \to y_0$, то есть

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, y',\ y'' \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0},\ \forall\, x \in X.$$

В этом неравенстве при фиксированных $x \in X$ и $y' \in Y$ перейдем к пределу при $y'' \to y_0$, и получим, что $|f(x, y') - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Последнее неравенство выполняется при любом $x \in X$ и любом $y' \in Y \bigcap \overset{\circ}{U}_{y_0}$. Поэтому $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$. $\square$

Следствие (критерий отсутствия равномерной сходимости функции к предельной). *Для того чтобы не имело места равномерное стремление функции $f(x, y)$ на множестве X при $y \to y_0$ к предельной, необходимо и достоточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ для любой окрестности U_{y_0} точки y_0 существовали пара точек y', $y'' \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$ и точка $x \in X$ такие, что $|f(x, y') - f(x, y'')| \geq \varepsilon$.*

Обратите внимание, что говоря «функция $f(x, y)$ сходится неравномерно на множестве X при $y \to y_0$ к предельной», мы утверждаем существование поточечной сходимости функции к предельной на множестве X при $y \to y_0$, но отсутствие равномерного стремления функции $f(x, y)$ к предельной при $y \to y_0$.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(x, y)$ поточечно сходится к функции $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$. Для того, чтобы эта сходимость была равномерной, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\alpha(y) = \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)|$$

была бесконечно малой при $y \to y_0$.

■ *Необходимость.* Если $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists U_{y_0} \, : \, |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}, \forall x \in X.$$

Потому, $\alpha(y) = \sup\limits_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$, то есть $\alpha(y) \to 0$ при $y \to y_0$.

Достаточность. Пусть $\alpha(y) \to 0$ при $y \to y_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U_{y_0} такая, что $|\alpha(y)| = \alpha(y) < \varepsilon$, $\forall y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}$, то есть

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0} .$$

Отсюда следует равномерная сходимость функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$. $\square$

Пример 4.2. Исследовать характер сходимости функции $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$, $x \in [0, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$ к предельной на промежутке $[0, +\infty)$ при $y \to +\infty$.

■ Так как при каждом фиксированном $x \in [0, +\infty)$ $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = 0$, то функция $f(x,y)$ поточечно на множестве $[0,+\infty)$ сходится к функции $\varphi(x) = 0$ при $y \to +\infty$. Поскольку $\alpha(y) = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{y}$, $\forall\, y \in (0,+\infty)$, то $\alpha(y) \to 0$ при $y \to +\infty$ и эта сходимость является равномерной на промежутке $[0,+\infty)$. □

Теорема 4.3 (критерий равномерного стремления функции к предельной в терминах последовательностей)**.** *Для того чтобы функция $f(x,y)$ равномерно сходилась на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества Y, отличных от y_0, стремящейся к y_0, функциональная последовательность $\{f(x,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $\varphi(x)$.*

Замечание. Часто этот критерий называют критерием Гейне равномерной сходимости функции к предельной.

■ *Необходимость.* Пусть $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U_{y_0} точки y_0, что

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in X, \forall y \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}.$$

Зафиксируем числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $y \to y_0$. По окрестности U_{y_0} найдем $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $y_n \in U_{y_0}$, $\forall\, n > N$. Поэтому для всех $n > N$ имеем:

$$|f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in X.$$

Это означает, что функциональная последовательность $\{f(x,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $\varphi(x)$ на множестве X.

Достаточность. Пусть для любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $y_n \to y_0$, последовательность $\{f(x,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве X к функции $\varphi(x)$. Согласно теореме Гейне из теории предела функции, при каждом фиксированном $x \in X$ функция $f(x,y)$ имеет конечный предел при $y \to y_0$, и он равен $\varphi(x)$, то есть функция $f(x,y)$ поточечно сходится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Предположим, что эта сходимость не является равномерной. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любой окрестности $U_{y_0}(\delta)$ найдутся $y_\delta \in Y \cap \overset{\circ}{U}_{y_0}(\delta)$ и $x_\delta \in X$ такие, что $|f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Если считать для определенности $y_0 \in \mathbb{R}$, то для любого $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, найдутся $y_n \in Y$, $0 < |y_n - y_0| < \dfrac{1}{n}$, и $x_n \in X$ такие, что $|f(x_n,y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

С другой стороны, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $y_n \to y_0$, а значит последовательность $\{f(x, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на множестве X. Поэтому по числу ε_0 найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N$ и всех $x \in X$ будет выполняться неравенство $|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon_0$. Получили противоречие, которое доказывает, что наше предположение неверно и $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$. $\square$

4.2 Функциональные свойства предельной функции

Теорема 4.4 (о перестановке 2-х предельных переходов). *Пусть $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка множества X, y_0 — предельная точка Y. Если функция $f(x, y)$ равномерно на X сходится к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, и при каждом $y \in Y$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = g(y)$, то существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ и они равны, то есть*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

■ Зафиксируем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$y_n \in Y,\ y_n \neq y_0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n \to y_0.$$

По теореме 4.3 $\varphi_n(x) = f(x, y_n) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$. По условию теоремы 4.4, при каждом n из $\mathbb{N}$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_n) = g(y_n)$. Поэтому выполняются условия теоремы 2.12 и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(y_n)$, которые равны. По теореме Гейне о пределе функции ([8, теорема 2.31]) заключаем, что существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 4.5 (о непрерывности предельной функции). *Пусть функция $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

1) $f(x, y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$;

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по x в точке $x_0 \in X$.

Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

■ Если x_0 — изолированная точка множества X, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в ней. Если x_0 — предельная точка множества X, то для каждого фиксированного y из Y существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) =$

$f(x_0, y)$. Условия теоремы 4.4 выполнены, поэтому существуют равные между собой конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \text{ и } \lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = \varphi(x_0),$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, что означает непрерывность функции $\varphi(x)$ в точке $x = x_0$. $\square$

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ равномерно сходитсяна множестве X при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, и для любого $y \in Y$ она непрерывна на X, то функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве X.*

Как и в теории функциональных последовательностей, последний факт можно использовать для доказательства неравномерной сходимости функции $f(x, y)$ к предельной на множестве X при $y \to y_0$. Так, например, при решении примера 4.1 было показано, что функция $f(x, y) = \sin(x^y)$, где $x \geq 0$, $y > 0$, поточечно на отрезке $[0, 1]$ сходится к функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} \quad 0 \ \ , \ x \in [0, 1), \\ \sin 1 \ \ , \ x = 1, \end{cases}$$

при $y \to +\infty$. Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна по x на отрезке $[0, 1]$ при каждом фиксированном $y \in (0, +\infty)$, а функция $\varphi(x)$ терпит разрыв в точке $x = 1$, то $f(x, y)$ сходится неравномерно на отрезке $[0, 1]$ к функции $\varphi(x)$ при $y \to +\infty$.

Теорема 4.6 (теорема Дини). *Пусть $f : [a, b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям:*

1) для любого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b]$;

2) для любого $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ монотонна на множестве Y;

3) $f(x, y) \xrightarrow[y\to y_0]{[a,b]} \varphi(x)$;

4) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Тогда $f(x, y) \overset{[a,b]}{\underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, но покажем на примере, как ее применять для доказательства равномерного стремления функции $f(x, y)$ к предельной.

Пример 4.3. Пусть $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x + y}$, $x \in [0, 1]$, $y > 0$. Доказать, что $f(x, y)$ равномерно сходится к предельной на $[0, 1]$ при $y \to +0$.

$\blacksquare$ Для любого $y_0 > 0$ функция $f(x, y_0) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x + y_0}$ непрерывна на $[0, 1]$. Для любого $x_0 \in [0, 1]$ функция $f(x_0, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x_0 + y}$ монотонна на луче $(0,+\infty)$. Функция $f(x,y)$ имеет на $[0,1]$ при $y \to +0$ предельную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} &, \ x \in (0,1], \\ \dfrac{\pi}{2} &, \ x = 0, \end{cases}$$

которая непрерывна на отрезке $[0,1]$. Все условия теоремы 4.6 выполнены и потому $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to +0$ на отрезке $[0,1]$. $\square$

Теорема 4.7 (об интегрируемости предельной функции). *Если функция $f : [a,b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ такова, что:*

1) $f(x,y) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ при каждом фиксированном $y \in Y$,

2) $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$,

то $\varphi(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, то есть

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

■ Зафиксируем последовательность $\{y_n\}$ такую, что

$$y_n \in Y, \ y_n \neq y_0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \text{и} \ y_n \to y_0.$$

Тогда $f(x,y_n) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ (по теореме 4.3), и $f(x,y_n) \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Поэтому, в силу теоремы 2.18 об интегрировании функциональной последовательности, $\varphi(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и по теореме Гейне о пределе функции

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x,y_n)dx = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx. \ \square$$

Теорема 4.8 (о дифференцируемости предельной функции). *Если функция $f : [a,b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ такова, что*

1) $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$,

2) при любом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x на $[a,b]$, то есть имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, которая является непрерывной функцией по x на $[a,b]$,

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} g(x)$, *то*

1) $f(x,y) \xrightrightarrows[y\to y_0]{[a,b]} \varphi(x)$,

2) *функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема на отрезке* $[a,b]$,

3) $\varphi'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, *то есть* $(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))'_x = \lim\limits_{y\to y_0} f'_x(x,y)$.

Доказательство теоремы 4.8 аналогично доказательству теорем 4.4 и 4.7.

4.3 Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть $f : [a,b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ и для любого $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ является функцией параметра y, определенной на множестве Y. Функция

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx,\ \ y \in Y, \tag{4.1}$$

называется собственным интегралом, зависящим от параметра (СИЗП). Изучим свойства функции $I(y)$.

Теорема 4.9 (о предельном переходе)**.** *Если* y_0 *– предельная точка множества* Y, *функция* $f : [a,b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$ *и выполняются следующие условия:*

1) $f(x,y) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $\forall\, y \in Y$,

2) $f(x,y) \xrightrightarrows[y\to y_0]{[a,b]} \varphi(x)$,

то $\varphi(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *и* $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

Эта теорема представляет собой переформулировку теоремы 4.7.

Теорема 4.10 (о непрерывности)**.** *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна на прямоугольнике* $\overline{\Pi} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, *то интеграл* $I(y)$ *является непрерывной функцией на* $[c,d]$.

■ Зафиксируем $y_0 \in [c,d]$. Так как $f \in C(\overline{\Pi})$, то условие 1) теоремы 4.9 выполнено, а в силу леммы 4.2, $f(x,y) \xrightrightarrows[y\to y_0]{[a,b]} f(x,y_0)$. Таким образом, выполнено и второе условие теоремы 4.9, применяя которую получим, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0, а, значит, и на $[c,d]$. □

Теорема 4.11 (о непрерывной дифференцируемости). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi} = [a,b] \times [c,d]$ и имеет на нем непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, и имеет место формула Лейбница*

$$I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx,\ y \in [c,d]. \tag{4.2}$$

■ При наложенных ограничениях функция $I(y)$ определена на $[c,d]$ и является СИЗП. Зафиксируем $y_0 \in [c,d]$ и такое Δy, что $y_0 + \Delta y \in [c,d]$. Для определенности будем считать, что $\Delta y > 0$. Тогда

$$\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int\limits_a^b (f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0))\,dx.$$

При любом $x \in [a,b]$ функция $f(x,y)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, поэтому по теореме Лагранжа о конечных приращениях для любой точки $x \in [a,b]$ найдется такая точка $\theta_x \in (y_0, y_0+\Delta y)$, что

$$f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0) = f'_y(x,\theta_x)\Delta y.$$

Поэтому

$$\alpha(\Delta y) = \left|\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x,y_0)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f'_y(x,\theta_x) - f'_y(x,y_0))\,dx\right|.$$

Поскольку функция $f'_y(x,y)$ равномерно непрерывна на $\overline{\Pi}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для произвольных точек (x',y'), (x'',y'') из $\overline{\Pi}$ таких, что $|x'-x''| < \delta$ и $|y'-y''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Отсюда, если $|\Delta y| < \delta$, следует, что $\alpha(\Delta y) \le \displaystyle\int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Последнее означает существование конечного предела

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x,y_0)\,dx.$$

Поскольку y_0 — произвольная точка отрезка $[c,d]$, то функция $I(y)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, и ее производная вычисляется по формуле

4.2. Наконец, применяя к интегралу (4.2) теорему 4.10 (все ее условия выполнены), получим, что функция $I'(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$. $\square$

Замечание. Фактически теорема доказана при более слабом предположении: функция $f(x, y)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом фиксированном $y \in [c, d]$, а функция $f'_y(x, y)$ непрерывна на $\overline{\Pi}$. Это замечание мы используем при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.12 (об интегрировании). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi} = [a, b] \times [c, d]$, то функция $I(y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[c, d]$ и справедлива формула*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

■ По теореме 4.10 функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$, а значит, интегрируема на нем. Покажем, что для каждого $t \in [c, d]$

$$\int_c^t \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Сначала изучим свойства функции $\Phi(t) = \displaystyle\int_c^t \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$ на отрезке $[c, d]$. Функция $\Phi(t)$, являясь интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции, непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$, и

$$\Phi'(t) = I(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx, \ \forall\, t \in [c, d].$$

Теперь рассмотрим функцию $\Psi(t) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^t f(x, y)\, dy \right) dx$. Заметим, что функция $\psi(x, t) = \displaystyle\int_c^t f(x, y)\, dy$ непрервыно дифференцируема по t на отрезке $[c, d]$ при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ (по свойству интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции), причем $\psi'_t(x, t) = f(x, t)$, $\forall\, t \in [c, d]$, $\forall\, x \in [a, b]$. Следовательно, функция $\psi'_t(x, t)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi}$. Но по теореме 4.10 функция $\psi(x, t)$ непрерывна по переменной x на $[a, b]$, потому, в силу замечания к теореме 4.11, функция $\Psi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$, при этом

$$\Psi'(t) = \int_a^b \psi'_t(x,t)\,dx = \int_a^b f(x,t)\,dx,\ \forall\, t \in [c,d].$$

Итак, функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ дифференцируемы на $[c,d]$ и $\Phi'(t) = \Psi'(t)$ для всех $t \in [c,d]$. Поэтому $\Phi(t) = \Psi(t) + c_0$, $\forall\, t \in [c,d]$. Поскольку $\Phi(c) = 0 = \Psi(c)$, то $c_0 = 0$, и потому $\Phi(t) = \Psi(t)$, $\forall\, t \in [c,d]$. В частности, $\Phi(d) = \Psi(d)$, то есть

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx. \ \square$$

Теоремы 4.10 и 4.11 допускают обобщения. Пусть функция $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $\overline{\Pi} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ отображают отрезок $[c,d]$ в отрезок $[a,b]$. Если при любом фиксированном $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на отрезке с концами в точках $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ (по переменной x), то на $[c,d]$ определена функция

$$\widetilde{I}\,(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx,\ y \in [c,d], \tag{4.3}$$

которую называют собственным интегралом, зависящим от параметра, пределы интегрирования которого зависят от того же параметра.

Не нарушая общности, будем считать, что $\alpha(y) < \beta(y)$, $\forall\, y \in [c,d]$.

Теорема 4.13 (о непрерывности интеграла (4.3))**.** *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi}$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$, то функция $\widetilde{I}\,(y)$, определяемая формулой (4.3), непрерывна на $[c,d]$.*

■ Зафиксируем точку $y_0 \in [c,d]$ и докажем непрерывность функции $\widetilde{I}$ в точке y_0. В силу свойства аддитивности определенного интеграла для любого $y \in [c,d]$

$$\widetilde{I}\,(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx =$$
$$= I_1(y) + I_2(y) + I_3(y).$$

Интеграл

$$I_2(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx$$

является СИЗП и, при наложенных ограничениях на функцию f, является непрерывной в точке y_0 функцией, поэтому

$$\lim_{y\to y_0} I_2(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx = \widetilde{I}\,(y_0).$$

Функция $f(x,y)$ ограничена на $\overline{\Pi}$, поэтому существует $M>0$ такое, что $|f(x,y)| \le M$, $\forall\,(x,y)\in\overline{\Pi}$, и

$$|I_1(y)| = \left|\int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx\right| \le M|\alpha(y_0)-\alpha(y)|.$$

Отсюда, учитывая непрерывность функции $\alpha(y)$ в точке y_0, получаем, что $I_1(y)\to 0$ при $y\to y_0$. Аналогично доказывается, что $I_3(y)\to 0$ при $y\to y_0$. Таким образом, $\widetilde{I}\,(y) \longrightarrow \widetilde{I}\,(y_0)$ при $y\to y_0$, что означает непрерывность функции $\widetilde{I}\,(y)$ в точке y_0. $\square$

Теорема 4.14 (правило Лейбница для интеграла (4.3))**.** *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi}=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$ и имеет на нем непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$. Если функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на отрезке $[c,d]$, то функция $\widetilde{I}\,(y)$, определяемая формулой* (4.3)*, дифференцируема на $[c,d]$ и*

$$\widetilde{I}'\,(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y),\ \ \forall\,y\in[c,d].$$

■ Зафиксируем точку $y_0\in[c,d]$. Функцию $\widetilde{I}$ можно представить в виде:

$$\widetilde{I}\,(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= I_1(y)+I_2(y)+I_3(y),\ \ y\in[c,d].$$

Докажем, что функции $I_j(y)$, $j=1,2,3$, дифференцируемы в точке y_0. Прежде всего заметим, что функция

$$I_2(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx$$

является СИЗП, и подынтегральная функция удовлетворяет требованиям теоремы 4.11 на прямоугольнике $[\alpha(y_0), \beta(y_0)] \times [c, d] \subset \overline{\Pi}$. Поэтому функция $I_2(y)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I_2'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y'(x, y_0)\, dx.$$

Теперь зафиксируем Δy такое, что $y_0 + \Delta y \in [c, d]$. Так как $I_1(y_0) = 0$, то

$$\tau(\Delta y) = \frac{I_1(y_0 + \Delta y) - I_1(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx.$$

Функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ непрерывна по x на отрезке $[a, b]$. Поэтому, согласно первой теореме о среднем значении для определенного интеграла, найдется точка η, лежащая между $\alpha(y_0 + \Delta y)$ и $\alpha(y_0)$, такая, что

$$\tau(\Delta y) = \frac{1}{\Delta y} f(\eta, y_0 + \Delta y)(\alpha(y_0) - \alpha(y_0 + \Delta y)) =$$

$$= -f(\eta, y_0 + \Delta y)\, \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Так как $f \in C(\overline{\Pi})$, а $\alpha(y)$ дифференцируема в точке y_0, то $\lim\limits_{\Delta y \to 0} f(\eta, y_0 + \Delta y) = f(\alpha(y_0), y_0)$ и

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} = \alpha'(y_0).$$

Поэтому существует предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \tau(\Delta y) = -f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0)$. Последнее означает, что функция $I_1(y)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I_1'(y_0) = -f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Аналогично доказывается, что функция $I_3(y)$ дифференцируема в y_0 и

$$I_3'(y_0) = f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0).$$

Следовательно, функция $\widetilde{I}\,(y)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$\widetilde{I}'\,(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y'(x, y_0)\, dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad \square$$

Замечание. Теорема 4.11 и теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним (нижним) пределом являются частными случаями теоремы 4.14.

4.4 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b)\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$, при каждом фиксированном $y\in Y$ функция $f(x,y)$ локально интегрируема на $[a,b)$ и интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле. Тогда на множестве Y определена функция

$$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx,\ \ y\in Y, \tag{4.4}$$

которая называется несобственным интегралом, зависящим от параметра (НИЗП).

Определение 4.2. *Несобственный интеграл* (4.4)*, зависящий от параметра, называется равномерно сходящимся на множестве Y, если функция*

$$\varphi(y,t)=\int\limits_a^t f(x,y)\,dx$$

равномерно сходится к функции $I(y)$ на множестве Y при $t\to b$ (в этом случае предполагается, что $t\in(a,b)$).

Ясно, что определение 4.2 равносильно следующему определению.

Определение 4.3. *Несобственный интеграл* (4.4) *называется равномерно сходящимся на множестве Y, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $b'=b'(\varepsilon)\in(a,b)$ такое, что для всех $t\in(b',b)$ и при любом $y\in Y$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_t^b f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 4.15 (критерий Коши равномерной сходимости НИЗП)**.** *Для того чтобы несобственный интеграл* (4.4) *равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $b'=b'(\varepsilon)\in(a,b)$ такое, что при всех t', t'' из (b',b) и при всех $y\in Y$ было справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Справедливость критерия Коши равномерной сходимости НИЗП вытекает из определения 4.2 и критерия 4.1.

Теорема 4.16 (критерий Гейне равномерной сходимости НИЗП). *Для того чтобы несобственный интеграл* (4.4) *равномерно сходился на множестве* Y, *необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что* $t_n \in (a, b)$, $t_n \to b$, *функциональная последовательность*

$$\varphi(y, t_n) = \int\limits_a^{t_n} f(x, y)\, dx, \;\; n \in \mathbb{N},$$

равномерно сходилась к $I(y)$ *на множестве* Y *или, что одно и то же, функциональная последовательность* $\psi(y, t_n) = \int\limits_{t_n}^{b} f(x, y)\, dx$ *равномерно сходилась к* 0 *на множестве* Y.

Этот критерий следует из определения 4.2 и теоремы 4.3.

4.5 Признаки равномерной сходимости НИЗП

Теорема 4.17 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗП). *Пусть функция* $f : [a, b) \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \longrightarrow \mathbb{R}$ *локально интегрируема на* $[a, b)$ *при каждом* $y \in Y$, *и* $\sup\limits_{y \in Y} |f(x, y)| = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b)$. *Если функция* $g(x)$ *локально интегрируема на* $[a, b)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_{a_0}^{b} g(x)\, dx$ *сходится, то несобственный интеграл* (4.4) *равномерно сходится по* y *на множестве* Y.

■ По условию интеграл $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ сходится. Значит, в силу критерия Коши сходимости несобственного интеграла (теоремы 3.1), для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $b' = b'(\varepsilon) \in (a_0, b)$ такое, что для любых t', $t'' \in (b', b)$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\, dx \right| \le \left| \int\limits_{t'}^{t''} |f(x, y)|\, dx \right| \le \left| \int\limits_{t'}^{t''} g(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

что, в силу критерия Коши 4.15, доказывает теорему. $\square$

Следствие. *Пусть функция* $f : [a,b) \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \longrightarrow \mathbb{R}$ *локально интегрируема на* $[a,b)$ *при каждом* $y \in Y$, *и существуют функция* $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ *и число* $a_0 \in [a,b)$ *такие, что*

$$|f(x,y)| \le g(x),\ \forall\, y \in Y,\ \forall\, x \in [a_0,b).$$

Если функция $g(x)$ *локально интегрируема на* $[a_0,b)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* (4.4) *равномерно сходится на множестве* Y.

Пример 4.4. Доказать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \tag{4.5}$$

сходится равномерно на любом отрезке $[0,\beta] \subset [0,2)$ и не сходится равномерно на промежутке $[0,2)$.

■ Несобственный интеграл (4.5) имеет единственную особую точку $x = 0$, сходится при $\alpha \in [0,2)$ и расходится при $\alpha \ge 2$, поскольку подынтегральная функция положительна на промежутке $(0,1]$ и $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x \to 0$ (см. пример 3.1). Так как на отрезке $[0,\beta] \subset [0,2)$

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| = \frac{\sin x}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^{\beta-1}},\ \forall\, x \in (0,1],$$

и интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{\beta-1}}$ сходится, то в силу следствия теоремы 4.17 интеграл (4.5) равномерно сходится на $[0,\beta] \subset [0,2)$.

Пусть теперь $\alpha \in [0,2)$. Докажем, что существует последовательность $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $t_n \in (0,1]$, $t_n \to 0$ и функциональная последовательность

$$\psi(t_n,\alpha) = \int\limits_0^{t_n} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \overset{[0,2)}{\not\rightrightarrows} 0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,, то $\exists\, x_0 \in (0,1) : \dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{1}{2}, \forall\, x \in (0,x_0)$, а поэтому

$$\int\limits_0^t \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx > \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{dx}{x^{\alpha-1}},\ \forall\, t \in (0,x_0).$$

Пусть $t_n = \dfrac{1}{n}$, $\alpha_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, когда $n > N_0$, где $N_0 = \left[\dfrac{1}{x_0}\right]$. Тогда $\forall n > N_0$

$$\int\limits_0^{1/n} \frac{\sin x}{x^{\alpha_n}}\,dx > \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/n} \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\,n\,x^{1/n}\,\Big|_0^{1/n} = \frac{n}{2\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2}.$$

Итак, $\exists\,\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, $\exists\,\alpha_n = 2 - \dfrac{1}{n}$,: $\displaystyle\int\limits_0^{1/n} \frac{\sin x}{x^{\alpha_n}}\,dx > \varepsilon_0$, $\forall\,n > N_0$. Это означает, что функциональная последовательность $\psi\left(\dfrac{1}{n}, \alpha\right)$ не сходится равномерно к 0 на $[0, 2)$. Поэтому, в силу теоремы 4.16, интеграл (4.5) не сходится равномерно на $[0, 2)$. $\square$

Теорема 4.18 (признак Абеля). *Пусть функции $\varphi(x, y)$ и $g(x, y)$ определены на $[a, b) \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, при любом $y \in Y$ имеют на $[a, b)$ единственную особую точку $x = b$ и удовлетворяют следующим условиям:*

1) *интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b \varphi(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y;*

2) *функция $g(x, y)$ ограничена на $[a, b) \times Y$;*

3) *функция $g(x, y)$ монотонна по x на $[a, b)$ при любом фиксированном $y \in Y$.*

Тогда интеграл $J(y) = \displaystyle\int\limits_a^b \varphi(x, y)g(x, y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

■ По условию 2) функция $g(x, y)$ ограничена на множестве $[a, b) \times Y$, поэтому $\exists\,M > 0 : |g(x, y)| \le M$, $\forall\,(x, y) \in [a, b) \times Y$. По условию 1) интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b \varphi(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y, и по критерию Коши 4.15

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,b' = b'(\varepsilon) \in (a, b) : \left|\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M},\ \forall\,t', t'' \in (b', b),\ \forall\,y \in Y.$$

Рассмотрим при любых $t', t'' \in (b', b)$ и $y \in Y$ интеграл

$$\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x, y)g(x, y)\,dx.$$

Применяя к нему при фиксированном $y \in Y$ вторую теорему о среднем, условия которой выполнены, найдем такую точку c между t' и t'', что

$$\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x,y)g(x,y)\,dx = g(t',y)\int\limits_{t'}^{c} \varphi(x,y)\,dx + g(t'',y)\int\limits_{c}^{t''} \varphi(x,y)\,dx. \qquad (4.6)$$

В силу выбора b' и c, получим, что

$$\left|\int\limits_{t'}^{c} \varphi(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left|\int\limits_{c}^{t''} \varphi(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Поэтому для любых $t', t'' \in (b', b)$ и $y \in Y$

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x,y)g(x,y)\,dx\right| \le |g(t',y)|\left|\int\limits_{t'}^{c} \varphi(x,y)\,dx\right| + |g(t'',y)|\left|\int\limits_{c}^{t''} \varphi(x,y)\,dx\right| <$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

В силу критерия Коши 4.15 последнее означает равномерную сходимость несобственного интеграла $J(y)$ на множестве Y. $\square$

Теорема 4.19 (признак Дирихле). *Пусть функции $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$ определены на множестве $[a,b)\times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, при любом y из множества Y имеют на $[a,b)$ единственную особую точку $x = b$ и удовлетворяют условиям:*

1) $\exists M > 0 : \left|\int\limits_{a}^{t} \varphi(x,y)\,dx\right| \le M,\ \forall\, y \in Y,\ \forall\, t \in [a,b);$

2) $g(x,y) \underset{x\to b}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$ *($x \in (a,b)$);*

3) *при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на $[a,b)$.*

Тогда интеграл $J(y) = \int\limits_{a}^{b} \varphi(x,y)g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.

■ Так как $g(x,y) \underset{x\to b}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$, $(x < b)$, то по определению 3.1 равномерного стремления функции к предельной,

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, b' \in (a,b) : |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{4M},\ \forall\, x \in (b',b),\ \forall y \in Y. \qquad (4.7)$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим интеграл
$$\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x,y)g(x,y)\,dx$$
при любых $t', t'' \in (b', b)$ и $y \in Y$. Применяя к нему вторую теорему о среднем, получим равенство (4.6). Затем, учитывая (4.7) и тот факт, что
$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x,y)\,dx\right| \le 2M, \forall\, y \in Y, \forall\, t', t'' \in [a,b),$$
получим неравенство
$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x,y)g(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\,2M + \frac{\varepsilon}{4M}\,2M = \varepsilon.$$
В силу критерия Коши 4.15 несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно на множестве Y. □

Пример 4.5. Доказать равномерную сходимость на отрезке $[0,1]$ интеграла
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$
■ Положим $\varphi(x,y) = y\sin xy$, $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in [0,+\infty)$, $y \in [0,1]$. При любом $y \in [0,1]$ функции $\varphi(x,y)$, $g(x,y)$ имеют единственную особую точку $x = +\infty$. Так как
$$\left|\int\limits_0^{t} y \sin xy\,dx\right| = \left|-\cos xy\,\big|_0^t\right| \le 2,\ \forall\, t \in [0,+\infty),\ \forall\, y \in [0,1],$$
функция $g(x,y)$ не зависит от y, монотонна на промежутке $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,y) = 0$, то по признаку Дирихле интеграл сходится равномерно на $[0,1]$. □

4.6 Функциональные свойства НИЗП

Теорема 4.20 (о предельном переходе)**.** *Пусть b — единственная особая точка функции $f(x,y)$ на $[a,b)$ при любом $y \in Y$. Пусть определен несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in Y$, y_0 — предельная точка множества Y и выполняются следующие условия:*

1) несобственный интеграл $I(y)$ равномерно сходится на Y;

2) $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,t]}{\rightrightarrows}} g(x)$, $\forall\, t \in (a,b)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится и существует конечный предел

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int\limits_a^b g(x)\,dx, \text{ то есть } \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

■ Для доказательства теоремы положим

$$\varphi(y,t) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx,\ t \in [a,b).$$

В силу определения 4.2 равномерной сходимости несобственного интеграла,

$$\varphi(y,t) \underset{t\to b}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx,\ \ (t<b).$$

Далее, согдасно теореме 4.9 о предельном переходе в СИЗП, существует конечный предел

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y,t) = \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^t f(x,y)\,dx = \int\limits_a^t g(x)\,dx,\ \ \forall\, t\in[a,b).$$

Поэтому для функции $\varphi(y,t)$ выполнены условия теоремы 4.4 о перестановке предельных переходов, а значит,

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{t\to b}\varphi(y,t) = \lim_{t\to b}\lim_{y\to y_0}\varphi(y,t),$$

то есть

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{t\to b}\int\limits_a^t g(x)\,dx,$$

откуда следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}}\int\limits_a^t g(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$, то $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$. □

Теорема 4.21 (о непрерывности)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a,b)\times[c,d]$ и несобственный интеграл*

$$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y)\in C([c,d])$.

■ Пусть y_0 — точка отрезка $[c,d]$. Докажем непрерывность функции $I(y)$ в этой точке. По условию теоремы для каждого $t\in(a,b)$ $f\in C(\overline{\Pi}_t)$, где $\overline{\Pi}_t=[a,t]\times[c,d]$, а потому $f(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{[a,t]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$, $\forall\, t\in(a,b)$. Согласно теореме 4.20,

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx=I(y_0),$$

что означает непрерывность функции $I(y)$ в точке y_0. Поскольку y_0 — произвольная точка отрезка $[c,d]$, то $f\in C([c,d])$. □

Теорема 4.22 (об интегрируемости по Риману)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a,b)\times[c,d]$, и несобственный интеграл $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$, тогда $I(y)\in\mathcal{R}_{[c,d]}$ и*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

■ По условию теоремы $f\in C(\overline{\Pi}_t)$, где $\overline{\Pi}_t=[a,t]\times[c,d]$, $t\in(a,b)$. Поэтому, согласно теореме 4.12 об интегрировании СИЗП,

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^t f(x,y)\,dx\right)\,dy=\int\limits_a^t\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx,\ \forall\, t\in(a,b).\qquad(4.8)$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Из условия теоремы, определения 4.2 и теоремы 4.10, если $\varphi(y,t)=\int\limits_a^t f(x,y)\,dx,$, следует, что

$$\varphi(y,t)\in C([c,d]),\ \forall\, t\in[a,b],\ \ \varphi(y,t)\underset{t\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\ (t<b).$$

Поэтому, в силу теоремы 4.9 о пределе СИЗП, существует предел левой части равенства (4.8) при $t \to b$ $(t \in (a, b))$ и

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int\limits_c^d \varphi(y,t)\,dy = \int\limits_c^d \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \varphi(y,t)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Правая часть равенства (4.8) представляет собой интеграл $\int\limits_a^t \psi(x)\,dx$, где $\psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. По теореме 4.10 о непрерывности СИЗП, $\psi(x) \in C([a,t])$, $\forall\, t \in (a,b)$, поэтому функция $\psi(x)$ локально интегрируема на $[a,b)$, а, поскольку существует конечный предел левой части равенства (4.8), то несобственный интеграл $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx$ сходится, и

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \quad \square$$

Теорема 4.23 (о несобственном интегрировании)**.** *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна и неотрицательна на* $[a,b) \times [c,d)$, *функция* $I_1(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *непрерывна на множестве* $[c,d)$, *а функция* $I_2(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ *непрерывна на множестве* $[a,b)$. *Если один из несобственных интегралов* $\int\limits_c^d I_1(y)\,dy$, $\int\limits_a^b I_2(x)\,dx$ *сходится, то сходится другой, и они равны, то есть*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Эту теорему мы оставим без доказательства, отсылая за ним к учебникам по математическому анализу (см., например, [7, т.2, с.264–266]).

Теорема 4.24 (о дифференцируемости)**.** *Пусть* $f(x,y)$ *— непрерывная на* $\Pi = [a,b) \times [c,d]$ *функция, которая имеет частную производную* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, *непрерывную на* Π. *Пусть несобственный интеграл*

$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ поточечно сходится на отрезке $[c,d]$, а несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ равномерно сходится на $[c,d]$. Тогда несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$, и функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, причем

$$I'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,\ \forall\, y \in [c,d]. \tag{4.9}$$

■ Рассмотрим функцию $\varphi(y,t) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$, которая поточечно сходится при $t \to b$ $(t \in (a,b))$ на $[c,d]$ к функции $I(y)$. Так как $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$, то $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\overline{\Pi}_t)$, где $\overline{\Pi}_t = [a,t] \times [c,d]$, $\forall\, t \in [a,b)$. Следовательно, из теоремы 4.11 о непрерывной дифференцируемости СИЗП, получим, что функция $\varphi(y,t)$ имеет частную производную по переменной y на $\overline{\Pi}_t$ и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t) = \int\limits_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,\ \forall\, t \in [a,b).$$

По условию теоремы несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, поэтому $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t) \underset{t\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, $(t < b)$. Из теоремы 4.8 о дифференцируемости предельной функции следует, что $\varphi(y,t) \underset{t\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то есть несобственный интеграл $I(y)$ равномерно сходится на $[c,d]$, функция $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и имеет место формула (4.9). Из теоремы 4.21 следует, что $I'(y) \in C([c,d])$. □

Следствие. *Пусть Y — некоторый промежуток числовой прямой, функция $f(x,y)$ непрерывная на $\Pi = [a,b) \times Y$ и имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, непрерывную на Π. Пусть несобственный ин-*

теграл $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *поточечно сходится на промежутке* Y*, а несобственный интеграл* $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[c,d] \subset Y$*. Тогда несобственный интеграл* $I(y)$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[c,d] \subset Y$ *(сходится равномерно внутри промежутка* Y*), а функция* $I(y)$ *непрерывно дифференцируема на промежутке* Y*, причем*

$$I'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,\ \forall\, y \in Y. \tag{4.10}$$

Замечание. Теорема остается справедливой, если вместо условия поточечной сходимости на промежутке Y несобственного интеграла $I(y)$, потребовать его сходимости только в некоторой точке $y_0 \in Y$. Предлагаем студентам доказать это обобщение самостоятельно.

4.7 Примеры вычисления несобственных интегралов

4.7.1 Интеграл Дирихле

Интегралом Дирихле называют интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Сходимость этого интеграла доказана ранее (см. пример 3.14). Для его вычисления введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\,e^{-xy}, & x \in (0,+\infty),\ y \in [0,+\infty), \\ 1, & x = 0, y \in [0,+\infty), \end{cases}$$

Отметим , что

$$f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим НИЗП $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,e^{-xy}\,dx,\ y \in [0,+\infty)$.

Сначала докажем, что функция $I(y)$ непрерывна на луче $y \geq 0$. Заметим, что $f(x,y) \in C(\Pi)$, $\Pi = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Как отмечалось выше, несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, а значит, он равномерно сходится на луче $y \geq 0$, поскольку подынтегральная функция от y не зависит. Функция e^{-xy} ограничена на П, так как $0 < e^{-xy} \leq 1$, $\forall\, x \geq 0$, $\forall\, y \geq 0$, и при каждом $y \in [0, +\infty)$ монотонна на $[0, +\infty)$. Выполнены требования признака Абеля равномерной сходимости НИЗП, и интеграл $I(y)$ равномерно сходится на луче $y \geq 0$, а значит, на любом отрезке $[0, y_0]$, $y_0 > 0$. Из равномерной сходимости несобственного интеграла на отрезке $[0, y_0]$ и непрерывности подынтегральной функции $f(x, y)$ на П из теоремы 4.21 вытекает непрерывность функции $I(y)$ на любом отрезке $[0, y_0]$, $y_0 > 0$, а, значит, ее непрерывность на луче $[0, +\infty)$.

Докажем теперь, что функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на множестве $(0, +\infty)$. Как уже отмечалось, несобственный интеграл $I(y)$ сходится на $[0, +\infty)$, функция $f(x, y) \in C(\Pi)$. Наконец, функция $f(x, y)$ имеет на П частную производную $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-xy} \sin x$, которая, очевидно, непрерывна на П.

Докажем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$ равномерно сходится на любом отрезке $[y_0, y_1] \subset (0, +\infty)$. Сначала заметим, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \left|-e^{-xy} \sin x\right| \leq e^{-xy_0},\ \forall\, x \in [0, +\infty) \times [y_0, +\infty).$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx$ сходится, то в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗП (теорема 4.17) несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$ равномерно сходится на луче $y \geq y_0$, а потому и на любом отрезке $[y_0, y_1] \subset (0, +\infty)$. Следовательно, по следствию теоремы 4.24, все требования которого выполнены, функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на луче $(0, +\infty)$, и

$$I'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\ dx,\ \forall\, y \in (0, +\infty).$$

Интегрируя два раза по частям, находим, что для $y \in (0, +\infty)$

$$I'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx = -1 + y^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx = -1 - y^2 I'(y).$$

Значит, $I'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall\, y \in (0, +\infty)$, и

$$I(y) = -\operatorname{arctg} y + c,\ \forall\, y \in (0, +\infty). \tag{4.11}$$

Отметим, что существует предел $\lim\limits_{y\to+\infty} I(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} (-\operatorname{arctg} y + c) = -\dfrac{\pi}{2} + c$. С другой стороны, так как

$$0 \le |I(y)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx\right| \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx = -\frac{1}{y} e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y},\ \forall\, y > 0,$$

то $\lim\limits_{y\to+\infty} I(y) = 0$. Из равенства (4.11) следует, что

$$c = \frac{\pi}{2}, \quad I(y) = -\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2},\ \forall\, y > 0.$$

Учитывая непрерывность функции $I(y)$ в точке $y = 0$, получаем:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = I(0) = \lim_{y\to+0} I(y) = \lim_{y\to+0}\left(-\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим, как обобщение интеграла Дирихле, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx,\ \ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Если $y > 0$, то, делая замену $yx = t$ $(y\, dx = dt)$, находим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если $y < 0$,, то, делая замену $-yx = t$ $(-y\, dx = dt)$, находим, что

$$-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx = \left\{\begin{array}{rl} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y < 0 \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y.$$

Этот интеграл иногда называют разрывным множителем Дирихле. Учитывая, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = 0$ при $y = 0$, через разрывный множитель Дирихле можно записать интегральное представление функции $\operatorname{sgn} y$:

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx.$$

Интеграл Дирихле можно использовать и для вычисления других несобственных интегралов.

Пример 4.6. Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$, если $a > 0$, $b > 0$.

■ Заметим, что $f(x) = \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ непрерывна на луче $(0, +\infty)$ при любых a, $b \in \mathbb{R}$, поэтому функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$. А так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

то $x = +\infty$ — единственная особая точка функции f на $(0, +\infty)$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x} = 0$, проинтегрируем заданный интеграл по частям:

$$I = \left\| \begin{array}{c} u = \cos ax - \cos bx \implies du = -(a \sin ax - b \sin bx)\,dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \implies v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right\| =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{a \sin ax - b \sin bx}{x}\,dx.$$

Поскольку $a > 0$, $b > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{a \sin ax}{x}\,dx = \frac{a\,\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{b \sin bx}{x}\,dx = \frac{b\,\pi}{2}.$$

Окончательно, получаем, что $I = \dfrac{(b-a)\pi}{2}$. □

4.7.2 Интеграл Фруллани

Интегралом Фруллани называют несобственный интеграл вида

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,\ a>0,\ b>0. \tag{4.12}$$

Чтобы его вычислить, докажем две следующие теоремы Фруллани.

Теорема 4.25. *Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$. Тогда интеграл 4.12 сходится, и*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a},\ (a>0,\, b>0). \tag{4.13}$$

■ Так как $f \in C([0,+\infty))$, то $x=+\infty$ и, возможно, $x=0$ — особые точки подынтегральной функции. Для исследования и вычисления интеграла воспользуемся определениями 3.8, 3.2 и при $0<\delta<\Delta<+\infty$ рассмотрим интеграл

$$I(\delta,\Delta) = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{ax}\,d(ax) - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{bx}\,d(bx) =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Функция $f(t)$ непрерывна на отрезках $[a\delta, b\delta]$ и $[a\Delta, b\Delta]$, а функция $\dfrac{1}{t}$ монотонна на них, поэтому, в силу первой теоремы о среднем,

$$\exists\,\eta' \in [a\delta, b\delta]: \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\eta')\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = f(\eta')\,\ln\frac{b}{a},$$

$$\exists\,\eta'' \in [a\Delta, b\Delta]: \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\eta'')\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{dt}{t} = f(\eta'')\,\ln\frac{b}{a}.$$

Устремим теперь $\delta\to+0$, $\Delta\to+\infty$, и получим, что существует предел

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} I(\delta,\Delta) = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(f(\eta')\,\ln\frac{b}{a} - f(\eta'')\,\ln\frac{b}{a}\right) = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a},$$

то есть несобственный интеграл (4.12) сходится и имеет место равенство (4.13). □

Теорема 4.26. *Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и несобственный интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, $A > 0$, сходится. Тогда интеграл 4.12 сходится и*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\ \ (a>0,\, b>0).$$

■ При $\delta > 0$ рассмотрим интеграл $I(\delta) = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 4.25, и применяя первую теорему о среднем, получим, что

$$\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{b\delta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\eta)\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = f(\eta)\ln\frac{b}{a},$$

где $\eta \in [a\,\delta,\, b\,\delta]$. Так как $\eta \to 0$ при $\delta \to +0$, то $\lim\limits_{\delta\to 0} f(\eta) = f(0)$. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a},$$

то есть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$ сходится к числу $f(0)\ln\frac{b}{a}$. □

Пример 4.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$, где $a>0$, $b>0$.

■ В данном случае $f(x) = e^{-x}$, поэтому $f \in C([0,+\infty))$, $f(0) = 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. По теореме 4.25 заданный несобственный интеграл сходится и

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Заметим, что к этому интегралу можно применить и теорему 4.26, так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,dx$ сходится и потому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}\,. \ \square$$

Пример 4.8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx$, предполагая, что $a > 0$, $b > 0$.

■ Так как $f(x) = \cos x \in C([0,+\infty))$, и не существует предела функции $\cos x$ при $x \to +\infty$, то теорему 4.25 применять нельзя. Однако, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x}\,dx$ сходится для любого $a > 0$ в силу признака Дирихле, поэтому по теореме 4.26 исходный несобственный интеграл сходится и

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}. \ \square$$

4.8 Эйлеровы интегралы

Эйлеровыми интегралами называют интегралы вида

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \tag{4.14}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \tag{4.15}$$

которые, как будет доказано ниже, сходятся при $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Первый интеграл называют эйлеровым интегралом 1–го рода или B-функцией ("бета–функцией"), а второй — эйлеровым интегралом 2–го рода или Γ-функцией ("гамма–функцией").

4.8.1 Свойства Г-функции

Лемма 4.3. Γ-*функция определена на луче* $(0,+\infty)$.

■ Пусть $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$. Так как $f \in C((0,+\infty)\times\mathbb{R})$, то для несобственного интеграла $\Gamma(\alpha)$ точка $x = +\infty$ и, возможно, точка $x = 0$ (при $\alpha < 1$) являются особыми. Поэтому для нахождения области определения Γ-функции исследуем сходимость несобственных интегралов

$$\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Очевидно, что $0 < f(x,\alpha) \sim \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ при $x \to +0$, поэтому первый несобственный интеграл сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \le 0$.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$, найдется число $x_0 = x_0(\alpha) > 1$ такое, что при $x \ge x_0 \quad 0 < f(x,\alpha) \le \dfrac{1}{x^2}$. Следовательно, второй несобственный интеграл сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому Γ-функция определена на луче $(0,+\infty)$ и

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \ \square$$

Лемма 4.4. Γ-*функция бесконечно дифференцируема на* $(0,+\infty)$.

■ Заметим, что $f'_\alpha(x,\alpha) = x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\cdot \ln x \in C((0,+\infty)\times(0,+\infty))$. Пусть $[\alpha_0, A_0] \subset (0,+\infty)$. Если $\alpha \ge \alpha_0 > 0$, то найдется точка $x' \in (0,1]$ такая, что для всех $0 < x < x'$ выполняется неравенство $|\ln x| = \ln\dfrac{1}{x} < x^{-\alpha_0/2}$.

Поэтому $|f'_\alpha(x,\alpha)| < x^{\frac{\alpha_0}{2}-1}$. А так как интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha_0}{2}-1}\,dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (теорема 4.17) интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве $[\alpha_0,+\infty) \subset (0,+\infty)$.

Аналогично, если $0 < \alpha \le A_0 < +\infty$, то найдется точка $x'' \in [1,+\infty)$ такая, что для всех $x > x''$ выполняются неравенства

$$|f'_\alpha(x,\alpha)| = x^{\alpha-1}\,e^{-x}\,\ln x \le x^{\alpha}e^{-x} \le x^{A_0}e^{-x} \le \frac{1}{x^2}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве $(0, A_0]$. Следовательно, интегралы $\displaystyle\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$

и $\int\limits_{1}^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходятся по α на отрезке $[\alpha_0, A_0] \subset (0,+\infty)$.

В силу теоремы 4.24 функции $\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,dx$, $\int\limits_1^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha_0, A_0]$, а, значит, функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha_0, A_0]$, и ее производная имеет представление

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Следовательно, Г-функция дифференцируема на множестве $(0,+\infty)$ и

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\cdot \ln x\,dx,\ \forall\alpha\in(0,+\infty).$$

Повторяя те же рассуждения для функции $\Gamma'(\alpha)$, доказываем, что функция $\Gamma(\alpha)$ дважды дифференцируема на $(0,+\infty)$ и

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\cdot \ln^2 x\,dx,\ \forall\alpha\in(0,+\infty).$$

Аналогичными рассуждениями по индукции легко доказать, что Г-функция бесконечно дифференцируема на $(0,+\infty)$, и для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\cdot \ln^n x\,dx,\ \forall\alpha\in(0,+\infty).\ \Box$$

Лемма 4.5 (формула приведения Эйлера)**.** *Для любого* $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{4.16}$$

■ Применяя метод интегрирования по частям (теорему 3.2), получаем

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx = -e^{-x}x^\alpha\,\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).\ \Box$$

Следствие. *Если* $\alpha\in(n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$, *то*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1). \tag{4.17}$$

В частности, для всех $n\in\mathbb{N}_0$

$$\Gamma(n+1) = n!\,. \tag{4.18}$$

■ Пусть $n \in \mathbb{N}$. Применяя формулу (4.16) n раз, получим формулу (4.17). Полагая в ней $\alpha = n$, получим, что $\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1)$. Но

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\,\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

и потому имеет место формула (4.18). Заметим, что формула остается верной и при $n = 0$, так как $0! = 1$. □

Замечание. Функцию $\Gamma(\alpha)$ можно рассматривать как продолжение факториала на интервал $(0, +\infty)$.

Изучим поведение Г-функции и построим эскиз ее графика. Так как

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\;dx > 0,\ \forall\,\alpha > 0,$$

то график функции $\Gamma(\alpha)$ обращен на $(0, +\infty)$ выпуклостью вниз, а функция $\Gamma'(\alpha)$ возрастает на $(0, +\infty)$. Из формулы (4.16) следует, что $\Gamma(2) = \Gamma(1)$. Поэтому, по теореме Ролля, примененной к $\Gamma(\alpha)$ на отрезке $[1, 2]$, существует точка $\mu \in (1, 2)$, в которой $\Gamma'(\mu) = 0$. В силу возрастания функции $\Gamma'(\alpha)$, имеем:

$$\Gamma'(\alpha) < 0,\ \text{если}\,\alpha \in (0, \mu),\ \ \Gamma'(\alpha) > 0,\ \text{если}\,\alpha > \mu.$$

Следовательно, функция $\Gamma(\alpha)$ убывает на промежутке $(0, \mu]$, возрастает на промежутке $[\mu, +\infty)$, и точка μ является точкой локального (а, значит, и глобального) минимума. Известно, что $\mu \approx 1{,}46$ и $\Gamma(\mu) \approx 0{,}88$. Далее, так как $\Gamma(\alpha)$ возрастает на $(\mu, +\infty)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma(n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)! = +\infty$, то $\Gamma(\alpha)$ не ограничена сверху на $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha) = +\infty$.

Наконец, из формулы приведения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall\,\alpha > 0$, получаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha},\ \forall\,\alpha > 0,$$

а, значит, $\Gamma(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$ при $\alpha \to +0$, и $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Gamma(\alpha) = +\infty$.

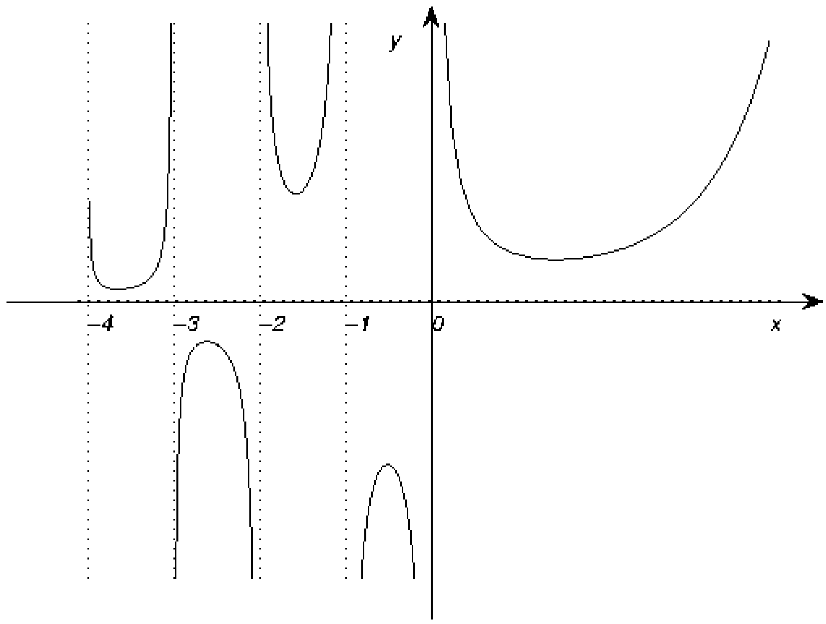
Формула приведения (4.16) позволяет продолжить Г-функцию с сохранением ее свойств на интервалы $(-n-1, -n)$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Положим $\Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, если $\alpha \in (-1, 0)$ (в рассматриваемом случае $\alpha + 1 > 0$). Изучим поведение Г-функции при $\alpha \to -1+0$. Для этого положим $y = \alpha + 1$. Заметим, что $\alpha \to -1+0 \Longleftrightarrow y \to +0$. Тогда

$$\Gamma(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{y-1} \sim -\Gamma(y) \sim -\frac{1}{y}\ \text{при}\ y \to +0.$$

Итак, $\Gamma(\alpha) \sim -\dfrac{1}{\alpha+1}$ при $\alpha \to -1+0$. Если же $\alpha \to -0$, то

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \sim \frac{1}{\alpha}.$$

Аналогично можно определить $\Gamma(\alpha)$ на любом интервале $(-n-1, -n)$, $n \in \mathbb{N}$, при этом $\Gamma(\alpha) \sim \dfrac{(-1)^n}{\alpha+n}$ при $\alpha \to -n+0$. Эскиз графика полученной Γ-функции имеет следующий вид:



4.8.2 Свойства B-функции

Лемма 4.6. *B-функция определена на множестве* $\alpha > 0, \beta > 0$.

■ Пусть $f(x,\alpha,\beta) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$. Тогда функция f непрерывна на множестве $(0,1)\times\mathbb{R}_\alpha\times\mathbb{R}_\beta$. Поэтому точки $x=0$ и $x=1$ — ее возможные особые точки. Исследуем на сходимость несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

При $x \to +0$ $\;f(x,\alpha,\beta) \sim x^{\alpha-1} = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$, поэтому первый интеграл сходится при $\alpha > 0$ и любом $\beta \in \mathbb{R}$. Аналогично показывается, что второй интеграл сходится при $\beta > 0$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Следовательно, B-функция определена на множестве $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. □

Лемма 4.7. *B-функция симметрична относительно своих аргументов, то есть* $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ *при* $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

■ Проводя в интеграле (4.14) замену $1-x=t$, получим

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt=B(\beta,\alpha).\ \square$$

Лемма 4.8 (формула приведения для B-функции)**.**

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta),\ \forall\,\alpha>0,\ \forall\,\beta>0. \tag{4.19}$$

■ Применяя метод интегрирования по частям (теорему 3.2) получим:

$$B(\alpha+1,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x^{\alpha}\Longrightarrow du=\alpha x^{\alpha-1}\,dx\\ dv=(1-x)^{\beta-1}\,dx\Longrightarrow v=-\dfrac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\end{array}\right|$$

$$=-\frac{1}{\beta}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\ \Big|_0^1+\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx=\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(1-x)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx-\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1,\beta).$$

Отсюда и следует формула (4.19). $\square$

Следствие. *Для любых* $\alpha>0$ *и* $\beta>0$

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta),\ B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\,B(\alpha,\beta).$$

■ Первая формула вытекает из формулы (4.19) и свойства симметрии B-функции, а вторая — из последовательного применения полученных формул к $B(\alpha+1,\beta+1)$. $\square$

Лемма 4.9 (второе интегральное представление B-функции)**.**

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt,\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

■ В интеграле (4.14) сделаем замену переменной $x=\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}$. Тогда $dx=\dfrac{dt}{(1+t)^2}$. Заметим, что $t\to+0$ при $x\to+0$, и $t\to+\infty$ при $x\to 1-0$, поэтому

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+t)^{\beta-1}}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.\ \square$$

Лемма 4.10 (о связи между B- и Γ- функциями).

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0. \tag{4.20}$$

■ При $u>0$ в интеграле (4.15) положим $x=ut,\ dx=udt$ и получим:

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}u^{\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-ut}udt=u^{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-ut}dt.$$

Теперь будем считать, что $\alpha>1$, $\beta>1$, $u>1$ и $u=1+v$, $v>0$. Тогда

$$\Gamma(\alpha+\beta)=(1+v)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}dt.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{v^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=v^{\alpha-1}\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}dt.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по v на луче $[0,+\infty)$:

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int\limits_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}dv=\int\limits_0^{+\infty}v^{\alpha-1}\left(\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}dt\right)dv. \tag{4.21}$$

Заметим, что интегрирование возможно, так как $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}dv}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=B(\alpha,\beta)$.

Поскольку $\alpha>1$ и $\beta>1$, то подынтегральные функции в правой части равенства (4.21) имеют единственную особую точку $t=+\infty$ (подынтегральные функции непрерывны в точке $t=0$). Формально поменяем порядок вычисления несобственных интегралов в правой части равенства (4.21):

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int\limits_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}dv=\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\left(\int\limits_0^{+\infty}v^{\alpha-1}e^{-vt}dv\right)dt.$$

Выполняя замену переменной $vt=z$, $tdv=dz$, получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}v^{\alpha-1}e^{-vt}dv=\frac{1}{t^{\alpha}}\int\limits_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}\,dz=\frac{1}{t^{\alpha}}\,\Gamma(\alpha).$$

Следовательно, для всех $\alpha > 1$, $\beta > 1$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha) \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta),$$

откуда и следует формула 4.20. Остается доказать законность изменения порядка вычисления несобственных интегралов. При $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ функция $f(t,v) = v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t}$ непрерывна и неотрицательна на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$. А так как при $t \in [0,+\infty)$

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t}\, dv = t^{\alpha+\beta-1}\, e^{-t}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha} = t^{\beta-1}\, e^{-t}\, \Gamma(\alpha),$$

то несобственный интеграл $I(t)$ является непрерывной функцией на луче $[0,+\infty)$ при всех $\alpha > 1$ и $\beta > 1$. Аналогично, делая замену $(1+v)t = z$, получим, что

$$J(v) = \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t}\, dt = v^{\alpha-1} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t}\, dt =$$

$$= \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} \int\limits_0^{+\infty} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z}\, dz = \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\, \Gamma(\alpha+\beta),$$

то есть несобственный интеграл $J(v)$ также является непрерывной функцией на луче $[0,+\infty)$ при всех $\alpha > 1$ и $\beta > 1$. В силу теоремы 4.23, изменение порядка несобственного интегрирования законно, что доказывает справедливость формулы (4.20) при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$.

Пусть теперь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Согласно следствию леммы 4.8,

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\, B(\alpha,\beta).$$

Применяя к левой части этого равенства доказанную при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ формулу (4.20) , получим:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} B(\alpha,\beta).$$

Поскольку $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$, $\forall\, \alpha > 0$, то

$$\frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)\,\beta\,\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\, B(\alpha,\beta),$$

то есть

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta). \quad \square$$

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 4.11 (формула дополнения для B-функции). *Для любого числа* $\alpha \in (0,1)$ $\ B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Следствие. (формула дополнения для Γ-функции) *Для любого числа* $\alpha \in (0,1)$ $\quad \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Из формулы дополнения, в частности, следует, что

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\,(1/2)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Поэтому $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Наконец, пользуясь полученными равенствами, делая замену $x^2 = t$, легко вычислить интеграл Эйлера–Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.9 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ определены на множестве $X \times Y$ из $\mathbb{R}^2_{x,y}$, y_0 — предельная точка множества Y и $g(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$, $h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$. Пусть $g(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi_1(x)$, $h(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi_2(x)$. Что можно сказать о равномерной сходимости на множестве X функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ при $y \to y_0$?

2. Пусть функция $\varphi : X \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y и $\varphi(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$. Пусть функция $f : X \subset \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ и $f(x)$ непрерывна на множестве X. Можно ли утверждать, что функция $f(x)\varphi(x,y)$ сходится равномерно на множестве X при $y \to y_0$?

3. Пусть функция $f : [a,b) \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y и функция f удовлетворяет следующим условиям:

   a) функция f непрерывна по x на промежутке $[a,b)$ при каждом фиксированном $y \in Y$;

   b) $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{(a,b)}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$;

   c) не существует предела $f(a,y)$ при $y \to y_0$.

   Доказать, что функция $f(x,y)$ сходится неравномерно на (a,b) при $y \to y_0$.

4. Показать на примерах, что если функция $f(x,y)$ определена на множестве $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$, непрерывна по x на X при каждом фиксированном $y \in Y$ и сходится при $y \to y_0$ к непрерывной на множестве X функции, то сходимость может быть как равномерной, так и неравномерной.

5. Пусть $f, \varphi : X \times Y \in \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y и $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f_1(x)$, а $\varphi(x,y)$ неравномерно сходится к $\varphi_1(x)$ на множестве X при $y \to y_0$. Имеет ли место равномерная сходимость функции $f + \varphi$ на множестве X при $y \to y_0$?

6. Показать, что требование компактности множества X существенно для справедливости теоремы Дини.

7. Пусть $\overline{\Pi} = [a,b] \times [c,d]$, $f : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$ и f непрерывна на $\overline{\Pi}$. Пусть функция $g(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$. Доказать, что

   a) функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx$ непрерывна на отрезке $[c,d]$;

   b) при условии, что функция $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывна на $\overline{\Pi}$, функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, при этом
   $$I'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,g(x)\,dx;$$

   c) $\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,g(x)\,dy.$

8. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $a > 0$. Доказать, что функция
$$F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x+t)dt$$
имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$, найти $F'(x)$.

9. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и
$$I(y) = \int\limits_0^y (x+y)f(x)\,dx,\ \ y \in [a,b]\ (a < 0 < b).$$
Найти $I'(y),\ I''(y)$.

10. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $k \neq 0$. Доказать, что функция

$$I(x) = \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\sin k(x-t)dt$$

удовлетворяет уравнению $I'' + k^2 I = f(x)$.

11. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $a < a_0 < x < b$. Доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_{a_0}^{x}(f(t+\alpha) - f(t))\,dt = f(x) - f(a_0)$.

12. Пусть функции $f(x,y), \varphi(x,y)$ определены на множестве $[a,b]\times Y$, $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, имеют единственную особую точку $x = b$ при любой фиксированной точке $y \in Y$ и несобственные интегралы $\int\limits_a^b \varphi(x,y)\,dx$ равномерно сходятся на множестве Y. Доказать, что для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл $\int\limits_a^b (\alpha\, f(x,y) + \beta\,\varphi(x,y))\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

13. Пусть функция $f(x,y) : [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ имеет единственную особую точку $x = b$ при любой фиксированной точке $y \in Y$. Если $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ несобственный интеграл сходится на множестве Y и равномерно сходится на множествах $Y_1 \subset Y$ и $Y_2 \subset Y$, то он равномерно сходится на множестве $Y_1 \bigcup Y_2$. Показать, что данное утверждение нельзя перенести на бесконечное объединение множеств.

14. Пусть функция $g(x,y)$ определена на $[a,b)\times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, локально интегрируема на $[a,b)$ при каждом $y \in Y$, ограничена на $[a,b)\times Y$ и монотонна по x на $[a,b)$ при любом фиксированном $y \in Y$. Доказать, что если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x,y)f(x)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

15. Пусть функция $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a,b)$, а несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x,y)\,f(x)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

16. Пусть функция $g(x,y)$ определена на $[a,b)\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$ и удовлетворяет условиям:

    a) равномерно на Y сходится к нулю при $x\to b$ $(x\in(a,b))$;

    b) монотонна по x на $[a,b)$ при каждом фиксированном $y\in Y$.

    Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема на $[a,b)$ и

$$\exists\, C>0:\Big|\int\limits_a^t f(x)\,dx\Big|\le C,\ \forall\, t\in[a,b).$$

    Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x,y)\,f(x)\,dx$ равномерно сходится на Y.

17. Пусть $f:[a,+\infty)\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}\to\mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y, $F:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, и выполнены следующие условия:

    a) $f(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$ для любого $[a,b]\subset[a,+\infty)$,

    b) $|f(x,y)|\le F(x),\ \forall\,(x,y)\in[a,+\infty)\times Y$,

    c) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится.

    Доказать, что $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx.$

18. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a,b)\times[c,d]$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на (c,d). Доказать, что этот несобственный интеграл сходится равномерно на $[c,d]$.

19. Пусть функция $f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d])$, а функция g абсолютно интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле. Доказать, что

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d g(x)f(x,y)\,dy.$$

20. Пусть $f : [a,b] \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \longrightarrow \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y, и выполнены следующие условия:

a) $f(x,y) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $\forall y \in Y$;

b) $f(x,y) \overset{[a,b]}{\underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$;

c) $g(x)$ абсолютно интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле.

Доказать, что функция $g(x)\,\varphi(x)$ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ и $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)g(x)\,dx$.

21. Пусть функция $f(x,y) \in C([a,d] \times [c,d])$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, которая непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$. Пусть функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на $[a,b)$ в несобственном смысле. Доказать, что функция $I(y) = \int\limits_a^b g(x)\,f(x,y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и $I'(y) = \int\limits_a^b g(x)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, $\forall y \in [c,d]$.

22. Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема на $[a,+\infty)$, $a > 0$, $c < d$, и при $y = c$, $y = d$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^y\,f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что этот интеграл сходится равномерно на отрезке $[c,d]$.

23. Пусть при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ монотонна на $[0,+\infty)$, несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится равномерно на множестве Y, и для любого $y \in Y$ существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y) = 0$. Доказать, что при $x \to +\infty$ функция $f(x,y)$ равномерно на множестве Y сходится к нулю.

24. Пусть $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ и для любого $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$. Пусть $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y_0 \in [c,d]$ и $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Доказать, что:

a) $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$;

b) $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)g(x)\,dx$ для любой функции $g(x)$, интегрируемой по Риману на $[a,b]$.

Глава 5

Ряды Фурье

5.1 Ортогональные системы функций

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Введем в рассмотрение несколько классов функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Как и ранее, пусть $\mathcal{R}_{[a,b]}$ — класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Напомним, что он содержит все монотонные и кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции, а также обладает следующими свойствами:

1) если $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$;
2) если $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$ класс функций f, имеющих на $[a, b]$ не более конечного числа особых точек, и для которых несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ сходится. Из теории несобственных интегралов известно, что $\widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$ линейное множество, и $\mathcal{R}_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$ — класс функций f, абсолютно интегрируемых в несобственном смысле на $[a, b]$, то есть таких, что $|f| \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$. Из свойств определенного интеграла следует, что $\mathcal{R}_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$. Далее, если функция $|f(x)|$ интегрируема в несобственном смысле на $[a, b]$, то $f(x) \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$, поэтому $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$. Таким образом, $\mathcal{R}_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$ класс функций f, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$, то есть таких, что $f^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$.

Далее, для простоты изложения, будем считать, что рассматриваемые функции имеют на $[a, b]$ единственную особую точку $x = b$.

Лемма 5.1. *Если f и $g \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$, то $f \cdot g \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$.*

■ Доказательство следует из очевидного неравенства

$$|f(x) \cdot g(x)| \le \frac{1}{2}\left(f^2(x) + g^2(x)\right), \ \forall x \in [a, b),$$

и признака сравнения для несобственных интегралов. $\square$

Следствие. $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]} \subset \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$.

$\blacksquare$ Для доказательства достаточно положить в лемме 5.1 $g(x) \equiv 1$. $\square$

Замечание. Из того, что $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$, еще не следует, что $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$. Подтверждением этого является, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , x \in (0,1], \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

которая принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,1]}$, но не принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[0,1]}$.

Лемма 5.2. *Множества* $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$ *и* $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$ *являются линейными.*

$\blacksquare$ Докажем, например, второе утверждение: пусть $f,\ g \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$, тогда $\alpha f^2 + \beta g^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Учитывая, что для любого $x \in [a,b)$

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))^2 = \alpha^2 f^2(x) + 2\alpha\,\beta f(x) g(x) + \beta^2 g^2(x) \le$$

$$\le \alpha^2 f^2(x) + |\alpha\,\beta|(f^2(x) + g^2(x) + \beta^2 g^2(x),$$

в силу признака сравнения для несобственных интегралов получаем, что $(\alpha f + \beta g)^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а, значит, $(\alpha f + \beta g) \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\square$

Лемма 5.3. *Если* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^j_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *то* $(f \cdot g) \in \widetilde{\mathcal{R}}^j_{[a,b]}$, $j = 1, 2$.

$\blacksquare$ Пусть, например, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Так как $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то функция g ограничена на отрезке $[a,b]$, то есть

$$\exists M > 0 : |g(x)| \le M, \forall x \in [a,b].$$

Поэтому $(f \cdot g)^2(x) \le M^2 \cdot f^2(x), \forall x \in [a,b]$, и по признаку сравнения для несобственных интегралов $(f \cdot g)^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,b]}$, а, значит, $(f \cdot g)^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$. $\square$

Всюду далее множество всех целых неотрицательных чисел будем обозначать через $\mathbb{N}_0$, то есть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Определение 5.1. *Пусть* $\varphi_n(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \forall n \in \mathbb{N}_0$. *Система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *называется ортогональной на отрезке* $[a,b]$, *если*

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \ne m, \\ \gamma_n > 0, & \text{если } n = m, \end{cases} \quad n,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Если система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортогональной, и* $\gamma_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, *то она называется ортонормированной на* $[a,b]$.

Замечание. Если система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$, то система функций $\{\varphi_n(x)/\sqrt{\gamma_n}\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[a,b]$.

Легко показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.4. *Пусть $T > 0$. Система тригонометрических функций*

$$1, \sin\frac{\pi x}{T}, \cos\frac{\pi x}{T}, \sin\frac{2\pi x}{T}, \cos\frac{2\pi x}{T}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{T}, \cos\frac{n\pi x}{T}, \ldots, \tag{5.1}$$

является ортогональной на любом отрезке $[a, a+2T]$, $a \in \mathbb{R}$, при этом

$$\int\limits_a^{a+2T} 1^2\,dx = 2T,\ \int\limits_a^{a+2T} \cos^2\frac{n\pi x}{T}\,dx = T,\ \int\limits_a^{a+2T} \sin^2\frac{n\pi x}{T}\,dx = T, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Замечание. На $[a, a+2T]$ система функций (5.1) совпадает с такой системой $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, у которой

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_{2k-1}(x) = \sin\frac{k\pi x}{T},\ \varphi_{2k}(x) = \cos\frac{k\pi x}{T}, k \in \mathbb{N}.$$

При этом $\gamma_0 = 2T$, $\gamma_n = T$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Эта система называется обобщенной тригонометрической системой (ОТС).

Следствие. *Система функций*

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$$

является ортогональной на любом отрезке $[a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$. При этом $\gamma_0 = 2\pi$, $\gamma_n = \pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Эта система называется классической тригонометрической системой (КТС).

5.2 Определение ряда Фурье по ортогональной системе

Определение 5.2. *Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$, а система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[a,b]$. Ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x),\ \textit{где } c_k = \frac{1}{\gamma_k}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, k \in \mathbb{N}_0,$$

называется рядом Фурье, а числа c_k — коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Тот факт, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ является рядом Фурье функции f, далее будем записывать в виде $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$. Если ряд Фурье функции f по ортогональной на $[a,b]$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится на отрезке $[a,b]$ и его сумма равна $f(x)$, то есть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x),\ x \in [a,b],$$

то говорят, что функция f разлагается в ряд Фурье на отрезке $[a,b]$.

Отметим тот очевидный факт, что если $f(x) = \alpha\, g(x) + \beta\, h(x)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $g, h \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$, то коэффициенты Фурье функции f выражаются через соответствующие коэффициенты Фурье функций g и h по правилу:

$$c_n(f) = \alpha\, c_n(g) + \beta\, c_n(h),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 5.1. *Пусть система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортогональной на отрезке* $[a,b]$. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \tag{5.2}$$

равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ *и его сумма равна* $S(x)$, *то* $S \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *и ряд* (5.2) *является рядом Фурье функции* S, *то есть*

$$c_k = \frac{1}{\gamma_k}\int\limits_a^b S(x)\varphi_k(x)\,dx,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

■ Поскольку ряд (5.2) равномерно сходится на $[a,b]$, и $\varphi_n(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то по теореме о почленном интегрировании функционального ряда $S(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}_0$ функция $\varphi_n(x)$ ограничена на $[a,b]$, поэтому почленное умножение ряда (5.2) на такую функцию не изменяет его равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$, что легко следует как из определения равномерной сходимости функционального ряда, так и из критерия Коши. Умножая ряд (5.2) почленно на функцию $\varphi_n(x)$, получаем, что

$$S(x)\cdot\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)\cdot\varphi_n(x), n \in \mathbb{N}_0.$$

Так как полученный ряд равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, то из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда и ортогональности системы функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[a,b]$, следует, что

$$\int_a^b S(x)\varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n \cdot \gamma_n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Так как $\gamma_n > 0$, то $c_n = \dfrac{1}{\gamma_n}\displaystyle\int_a^b S(x)\varphi_n(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0.$ $\square$

Следствие. *Пусть система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *ортогональна на отрезке* $[a,b]$, *а* $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$, *то есть* $f(x)$ — *линейная комбинация конечного числа функций ортогональной системы, тогда ряд Фурье функции* f *совпадает с рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x),\ \text{где } c_k = a_k,\ k = \overline{0,m},\ c_k = 0,\ \forall\, k > m.$$

Определение 5.3. *Пусть система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортогональной на отрезке* $[a,b]$. *Линейная комбинация*

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x),\ \text{где } a_m \neq 0,$$

называется многочленом порядка m *по системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 5.2 (минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье)**.** *Пусть система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортогональной на отрезке* $[a,b]$, *и* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$, *тогда*

$$\min_{Q_m} \int_a^b (f(x) - Q_m(x))^2\,dx = \int_a^b (f(x) - S_m^f(x))^2\,dx,\ m \in \mathbb{N}_0$$

где $Q_m(x)$ — *многочлены порядка не выше* m *по системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *а* $S_m^f(x)$ — m*-ая частичная сумма ряда Фурье функции* f *по этой же системе функций.*

■ Пусть $Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$, $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, $c_k = \dfrac{1}{\gamma_k}\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$, для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\sigma_m = \int_a^b \left(f(x) - Q_m(x)\right)^2\,dx = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)\right)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^m a_k \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=0}^m a_k^2\gamma_k =$$

$$= \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^m a_k\,c_k\gamma_k + \sum_{k=0}^m a_k^2\gamma_k = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + \sum_{k=0}^m \gamma_k\,(a_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^m c_k^2\gamma_k.$$

Здесь мы использовали ортогональность системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[a,b]$ и свойство линейности множества $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$. Из полученного следует, что минимум σ_m достигается при $a_k = c_k$ для $k = \overline{0,m}$, а значит, при $Q_m(x) = S_m^f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k\varphi_k(x)$. $\square$

Из доказательства теоремы 5.2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы 5.2, то*

$$\int\limits_a^b (f(x) - S_m^f(x))^2\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^m c_k^2\gamma_k,\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{5.3}$$

Равенство (5.3) называют тождеством Бесселя (тождеством по m).

Следствие 2. *В условиях теоремы 5.2 ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2\gamma_k$ *сходится и справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\gamma_k \le \int\limits_a^b f^2(x)\ dx. \tag{5.4}$$

■ Так как интеграл $\int\limits_a^b (f(x) - S_m^f(x))^2\,dx$ в тождестве Бесселя (5.3) неотрицательный, то

$$\sum_{k=0}^m c_k^2\gamma_k \le \int\limits_a^b f^2(x)\,dx,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Из критерия сходимости положительных числовых рядов, получаем и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2\gamma_k$, и неравенство Бесселя. $\square$

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы 5.2* $\lim c_k^2\gamma_k = 0$*, а в случае если система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортонормированной на отрезке* $[a,b], \lim c_k = 0$*, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = 0.$

Определение 5.4. *Если* $Q_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$, *и* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$, *то величину интеграла* $\int\limits_a^b (f(x) - Q_m(x))^2\,dx$ *называют средним квадратичным уклонением (отклонением) многочлена* $Q_m(x)$ *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Определение 5.5. *Говорят, что ряд Фурье функции* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$ *по ортогональной системе функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится на отрезке* $[a,b]$ *к функции* S *в смысле средних квадратичных, если*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_a^b (S(x) - S_m^f(x))^2\,dx = 0.$$

Из определения 5.5 и тождества Бесселя следует утверждение.

Лемма 5.5. *Если* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[a,b]}$ *и система функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *ортогональна на отрезке* $[a,b]$, *то следующие утверждения равносильны:*

1) ряд Фурье функции f *по системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится к* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *в смысле средних квадратичных;*

2) имеет место равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2\gamma_k = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

5.3 Ряды Фурье по тригонометрической системе

Определение 5.6. *Функцию вида*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\frac{k\pi x}{T} + \beta_k \sin\frac{k\pi x}{T}\right), \tag{5.5}$$

где $\alpha_0,\ \alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1,n}, T > 0$ *и* $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \neq 0$, *называют тригонометрическим многочленом порядка* n, *а функциональный ряд*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos\frac{k\pi x}{T} + \beta_k \sin\frac{k\pi x}{T}\right) \tag{5.6}$$

называют тригонометрическим рядом.

Учитывая $2T$-периодичность членов тригонометрического ряда (5.6), легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 5.6. *Если тригонометрический ряд 5.6 сходится в точке x_0, то он сходится в точках $x_0+2Tk, k \in \mathbb{Z}$. Сумма ряда* (5.6) *является $2T$-периодической функцией.*

По лемме 5.4 и замечанию к ней функции $f \in \widetilde{R}^1_{[-T,T]}$ соответствует тригонометрический ряд Фурье по ортогональной на отрезке $[-T,T]$ системе функций (5.1):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{k\pi x}{T} \right), \tag{5.7}$$

где $a_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx,\ k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\,dx, k \in \mathbb{N}.$

В частности, если $T = \pi$, то соответствующий ряд имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5.8}$$

где $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, k \in \mathbb{N}.$

Этот ряд называют классическим рядом Фурье функции f.

Полученные в разделе 5.2 утверждения в том случае, когда система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является тригонометрической системой (5.1), приобретают следующий вид.

Теорема 5.3. *Если тригонометрический ряд сходится равномерно на отрезке $[-T,T]$ и его сумма равна $S(x)$, то $S \in \mathcal{R}_{[-T,T]}$ и данный ряд является тригонометрическим рядом Фурье функции S на отрезке $[-T,T]$.*

Следствие. *Тригонометрический ряд Фурье многочлена $T_n(x)$* (5.5) *совпадает с этим многочленом, то есть коэффициенты Фурье многочлена $T_n(x)$ по системе функций (5.1) до индекса n включительно совпадают с его соответствующими коэффициентами, а коэффициенты Фурье для индекса $k > n$ равны нулю.*

Теорема 5.4 (минимизирующее свойство частичных сумм тригонометрического ряда Фурье)**.** *Среди всех тригонометрических многочленов степени не выше n наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$ на отрезке $[-T,T]$ имеет n-ая частичная* *сумма тригонометрического ряда Фурье функции f, и справедливо тождество Бесселя*

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}(f(x)-S_n^f(x))^2\,dx=\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}f^2(x)\,dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Следствие 1. *Если $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$ и функции f соответствует тригонометрический ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{T}+b_k\sin\frac{k\pi x}{T}\right),$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ сходится и справедливо неравенство Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}f^2(x)\ dx.$$

Следствие 2. *Если $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$, то*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\ dx=0,\quad \lim_{k\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\ dx=0.$$

Более того, если $[a,b]\subset[-T,T]$, то

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\ dx=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\ dx=0.$$

■ Первая часть утверждения вытекает из следствия 1 теоремы 5.4. Докажем вторую часть, для чего рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-T,T]\setminus[a,b].\end{cases}$$

В силу свойств определенного и несобственного интегралов $\varphi\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$. Вычислим коэффициенты Фурье функции φ по тригонометрической системе (5.1):

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\ dx=\frac{1}{T}\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\ dx,\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

и

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\,dx=\frac{1}{T}\int\limits_{a}^{b}f(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\,dx,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Так как $\varphi\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$, то утверждение доказано. $\square$

Замечание. Следствие 1 к теореме 5.4 позволяет привести пример тригонометрического ряда, например, $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$, который поточечно сходится в каждой точке $x\in\mathbb{R}$, но не является тригонометрическим рядом Фурье некоторой функции класса $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$. Действительно, если бы это был тригонометрический ряд Фурье некоторой функции $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$, то в силу следствия 1 теоремы 5.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ должен сходиться и

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n},$$

но это не так.

Теорема 5.5. *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье* (5.7) *функции* $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$ *сходился к функции* f *в смысле средних квадратичных, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}f^2(x)\,dx.\tag{5.9}$$

При изучении задачи сходимости тригонометрических рядов Фурье большую роль играет следующее утверждение, которое уточняет результат следствия 2 теоремы 5.4.

Лемма 5.7 (Римана). *Если* $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$, *то*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos\alpha x\,dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\sin\alpha x\,dx=0.$$

■ Доказательство первой части утверждения проведем в два этапа.

1) Пусть функция $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\tau^{(\varepsilon)}=\{x_k\}_{k=0}^{n}\in\mathcal{N}[a,b]:S^f(\tau^{(\varepsilon)})-s^f(\tau^{(\varepsilon)})<\varepsilon/2.$$

Но если $m_k^f = \inf\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x),\ k = \overline{0, n-1}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\ dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos\alpha x\ dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - m_k^f)\cos\alpha x\ dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} m_k^f \cos\alpha x\ dx = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Для любого $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0,(n-1)}$, $0 \le f(x) - m_k^f \le M_k^f - m_k^f$, поэтому

$$\Big|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - m_k^f)\cos\alpha x\ dx\Big| \le (M_k^f - m_k^f)\ (x_{k+1} - x_k),\ k = \overline{0,(n-1)},$$

и

$$|\sigma_1| \le S^f(\tau^{(\varepsilon)}) - s^f(\tau^{(\varepsilon)}) < \varepsilon/2.$$

Так как α можно считать положительным, то

$$|\sigma_2| \le \sum_{k=0}^{n-1} |m_k^f|\ \frac{|\sin\alpha x\ |_{x_k}^{x_{k+1}}|}{\alpha} \le \frac{2}{\alpha}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} |m_k^f|.$$

Поэтому существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\alpha > \alpha_0$

$$\frac{2}{|\alpha|}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} |m_k^f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, $\Big|\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\ dx\Big| = |\sigma_1 + \sigma_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall\,\alpha > \alpha_0$, то есть

$$\exists \lim_{\alpha\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\ dx = 0,\ \forall\, f \in \mathcal{R}_{[a,b]}.$$

2) Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$ и b — единственная особая точка функции f. Из определения несобственного интеграла следует, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, b' = b'(\varepsilon) \in (a,b) : \int\limits_t^b |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, t \in (b', b).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (b'(\varepsilon), b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\ dx\ = \int\limits_a^{t_0} f(x)\cos\alpha x\ dx + \int\limits_{t_0}^b f(x)\cos\alpha x\ dx.$$

В силу первой части доказательства $\exists\, \alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon) > 0 : \forall\, \alpha > \alpha_0$

$$\Big|\int\limits_a^{t_0} f(x)\cos\alpha x\; dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для всех $\alpha > \alpha_0$

$$\Big|\int\limits_a^{b} f(x)\cos\alpha x\; dx\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{t_0}^{b} |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Последнее означает, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\; dx = 0.$

Учитывая определение несобственного интеграла с несколькими особыми точками и его сходимость, на основе доказанного заключаем, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\; dx = 0$ для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin\alpha x\; dx = 0.$ $\square$

Следствие. *Если $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-T,T]}$, то коэффициенты Фурье функции f по системе* (5.1) *стремятся к нулю.*

Замечание. Лемма Римана справедлива и в случае, когда $b = +\infty$, то есть функция f абсолютно интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$.

5.4 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье

Лемма 5.8. *Если функция f является T-периодической, $T > 0$, и $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[0,T]}$, то $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[a,a+T]}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, и* $\int\limits_a^{a+T} f(x)\; dx = \int\limits_0^{T} f(x)\; dx.$

■ Пусть $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда существует единственное число $k_0 \in \mathbb{Z}$: $a \in [k_0T, k_0T + T)$. В силу свойств несобственного интеграла

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx \;=\; \int\limits_a^{(k_0+1)T} f(x)\, dx \;+\; \int\limits_{(k_0+1)T}^{a+T} f(x)\, dx.$$

Полагая $t = x - k_0T$ в первом интеграле, $t = x - (k_0+1)T$ во втором интеграле, и учитывая периодичность функции f, получим, что

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{a-k_0T}^{T} f(t+k_0T)dt + \int\limits_0^{a-k_0T} f(t+(k_0+1)T)dt =$$

$$= \int\limits_{a-k_0T}^{T} f(t)dt + \int\limits_0^{a-k_0T} f(t)dt = \int\limits_0^{T} f(t)dt.$$

Из последнего равенства следует принадлежность f классу $\widetilde{\mathcal{R}}_{[a,a+T]}$. $\square$

Будем далее считать, что $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi,\pi]$, и рассматривать классический ряд Фурье функции f на $[-\pi,\pi]$, то есть ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{5.10}$$

$$\text{где } a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx,\ k\in\mathbb{N}_0 \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx,\ k\in\mathbb{N}.$$

Тогда, подставляя значения коэффициентов Фурье в n-ую частичную сумму этого ряда, то есть сумму,

$$S_n^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\ n\in\mathbb{N},$$

можно представить ее в виде:

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt + \sin kx\sin kt)\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos k(t-x))\Big)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt,$$

где

$$D_n(u) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right), & n\in\mathbb{N},\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & n=0, \end{cases} \quad \text{— } n\text{-ое ядро Дирихле.} \tag{5.11}$$

Легко видеть, что $S_0^f(x) = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_0(t)dt$.

Лемма 5.9. *Для всех* $n \in \mathbb{N}_0$

$$D_n(u) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2} & \text{, если } u = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) u & \text{, если } u \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

■ Действительно, если $u = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, то $D_n(u) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n + \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}_0$. Если же $u \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, то

$$2\sin\frac{u}{2}\ D_n(u) = \sin\frac{u}{2} + 2\cos u \sin\frac{u}{2} + \cdots + 2\cos nu \sin\frac{u}{2} =$$

$$= \sin\frac{u}{2} + \left(\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2}\right) + \cdots + \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) u\right) =$$

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u,\ n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $D_0(u) = \dfrac{1}{2},\ \forall u \in \mathbb{R}$, то лемма доказана. □

Лемма 5.10. *Ядро Дирихле — бесконечно дифференцируемая на* $\mathbb{R}$, *четная,* 2π*-периодическая функция и*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.12}$$

■ Четность, 2π-периодичность и бесконечная дифференцируемость на $\mathbb{R}$ функции $D_n(u)$, $n \in \mathbb{N}$, следует из представления (5.11), так как этими свойствами обладают функции $\cos ku$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Этими же свойствами обладает и функция $D_0(u) = \dfrac{1}{2}$.

Далее, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu\right) du =$

$= 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du = 1,\ n \in \mathbb{N}$, и $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_0(u)du = 1$. □

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 5.6. *Если* $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, *то* n*-ая частичная сумма классического ряда Фурье функции* f *в точке* $x \in \mathbb{R}$ *имеет представление*

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x)dt, n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.13}$$

Следствие 1. *Если $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi;\pi]}$ и имеет период 2π, то n-ая частичная сумма классического ряда Фурье функции f в точке $x \in \mathbb{R}$ имеет представление*

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x-t) + f(x+t)\right) D_n(t)\, dt,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

■ Чтобы получить другое интегральное представление для $S_n^f(x)$, в интеграле из представления (5.13) сделаем замену $t - x = u$ и, воспользовавшись леммой 5.8, получим, что

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(u)\, du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(u+x) D_n(u) du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du.$$

В первом интеграле положим $u = -t$, и учтем четность ядра Дирихле, тогда

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x+u) D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.14}$$

□

Следствие. 2. *Если $f(x) \equiv 1$, то для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}_0$*

$$S_n^f(x) \equiv 1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

5.5 Сходимость в точке тригонометрического ряда Фурье

Теорема 5.7 (принцип локализации Римана). *Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$ и является 2π-периодической функцией. Тогда сходимость (или расходимость) ее классического ряда Фурье в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ зависит от поведения функции f только в окрестности точки x_0.*

■ По следствию 1 к теореме 5.6 $S_n^f(x_0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\,dt$, где

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Из леммы 5.8, условия которой выполнены, следует, что

$$f(x_0+t),\ f(x_0-t) \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,\pi]}.$$

Функция $\left(2\sin\dfrac{t}{2}\right)^{-1} \in C([-\pi,\pi]\backslash\{0\})$, поэтому $\varphi \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[\delta,\pi]}$, $\forall\,\delta \in (0,\pi)$, и в силу следствия из леммы Римана

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

Наконец, функция $\varphi(t)$ имеет на отрезке $[0,\pi]$ не более конечного числа особых точек, одной из которых, возможно, является точка $t=0$. Поэтому $\exists\delta_0 \in (0,\pi)$ такое, что на промежутке $[0,\delta_0]$ $\varphi(t)$ имеет не более одной особой точки, которая совпадает с $t=0$. Следовательно, несобственный интеграл 5.14 сходится (или расходится) тогда и только тогда, когда сходится (или расходится) несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\delta_0} \varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Более того, в случае сходимости последнего интеграла,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^f(x_0) = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\delta_0} \varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Поскольку $x_0+t \in (x_0, x_0+\delta_0)$, а $x_0-t \in (x_0-\delta_0, x_0)$ для всех t из $(0,\delta_0)$, то сходимость (или расходимость) числовой последовательности $\{S_n^f(x_0)\}$ и, в случае сходимости, величина предела $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^f(x_0)$, зависят только от поведения функции f в δ_0-окрестности точки x_0. □

Следствие 1. *Пусть функции f и φ определены на $\mathbb{R}$, 2π—периодичны, абсолютно интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$ и совпадают в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда соответствующие им классические ряды Фурье сходятся (или расходятся) в точке x_0 одновременно и, в случае сходимости, имеют одинаковую сумму.*

Следствие 2. *Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$, является 2π—периодичной, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если*

$$\exists\, \delta_0 > 0 : f(x) = 0,\ \forall\, x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0),$$

то классический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 и его сумма равна нулю.

Теорема 5.8 (признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье)**.** *Пусть функция $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, 2π-периодична и в точке x_0 существуют ее конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Тогда, если существует такое число $h > 0$, что несобственные интегралы*

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t}\, dt\,, \quad \int\limits_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t}\, dt$$

сходятся, то классический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к сумме $S^f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

■ Для доказательства теоремы вычислим для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ разность

$$S^f_n(x_0) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Поскольку $1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi D_n(t)dt$, то $S^f_n(x_0) - \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} =$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)\big)\, D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big(\big(f(x_0+t) - f(x_0+0)\big)\, D_n(t) + \big(f(x_0-t) - f(x_0-0)\big) D_n(t)\Big)\, dt.$$

Рассмотрим при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{\pi}\, D_n(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{2\pi\, \sin\frac{t}{2}}\, \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt.$$

Заметим, как и при доказательстве теоремы 5.7, что для всех $\delta \in (0,\pi)$

$$(f(x_0+t) - f(x_0+0)) \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,\pi]},\ \ \psi_+(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{2\pi\, \sin\frac{t}{2}} \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[\delta,\pi]},$$

и существует $\delta_0 \in (0,h)$ такое, что на отрезке $[0,\delta_0]$ функция $\psi_+(t)$ не имеет других особых точек кроме, быть может, $t=0$. В силу условий теоремы и признака сравнения для несобственных интегралов $\psi_+(t) \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,\delta_0]}$. Следовательно, $\psi_+(t) \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,\pi]}$. По лемме Римана

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \psi_+(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\psi_-(t) = \dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\pi\,\sin\frac{t}{2}} \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,\pi]}$, и

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \psi_-(t) \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right) t\, dt = 0$. Поэтому

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n^f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \ \Box$$

Определение 5.7. *Пусть функция f определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, имеет в этой точке конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$. Будем говорить, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Гельдера, если существует числа $\delta>0$, $\alpha \in (0,1]$ и $\lambda>0$ такие, что для всех $u \in (0,\delta)$ выполняются неравенства:*

$$|f(x_0+u)-f(x_0+0)| \le \lambda u^{\alpha}, \quad |f(x_0-u)-f(x_0-0)| \le \lambda u^{\alpha}. \tag{5.15}$$

Число α называют показателем Гельдера. Условия Гельдера в точке x_0 с показателем $\alpha=1$ называют условиями Липшица. Если речь идет об одном из неравенств (5.15), то говорят об одностороннем условии Гельдера, а при $\alpha=1$ — одностороннем условии Липшица.

Заметим, что функция f, удовлетворяющая условию Гельдера (5.15), может иметь в точке x_0 разрыв первого рода, если $f(x_0+0) \ne f(x_0-0)$.

Можно расширить определение односторонних производных, полагая

$$f'_+(x_0) = \lim_{u\to+0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}, \ f'_-(x_0) = \lim_{u\to+0} \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}.$$

В частности, если $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $x_0=0$, то

$$\exists\, f'_+(0) = \lim_{u\to+0} \frac{\operatorname{sgn} u - 1}{u} = 0, \quad \exists\, f'_-(0) = \lim_{u\to+0} \frac{\operatorname{sgn}(-u)-(-1)}{-u} = 0.$$

Лемма 5.11. *Если функция f имеет в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Гельдера с показателем $\alpha=1$ (условию Липшица).*

■ По условию существуют конечные пределы

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)}{\pm u}=f'_{\pm}(x_0).$$

Поэтому функции $\dfrac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)}{\pm u}$ локально ограничены в точке $u=0$, то есть $\exists\delta>0\ \exists M>0$: $\dfrac{|f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)|}{u}\le M$, $\forall\, u\in(0,\delta)$. Последнее означает, что функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha=1$. □

Следствие. *Если функция f дифференцируема в точке $x_0\in\mathbb{R}$, то она удовлетворяет в этой точке условию Липшица.*

Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x)=|x|^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, удовлетворяет в точке $x=0$ условию Гельдера с показателем α, но не дифференцируема в этой точке.

Лемма 5.12. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности U_{x_0} точки $x_0\in\mathbb{R}$, дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_{x_0}$ и существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0), f(x_0-0), f'(x_0+0), f'(x_0-0)$. Тогда существуют конечные односторонние производные функции f в точке x_0 и $f'_{\pm}(x_0)=f'(x_0\pm 0)$.*

■ Пусть $U_{x_0}=U_{x_0}(\delta)$. Рассмотрим, например, функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in(x_0-\delta,x_0),\\ f(x_0-0),\ x=x_0.\end{cases}$$

Функция $\varphi\in C((x_0-\delta,x_0])$, дифференцируема на $(x_0-\delta,x_0)$ и поэтому для любого $x\in(x_0-\delta,x_0)$, в силу теоремы Лагранжа, существует точка $\theta_x\in(0,1)$ такая, что $\varphi(x_0-u)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0-\theta_x u)\cdot(-u)$. Поэтому

$$\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}=\frac{\varphi(x_0-u)-\varphi(x_0)}{-u}=\varphi'(x_0-\theta_x u)=f'(x_0-\theta_x u).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}=\lim_{u\to+0}f'(x_0-\theta_x u)=\lim_{x\to x_0-0}f'(x)=f'(x_0-0),$$

то есть $f'_{-}(x_0)=f'(x_0-0)$.

Аналогично доказывается, что $f'_{+}(x_0)=f'(x_0+0)$. □

Напомним определение кусочно непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции (см., например, [9, определение 1.6]).

Определение 5.8. *Функция f называется кусочно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, что на каждом интервале (x_k,x_{k+1}) функция f непрерывна и имеет конечные односторонние пределы в точках x_k, $k=\overline{0,n-1}$.*

Определение 5.9. *Функция f называется кусочно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$, что на каждом интервале разбиения $(x_k,x_{k+1}), k=\overline{0,n-1}$ функция f дифференцируема, и существуют конечные односторонние производные $f'_\pm(x_k)$, $k=\overline{0,n}$.*

Поскольку кусочно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция является дифференцируемой на $[a,b]$ кроме, быть может, конечного числа точек, то она кусочно непрерывна на отрезке $[a,b]$, в каждой точке (a,b) удовлетворяет условиям Гельдера, а в точках a и b — односторонним условиям Гельдера. Кроме того, такая функция абсолютно интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 5.9 (признак Липшица сходимости в точке тригонометрического ряда Фурье)**.** *Пусть функция $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, 2π—периодична и в точке $x_0\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha\in(0,1]$, тогда соответствующий ей классический ряд Фурье сходится в точке x_0, к сумме $S^f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Если, кроме того, функция f непрерывна в точке x_0, то $S^f(x_0)=f(x_0)$.*

■ Так как функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Гельдера, то найдется число $\delta\in(0,\pi)$ такое, что для $u\in(0,\delta)$ выполняются условия 5.15. Поскольку функция f 2π—периодична и $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, то найдется число $\delta_0\in(0,\delta)$ такое, что функции $\dfrac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)}{u}$ имеет, возможно, на отрезке $[0,\delta_0]$ единственную особую точку $u=0$.

В силу сказанного для любого $u\in(0,\delta_0)$

$$\frac{|f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)|}{u}\le\lambda u^{-1+\alpha}$$

Поэтому несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{\delta_0}\frac{|f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)|}{u}\,du$$

сходятся ($1-\alpha<1$) и, согласно признаку Дини, условия которого выполнены, классический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к сумме $S^f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. □

Следствие 1. *Пусть $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$ и является 2π—периодической функцией. Если функция f удовлетворяет в каждой точке $x\in(-\pi,\pi)$ односторонним условиям Гельдера, а в точках $x=\pi$ и $x=-\pi$ левостороннему и, соответственно, правостороннему условию Гельде-*

ра, то классический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, его сумма является 2π-периодической функцией и

$$S^f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x \in (-\pi,\pi), \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases} \tag{5.16}$$

■ В силу условий теоремы существуют числа $\lambda > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $\delta > 0$ такие, что для любого $u \in (0,\delta)$ выполняются неравенства:

$$|f(-\pi+u) - f(-\pi+0)| \le \lambda u^\alpha, \quad |f(\pi-u) - f(\pi-0)| \le \lambda u^\alpha.$$

Но для всех $u \in (0,\delta)$

$$f(\pi+u) = f(-\pi+u+2\pi) = f(-\pi+u),\ f(-\pi-u) = f(\pi-u-2\pi) = f(\pi-u),$$

поэтому $f(\pi+0) = f(-\pi+0)$, $f(-\pi-0) = f(\pi-0)$, что влечет выполнение условий Гельдера в точках π и $-\pi$, а значит, в каждой точке $x \in [-\pi,\pi]$. Следовательно, классический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке отрезка $[-\pi,\pi]$ и его сумма определяется по формуле (5.16). Наконец, в силу леммы 5.6, классический ряд Фурье функции f сходится на $\mathbb{R}$ и его сумма $S(x)$ является 2π-периодической функцией. □

Следствие 2. *Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$ и является 2π-периодической функцией. Если f имеет в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то ее классический ряд Фурье сходится в точке x_0 к сумме $S^f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

Следствие 3. *Пусть функция f является 2π-периодической и кусочно дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда ее классический ряд Фурье сходится на множестве $\mathbb{R}$, его сумма $S^f(x)$ является 2π-периодической функцией, которая определяется на отрезке $[-\pi,\pi]$ по формуле* (5.16).

Замечание 1. В теореме 5.9 и следствиях 1– 3 условие 2π—периодичности функции f можно заменить условием $f(-\pi) = f(\pi)$ и считать, что либо $x_0 \in (-\pi,\pi)$, либо $x_0 = -\pi$, либо $x_0 = \pi$ (в последних случаях условие Гельдера в точке x_0 следует заменить левосторонним условием Гельдера в точке π и правосторонним в точке $-\pi$).

Замечание 2. Изложенная выше теория классических рядов Фурье легко переносится на случай периодической функции f с периодом $2T$ ($T > 0$). Для этого достаточно отрезок $[-T,T]$ отобразить на отрезок $[-\pi,\pi]$ с помощью линейного отображения

$$x = \frac{\pi}{T}t\,, \quad t \in [-T,T].$$

В частности, например, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.10 (признак Липшица для функции на $[a, a+2T]$)**.** *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,a+2T]}$ *и является* $2T$*-периодической функцией. Если в точке* $x_0 \in (a, a+2T)$ *функция* f *удовлетворяет условию Гельдера (в точках* $x_0 = a$ *и* $x_0 = a + 2T$ *левостороннему и правостороннему условию Гельдера, соответственно), то ряд Фурье функции* f *сходится в точке* x_0 *к сумме*

$$S(x_0) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}, \ x_0 \in (a, a+2T), \\ \dfrac{f(a+0) + f(a+2T-0)}{2}, \ x_0 = a, \, x_0 = a+2T. \end{cases} \tag{5.17}$$

Пример 5.1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in [0,1), \\ 0, \text{ если } x = 1. \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье.

■ Заметим, что $f(0) = f(1)$, поэтому, можно считать, что функция f продолжена на $\mathbb{R}$ с периодом 1. Так как f кусочно непрерывна на $[0,1]$, то $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[0,1]}$, тригонометрический ряд Фурье функции f по системе

$$1, \ \sin 2\pi x, \ \cos 2\pi x, \ \sin 4\pi x, \ \cos 4\pi x, \ \ldots \ , \ \sin 2k\pi x, \ \cos 2k\pi x, \ \ldots$$

$(T = 1/2)$, имеет вид $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x)$, где

$$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1,$$

$$a_k = \frac{1}{1/2} \int_0^1 x \cos 2k\pi x \, dx = 2 \left(\frac{x \sin 2k\pi x}{2k\pi} \Bigg|_0^1 - \frac{1}{2k\pi} \int_0^1 \sin 2k\pi x \, dx \right) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{1/2} \int_0^1 x \sin 2k\pi x \, dx = 2 \left(-x \frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi} \Bigg|_0^1 + \frac{1}{4k^2\pi^2} \sin 2k\pi x \Bigg|_0^1 \right) = -\frac{1}{k\pi}.$$

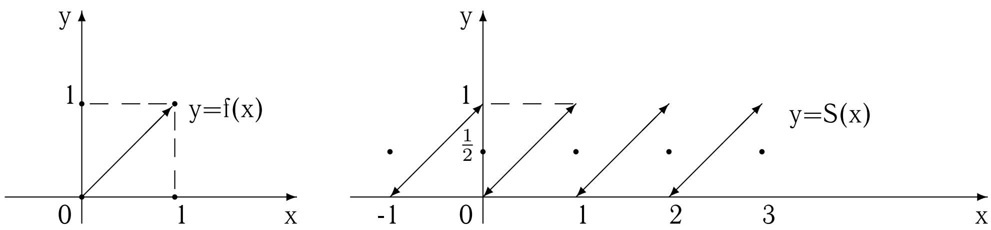
Следовательно, $f(x) \sim \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x.$

Изучим поведение полученного ряда Фурье. Функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(0,1)$. Так как $f'(x) = 1$ для всех x из $(0,1)$, то $\exists \, f'_+(0) = 1$, $\exists \, f'_-(1) = 1$ и функция f кусочно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Поэтому в силу признака Липшица (теорема 5.10) ряд

Фурье сходится на $\mathbb{R}$, его сумма — функция с периодом 1, и

$$S(x) = \begin{cases} x, \ x \in (0,1), \\ \dfrac{1}{2}, \ x = 0, \ x = 1. \end{cases}$$

Графики функций $y = f(x)$ и $y = S(x)$ приведены выше.



Следовательно, $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2k\pi x}{k\pi}$, $\forall\, x \in (0,1)$, то есть функция f разлагается в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(0,1)$. $\square$

Алгоритм разложения функции $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$ в тригонометрический ряд Фурье сводится к следующим шагам.

1. По отрезку $[a,b]$ построить тригонометрическую систему вида (5.1) с $T = (b-a)/2$.

2. Выяснить, принадлежит ли функция f классу $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[a,b]}$. Если принадлежит, то по тригонометричекой системе, выбранной на шаге 1, формально выписать тригонометрический ряд Фурье, соответствующий функции f на отрезке $[a, a+2T]$.

3. Вычислить коэффициенты Фурье функции f по выбранной тригонометрической системе и подставить их в ряд, формально записанный на шаге 2.

4. Изучить поведение функции f в каждой точке отрезка $[a, a+2T]$, а именно, выполнение в точках условия Гельдера, непрерывность и дифференцируемость функции в точке, и решить вопрос о сходимости и величине суммы ряда Фурье, полученного на шаге 3 .

Если f из класса $\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-T,T]}$ дополнительно является четной или нечетной функцией, то, учитывая особенности вычисления интегралов от таких функций, получаем следующий результат.

Лемма 5.13. *Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-T,T]}$. Если f является нечетной функцией, то ей соответствует ряд Фурье вида:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{T}, \quad \textit{где} \ \ b_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Если f является четной функцией — то ряд Фурье вида:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T}, \quad \textit{где} \;\; a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\, dx, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Пример 5.2. Найти тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$ на отрезках:

$$a) \; [-\pi/2, \pi/2]; \qquad\qquad b) \; [-\pi, \pi].$$

■ a). Отрезку $[-\pi/2, \pi/2]$ соответствует $T = \pi/2$, поэтому выбираем ортогональную тригонометрическую систему вида

$$1, \sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \; \ldots \; , \sin 2kx, \cos 2kx, \; \ldots \; . \tag{5.18}$$

Так как функция $\sin 2x$ является элементом данной системы, то соответствующий ей ряд Фурье по системе (5.18) совпадает на $\mathbb{R}$ с функцией $\sin 2x$ (см. следствие теоремы 5.3)

Найдем ряд Фурье, соответствующий функции $\cos 5x$ по системе (5.18). Сразу же заметим, что функция $\cos 5x$ является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ и четной, поэтому, в силу следствия 3 к теореме 5.9 и замечанию 2 к ней, ее ряд Фурье будет сходиться к $\cos 5x$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а потому и для всех $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Таким образом,

$$\cos 5x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx, \quad \text{где для всех } n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 5x \cos 2nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\cos(2n-5)x + \cos(2n+5)x\Big) \; dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2n-5}\sin(2n-5)x + \frac{1}{2n+5}\sin(2n+5)x\Big) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2n-5}\sin\left(n\pi - \frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n+5}\sin\left(n\pi + \frac{5\pi}{2}\right)\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2n-5}(-1)^{n-1} + \frac{1}{2n+5}(-1)^{n}\Big) = \frac{20\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-25)}.$$

Следовательно, для всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin 2x + \frac{2}{5\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-25)}\cos 2nx.$$

b). Отрезку $[-\pi, \pi]$ отвечает классическая тригонометрическая система и функция f является тригонометрическим многочленом по классической тригонометрической системе, поэтому по следствию к теореме 5.3 классический ряд Фурье функции f совпадает с самой функцией. $\square$

5.6 Разложение функции только по синусам или косинусам

Пусть функция f определена на отрезке $[0, T]$. Для простоты будем считать, что она кусочно дифференцируема на $[0, T]$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, T], \\ f(-x), & x \in [-T, 0). \end{cases}$$

Она является четной и на промежутке $(0, T]$ обладает дифференциальными свойствами функции f, причем $\widetilde{f}'(x) = f'(x)$ в тех точках x из $(0, T)$, в которых f дифференцируема. Если функция f дифференцируема в точке $x_0 \in (0, T]$, то по теореме о дифференцируемости суперпозиции функция $\widetilde{f}$ дифференцируема в точке $-x_0 \in [-T, 0)$ и

$$\widetilde{f}'(-x_0) = (f(-x))'_{x=x_0} = -f'(-x_0).$$

Если в точке $x_0 \in (0, T)$ функция f не дифференцируема, но существуют конечные предельные значения $f'(x_0 \pm 0)$, то существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} \widetilde{f}'(x) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} f'(x) = f'(x_0 \pm 0),$$

и

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f'(-x) = -f'(-x_0 \mp 0).$$

В силу сказанного, функция $\widetilde{f}$ кусочно дифференцируема на $[-T, T]$, а значит, учитывая ее четность,

$$\widetilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{T}, \quad \text{где}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} \widetilde{f}(x) \cos \frac{k\pi x}{T}\, dx = \frac{2}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x) \cos \frac{k\pi x}{T}\, dx,$$

и полученный ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, его сумма $S(x)$ является $2T$-периодической функцией и

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{f}(x+0) + \widetilde{f}(x-0)}{2}, & \forall x \in (-T, T) \\ \dfrac{\widetilde{f}(T-0) + \widetilde{f}(-T+0)}{2}, & x = \pm T. \end{cases}$$

Поскольку
$$\widetilde{f}(+0) = \lim_{x\to+0} f(x) = f(+0),\ \widetilde{f}(-0) = \lim_{x\to-0} f(-x) = \lim_{x\to+0} f(x) = f(+0),$$
то $S(0) = f(+0)$. А так как
$$\widetilde{f}(-T+0) = \lim_{x\to-T+0} f(-x) = \lim_{x\to T-0} f(x) = f(T-0),$$
$$\widetilde{f}(T-0) = \lim_{x\to T-0} f(x) = f(T-0),$$
то $S(T) = S(-T) = f(T-0)$.

Следовательно, $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции f, содержащихся в $[0,T]$, и потому в них функция f разлагается в полученный ряд Фурье, содержащий только функции $\cos\dfrac{k\pi x}{T}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

В случае $T = \pi$ функции f разлагается в классический ряд Фурье только по $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}$.

С помощью функции
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,T), \\ 0, & x = 0,\ x = \pm T, \\ -f(-x), & x \in (-T,0), \end{cases}$$
которая является нечетной, аналогично рассуждая, можно получить разложение функции f в ряд Фурье только по функциям $\sin\dfrac{k\pi x}{T}$, $k \in \mathbb{N}$ (соответственно, по $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, если $T = \pi$), в точках непрерывности функции f, содержащихся в $(0,T)$. К этим точкам можно присоединить точки 0 и T, если в них функция f равна нулю.

Пример 5.3. Функцию $f(x) = x$ разложить по косинусам кратных дуг на отрезке $[0,\pi]$.

■ Пусть
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\pi], \\ -x, & x \in [-\pi,0). \end{cases}$$
Тогда $\widetilde{f}(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$, и функция $\widetilde{f}$ является четной, 2π—периодической, непрерывной, кусочно дифференцируемой. Поэтому для всех $x \in [-\pi,\pi]$ имеет место равенство $\widetilde{f}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, в котором
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\ dx = \pi\,.$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos kx\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} \quad 0 & , \ k = 2n, \\ -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2} & , \ k = 2n-1, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Так как $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, \pi]$, то

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \ \forall\, x \in [0, \pi].$$

Заметим, что $f(0) = 0$, поэтому $0 = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$. Отсюда следует, что $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. □

Пример 5.4. Найти и исследовать на сходимость ряд Фурье 2π— периодической функции

$$f(x) = -\ln|\sin\frac{x}{2}|, \ x \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

■ Прежде всего заметим, что данная функция является четной, 2π-периодической, дифференцируемой на $\mathbb{R} \setminus \{2\pi k, \, k \in \mathbb{Z}\}$, а, значит, и на множестве $G_0 = [-\pi, 0) \bigcup (0, \pi]$, абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Ее график на множестве G_0 имеет вид, представленный на рисунке 5.1.

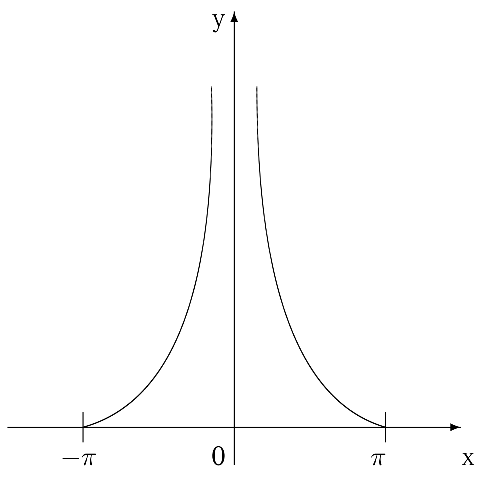


Рис. 5.1: График функции $y = -\ln|\sin\dfrac{x}{2}|$.

Поэтому для всех $x \in G_0$, а в силу 2π—периодичности, для всех $x \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ \text{ где}$$

$$a_0=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{x}{2}\,dx=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\frac{1}{2}\sin x)\,dx=$$

$$=\ln 2-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\ln 2-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\sin\frac{t}{2}\,dt=\ln 2+\frac{a_0}{2}.$$

Таким образом, $a_0=2\ln 2$. Далее, для всех $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=-\frac{2\sin nx}{\pi\,n}\,\ln\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx\,\cos\frac{x}{2}}{\pi\,n\,\sin\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx=\frac{1}{2\pi\,n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(D_n(x)+D_{n-1}(x))\,dx=\frac{1}{n}.$$

Здесь $D_n(x)$ — ядро Дирихле, и для получения последнего равенства использована формула (5.12). Таким образом,

$$-\ln|\sin\frac{x}{2}|=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\ \ x\neq 2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Полагая $x=\pi$, получим, что $\ln 2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. $\square$

5.7 Разложение $\frac{1}{\sin x}$ и $\operatorname{ctg} x$ на простые дроби

Проведем разложение функции $\cos\alpha x$, $\alpha\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$, в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$. Так как функция $\cos\alpha x$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то $\cos\alpha x\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$. Поскольку она дифференцируема на $[-\pi,\pi]$ и $\cos\alpha\pi=\cos(-\alpha\pi)$, то ее ряд Фурье сходится на $[-\pi,\pi]$ к $f(x)$, а его сумма является 2π-периодической функцией. Учитывая четность функции $\cos\alpha x$ получаем, что

$$\cos\alpha x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,\ x\in[-\pi,\pi],\ \ \text{где}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\alpha x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha-n)x)\,dx=$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha+n}+\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha-n}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)=\frac{(-1)^n\,2\alpha\,\sin\alpha\pi}{\pi\,(\alpha^2-n^2)},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

то есть

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\alpha}{(\alpha^2-n^2)}\right)\cos nx\right),\ x\in[-\pi,\pi]. \quad (5.19)$$

В частности, если $x=0$, то

$$1=\sin\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\right)\right),$$

или, учитывая, что $\alpha\notin\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{\sin\alpha\pi}=\dfrac{1}{\alpha\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\right)$. Поскольку это представление верно для любых $\alpha\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$, полагая $\alpha\pi=x$, $x\notin\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$, окончательно получим:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\right).$$

Если в равенстве (5.19) положить $x=\pi$, то для всех $\alpha\notin\mathbb{Z}$

$$\cos\alpha\pi=\sin\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\right)\cos n\pi\right)=$$

$$=\sin\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\right)\right),$$

то есть $\operatorname{ctg} t=\dfrac{1}{t}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2)}\right)$, $\forall\, t\notin\{n\pi:n\in\mathbb{Z}\}$.

5.8 Ядра и многочлены Фейера

Пусть $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Последнее условие, как уже отмечалось ранее, обеспечивает продолжение функции f на множество $\mathbb{R}$ по закону 2π—периодичности. При указанных ограничениях частичные суммы классического ряда Фурье функции f имеют интегральное представление через ядра Дирихле $D_n(t)$:

$$S_n^f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

где

$$D_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}, & x\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\},\\ n+\dfrac{1}{2}, & x=0,\end{cases}\quad ,\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{5.20}$$

Введем в рассмотрение тригонометрические многочлены

$$\sigma_n^f(x)=\frac{S_0^f(x)+S_1^f(x)+\dots+S_n^f(x)}{n+1},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

которые называются n-ыми частичными суммами Фейера для классического ряда Фурье функции f. При этом, как легко видеть,

$$\sigma_n^f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)dt,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{D_0(t)+D_1(t)+\dots+D_n(t)}{n+1},\quad t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Функции $\Phi_n(t)$ называют ядрами Фейера.

Лемма 5.14. *Ядра Фейера обладают следующими свойствами:*

1) $\Phi_n(t)$, $n\in\mathbb{N}_0$, *— четные,* 2π*—периодические, непрерывно дифференцируемые на* $\mathbb{R}$ *функции;*

2) $\Phi_n(t)\geq 0,\ \forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}_0$*;*

3) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1,\ \forall n\in\mathbb{N}_0$*;*

4) $\Phi_n(t)\overset{\delta\leq|t|\leq\pi}{\rightrightarrows}0$ *при* $n\to\infty$*,* $\forall\,\delta\in(0,\pi)$.

■ Свойства 1) и 3) являются следствием леммы 5.10. Из представления (5.20) следует, что

$$(n+1)\Phi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}2\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\,\sin\frac{t}{2}=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}\Big(1-\cos(n+1)t\Big)=\frac{\sin^2\dfrac{n+1}{2}t}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\geq 0,\ \forall\, t\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

$$\Phi_n(0)=\frac{\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1}=\frac{n+1}{2},\ n\in\mathbb{N}_0,$$
то есть имеет место свойство 2).

Докажем свойство 4). Так как для всех $t\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$, при любом $\delta\in(0,\pi)$, $\Phi_n(t)=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$, то

$$0\le\sup_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)\le\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

В силу критерия равномерной сходимости функциональной последовательности (теоремы 2.4) $\Phi_n(t)\overset{\delta\le|t|\le\pi}{\rightrightarrows}0$ при $n\to\infty$. □

Теорема 5.11 (Фейера). *Если $f\in C([-\pi,\pi])$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то*

$$\sigma_n^f(x)\overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows}f(x) \text{ при } n\to\infty,$$

то есть последовательность сумм Фейера для классического ряда Фурье функции f равномерно сходится к функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$
.

■ Фиксируем $\varepsilon>0$. При указанных ограничениях на функцию f можно считать 2π—периодической и непрерывной на множестве $\mathbb{R}$. Оценим на $[-\pi,\pi]$ величину
$$\gamma_n(x)=|f(x)-\sigma_n^f(x)|.$$
Воспользовавшись свойствами 2) и 3) ядер Фейера, получим, что

$$\gamma_n(x)=\frac{1}{\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x+t))\Phi_n(t)dt\Big|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)dt,$$
$$x\in[-\pi,\pi],\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Заметим, что если $t\in[-\pi,\pi]$, то $x+t\in[-2\pi,2\pi]$, но f непрерывна, а, значит, и равномерно непрерывна на отрезке $[-2\pi,2\pi]$. Поэтому по числу $\varepsilon>0$ найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\pi)$ такое, что

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall\,x',x''\in[-2\pi,2\pi]:|x'-x''|<\delta.$$

В последнем интеграле разобьем отрезок интегрирования $[-\pi,\pi]$ на три отрезка $[-\pi,-\delta/2]$, $[-\delta/2,\delta/2]$, $[\delta/2,\pi]$ и оценим сверху каждое слагаемое. В силу выбора δ и того, что $|x-(x-t)|=|t|\le\delta/2<\delta$, используя свойства определенного интеграла, получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} |f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\Phi_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и 2π—периодична, то f ограничена на $\mathbb{R}$, то есть $\exists\, M>0\ :\ |f(x)|\le M,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta/2}^{\pi} |f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta/2}^{\pi}(|f(x)|+|f(x+t)|)\Phi_n(t)dt \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_{\delta/2}^{\pi}\Phi_n(t)dt.$$

В силу свойства 4) ядер Фейера

$$\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N} : |\Phi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{6M},\ \forall\, n>n_1,\ \forall\, t\in[\delta/2,\pi].$$

Поэтому для всех $n>n_1$ и всех $x\in[-\pi,\pi]$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta/2}^{\pi} |f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)dt \le \frac{2M}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{6M}\cdot\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично, $\exists\, n_2 = n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N} : |\Phi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{6M},\ \forall n>n_2,\ \forall\, t\in[-\pi,-\delta]$, а, значит, для всех $n>n_2$ и всех $x\in[-\pi,\pi]$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta/2} |f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, n_0=\max\{n_1,n_2\} : \forall\, n>n_0,\ \forall\, x\in[-\pi,\pi]$

$$|f(x)-\sigma_n^f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

то есть $\sigma_n^f(x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $f\in C([-\pi,\pi])$ и является 2π—периодической функцией. Если классический ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0\in\mathbb{R}$, то его сумма равна $f(x_0)$.*

■ Пусть классический ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$, то есть сходится числовая последовательность $\{S_n^f(x_0)\}$, где S_n^f

— n-ая частичная сумма ряда Фурье. Пусть $\lim S_n^f(x_0) = A \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой Коши о пределе средних арифметических:

если числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim a_n = a$, то тот же предел имеет и последовательность $\left\{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\}$.

Тогда $\lim \sigma_n^f(x_0) = A$. Но по теореме Фейера $\lim \sigma_n^f(x_0) = f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = A$. $\square$

В силу 2π—периодичности функции f утверждение имеет место в любой точке $x_0 + 2\pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Следствие 2. *Если $f \in C([-\pi, \pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$, и классический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, то его сумма равна $f(x)$, то есть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

5.9 Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации

Прежде всего напомним, что тригонометрическими многочленами n-го порядка называются функции вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \text{ где } a_n^2 + b_n^2 > 0,$$

а алгебраическими многочленами n-ой степени — функции вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_n \neq 0.$$

Теорема 5.12 (2-ая аппроксимационная теорема Вейерштрасса)**.** *Если $f \in C([-\pi, \pi])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что*

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon,$$

то есть функцию f можно равномерно приблизить с любой степенью точности на отрезке $[-\pi, \pi]$ тригонометрическим многочленом.

■ Утверждение следует из теоремы Фейера. Так как $\sigma_n^f(x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f(x) - \sigma_n^f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n > N, \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

Если положить $T(x) = \sigma_{n_0}^f(x)$, где $n_0 > N$, то $T(x)$ — тригонометрический многочлен, для которого выполняется утверждение теоремы. $\Box$

Следствие 1. *Любую непрерывную на $\mathbb{R}$, 2π—периодическую функцию можно с любой степенью точности равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-T(x)| < \varepsilon$.*

Следствие 2. *Если $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(\pi) = f(-\pi)$, то существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.*

Теорема 5.13 (1-ая аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Если $f \in C([a,b])$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой алгебраический многочлен $P(x)$, что $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)| < \varepsilon$, то есть функцию f можно равномерно приблизить с любой степенью точности на отрезке $[a,b]$ алгебраическим многочленом.*

■ Доказательство теоремы проведем в три этапа.

1). Пусть сначала $[a,b] = [-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. В силу теоремы 5.12 по любому $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\ a_{n_0}^2 + b_{n_0}^2 > 0,$$

для которого выполняется неравенство $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x) - T(x)| < \varepsilon/2$. Но, как известно, для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Так как эти степенные ряды равномерно сходятся на любом отрезке, то они сходятся и на отрезке $[-n_0\pi, n_0\pi]$. Пусть $N = N(\varepsilon)$ такое натуральное число, что для всех $n > N$ и всех $x \in [-n_0\pi, n_0\pi]$

$$\Bigl|\cos x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2T_0}, \quad \Bigl|\sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2T_0},$$

где $T_0 = \sum\limits_{k=1}^{n_0}(|a_k| + |b_k|)$. Зафиксируем некоторое натуральное число $p_0 > N$ и положим

$$A_{p_0}(x) = \sum_{k=0}^{p_0}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \ \text{ и } \ B_{p_0}(x) = \sum_{k=0}^{p_0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Так как $kx \in [-n_0\pi, n_0\pi]$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $k = 1, 2, \ldots, n_0$, то

$$|\cos kx - A_{p_0}(kx)| < \frac{\varepsilon}{2T_0}, \quad |\sin kx - B_{p_0}(kx)| < \frac{\varepsilon}{2T_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x) - \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \Big(a_k A_{p_0}(kx) + b_k B_{p_0}(kx) \Big) \Big) \right| \leq \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - T(x)| +$$

$$+ \max_{x\in[-\pi,\pi]} \sum_{k=1}^{n_0} \Big(|a_k| |\cos kx - A_{p_0}(kx)| + |b_k| |\sin kx - B_{p_0}(kx)| \Big) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2T_0} \sum_{k=1}^{n_0} (|a_k| + |b_k|) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и алгебраический многочлен $P(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \Big(a_k A_{p_0}(kx) + b_k B_{p_0}(kx) \Big)$ является искомым.

2). Пусть теперь $f(x) \in C([-\pi, \pi])$ и $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}\, x$. Очевидно, что $g(x) \in C([-\pi, \pi])$, $g(\pi) = g(-\pi)$. В силу предыдущего

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, P_1(x) : \max_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - P_1(x)| < \varepsilon,$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, P_1(x) : \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}\, x - P_1(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $P(x) = \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}\, x + P_1(x)$. Тогда $P(x)$ — алгебраический многочлен и $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

3). Наконец, пусть $f(x) \in C([a, b])$, $[a, b] \neq [-\pi, \pi]$, и

$$\varphi(t) = \frac{b-a}{2\pi}\, t + \frac{b+a}{2},\ t \in [-\pi, \pi].$$

Функция φ непрерывна, возрастает на $[-\pi, \pi]$, $\varphi(-\pi) = a$, $\varphi(\pi) = b$, поэтому, в силу теоремы Дарбу об образе отрезка при непрерывном отображении, $\varphi : [-\pi, \pi] \to [a, b]$ и биективно.

Положим $\widetilde{f} = f \circ \varphi$. Тогда $\widetilde{f} \in C([-\pi, \pi])$ и, согласно части 2), для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $\widetilde{P}$ такой, что $\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |\widetilde{f}(t) - \widetilde{P}(t)| < \varepsilon$, а значит

$$\max_{x\in[a,b]} |\widetilde{f}(\varphi^{-1}(x)) - \widetilde{P}(\varphi^{-1}(x))| < \varepsilon.$$

Поскольку $f(x) = \widetilde{f}(\varphi^{-1}(x))$, $\forall\, x \in [a,b]$, а $\varphi^{-1}(x)$ — линейная функция, то $P(x) = \widetilde{P}(\varphi^{-1}(x))$ является алгебраическим многочленом и

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \ \square$$

Следствие. *Если $f \in C([a,b])$, то существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.*

5.10 Теорема Ляпунова

Ранее в теореме 5.5 для функции f из класса $\widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-T,T]}$ была установлена равносильность сходимости тригонометрического ряда Фурье к функции f на отрезке $[-T,T]$ в смысле средних квадратичных и выполнения равенства Парсеваля. Но условия, когда хотя бы одно из этих утверждений имеет место, указаны не были.

Теорема 5.14 (Ляпунова). *Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$ и $S_n^f(x)$ — n-ые частичные суммы классического ряда Фурье функции f, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n^f(x))^2\, dx = 0,$$

то есть классический ряд Фурье функции f сходится к f в смысле средних квадратичных на отрезке $[-\pi,\pi]$.

■ Доказательство теоремы проведем в три этапа.

1). Пусть сначала $f \in C([-\pi,\pi])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Согласно теореме Фейера

$\sigma_n^f \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ |f(x) - \sigma_n^f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}},\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in [-\pi,\pi].$$

Поэтому для всех $n > N$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n^f(x))^2\ dx \le \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Учитывая минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье функции f, получаем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n^f(x))^2\ dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n^f(x))^2\ dx < \varepsilon,\ \forall n > N.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n^f(x))^2\,dx=0.$

2). Пусть $f\in\mathcal{R}_{[-\pi,\pi]}$. Без ограничения общности можно считать, что $f(-\pi)=f(\pi)$ (изменение значения функции в конечном числе точек не изменит ее интегрируемости на $[-\pi,\pi]$, величины ее коэффициентов Фурье и среднего квадратичного отклонения $S_n^f(x)$ от $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$). Можно считать, что $f(x)$ не является постоянной на $[a,b]$, так как случай непрерывной функции на $[-\pi,\pi]$ был рассмотрен в части 1).

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Пусть M — колебание функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, то есть $M=\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}f(x)-\inf\limits_{x\in[-\pi,\pi]}f(x)$. Так как $f\in\mathcal{R}_{[-\pi,\pi]}$, то существует такое разбиение $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[-\pi,\pi]$, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k^f\triangle x_k<\dfrac{\varepsilon}{16M}$, где ω_k^f — колебание функции f на отрезке разбиения $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$.

Соединим последовательно точки $M_k(x_k,f(x_k))$, $k=\overline{0,n}$ прямолинейными отрезками, получим непрерывную ломаную L, каждое звено M_kM_{k+1} которой задается линейной функцией

$$\varphi_k(x)=f(x_k)+\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\,(x-x_k)\,,\ k=\overline{0,n-1}.$$

Функции $\varphi_k(x)$, $k=\overline{0,n-1}$ определяют функцию $\varphi:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ такую, что $\varphi(x)=\varphi_k(x)$, $x\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$. Тогда $\varphi\in C([-\pi,\pi])$, $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$. Так как для всех $x\in[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\varphi(x)+(f(x)-\varphi(x)),$$

то, полагая $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, получим равенство:

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),\ x\in[-\pi,\pi].$$

Поскольку φ, $\psi\in\mathcal{R}_{[-\pi,\pi]}$, то n-ые частичные суммы классических рядов Фурье этих функций и функции f удовлетворяют равенствам: $S_n^f(x)=S_n^\varphi(x)+S_n^\psi(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, $n\in\mathbb{N}_0$. Отсюда, используя известное неравенство $2ab\le a^2+b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, получим, что

$$\gamma_n^f=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n^f(x))^2\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left((\varphi(x)-S_n^\varphi(x))+(\psi(x)-S_n^\psi(x))\right)^2dx=$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) - S_n^{\varphi}(x))^2\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} (\psi(x) - S_n^{\psi}(x))^2\, dx +$$

$$+ 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) - S_n^{\varphi}(x))(\psi(x) - S_n^{\psi}(x))\, dx \le$$

$$\le 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) - S_n^{\varphi}(x))^2\, dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\psi(x) - S_n^{\psi}(x))^2\, dx.$$

Поскольку $\varphi \in C([-\pi, \pi])$ и $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, то в силу части 1),

$$\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \gamma_n^{\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) - S_n^{\varphi}(x))^2\, dx < \frac{\varepsilon}{4}, \forall\, n > N.$$

Так как $\psi \in \mathcal{R}_{[-\pi,\pi]}$, то $\psi \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$ и, применяя тождество Бесселя, получим:

$$\gamma_n^{\psi} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\psi(x) - S_n^{\psi}(x)\right)^2\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} \psi^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - \varphi_k(x))^2\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f(x_k) - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\,(x - x_k) \right)^2\, dx.$$

Но для любого x из $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$,

$$\left| (f(x) - f(x_k)) - (f(x_{k+1}) - f(x_k))\, \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right| \le$$

$$\le \omega_k^f \cdot \left(1 + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \le 2\, \omega_k^f,$$

а значит

$$\gamma_n^{\psi} \le \sum_{k=0}^{n-1} 4(\omega_k^f)^2 \triangle x_k \le 4M \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^f \triangle x_k < 4M \cdot \frac{\varepsilon}{16M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Итак, окончательно, $\gamma_n^f \le 2\left(\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon, \forall\, n > N$, последнее означает, что $\lim\limits_{n\to 0} \gamma_n^f = 0$.

3). Пусть, наконец, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$. Для простоты будем считать, что f имеет на $[-\pi,\pi]$ единственную особую точку π. Так как $f^2 \in \widetilde{\mathcal{R}}_{[-\pi,\pi]}$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,L \in (0,\pi) : 0 \le \int\limits_{\eta}^{\pi} f^2(x)\;dx < \frac{\varepsilon}{4},\;\forall \eta \in (L,\pi).$$

Зафиксируем $\eta_0 \in (L,\pi)$ и положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi,\eta_0) \\ 0, & x \in [\eta_0,\pi] \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi,\eta_0) \\ f(x), & x \in [\eta_0,\pi] \end{cases}.$$

Тогда $f_1 \in \mathcal{R}_{[-\pi,\pi]}$, а, значит, в силу части 2),

$$\exists\,N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \gamma_n^{f_1} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_1(x) - S_n^{f_1}(x)\right)^2\;dx < \frac{\varepsilon}{4},\;\forall\,n > N.$$

Функция $f_2 \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$ и в силу выбора точки η_0 из тождества Бесселя для функции $f_2(x)$ получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n^{f_2} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_2(x) - S_n^{f_2}(x))^2\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_2^2(x)\;dx = \int\limits_{\eta_0}^{\pi} f^2(x)\;dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, то как и при доказательстве части 2), для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n^f \le 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_1(x) - S_n^{f_1}(x))^2\,dx + 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_2(x) - S_n^{f_2}(x))^2\,dx = 2\left(\gamma_n^{f_1} + \gamma_n^{f_2}\right).$$

Поэтому $\gamma_n^f < 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{4} + 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$, для всех $n > N$, а значит

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n^f(x))^2\,dx = 0. \;\square$$

Следствие. *Если $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$, то для функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет место равенство Парсеваля* (5.9).

Пример 5.5. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2 - x + 1$ на отрезке $[-1,1]$, и выписать для нее соответствующее равенство Парсеваля.

■ Отрезку $[-1,1]$ соответствует ортогональная тригонометрическая система функций: $1, \sin\pi x, \cos\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \ldots, \sin n\pi x, \cos n\pi x, \ldots$.

Так как $f \in C([-1;1])$, то $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-1,1]}$, и функции f соответствует тригонометрический ряд Фурье $f(x) \sim \dfrac{a_0^f}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^f \cos k\pi x + b_k^f \sin k\pi x$. Найдем коэффициенты Фурье функции f:

$$a_0^f = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - x + 1)\ dx = 2\int\limits_{0}^{1} (x^2 + 1)\ dx = \frac{8}{3},$$

$$a_k^f = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - x + 1)\cos k\pi x\ dx = 2\int\limits_{0}^{1} (x^2 + 1)\cos k\pi x\, dx =$$

$$= 2\Big((x^2+1)\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \Big(2x\ \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\Big|_0^1 - \frac{2}{k^3\pi^3}\ \sin k\pi x\Big|_0^1\Big)\Big) = \frac{4\,(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

$$b_k^f = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - x + 1)\sin k\pi x\ dx = -2\int\limits_{0}^{1} x\sin k\pi x\ dx =$$

$$= -2\Big(-x\ \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{k^2\pi^2}\ \sin k\pi x\Big|_0^1\Big) = \frac{2\,(-1)^k}{k\pi}.$$

Следовательно, $f(x) \sim \dfrac{4}{3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{k^2\pi^2}\,(-1)^k \cos k\pi x + \dfrac{2\,(-1)^k}{k\pi}\sin k\pi x.$

Поскольку $f \in C^1([-1;1])$, то в силу признака Липшица полученный ряд сходится на множестве $\mathbb{R}$, его сумма $S(x)$ является 2—периодической функцией, и

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1), \\ \dfrac{f(-1+0) + f(1-0)}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция f разлагается в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-1,1)$, то есть для всех $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\,(-1)^k \cos k\pi x + \frac{2(-1)^k}{k\pi}\ \sin k\pi x. \tag{5.21}$$

Полагая в равенстве (5.21) $x = 0$, получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Учитывая, что сумма ряда Фурье функции f в точке $x = 1$ равна 2, находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Складывая две полученные суммы, легко получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Так как, очевидно, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-1,1]}$, то в силу следствия из теоремы Ляпунова для функции f имеет место равенство Парсеваля (5.9):

$$\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \frac{(a_0^f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k^f)^2 + (b_k^f)^2).$$

Так как $a_0^f = \dfrac{8}{3}$, а $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1}(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx =$

$$= 2\int\limits_{0}^{1}(x^4 + 3x^2 + 1)\,dx = \frac{22}{5},$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{22}{5} - \frac{32}{9}\right) = \frac{19}{90}. \ \square$$

Теорема 5.15 (о единственности классического ряда Фурье для непрерывной функции)**.** *Пусть $f, g \in C([-\pi,\pi])$. Для того, чтобы $f(x) = g(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали соответствующие коэффициенты классических рядов Фурье функций f и g, то есть*

$$a_k^f = a_k^g,\ k \in \mathbb{N}_0,\ b_k^f = b_k^g,\ k \in \mathbb{N}.$$

■ Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, и предположим, что существует точка $x_0 \in [-\pi,\pi]$ такая, что $\varphi(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции φ на $[-\pi,\pi]$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,dx > 0.$$

Но коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для функции φ равны нулю и, следовательно, нарушается равенство Парсеваля для функции φ. Поэтому предположение неверно и $\varphi(x) \equiv 0$. $\square$

Следствие. *Если $f \in C([-\pi,\pi])$ и $a_k^f = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $b_k^f = 0$, $k \in \mathbb{N}$, то $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$.*

5.11 Дифференцирование и интегрирование тригонометрического ряда Фурье

Теорема 5.16. *Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$, функция f дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, причем $f' \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$. Тогда классический ряд Фурье функции f' получается из классического ряда Фурье функции f почленным дифференцированием.*

■ Пусть a_n, b_n — коэффициенты классического ряда Фурье функции f, a'_n, b'_n — коэффициенты классического ряда Фурье функции f'. Так как $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \cos kx, & du = -k\sin kx\,dx \\ dv = f'(x)\,dx, & v = f(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos kx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \right) = k\,b_k,\ k \in \mathbb{N},$$

$$b'_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\sin kx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \right) =$$

$$= -k\,a_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $f'(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n\cos nx + b'_n\sin nx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)'. \ \square$$

Замечание. *Отметим, что в теореме 5.16 не обсуждается вопрос о сходимости классических рядов Фурье функций f и f'.*

Следствие. *Пусть $p \geq 1$, $f \in C^{(p-1)}([-\pi,\pi])$, функция f 2π—периодична, функция $f^{(p-1)}$ дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, причем $f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$. Тогда классический ряд Фурье функции $f^{(p)}$ получается из классического ряда Фурье функции f его p-кратным почленным дифференцированием.*

Теорема 5.17 (о скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье). *Пусть $p \geq 1$, $f \in C^{(p-1)}([-\pi, \pi])$, функция f 2π—периодична, p раз дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, и $f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$. Тогда коэффициенты классического ряда Фурье функции f удовлетворяют неравенству*

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon_n^{(p)}}{n^p}, \quad |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n^{(p)}}{n^p},\ n \in \mathbb{N},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(p)} \to 0$. Если же $f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$, то выполняются те же оценки для коэффициентов Фурье a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n^{(p)})^2$ сходится.

■ При $p = 1$ $\quad f \in C([-\pi, \pi])$ и $f' \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$. В силу теоремы 5.16

$$a'_0 = 0; \quad b_k = \frac{a'_k}{k}, \quad a_k = -\frac{b'_k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Согласно теореме Римана $a'_k \to 0$ и $b'_k \to 0$ при $k \to \infty$. Положим $\varepsilon_k^{(1)} = \sqrt{(a'_k)^2 + (b'_k)^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\varepsilon_k^{(1)} \to 0$ при $k \to \infty$ и

$$|a_k| = \frac{|b'_k|}{k} \leq \frac{\varepsilon_k^{(1)}}{k}, \quad |b_k| = \frac{|a'_k|}{k} \leq \frac{\varepsilon_k^{(1)}}{k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Если же $f' \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$, то $f' \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, а значит выполнены те же оценки для коэффициентов a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$. По следствию теоремы Ляпунова для функции f' имеет место равенство Парсеваля 5.9, а поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}((a'_k)^2 + (b'_k)^2)$ сходится, то есть сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(1)})^2$.

Пусть теперь $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$. По теореме 5.16 и следствию к ней

$$f^{(p)}(x) \sim \frac{a_0^{(p)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(p)} \cos kx + b_k^{(p)} \sin kx), \text{ где}$$

$$a_k^{(p)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x) \cos kx\ dx,\ k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x) \sin kx\ dx,\ k \in \mathbb{N},$$

и

$$|a_k| = \frac{|b_k^{(1)}|}{k} = \frac{|a_k^{(2)}|}{k^2} = \dots = \begin{cases} \dfrac{|a_k^{(p)}|}{k^p}, & \text{если } p \text{ — четное число,} \\ \dfrac{|b_k^{(p)}|}{k^p}, & \text{если } p \text{ — нечетное число,} \end{cases}$$

$$|b_k| = \frac{|a_k^{(1)}|}{k} = \frac{|b_k^{(2)}|}{k^2} = \dots = \begin{cases} \dfrac{|a_k^{(p)}|}{k^p}, & \text{если } p \text{ - нечетное число,} \\ \dfrac{|b_k^{(p)}|}{k^p}, & \text{если } p \text{ - четное число.} \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_k^{(p)} = \sqrt{(a_k^{(p)})^2 + (b_k^{(p)})^2}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$|a_k| \leq \frac{\varepsilon_k^{(p)}}{k^p}, \quad |b_k| \leq \frac{\varepsilon_k^{(p)}}{k^p}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Если $f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^{(p)} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k^{(p)} = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k^{(p)} = 0$. Если же $f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$, то в силу равенства Парсеваля для функции $f^{(p)}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}((a_k^{(p)})^2 + (b_k^{(p)})^2)$ сходится, то есть сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(p)})^2$. $\square$

Следствие. *Пусть функция f удовлетворяет условиям:*

1) $f \in C^{(p-1)}([-\pi,\pi])$, $p \in \mathbb{N}$;
2) $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$;
3) $\exists\, f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$.

Тогда для коэффициентов Фурье функции f по классической тригонометрической системе справедливы неравенства

$$|a_k| \leq \frac{\varepsilon_k^{(p)}}{k^p}, \quad |b_k| \leq \frac{\varepsilon_k^{(p)}}{k^p}, \ k \in \mathbb{N}, \text{ где ряд } \sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(p)})^2 \text{ сходится.}$$

Теорема 5.18 (о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье)**.** *Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f' \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$. Тогда классический ряд Фурье функции f абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[-\pi,\pi]$ к функции f.*

$\blacksquare$ По следствию теоремы 5.17 $|a_k| \leq \dfrac{\varepsilon_k^{(1)}}{k}$, $|b_k| \leq \dfrac{\varepsilon_k^{(1)}}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(1)})^2$ сходится, поэтому для всех $x \in [-\pi,\pi]$

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \leq \varepsilon_k^{(1)} \cdot \frac{2}{k} \leq (\varepsilon_k^{(1)})^2 + \frac{1}{k^2}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(1)})^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ сходятся, то классический ряд Фурье для функции f абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[-\pi,\pi]$ по признаку Вейерштрасса. По следствию 1 к теореме Фейера он сходится к функции f. $\square$

Следствие 1. *Пусть функция f удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f \in C^{(p-1)}([-\pi, \pi])$ $(p \geq 2)$ и 2π—периодична;
2) $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi),\ k = 0, 1, \ldots, p-1;$
3) $\exists\, f^{(p)} \in \widetilde{\mathcal{R}}^2_{[-\pi,\pi]}$.

Тогда классические ряды Фурье для функций $f^{(k)}$, $k = \overline{1, p-1}$, получаются из классического ряда Фурье функции f его k кратным почленным дифференцированием, причем полученные ряды абсолютно и равномерно сходятся на $[-\pi, \pi]$ к функции $f^{(k)}$.

Следствие 2. *Если функция f удовлетворяет условиям следствия 1, то*

$$|f(x) - S_n^f(x)| \leq \frac{\eta_n}{n^{p-1/2}},\ \forall n > 1,$$

где $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $S_n^f(x)$ — n-ые частичные суммы классического ряда Фурье функции f.

■ Поскольку классический ряд Фурье функции f равномерно сходится к f на отрезке $[-\pi, \pi]$, то для всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

и

$$\left|f(x) - S_n^f(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leq$$

$$\leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k^{(p)}}{k^p} \leq 2\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(p)})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}}\ .$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(p)})^2$ сходится, то $\gamma_n = \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{(p)})^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, для любого $n > 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} \leq \int\limits_n^{+\infty}\frac{dx}{x^{2p}} = \frac{1}{(2p-1)n^{2p-1}}.$$

Поэтому для всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$|f(x) - S_n^f(x)| \leq \gamma_n \cdot \sqrt{\frac{1}{(2p-1)n^{2p-1}}} = \gamma_n\,\frac{1}{\sqrt{2p-1}} \cdot \frac{1}{n^{p-1/2}}.$$

Полагая $\eta_n = \dfrac{\gamma_n}{\sqrt{2p-1}}$, получаем нужное неравенство. $\square$

Замечание. Полученную в следствии оценку для $|f(x)-S_n^f(x)|$ можно существенно уточнить. Имеет место следующий результат, который мы приводим без доказательства.

Теорема 5.19. *Пусть функция f 2π—периодична, непрерывна на $[-\pi,\pi]$, удовлетворяет в каждой точке отрезка $[-\pi,\pi]$ односторонним условиям Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1]$. Тогда ее классический ряд Фурье равномерно сходится к функции f на $\mathbb{R}$ и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n^f(x) - f(x)| \le C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}\,, \quad \forall\, n > 1.$$

Обратимся к задаче почленного интегрирования классического ряда Фурье. Наличие в ряде Фурье константы $a_0/2$ не позволяет получить ряд Фурье, но остается задача о возможности почленного интегрирования функционального ряда и о характере сходимости ряда, полученного в результате почленного интегрирования.

Теорема 5.20 (о почленном интегрировании классического ряда Фурье)**.** *Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, и $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ — классический ряд Фурье функции f. Пусть $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt,\ x \in [-\pi,\pi]$. Тогда*

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kx + b_k\,\frac{1-\cos kx}{k}\right),\ x\in[-\pi,\pi].$$

Ряд в правой части абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[-\pi,\pi]$ и получается почленным интегрированием классического ряда Фурье функции f.

■ Рассмотрим функцию

$$\phi(x) = \int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)\,dt = F(x) - \frac{a_0 x}{2},\ x\in[-\pi,\pi].$$

Функция $\phi(x)$ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и для всех x из $[-\pi,\pi]$ $\phi'(x) = f(x) - \dfrac{a_0}{2}$. Кроме того,

$$\phi(\pi)-\phi(-\pi) = \int\limits_0^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt - \int\limits_0^{-\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = 0.$$

Если A_k, B_k — коэффициенты Фурье функции ϕ по классической тригонометрической системе, то из формул, полученных при доказательстве теоремы 5.16 следует, что

$$A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k},\ k \in \mathbb{N}.$$

А поскольку функция ϕ удовлетворяет условиям теоремы 5.18, то

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \big),\ x \in [-\pi, \pi],$$

причем полученный ряд Фурье абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$. Чтобы найти A_0, в последнем равенстве положим $x = 0$ и получим абсолютно сходящийся числовой ряд

$$\phi(0) = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Так как по определению $\phi(0) = 0$, то $\dfrac{A_0}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$, и, следовательно, для всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k} (1 - \cos kx) \right).$$

Так как $F(x) = \dfrac{a_0 x}{2} + \phi(x)$, то для всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$\int\limits_0^x f(t)\, dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k} (1 - \cos kx) \right),$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно на отрезке $[-\pi, \pi]$. $\square$

Следствие. *Если $f \in C([-\pi, \pi])$ и $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$, то функция $F(x) = \displaystyle\int\limits_0^x f(t)\, dt$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $[-\pi, \pi]$ классический ряд Фурье:*

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right),\ x \in [-\pi, \pi],$$

в котором $A_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)\,dt=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$.

Замечание. Утверждение теоремы 5.20 можно получить и при условии, что $f\in\widetilde{\mathcal{R}}^1_{[-\pi,\pi]}$.

Пример 5.6. Пусть $f(x)=x,\ x\in[-\pi,\pi]$. Из доказанных теорем следует, что функция f разлагается на отрезке $[-\pi,\pi]$ в классический ряд Фурье:

$$x=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\,,\quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{5.22}$$

Функция $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ — одна из первообразных f на $[-\pi,\pi]$. А так как $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\;dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$, то, в силу следствия к теореме 5.20,

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{A_0}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx,\ \text{ где } A_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\;dx=\frac{\pi^2}{3}.$$

Поэтому $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{\pi^2}{6}+2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx,\ x\in[-\pi,\pi]$.

Пусть $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\pi^2}{6}$. Тогда $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\;dx=0$, и одной из первообразных функции $\varphi(x)$ является функция $\Phi(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{\pi^2x}{6}$. Поэтому

$$\frac{x^3}{6}-\frac{\pi^2x}{6}=\frac{A_0'}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\sin kx,\ x\in[-\pi,\pi].$$

Так как Φ — нечетная функция, то $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\;dx=0$, а, значит, $A_0'=0$, поэтому

$$\frac{x^3}{6}-\frac{\pi^2x}{6}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\sin kx,\ x\in[-\pi,\pi].$$

Заметим, что коэффициенты Фурье функции Φ по классической тригонометрической системе обладают следующим свойством:

$$|b_k^{\Phi}|=\frac{1}{k^3}=o\left(\frac{1}{k^2}\right),\ k\to\infty.$$

Пусть $G(x) = \Phi(x) + \dfrac{\pi^2 x}{6} = \dfrac{x^3}{6}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Из (5.22) следует, что
$$\frac{\pi^2 x}{6} = \frac{\pi^2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \ x \in [-\pi, \pi].$$
Поэтому
$$G(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\pi^2}{3k} \sin kx =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k^3} - \frac{\pi^2}{6k}\right) \sin kx, \ x \in [-\pi, \pi],$$
то есть $b_k^G = 2(-1)^k \left(\dfrac{1}{k^3} - \dfrac{\pi^2}{6k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $b_k^G = O\left(\dfrac{1}{k}\right) \to 0$ при $k \to \infty$ и не более того.

Учитывая, что $G(x) \in C([-\pi, \pi])$, но $G(-\pi) \neq G(\pi)$, заключаем, что условие $G(-\pi) = G(\pi)$ существенно для справедливости теоремы 5.18 об абсолютной и равномерной сходимости классического ряда Фурье.

5.12 Задания для самостоятельной работы

Если не оговорено другое, рассматриваются ряды Фурье по классической тригонометрической системе.

1. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi, \pi]$ и $f(x+\pi) = f(x)$. Доказать, что $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi, \pi]$ и $f(x+\pi) = -f(x)$. Доказать, что $a_0 = 0$, $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[0, \pi]$ и $f(\pi - x) = f(x)$. Доказать, что если функцию f разложить по косинусам, то $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, а если разложить по синусам, то $b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье 2π—периодической функции, график которой имеет центр симметрии в точках $(0,0)$ и $\left(\pm\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$?
5. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n^f, b_n^f и a_n^g, b_n^g функций f и g, если $f(-x) = g(x)$, $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$?
6. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n^f, b_n^f и a_n^g, b_n^g функций f и g, если $f(-x) = -g(x)$, $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$?

7. Пусть f — непрерывная, 2π-периодическая функция, a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье. Вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n функции

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt, \, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

8. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi,\pi]$ и 2π-периодична. Зная ее коэфффициенты Фурье a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}_0$, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n функции $f(x+h)$, где $h = const$.

9. Пусть f — 2π-периодическая функция, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi,\pi]$ и в точке x_0 из $[-\pi,\pi]$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0{+}0)$, $f(x_0{-}0)$. Доказать, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, где $\sigma_n^f(x)$ — суммы Фейера функции f.

10. Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $|f(x)| \le M, \forall x \in [-\pi,\pi]$. Доказать, что $|\sigma_n^f(x)| \le M$, $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

11. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^1[-\pi,\pi]$, 2π-периодична и имеет на отрезке $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ ограниченную производную. Доказать, что на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$ равномерно.

12. Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[0,\pi]$, $f'(x) \in \widetilde{\mathcal{R}}^2[0,\pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$. Доказать, что

$$\int\limits_0^\pi f^2(x)dx \le \int\limits_0^\pi (f'(x))^2 dx.$$

13. Доказать, что если классический тригонометрический ряд имеет подпоследовательность частичных сумм, равномерно сходящуюся на отрезке $[-\pi,\pi]$ к функции $f(x)$, то этот ряд является рядом Фурье функции f.

14. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции $f(x) = \pi x - x\,|x|$, выяснить, сходится ли соответствующий ей классический тригонометрический ряд Фурье равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.

15. Пусть $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, a_n^f, b_n^f $(n \in \mathbb{N})$ — коэффициенты Фурье функции f. Доказать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n^f| + |b_n^f|}{n}$ сходится.

16. Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$ и ее ряд Фурье сходится к функции $g(x)$ на $[-\pi,\pi]$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

17. Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, 2π-периодическая функция, a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье. Вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n, $n \in \mathbb{N}_0$ функции Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi,\ h = const.$$

18. Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$, 2π-периодична и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье по классической тригонометрической системе. Доказать, что если $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, то ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

19. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n\left((x-1)^n\right)}{dx^n},\ n = 0, 1, \dots,$$

образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1,1]$.

20. Пусть $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$, $\varphi_n(t) = \varphi(2^n t)$, $n = 0, 1, \dots$. Система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой Радемахера. Доказать, что она ортогональна на отрезке $[0,1]$.

21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ возрастающая последовательность всех положительных корней уравнения $\operatorname{ctg}\xi = c\xi$, c — константа. Доказать, что система $\left\{\cos\frac{\xi_n x}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на $[0,T]$.

22. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k| < +\infty,\ \lim a_n = 0.$$

Доказать, что на любом отрезке $[\varepsilon, 2T-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,T)$, равномерно сходятся тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{T},\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{T},$$

а на любом отрезке $[-T+\varepsilon, T-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,T)$, равномерно сходятся тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \sin\frac{\pi n x}{T},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \cos\frac{\pi n x}{T}.$$

Литература

[1] Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 2000.

[2] С. Банах. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1972.

[3] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях. — М.: Изд–во МГУ, 1991.

[4] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1. — М.: Высшая школа, 2000.

[5] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

[6] В. А. Зорич. Математический анализ, т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.

[7] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ, т. 1, 2. — М.: Изд–во МГУ, 1987.

[8] Т.И. Коршикова, Ю.А. Кирютенко, Л.И. Калиниченко, В.А. Савельев. Курс лекций по математическому анализу, I курс, 1-й семестр. — Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2006.

[9] Т.И. Коршикова, Л.И. Калиниченко, Ю.А. Кирютенко. Курс лекций по математическому анализу, I курс, 2-й семестр. — Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2007.

[10] Л.Д. Кудрявцев. Математический анализ, т.1, 2, 3. — М.: Высшая школа, 1973.

[11] С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1, 2. — М.: Наука, 1973.

[12] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, т. 3. — М.: Наука, 1966.

[13] Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И., Курс математического анализа. — М.: Изд-во МФТИ, 2000.

Оглавление