ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического анализа

Коршикова Т. И., Калиниченко Л. И., Кирютенко Ю. А.

Методические указания к практическим занятия по математическому анализу

I курс, 1-й семестр

Введение в анализ. Предел последовательности

Ростов-на-Дону
2007 год

Методические указания разработаны сотрудниками кафедры математического анализа Коршиковой Т. И., Калиниченко Л. И. , Кирютенко Ю. А.. В них рассматриваются методы решения типовых примеров, традиционно решаемых на практических занятиях по математическому анализу в первом семестре первого курса на отделениях «Математика» и «Механика». После каждого раздела приведены задачи для самостоятельной работы. В указаниях авторы существенно опираются на теоретический материал, изложенный в курсе лекций по математическому анализу [3], используют его определения и обозначения.

Ответственный редактор доктор физ.-мат. наук А. В. Абанин

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-мат. наук Ю. А. Кирютенко

Печатается в соответствии с решением кафедры математического анализа факультета «Математика, механика и компьютерные науки», протокол №8 от 17 апреля 2007 г.

1 Введение в анализ

1.1 Метод математической индукции

Прямым следствием определения множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел является принцип математической индукции. Пусть E — подмножество множества $\mathbb{N}$ и выполняются условия:

- $1 \in E$,
- вместе с числом x множеству E принадлежит число $x+1$.

Тогда $E = \mathbb{N}$.

Чтобы доказать справедливость некоторого предложения $A(n)$ для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, следует доказать, что предложение $A(n)$ верно для $n = 1$ и из предположения о справедливости предложения $A(n)$ доказать справедливость предложения $A(n+1)$, то есть

$$A(1) \text{ — истина, и } A(n) \Rightarrow A(n+1),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Такой метод доказательства называют методом математической индукции.

Иногда метод математической индукции применяют для доказательства справедливости предложения $A(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m > 1$. В этом случае изменяется первый шаг доказательства: проверяется справедливость предложения $A(m)$.

Чтобы познакомиться с методом математической индукции, рассмотрим несколько примеров разной степени сложности.

Пример 1. Доказать для всех $n \in \mathbb{N}$ равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■ Будем считать, что это равенство является предложением $A(n)$. Если $n = 1$, то равенство принимает вид: $1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, что верно. Поэтому $A(1)$ верно. Предположим, что $A(n)$ верно для $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость $A(n+1)$. Рассмотрим левую часть равенства $A(n+1)$. Имеем:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6(n+1)\right)}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}.$$

Последнее означает справедливость утверждения $A(n+1)$. Получили, что $A(n) \Rightarrow A(n+1), n \in \mathbb{N}$. В силу принципа математической индукции заключаем, что $A(n)$ справедливо на $\mathbb{N}$. $\square$

Пример 2. Доказать, что на $\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

■ Прежде всего заметим, что под символом $n!$ понимают произведение последовательных натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и называют $n-$факториалом; при этом считают, что $0! = 1$. Введенная таким образом функция определена на множестве $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обозначим предложенное равенство через $A(n)$.

Если $n = 1$, то имеем: $1 \cdot 1! = 2! - 1$, что верно. Поэтому $A(1)$ верно.

Предположим, что предложение $A(n)$ справедливо на элементе $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость $A(n+1)$. Левая часть предложения $A(n+1)$ может быть преобразована следующим образом:

$$\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!} + (n+1)(n+1)! =$$

$$= ((n+1)! - 1) + (n+1)(n+1)! = (n+1)!\,(1 + (n+1)) - 1 = ((n+1)+1)! - 1.$$

Значит $A(n+1)$ верно, то есть $A(n) \Rightarrow A(n+1), n \in \mathbb{N}$, и доказываемое равенство справедливо на $\mathbb{N}$. $\square$

Пример 3. Доказать, что $n^3 + 11n$ кратно 6 для всех $n \in \mathbb{N}$.

■ Обозначим утверждение через $A(n)$. Если $n = 1$, то $n^3 + 11n = 12$, поэтому $A(1)$ верно.

Допустим, что $A(n)$ справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и докажем справедливость $A(n+1)$.Преобразуем выражение $(n+1)^3 + 11(n+1)$, выделив $n^3 + 11n$. Имеем:

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 14n + 12 = (n^3 + 11n) + 3(n+1)n + 12.$$

Выражение $n^3 + 11n$ кратно 6, так как $A(n)$ верно; 12 делится на 6; $n \cdot (n+1)$ — произведение двух последовательных натуральных чисел, поэтому одно из них является четным и $3n(n+1)$ кратно 6. Сумма чисел, кратных 6, является кратной 6. Следовательно, $(n+1)^3 + 11(n+1)$ кратно 6, а значит $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, и $A(n)$ верно на $\mathbb{N}$. $\square$

Пример 4. Доказать, что $2^n > n^2, \forall n \geqslant 5$.

■ Утверждение обозначим через $A(n)$. Если $n = 5$, то имеем: $2^5 > 5^2$, то есть $32 > 25$, что верно. Поэтому $A(5)$ верно.

Предположим, что $A(n)$ верно при некотором $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 5$, то есть $2^n - n^2 > 0$. Докажем, что $2^{n+1} - (n+1)^2 > 0$. Имеем:

$$2^{n+1} - (n+1)^2 = 2\left(2^n - n^2\right) + 2n^2 - \left(n^2 + 2n + 1\right) = \\ = 2\left(2^n - n^2\right) + \left((n-1)^2 - 2\right). \quad (1)$$

Так как $A(n)$ верно, то $2^n - n^2 > 0$, поэтому первое слагаемое положительно; $n - 1 \geqslant 4$ при $n \geqslant 5$, а значит, $(n-1)^2 \geqslant 4^2 > 2$. Следовательно, второе слагаемое выражения (1) положительно и $A(n+1)$ верно, то есть $A(n) \Rightarrow A(n+1), n \in \mathbb{N}$. В силу принципа математической индукции утверждение верно для всех $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 5$. $\square$

1.2 Бином Ньютона

Из школьного курса алгебры известны формулы квадрата и куба суммы двух чисел a и b. Обобщением их является формула

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n, n \in \mathbb{N},$$

которую называют формулой бинома Ньютона, коротко ее записывают:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}b^k. \quad (2)$$

Обозначим равенство (2) через $A(n), n \in \mathbb{N}$, и докажем его справедливость на $\mathbb{N}$ методом математической индукции.

Пусть $n = 1$, тогда $a+b = \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{1!}{k!(1-k)!}\, a^{1-k}b^k$, то есть $a+b = a+b$. Поэтому утверждение $A(1)$ верно.

Допустим, что $A(n)$ верно для числа $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость $A(n+1)$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}b^{k+1}.$$

Во второй сумме изменим переменную суммирования, положив $k+1 = l$. Так как $1 \leqslant l \leqslant n+1$, то имеем:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{(n+1)-k}b^k + \sum_{l=1}^{n+1} \frac{n!}{(l-1)!(n-l+1)!}\, a^{(n+1)-l}b^l.$$

Поскольку сумма не зависит от имени переменной суммирования, то во второй сумме вместо l опять можно записать k. Приводя подобные, получим:

$$(a+b)^{n+1} =$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \right) a^{(n+1)-k} b^k + b^{n+1} =$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} a^{(n+1)-k} b^k + b^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} a^{(n+1)-k} b^k.$$

Последнее равенство имеет место, так как

$$a^{n+1} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1)-0)!} a^{(n+1)-0}\, b^0, \quad b^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!} a^0\, b^{n+1}.$$

Поэтому $A(n+1)$ верно, то есть $A(n) \Rightarrow A(n+1), n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $A(n)$ имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$.

Коэффициенты $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ в правой части формулы бинома Ньютона (2) называют биномиальными коэффициентами и обозначают C_n^k. Они обладают свойствами:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n;$

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, k = 0, 1, \ldots, n;$

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n;$

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$

Студентам целесообразно убедиться в справедливости этих свойств.

Приведем решение нескольких задач, связанных с биномом Ньютона.

Пример 5. Разложить по формуле бинома Ньютона $(2-3x)^5$.

■ $(2-3x)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} C_5^k\, 2^{5-k} (-3x)^k$. Вычислим биномиальные коэффициенты.

$$C_5^0 = C_5^5 = 1, \quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5, \quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Поэтому

$$(2-3x)^5 = 2^5 - 5 \cdot 2^4 \cdot 3x + 10 \cdot 2^3 \cdot 3^2 x^2 - 10 \cdot 2^2 \cdot 3^3 x^3 + 5 \cdot 2 \cdot 3^4 x^4 - 3^5 x^5. \ \square$$

Пример 6. Записать разложение $\left(a - \sqrt{2}\right)^5 + \left(a + \sqrt{2}\right)^5$.

■ $\left(a - \sqrt{2}\right)^5 + \left(a + \sqrt{2}\right)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} C_5^k\, a^{5-k} \left(-\sqrt{2}\right)^k + \sum\limits_{k=0}^{5} C_5^k\, a^{5-k} \left(\sqrt{2}\right)^k.$

В выписанных суммах слагаемые, соответствующие $k = 0$ и четным k, равны, поэтому при приведении подобных удваиваются, а слагаемые, соответствующие нечетным k, равны по модулю и противоположны по знаку, поэтому уничтожаются. Наконец, $C_5^0 = 1, \quad C_5^2 = 10, \quad C_5^4 = 5$. Поэтому

$$\left(a-\sqrt{2}\right)^5 + \left(a+\sqrt{2}\right)^5 = 2\left(a^5 + 10a^3\cdot 2 + 5a\cdot 2^2\right) =$$

$$= 2\left(a^5 + 20a^3 + 20a\right). \quad \square$$

Пример 7. Найти коэффициент при x^7 в следующих многочленах

1) $P(x) = (2-5x)^{15}$;

2) $P(x) = x^3(2x-1)^{12}$;

3) $P(x) = (3x^2-2)(5-7x)^8$.

■ Если считать, что многочлен $P(x)$ n-той степени имеет представление $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$, то следует найти a_7.

1). $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k\,(-5x)^k\,2^{15-k}$, поэтому

$$a_7 = C_{15}^7(-5)^7\,2^8 = -\frac{15!}{7!\cdot 8!}\,5^7\cdot 2^8.$$

2). $P(x) = x^3 \cdot \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k\,(2x)^k\,(-1)^{12-k} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k\,2^k\,(-1)^{12-k}\,x^{k+3}$. Одночлен, содержащий x^7, получается при $k=4$, а значит

$$a_7 = C_{12}^4\,2^4(-1)^8 = C_{12}^4\,2^4.$$

3). $P(x) = (3x^2-2)\sum\limits_{k=0}^{8} C_8^k(-7x)^k 5^{8-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k(-7)^k 5^{8-k} 3x^{k+2} - \sum_{k=0}^{8} C_8^k(-7)^k 5^{8-k} 2x^k.$$

В первой сумме одночлен, содержащий x^7, получается при $k=5$, а во второй — при $k=7$, поэтому $a_7 = -3\,C_8^5\,7^5\,5^3 + 2\,C_8^7\,7^7\,5$.

Так как $C_8^5 = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$, а $C_8^7 = \dfrac{8!}{7!\cdot 1!} = 8$, то

$$a_7 = 7^5\cdot 5(-56\cdot 75 + 2\cdot 8\cdot 49) = 7^6\cdot 5\cdot 8(-75+14) = -65\cdot 7^6\cdot 40. \quad \square$$

Пример 8. Найти члены разложения $\left(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}\right)^8$, которые являются целыми числами.

■ По формуле (2) $\left(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}\right)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} C_8^k \left(\sqrt{5}\right)^{8-k} \left(\sqrt[3]{2}\right)^k$. Так как $C_8^k \in \mathbb{Q}$ при $(k=0,1,\ldots,8)$, то k-тый член разложения $(k=0,1,\ldots,8)$ является рациональным числом, если k делится на 3, а $8-k$ делится на 2. Число 8 делится на 2, поэтому $8-k$ делится на 2, только если k делится на 2. А, значит,k должно делиться на 6. Из чисел $0,1,\ldots,8$ этому условию удовлетворяют 0 и 6. Поэтому рациональными являются первый и седьмой члены разложения. Наконец, так как

$$C_8^0 = 1,\ C_8^6 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28,$$

то оба эти члена являются целыми числами. □

1.2.1 Задания для самостоятельной работы

А. Доказать для $n \in \mathbb{N}$ справедливость следующих утверждений.

1. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.
2. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.
3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
4. $3+20+168+\ldots+(2n+1)2^{n-1}n!=2^n(n+1)!-1$.
5. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}=1-\frac{n+1}{3^n}$.
6. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{6}{5\cdot 7}+\frac{20}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)}2^{n-1}=\frac{2^n}{2n+3}-\frac{1}{3}$.
7. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.
8. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$.
9. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
10. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
11. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

12. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

13. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\,n^2=(-1)^{n-1}\,\dfrac{n(n+1)}{2}$.

15. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

16. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

17. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

18. $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

19. Сумма кубов любых трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

20. $11^{n+2}+12^{2n+1}$ кратно 133.

21. $n(2n^2-3n+1)$ кратно 6.

22. n^5-n кратно 5.

23. $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24.

24. $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ кратно 11.

25. m^3+20m делится на 48 при любом четном натуральном m.

26. $10^n+18n-28$ делится на 27.

27. $n!>2^n,\ \forall\, n\geqslant 4$.

28. $5^n>7n-3$.

29. $3^n>5n^2$.

30. $2^n>n^3, \forall n\geqslant 10$.

31. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

32. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{3n+1}>n$.

33. $\dfrac{1}{2^3-2}+\dfrac{1}{4^3-4}+\dfrac{1}{6^3-6}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^3-2n}=$
$=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{n}{2n+1}$.

34. Число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\dfrac{n(n-3)}{2}, n\geqslant 3$.

B. Вычислить, применяя бином Ньютона:

1. $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^6$; 2. $(a+2b)^8 - (a-2b)^8$.

C. Найти коэффициент при x^9 в многочленах

1. $P(x) = \left(1-6x^3\right)^{15}$;
2. $P(x) = 2x^2(4-3x)^{18}$;
3. $P(x) = x\left(x^2+2\right)(3-2x)^7$;
4. $P(x) = x^2\left(2x-3\right)^{15}$.

D. Найти коэффициент при x^3 в разложении $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$.

E. Найти такое n, что пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ не содержит x. Найти n.

F. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2x^2}\right)^n$ равна 64. Вычислить член, не содержащий x.

G. Найти коэффициент при x^3 в многочленах

1. $P(x) = \left(1-x+x^2\right)^3$; 2. $P(x) = \sum\limits_{k=3}^{10}(1+2x)^k$.

H. Найти те члены разложения $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^8$, которые являются целыми числами.

I. Найти член разложения $(3x+2)^7$ с наибольшим коэффициентом.

1.3 Функция, область определения, множество значений

Пусть X и Y — некоторые множества. Говорят, что на множестве X определена функция, действующая в Y, если известно правило f, по которому каждому элементу x из X ставится в соответствие вполне определенный (единственный) элемент $y = f(x)$ из множества Y. При этом элемент $f(x)$ называется значением функции на элементе x, множество X — областью определения функции (ее обычно обозначают $D(f)$), а совокупность тех элементов множества Y, которые являются значениями функции на элементах множества X, — множеством значений функции (его обозначают $E(f)$), то есть $E(f) = \{y \in Y |\ \exists\, x \in X : y = f(x)\}$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. Указать область определения функции:

$a)\ y = \dfrac{1}{x + |x|}, \quad b)\ y = \sqrt{-x} + \dfrac{5}{\sqrt{2 - x - x^2}}, \quad c)\ y = \log_{\cos x} \sin x.$

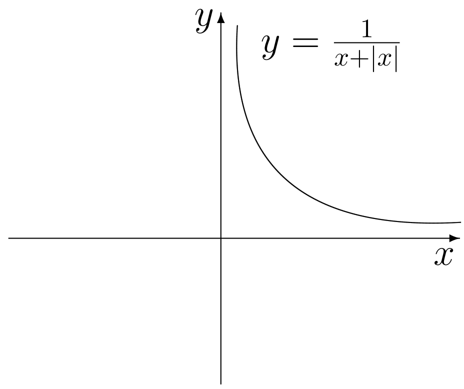
■ $a)$ Функция $y = \dfrac{1}{x + |x|}$, является отношением функций $y = 1$ и $y = x + |x|$. Последняя является суммой функций $g(x) = x$ и $\varphi(x) = |x|$, определеных на множестве $\mathbb{R}$. Поэтому сумма функций $g + \varphi$ определена на $\mathbb{R}$, а исходная функция определена на множестве тех действительных чисел, на которых функция $y = x + |x|$ отлична от нуля, то есть

$$D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + |x| \neq 0\}.$$

Найдем корни уравнения $x + |x| = 0$. Имеем: $|x| = -x$. Учитывая свойства модуля числа, получим $-x \geq 0$, то есть $x \leq 0$. Следовательно,

$$D(y) = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = (0, +\infty).$$

На интервале $(0, +\infty)$ функция $y(x)$ имеем представление $y = \dfrac{1}{2x}$. Заметим, что функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ определена на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Значит $y(x) = f|_{(0,+\infty)}(x)$, то есть исходная функция является сужением функции $y = f(x)$ на луч $(0, +\infty)$. Поэтому графиком функции $y = \dfrac{1}{x + |x|}$ является часть гиперболы $y = \dfrac{1}{2x}$, которая соответствует $x > 0$.



Подумайте, можно ли выразить функцию $y = \dfrac{1}{x + |x|}$ через функции

$$y = 2^{-\log_2(x) - 1} \quad \text{и} \quad y = 2^{-\log_2(|x|) - 1}?$$

$b)$ Функция $y = \sqrt{-x} + \dfrac{5}{\sqrt{2 - x - x^2}}$ является суммой функций $\varphi(x) = \sqrt{-x}$ и $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2 - x - x^2}}$. Найдем множества $D(\varphi)$ и $D(g)$. По определению арифметического корня четной степени

$$D(\varphi) = \{x \in \mathbb{R} | -x \geq 0\} = (-\infty, 0].$$

Аналогично, областью определения функции $y = g(x)$ является множество $D(g) = \{x \in R \mid 2 - x - x^2 > 0\} = (-2, 1)$. Поскольку областью определения суммы функций является $D(\varphi) \cap D(g)$, то

$$D(y) = D(\varphi) \cap D(g) = (-\infty, 0] \cap (-2, 1) = (-2, 0].$$

c) Из определения логарифма следует, что функция $y = \log_{\cos x} \sin x$ определена на множестве тех действительных чисел, для которых выполняются условия:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} \qquad \text{то есть} \begin{cases} \cos x \in (0, 1), \\ \sin x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются 2π-периодическими. Выделим те точки $x \in [0, 2\pi]$, для которых выполняются условия (3). Известно, что

$$\cos x \in (0, 1) \Longleftrightarrow x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \bigcup \Big(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\Big); \quad \sin x > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \pi).$$

Таким образом, на отрезке $[0, 2\pi]$ условия (3) выполняются в точках интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а потому

$$D(y) = \left\{x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}. \ \square$$

Пример 10. Найти множество значений функции $y = \sqrt{2 + x - x^2}$, если

$$a)\ x \in D(y), \qquad b)\ x \in [-1, 0].$$

$\blacksquare$ a) Прежде всего заметим, что $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 + x - x^2 \geq 0\} = [-1, 2]$. Поскольку

$$y = \sqrt{2 + x - x^2} \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 + x - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4} \\ y \geq 0 \end{cases},$$

то графиком функции $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ является полуокружность окружности $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$, лежащая в верхней полуплоскости. Наименьшим значением функции является $y = 0$, которое совпадает с $y(-1)$ и $y(2)$, а наибольшим — $y = \dfrac{3}{2} = y\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Следовательно, $E(y) \subset [0, 3/2]$. Докажем, что $E(y) \supset [0, 3/2]$, то есть каждое $y_0 \in [0, 3/2]$ является значением функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \in [0, 3/2]$. Пусть $y_0 \in [0, 3/2]$. Решим уравнение

$$\sqrt{2 + x - x^2} = y_0, \tag{4}$$

$$2 + x - x^2 = y_0^2,$$
$$x^2 - x + (y_0^2 - 2) = 0,$$

А так как дискриминант $D = 9 - 4y_0^2 \geq 0$, то $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9 - 4y_0^2}}{2}$. Наконец, $0 \leq 4y_0^2 \leq 9$ для $y_0 \in [0, 3/2]$, а, значит,

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{9 - 4 \cdot \dfrac{9}{4}}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{9 - 4\,y_0^2}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{9 - 0}}{2} = 2.$$

Поэтому для любого $y_0 \in [0, 3/2]$ существует точка

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{9 - 4y_0^2}}{2} \in [1/2, 2] \subset [-1, 2]$$

такая, что $y(x_0) = y_0$ или $\sqrt{2 + x_0 - x_0^2} = y_0$. Последнее означает, что $[0, 3/2] \subset E(y)$ и $E(y) = [0, 3/2]$.

b) Найдем множество значений функции $y = \sqrt{2 + x - x^2}$, принимаемых на отрезке $[-1, 0]$. Известно, что функция $y = 2 + x - x^2$ возрастает на луче $(-\infty, 1/2]$, а значит и на отрезке $[-1, 0]$. Поэтому, учитывая свойства арифметического корня, рассматриваемая функция $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ возрастает на $[-1, 0]$. Далее, $y(-1) = 0, y(0) = \sqrt{2}$. Следовательно, $E(y) \subset [y(-1), y(0)] = [0, \sqrt{2}]$, то есть $y([-1, 0]) \subset [0, \sqrt{2}]$. Используя решение задачи a), замечаем, что для любого $y_0 \in [0, \sqrt{2}]$ одним из корней уравнения (4) является $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9 - 4\,y_0^2}}{2}$. Докажем, что $x_1 \in [-1, 0]$. Действительно, если $0 \leq y_0 \leq \sqrt{2}$, то

$$1 = 9 - 8 \leq 9 + 4(-y_0^2) \leq 9,$$
$$1 \leq \sqrt{9 - 4y_0^2} \leq 3,$$
$$-1 \leq \frac{1 - \sqrt{9 - 4y_0^2}}{2} \leq 0.$$

Итак, для любого $y_0 \in [0, \sqrt{2}]$ существует точка $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9 - 4\,y_0^2}}{2} \in [-1, 0]$ такая, что $\sqrt{2 + x_1 - x_1^2} = y_0$. Последнее означает, что y_0 — значение функции $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ в точке $x_1 \in [-1, 0]$, а, значит, $y([-1, 0]) \supset [0, \sqrt{2}]$. Следовательно, $y([-1, 0]) = [0, \sqrt{2}]$. $\square$

1.4 Суперпозиция функций

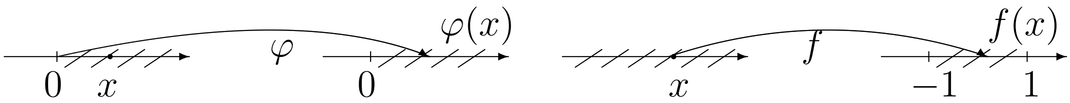
Определение 1. *Пусть* $f : X \longrightarrow Y, \varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. *Функция, которая каждому числу* $x \in X$ *ставит в соответствие единственное число* $y =$

$\varphi(f(x))$*, называется суперпозицией функций f и φ и обозначается $f \circ \varphi$.*

В этом разделе выясним не только, как составить суперпозицию данных функций f и φ и всегда ли она существует, но и суперпозицией каких функций является заданная функция. С этой целью решим две задачи.

Пример 11. Пусть $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Составить суперпозиции $f \circ \varphi$ и $\varphi \circ f$.

■ Прежде всего заметим, что $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1, 1], D(\varphi) = [0, +\infty)$ и $E(\varphi) = [0, +\infty)$. Так как $E(\varphi) \subset D(f)$, то для любого $x \in D(\varphi) = [0, +\infty)$ можно поставить в соответствие $z = f(\varphi(x)) = \sin(\sqrt{x}) \in [-1, 1]$. Поэтому суперпозиция $f \circ \varphi$ определена на $D(\varphi) = [0, +\infty)$ и $f \circ \varphi(x) = \sin(\sqrt{x})$.



Так как $E(f)$ не содержится в множестве $D(\varphi)$, то функция $\varphi \circ f$ не определена. Но $E(f) \cap D(\varphi) = [0; 1]$, прообразом отрезка $[0; 1]$ при отображении f является множество $X = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0; 1]\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0; 1]\} = \{x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому, множество значений функции $f|_X$ совпадает с отрезком $[0; 1] \subset [0; +\infty) = D(\varphi)$ и на X можно определить функцию, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие число $\varphi(f|_X(x))$, то есть функцию $\varphi \circ f|_X$. Сокращая запись, вместо функции $f|_X$ часто пишут f, а потому вместо $\varphi \circ f|_X$ пишут $\varphi \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$. □

Пример 12. Суперпозицией каких функций является функция

$$a)\ y = \sin^3 x, \qquad b)\ y = \log_{1/2} \cos x?$$

■ a) Ясно, что функция $y = \sin^3 x$ определена на $\mathbb{R}$. Чтобы найти значение этой функции на элементе $x \in \mathbb{R}$, следует выполнить следующие действия:

$$\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} z = \sin x (\in [-1, 1]) \xrightarrow{g} z^3 = \sin^3 x.$$

Поэтому $\sin^3 x = g \circ \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}$, где $\varphi(x) = \sin x, g(y) = z^3$.

b) Функция $y = \log_{1/2} \cos x$ определена на множестве

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x > 0\} = \{x \in (-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k) |\ k \in \mathbb{Z}\}$$

и для нахождения значения этой функции в точке $x \in X$ выполняем последовательно следующие операции:

$$\forall x \in X \xrightarrow{\varphi} z = \cos x \in (0, 1] \xrightarrow{g} \log_{1/2} z = \log_{1/2} \cos x.$$

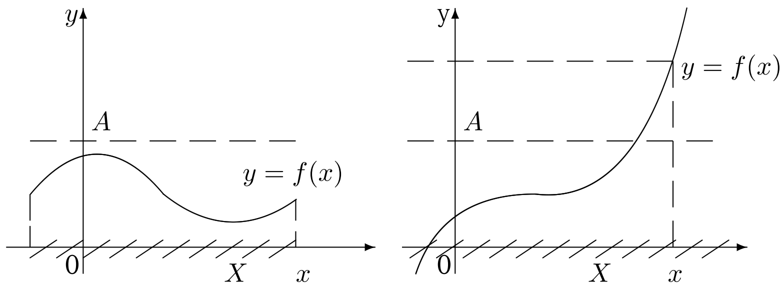
Итак, на множестве X функция $y = \log_{1/2} \cos x$ является суперцозицией функций g и φ, где $\varphi(x) = \cos x$, $g(z) = \log_{1/2} z$, то есть $\log_{1/2} \cos x = g \circ \varphi(x), \forall\, x \in X$. $\square$

1.5 Ограниченные и неограниченные функции

Определение 2. *Функция f называется ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$, если существует $A \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x) \leq A$, $\forall\, x \in X$. В противном случае функция f называется неограниченной сверху на X.*

Символически эти определения записываются так:

f ограничена сверху на $X \subset D(f) \Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R} : f(x) \leq A, \forall x \in \mathbb{X}$.
f не ограничена сверху на $X \subset D(f) \Longleftrightarrow \forall\, A \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in X : f(x) > A$.



Геометрически ограниченность сверху функции f на множестве X означает, что существует такая прямая $y = A$, что точки графика функции $y = f(x)$ при $x \in X$ лежат не выше этой прямой, а неограниченность сверху функции $y = f(x)$ на множестве X означает, что для любой прямой $y = A$, $A \in \mathbb{R}$, найдется такая точка $x \in X$, что соответствующая точка $(x, f(x))$ графика лежит выше прямой $y = A$ (см. рисунок выше).

Определение 3. *Функция f называется ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число A, что $f(x) \geq A$, $\forall\, x \in X$. В противном случае функция f называется неограниченной снизу на множестве X. Если функция ограничена сверху и снизу на множестве X, то она называется ограниченной на множестве X.*

Символически последняя часть определения записывается в виде:
f ограничена на $X \Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R} : B \leq f(x) \leq A, \forall x \in X$.

Геометрически ограниченность функции $y = f(x)$ на множестве X означает существование таких чисел A и B, что точки графика функции $(x, f(x))$, $x \in X$, расположены в полосе $A \leq y \leq B$.

Определение 3 ограниченной на множестве X функции равносильно следующему.

Определение 4. *Функция f называется ограниченной на множестве $X \subset D(f)$, если $\exists A > 0 : |f(x)| \leq A, \ \forall x \in X$.*

Чтобы познакомиться с методами доказательства ограниченности и неограниченности функции на множестве, рассмотрим несколько примеров.

Пример 13. Доказать ограниченность функций:

$$a) \ \ f(x) = 5\cos x + 2\sin 3x, \quad b) \ \ g(x) = \frac{x^2+6}{x^2+1}.$$

■ $a)$ Прежде всего отметим, что $D(f) = \mathbb{R}$. Поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, то, учитывая свойство модуля числа, получим:

$$|f(x)| \leq 5|\cos x| + 2|\sin 3x| \leq 5 + 2 = 7, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно функция f ограничена на $\mathbb{R}$.

Замечание. Если бы $f(x) = 5\cos 3x + 2\sin 3x$, то можно было бы поступить иначе. Известно, что

$$f(x) = \sqrt{29}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\cos 3x + \frac{2}{\sqrt{29}}\sin 3x\right) = \sqrt{29}\sin(3x + \varphi_0),$$

где $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, $\sin\varphi_0 = 5/\sqrt{29}$. Поэтому $|f(x)| \leq \sqrt{29}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$b)$ Функция $y = g(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и имеет представление

$$g(x) = 1 + \frac{5}{x^2+1}.$$

Поскольку $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, то

$$1 < g(x) = 1 + \frac{5}{x^2+1} \leq 1 + 5 = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

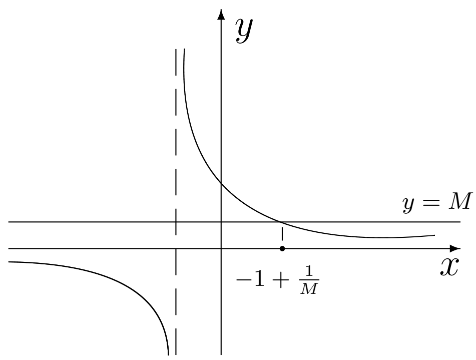
Последнее означает ограниченность функции g на множестве $\mathbb{R}$. □

Пример 14. Доказать неограниченность функции

$$a) \ \ f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad b) \ \ \varphi(x) = x\sin x.$$

■ $a)$ Область определения функции f — множество $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, а график — гипербола. Покажем неограниченность функции сверху. Зафиксируем число $M > 0$ и найдем такую точку $x_M > -1$, что $f(x_M) > M$. Для этого решим неравенство $\frac{1}{x+1} > M$. Так как при $x > -1$ обе части неравенства положительны, то получим, что $x + 1 < \dfrac{1}{M}$, то есть $x < \dfrac{1}{M} - 1$.

Поэтому рассматриваемое неравенство справедливо для всех $x \in \left(-1, -1 + \dfrac{1}{M}\right)$ и в качестве x_M можно взять любую точку этого интервала, что доказывает неограниченность сверху функции $f(x)$. Аналогично можно доказать неограниченность снизу этой функции.



Замечание. Если δ_0 — некоторое положительное число, то функция f ограничена на множестве $X = (-\infty, -1-\delta_0) \cup (-1+\delta_0, +\infty)$. Действительно, $|x+1| \geq \delta_0 \ \forall\, x \in X$, а потому $|f(x)| \leq \dfrac{1}{\delta_0}$ на X.

b) Функция $\varphi(x) = x \sin x$ определена на $\mathbb{R}$. Фиксируем $M > 0$. Поскольку $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, то для $n \in \mathbb{N}$, $n > [M]+1$ выполняются неравенства $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) > n \geq [M]+1 > M$. В качестве искомого x_M можно взять любую точку $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n > [M]+1$. $\square$

Пример 15. Является ли ограниченной функция $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ на множествах a) $X = [1, +\infty)$, $\quad b$) $X = (-\infty, -1]$.

$\blacksquare$ a) Поскольку $x \geq 1$, то функция f является разностью положительной и неотрицательной функций. Преобразуем ее, избавившись от иррациональности,

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \ .$$

Так как $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1, \forall x \geq 1$, то $f(x) \leq 1, \forall x \in [1, +\infty)$. Кроме того, $f(x) > 0, \forall x \in X$. Следовательно, функция f ограничена на луче $x \geq 1$.

b) Если $x \leq -1$, то $f(x) = x - \sqrt{x^2-1} \leq -1$, то есть функция ограничена сверху. Докажем, что она неограничена снизу. Фиксируем $M < -1$. Заметим, что $\sqrt{x^2-1} > \sqrt{M^2-1} > 0, \ \forall\, x < M$, поэтому $f(x) = x - \sqrt{x^2-1} < M$, $\forall\, x < M$. Итак, $\forall M (< -1)$ и $\forall x (< M)$ имеем: $f(x) < M$, что означает неограниченность снизу функции f на луче $x \leq -1$. $\square$

1.6 Обратная функция

Будем считать, что функция $f : X \subset D(f) \to Y$ биективна. Напомним, что функция $f : X \to Y$ называется биективной (или взаимно однозначной функцией из X на Y), если уравнение $f(x) = y$ разрешимо в X при любом

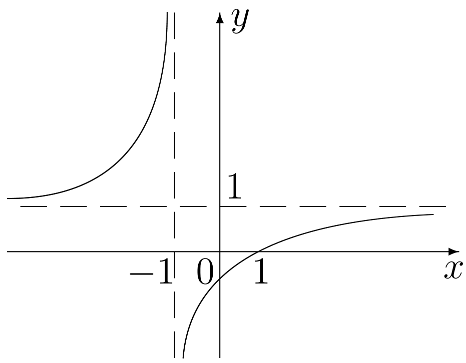
y из Y и имеет единственное решение. Другими словами, функция $f : X \to Y$ биективна тогда и только тогда, когда любой элемент из Y имеет в X единственный прообраз. Геометрически свойство биективности означает, что любая прямая $y = c$, где $c \in Y$, пересекает график функции $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ в единственной точке. Известно, что если функция f возрастает (или убывает) на множестве X, то она биективно действует из X в $f(X)$.

Определение 5. *Пусть функция $f : X \to Y$ биективна. Функция, которая каждому элементу $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x) = y$, называется обратной к f и обозначается f^{-1}.*

Пример 16. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ имеет обратную, найти ее.

■ Область определения заданной функции — множество $X = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Поскольку $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, то ее графиком является гипербола, полученная из графика функции $y = -\dfrac{2}{x}$ смещением вдоль оси OX влево на 1 и вдоль оси OY вверх на 1. Множеством значений функции является $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Функция f возрастает на луче $x < -1$ и $f((-\infty; -1)) = (1; +\infty)$. На луче $x > -1$ функция f так же возрастает и $f((-1; +\infty)) = (-\infty; 1)$.

Поэтому $f((-\infty; -1)) \cap f((-1; +\infty)) = \emptyset$, а значит функция $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$ биективна. Следовательно, она имеет обратную функцию. Для нахождения обратной функции решим относительно x уравнение $1 - \dfrac{2}{x+1} = y$ при каждом $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Имеем $x = \dfrac{y+1}{1-y}$. Поэтому $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{1-y}$. Если же обратную функцию представить в виде $y = f^{-1}(x)$, то получим, что $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. □



Пример 17. Выяснить, имеет ли функция $y = x^2 - 4x + 2$ обратную на множествах $a)$ $X = \mathbb{R}$, $b)$ $X = (-\infty, 2]$. В случае существования обратной функции, найти ее.

■ Прежде всего заметим, что графиком данной функции является парабола (ее вершина в точке $(2, -2)$, ветви направлены вверх). Ясно, что $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty)$, $f((-\infty, 2]) = [-2, +\infty)$.

$a)$ Функция $f : \mathbb{R} \to [-2, +\infty)$ не является инъективной, поскольку $f(2 + \sqrt{2}) = f(2 - \sqrt{2}) = 0$. Поэтому она не имеет обратной функции.

b) Функция $f : (-\infty, 2] \to [-2, +\infty)$ биективна (функция убывает на $(-\infty, 2]$) и $f((-\infty, 2]) = (-2, +\infty]$. Поэтому она имеет обратную. Для нахождения обратной функции решим на $[-2, +\infty)$ уравнение $x^2 - 4x + 2 = y$ для каждого $y \in [-2, +\infty)$. Его корнями являются $x = 2 \pm \sqrt{y+2}$. Так как $x = 2 - \sqrt{y-2} \in (-\infty, 2]$, а $x = 2 + \sqrt{y-2} \notin (-\infty, 2]$, то функция $y = 2 - \sqrt{x-2}$, определенная на $[-2; +\infty)$, является обратной к заданной. $\square$

1.6.1 Задания для самостоятельной работы

1. Указать область определения функции:

   a) $y = \log_2(x^3 - 2x)$, b) $y = \lg \sin \dfrac{\pi}{x}$,

   c) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$, d) $y = \arccos(2\sin x)$,

   e) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$, f) $y = \sqrt{\log_{1/2} \dfrac{x}{x^2-1}}$.

2. Указать множество значений функции на указанных множествах:

   a) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, если $X = D(y)$; $X = [-2; -1]$; $X = [-2; 2]$;

   b) $y = \sin x + |\sin x|$, если $X = D(y)$; $X = [0, \pi]$; $X = [\pi, 2\pi]$;

   c) $y = \log_2(x^2 - 2)$, если $X = D(y)$;

   d) $y = x + \operatorname{sgn} x$, если $X = \mathbb{R}$; $X = [-3; 3]$.

3. Составить суперпозицию функций $f \circ g$:

   a) $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = \sin x$;

   b) $f(x) = \sin(2x + 3)$, $g(x) = \sqrt{x}$.

4. Составить суперпозиции $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$:

   a) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,

   b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \lg x$,

   c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x <= 0 \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ -x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$.

   d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

5. Суперпозицией каких функций являются функции

a) $y = \cos\sqrt{x}$, b) $y = \log_{1/2}\cos x$,

c) $y = \sin\left(\log_2 \dfrac{x+1}{x}\right)$, d^*) $y = \arcsin\left(\log_2 \dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)$?

6. Найти $f(x)$, если

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ $(x > 0)$,

c) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

7. Доказать ограниченность функций:

a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, b) $f(x) = 2^{\sin x}$,

c) $f(x) = x^2 - x - 1$, если $x \in [-1, 5]$, d) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^4-1}$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-10}$, если $x \in [0, 5]$.

8. Доказать неограниченность функций на указанном множестве:

a) $f(x) = 2^{1/x}$, $x \in (0, +\infty)$,

b) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$,

c) $f(x) = -x^2$, $x \in (0, +\infty)$.

9. Имеет ли функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ обратную на множествах

$$\text{a) } X = [-1; 0], \quad \text{b) } X = [-1/2; 1]\,?$$

Если имеет, указать ее.

10. Имеет ли функция $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2^{x+1}}$ обратную на множестве $\mathbb{R}$? Если имеет, указать ее.

11. Пусть $f(x) = ax + b$. Найти a и b, при которых обратная функция совпадает с данной.

2 Предел последовательности

2.1 Последовательность, ее ограниченность и монотонность

Если каждому натуральному n поставлено в соответствие некоторое вещественное число x_n , то говорят, что задана числовая последовательность, которую обозначают: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или коротко символами $\{x_n\}$, (x_n). При этом x_n называют общим членом (элементом) последовательности или n-ым членом ее (n — номер члена x_n). Иными словами: числовая последовательность — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и принимающая числовые значения. Если дана последовательность $f : \mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$, то $f(n), n \in \mathbb{N}$, коротко обозначают x_n.

Пример 18. Выписать шесть членов последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\text{a) } x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \text{b) } x_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad \text{c) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

■ a) $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = -1, x_6 = -1$.

b) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$.

c) $x_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = 1 - \dfrac{1}{3}$,

$$x_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4},$$

$$x_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5},$$

$$x_5 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6},$$

$x_6 = 1 - \dfrac{1}{7}$. □

Поскольку последовательность является функцией, то

1) числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число C такое, что $x_n \le C$ ($x_n \ge C$), $\forall n \in \mathbb{N}$; в противном случае она называется неограниченной сверху (снизу);

2) если числовая последовательность ограничена сверху и снизу, то она называется ограниченной; в этом случае существуют числа a и b такие, что $a \le x_n \le b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть существует отрезок $[a, b]$, содержащий все элементы данной последовательности, или иначе, существует число $M > 0$ такое, что $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

3) числовая последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого числа $M > 0$ найдется такой элемент x_n последовательности, что $|x_n| > M$.

Пример 19. Доказать ограниченность числовой последовательности $\{x_n\}$, если $a)$ $x_n = \sin n - 1$; $\quad b)$ $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

■ $a)$ Поскольку $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, то $-2 \leq \sin n - 1 \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть $x_n \in [-2, 0]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, что доказывает ограниченность последовательности.

$b)$ Заметим, что $2n - 1 \geq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, поэтому $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность ограничена снизу. Далее, для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{1}{2}\frac{2n+2}{2n-1} = \frac{1}{2} \leq \left(1 + \frac{3}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2}(1+3) = 2,$$

поскольку $\dfrac{1}{2n-1} \leq 1$. Это доказывает ограниченность сверху, а, значит, и ограниченность, рассматриваемой последовательности. □

Пример 20. Доказать неограниченность последовательности $\{x_n\}$:

$$a)\ x_n = n + \sin n, \qquad b)\ x_n = n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

■ $a)$ Так как $\sin n > -1, \forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n = n + \sin n > n - 1 \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность ограничена снизу. Пусть теперь M — некоторое положительное число. Тогда для любого $n \geq [M] + 2$ имеем:

$$x_n > n - 1 \geq [M] + 2 - 1 = [M] + 1 > M.$$

Следовательно, для любого $M > 0$ существуют элементы x_n последовательности (все, начиная с номера $n_M = [M] + 2$), которые лежат правее M. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной сверху, а значит неограниченной.

$b)$ Прежде всего, выпишем первые элементы $x_n = n \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$$

Заметим, что $x_{4k-3} = 4k - 3, k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$x_{4k-3} = 3(k-1) + k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Пусть M — некоторое положительное число. Для всех k>[M]+1 имеем:

$$x_{4k-3} \geq k > [M] + 1 > M$$

Последнее означает неограниченность сверху последовательности $\{x_n\}$. Далее, $x_{4k-1} = -(4k-1) = -3k - (k-1) \leq -3k < -k, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Поэтому, $x_{4k-1} < -k < -([M]+1) < -M$, $\forall\, k > [M] + 1$, то есть рассматриваемая последовательность неограничена снизу. Итак, последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху и снизу. □

Определение 6. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), начиная с номера n_0, если для любого $n \geq n_0$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$); если при этом $n_0 = 1$, то последовательность называется возрастающей (убывающей).*

Пример 21. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает:

$$a)\ x_n = \sqrt{3n-2}, \quad b)\ x_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad c)\ x_n = \frac{2^n}{n}.$$

■ a) Так как $0 < 3n-2 < 3n+1, \forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n < x_{n+1}$, а поэтому последовательность $\{\sqrt{3n-2}\}$ возрастает. Иначе: для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2} = \frac{3}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-2}} > 0.$$

Для получения последнего равенства избавились от иррациональности в числителе. Поэтому $x_{n+1} > x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Заметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1};$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+1)}}+1}.$$

Так как $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, то $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1 > \sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}+1 > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Поэтому $x_n < x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

c) Легко видеть, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\, n}{(n+1)2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1} \geq 1\,.$$

Поскольку $x_n = \dfrac{2^n}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, то $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, причем $x_{n+1} = x_n$ только при $n = 1$. Следовательно, данная последовательность возрастает, начиная с номера $n_0 = 2$. □

Пример 22. Доказать, что последовательность $\{x_n\} : x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$, является убывающей.

■ Так как $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{2n-1+3}{2n-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{2n-1}$, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2n+1}\,,$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{3}{2}\frac{2}{(2n-1)\,(2n+1)} > 0.$$

Следовательно, $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, а значит последовательность $\{x_n\}$ является убывающей. □

2.2 Подпоследовательности

Определение 7. *Пусть заданы последовательность $\{x_n\}$ и возрастающая последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел. Тогда последовательность $\{y_k\}$, где $y_k = x_{n_k}, \forall k \in N$, называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$.*

Согласно определению 7, члены подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ являются элементами исходной последовательности $\{x_n\}$, причем порядок их следования такой же, как и в последовательности $\{x_n\}$. Заметим, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ является суперпозицией возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и последовательности $\{x_n\}$.

Пример 23. Выписать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, если

$$a)\ x_n = 2n,\ n_k = 2k,\ k \in \mathbb{N}\,; \qquad b)\ x_n = sin\frac{n\pi}{2},\ n_k = 2k,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

■ $a)$ Так как, $x_n = 2n$, а $n_k = 2k$, то $x_{n_k} = x_{2k} = 2\cdot 2k = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, то есть $4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots,\ 4k,\ \ldots$.

$b)$ Аналогично, $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}, n_k = 2k, k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$x_{n_k} = x_{2k} = \sin\frac{2k\pi}{2} = \sin k\pi = 0, k \in \mathbb{N}. \ \square$$

Пример 24. Является ли последовательность $\{y_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = 2n$ и для всех $k \in \mathbb{N}$

$$a)\ y_k = 2^k, \quad b)\ y_k = k^2, \quad c)\ y_k = 2k + (-1)^{k+1}2, \quad d)\ y_k = 2^{(-1)^k k}.$$

■ $a)$ Элементы $y_k = 2^k$ можно представить в виде

$$y_k = 2\cdot 2^{k-1} = 2\,n_k\ ,\ \text{где}\ n_k = 2^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $n_k \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{n_k\}$ является возрастающей ($n_{k+1}/n_k = 2 > 1, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$), то последовательность $\{y_k\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

b) Так как $x_n = 2n$ — четные натуральные числа ($n \in \mathbb{N}$), а $y_k = k^2$ не являются четными, если $k = 2j - 1, \ j \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{y_k\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

c) Выпишем элементы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_k\}$:

$$x_n:\, 2,\, 4,\, 6,\, 8,\, \ldots,\, 2n,\, (2n+2)\, \ldots, \quad y_k:\, 4,\, 2,\, 8,\, 6,\, \ldots.$$

Члены последовательности $\{y_k\}$ являются членами последовательности $\{x_n\}$, но нарушен порядок их следования, поэтому последовательность $\{y_k\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

d) Имеем: $y_k = 2^{(-1)^k k}, k \in \mathbb{N}$. Если $k = 2j - 1,\, j \in \mathbb{N}$, то

$$y_{2j-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2j-1}} \notin \mathbb{N}, \forall\, j > 1, \text{ но } x_n = 2n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, элементы y_k с нечетными номерами не являются элементами последовательности $\{x_n\}$, а значит последовательность $\{y_k\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. $\square$

2.2.1 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что данная последовательность $\{x_n\}$ монотонна, начиная с некоторого номера:

   a) $x_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$, b) $x_n = \dfrac{100n}{n^2+16}$,

   c) $x_n = n^3 - 6n^2$, d) $x_n = \sqrt{3n-2}$,

   e) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

2. Доказать ограниченность последовательности $\{x_n\}$, если

   a) $x_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$, b) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 15}{\sqrt{n^2+10}}$,

   c) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-1} \operatorname{arctg} \sqrt{n}$, d) $x_n = \dfrac{2n + \sin\frac{n\pi}{10}}{n}$,

   e) $x_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{3^n+1}$, f) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

3. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной, если

a) $x_n = n^2$, b) $x_n = \dfrac{n^2+15}{n-1}$,

c) $x_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+1}$, d) $x_n = \dfrac{3^n-1}{2^n+1}$.

4. Доказать, что если $\{x_n\}$ и$\{y_n\}$ ограничены, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ последовательность $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ ограничена.

5. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, $\{y_n\}$ не ограничена. Доказать, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ не ограничена.

6. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ возрастает, а $\{y_n\}$ убывает, то последовательность $\{x_n - y_n\}$ возрастает.

7. Доказать, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ положительны и возрастают, то последовательность $\{x_n\, y_n\}$ возрастает.

8. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ не является монотонной, если

$$a)\ x_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}, \quad b)\ x_n = n + (-1)^n.$$

9. Доказать, ограниченность последовательности $\{x_n\}$, если

a) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$, b) $x_n = \sum\limits_1^n \dfrac{1}{k\,(k+1)}$,

c) $x_n = \sum\limits_1^n \dfrac{1}{k^2}$, d) $x_n = \lg(3n+2) - \lg(n+1)$.

10. Доказать неограниченность последовательности $\{x_n\}$, если

$$a)\ x_n = \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}, \quad b)\ x_n = \sqrt{n^2 + (-1)^n\sqrt{n^3}} - n.$$

2.3 Определение и свойства сходящихся последовательностей

Определение 8. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$. *Интервал*

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$$

называют ε*-окрестностью точки* a *и обозначают* $U_a(\varepsilon)$ *или* U_a.

Определение 9. *Число* a *называется пределом последовательности* $\{x_n\}$, *если для любой окрестности точки* a *найдется такой номер* N, *что все члены последовательности с номерами n>N принадлежат этой окрестности. Если* a — *предел последовательности* $\{x_n\}$, *то пишут*

$$\lim x_n = a, \text{ или } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

С помощью логических символов определение 9 можно записать так:

$$a \in \mathbb{R}\,, \lim x_n = a \iff (\forall\, U_a\ \exists\, N = N(U_a) \in \mathbb{N}\ : \forall\, n > N \implies x_n \in U_a)\,.$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, означает, что вне любой окрестности точки a лежит не более конечного числа членов последовательности.

В терминах "$\varepsilon - N$" определение 9 приобретает следующий вид:

Число a *называют пределом последовательности* $\{x_n\}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что для всех* $n > N$ *выполняется неравенство* $|x_n - a| < \varepsilon$.

В логической символике:

$$a \in \mathbb{R}\,, \lim x_n = a \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ |x_n - a| < \varepsilon, \forall\, n > N.$$

Последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел, в противном случае — расходящейся.

В логической символике:

$\{x_n\}$ — сходящаяся $\iff$

$$\exists a \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ |x_n - a| < \varepsilon, \forall\, n > N$$

$\{x_n\}$ — расходящаяся $\iff$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ :\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ :\ |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

При вычислении предела последовательности часто используются следующие два результата.

Теорема 1 (теорема о трех последовательностях). *Пусть последовательности* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *удовлетворяют условиям:*

1) $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n > n_0$,

2) последовательности $\{x_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *сходятся и* $\lim x_n = \lim z_n = a$.

Тогда последовательность $\{y_n\}$ *сходится и* $\lim y_n = a$.

Теорема 2 (о пределе подпоследовательности). *Если величина* a *является пределом последовательности* $\{x_n\}$, *то любая подпоследовательность последовательности* $\{x_n\}$ *имеет предел, равный* a.

Пример 25. Используя определение предела последовательности в терминах "$\varepsilon - N$" доказать, что

$$a)\ \lim\frac{n+1}{n+5}=1,\quad b)\ \lim\frac{\sin n}{2^n}=0,\quad c)\ \lim\frac{n+\sqrt{n}}{n^4+n-\operatorname{arctg} n}=0.$$

■ a) Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Найдем те $n\in\mathbb{N}$, для которых справедливо неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$. Так как

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+1}{n+5}-1\right|=\left|\frac{-4}{n+5}\right|=\frac{4}{n+5},\forall n\in\mathbb{N},$$

то

$$|x_n-1|<\varepsilon \iff \frac{4}{n+5}<\varepsilon \iff n>\frac{4}{\varepsilon}-5.$$

Выберем в качестве N какое-либо натуральное число, большее либо равное числу $\left[\frac{4}{\varepsilon}-5\right]$, например, $N=\max\left\{1,\ \left[\frac{4}{\varepsilon}-5\right]\right\}$. В частности, если $\varepsilon=1$, то $N=1$; если $\varepsilon=\frac{1}{2}$, то $N=3$; если $\varepsilon=\frac{1}{10}$, то $N=35$. Тогда для всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-1|=\frac{4}{n+5}<\varepsilon$. Учитывая произвольность в выборе $\varepsilon>0$ и определение предела, получим, что $\exists\lim x_n=1$.

Заметим, что при доказательстве данного утверждения следовало показать существование номера N, а не указать наименьшее N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Поэтому можно учесть, что

$$|x_n-1|=\frac{4}{n+5}<\frac{4}{n},\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Затем найти те $n\in\mathbb{N}$, для которых $\frac{4}{n}<\varepsilon$, $\forall\, n>N$. В качестве N в этом случае можно взять число $N=\max\{1,\ [4/\varepsilon]\}$. Тогда $|x_n-1|<\frac{4}{n}\le\varepsilon$.

Замена величины $|x_n-1|$ несколько большей позволяет упростить неравенство, решением которого являются те $n\in\mathbb{N}$, для которых выполняется неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$.

b) Фиксируем $\varepsilon>0$. Найдем те $n\in\mathbb{N}$, для которых $|x_n-0|<\varepsilon$. Так как

$$|x_n-0|=\frac{|\sin n|}{2^n}<\frac{1}{2^n},\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ \ldots\ +1>n,\ \forall\, n\ge 1,$$

то $|x_n-0|<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n},\forall n\ge 1$. Но тогда $\frac{1}{n}<\varepsilon \iff n>1/\varepsilon$. Положим $N=\max\{1,\ [1/\varepsilon]\}$ и получим, что $|x_n-0|<1/n<\varepsilon$, $\forall\, n>N$. Следовательно, $\lim x_n=0$.

c) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем те $n \in \mathbb{N}$, для которых $|x_n - 0| < \varepsilon$:

$$\left|\frac{n+\sqrt{n}}{n^4+n-\operatorname{arctg} n}\right| < \varepsilon.$$

Из определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ следует, что $0 < \operatorname{arctg} n < n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Поэтому $|n^4 + n - \operatorname{arctg}(n)| = n^4 + n - \operatorname{arctg} n$ и

$$\left|\frac{n+\sqrt{n}}{n^4+n-\operatorname{arctg}(n)}\right| = \frac{n+\sqrt{n}}{n^4+n-\operatorname{arctg} n} < \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3} < \frac{1}{n}, \forall n \geq 2.$$

Поскольку $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то, считая $N = \max\{2,\ [1/\varepsilon]\}$, получим, что $|x_n - 0| < 1/n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Учитывая произвольность числа $\varepsilon > 0$ и определение предела последовательности заключаем, что $\lim x_n = 0$. $\square$

Пример 26. Доказать, что последовательность $\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\}$ не имеет предела в $\mathbb{R}$.

■ Выпишем члены последовательности:

$$0,\ 1+\frac{1}{2},\ -1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{5},\ \ldots,\ -1+\frac{1}{2n-1},\ 1+\frac{1}{2n},\ \ldots$$

Поскольку для любых $k, n \in \mathbb{N}$

$$x_{2k} - x_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2k} - (\ -1 + \frac{1}{2n-1}) = (1+\frac{1}{2k}) + (1 - \frac{1}{2n-1})$$

и $1 - \dfrac{1}{2n-1} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то $x_{2k} - x_{2n-1} > 0$, поэтому

$$|x_{2k} - x_{2n-1}| = (1+\frac{1}{2k}) + (1 - \frac{1}{2n-1}) > 1 + \frac{1}{2k} > 1,$$

то есть члены последовательности с четными и нечетными номерами удалены друг от друга на расстояние, которое больше 1. Следовательно, какое бы $a \in \mathbb{R}$ ни было, существует окрестность, например, $U_a(1/2)$, вне которой лежит бесконечное множество членов последовательности, а поэтому последовательность не имеет предела в $\mathbb{R}$.

Доказательство последнего утверждения можно провести иначе. Рассмотрим последовательности $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем, используя определение 9 предела последовательности, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $x_{2k} = 1 + \dfrac{1}{2k}$, $x_{2k-1} = -1 + \dfrac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$|x_{2k} - 1| = \frac{1}{2k} < \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N};\ |x_{2k-1} - (-1)| = \frac{1}{2k-1} < \frac{1}{k},\ \forall k \geq 2.$$

Полагая $N = \max\{1; [1/\varepsilon]\}$, получим, что для всех $k > N$

$$|x_{2k} - 1| < \frac{1}{k} < \varepsilon, \quad |x_{2k-1} - (-1)| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Последнее, в силу произвольности ε, означает:

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1, \quad \exists \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ имеет две подпоследовательности $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, имеющие различные пределы, а поэтому последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. $\square$

Теорема о трех последовательностях дает другой подход к доказательству того факта, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$. При этом часто используются следующие факты:

1) $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$, если $a > 0$;
2) $\lim q^n = 0$, если $|q| < 1$.

Пример 27. С помощью теоремы о трех последовательностях, доказать, что

$a)$ $\lim \dfrac{\sin n}{2^n} = 0$, $\qquad b)$ $\lim \sqrt[n]{5 + (-1)^n} = 1$,

$c)$ $\lim \sqrt[n]{\ln n} = 1$, $\qquad d)$ $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$.

■ $a)$ Заметим, что последовательность $\left\{\dfrac{\sin n}{2^n}\right\}$ рассмотрена в примере 25 с помощью определения предела. Так как $-1 < \sin n < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то

$$-\frac{1}{2^n} < \frac{\sin n}{2^n} < \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(-\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$. Значит, в силу теоремы о трех последовательностях, существует $\lim \dfrac{\sin n}{2^n} = 0$.

$b)$ Так как $-1 \le (-1)^n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $4 \le 5 + (-1)^n \le 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и

$$\sqrt[n]{4} \le \sqrt[n]{5 + (-1)^n} \le \sqrt[n]{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но, как отмечалось выше, $\lim \sqrt[n]{4} = \lim \sqrt[n]{6} = 1$. Поэтому существует предел $\lim \sqrt[n]{5 + (-1)^n} = 1$.

$c)$ Так как $1 \le \ln n < n$, $\forall\, n > 1$, то в силу свойств арифметического корня $1 \le \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, $\forall\, n > 1$. Но $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, поэтому $\lim \sqrt[n]{\ln n} = 1$.

$d)$ Прежде всего заметим, что

$$2^n = 1 + 1^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + 1 > \frac{n(n-1)}{2}, \; \forall\, n \geq 1.$$

Значит, $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2n}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n-1}, \forall n > 1$. Поскольку $\lim \dfrac{2}{n-1} = 0$, то по теореме о 3-х последовательностях $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$. Аналогично можно доказать, что $\lim \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$, если $\alpha > 0$, $a > 1$. $\square$

2.3.1 Задания для самостоятельной работы

1. Записать в виде неравенств окрестности $U_1(1/3)$, $U_{-10}(1)$, $U_0(1/5)$.
2. Найти ε и x_0, для которых интервал $(-1, 5)$ является ε-окрестностью точки x_0.
3. Используя определение предела последовательности, доказать, что

   a) $\lim \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 5} = 1$,

   b) $\lim \dfrac{3 \cdot 5^n}{5^n + 7} = 3$,

   c) $\lim \dfrac{\ln n - 1}{2 \ln n} = \dfrac{1}{2}$,

   d) $\lim \sqrt{9 + \dfrac{1}{n}} = 3$.
4. Пусть $\lim x_n = 0$. Могут ли быть у этой последовательности:

   a) члены, большие 10^{10} ?

   b) бесконечное число членов, больших 10 ?

   c) бесконечное число членов, меньших 2^{-10} ?
5. Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся и $\lim x_n = \lim y_n = a$. Доказать, что последовательность $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ \ldots$ сходится и ее предел равен a.
6. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = 0$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что $|y_n - 1| < |x_n|$, $\forall\, n > n_0$. Доказать, что последовательность $\{y_n\}$ сходится и найти ее предел.
7. С помощью теоремы о трех последовательностях найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

a) $x_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$, b) $x_n = \sqrt[n]{2 + \sin n}$,

c) $x_n = \dfrac{2n+1}{2^n\,(n+1)}$, d) $x_n = \sqrt[n]{3n^2 - 1}$.

2.4 Бесконечно большие последовательности

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что все элементы x_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n| > \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел. Если последовательность является бесконечно большой и все члены ее, начиная с некоторого, положительны (отрицательны), то последовательность называется положительной (отрицательной) бесконечно большой и пишут $\lim x_n = +\infty$ (соответственно $\lim x_n = -\infty$).

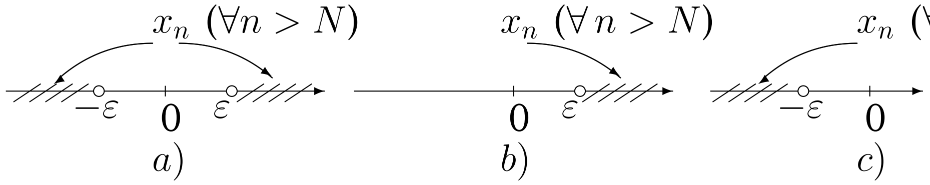
Используя логическую символику, данные определения можно записать так:

$$\lim x_n = \infty \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N \Rightarrow |x_n| > \varepsilon).$$

$$\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N \Rightarrow x_n > \varepsilon).$$

$$\lim x_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N \Rightarrow x_n < -\varepsilon).$$

Геометрически, соответственно, имеем:



Следовательно, тот факт, что последовательность имеет пределом ∞, или $+\infty$, или $-\infty$, означает, что в любой окрестности этого символа лежат все члены последовательности за исключением, быть может, конечного числа членов.

Пример 28. С помощью определения доказать, что

$$a)\ \lim((-1)^n n + 1) = \infty,\ \ b)\ \lim(\sqrt[3]{n} + (-1)^n) = +\infty,\ \ c)\ \lim(\sin n - n) = -\infty.$$

■ Для решения поставленной задачи зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем все n, для которых $|x_n| > \varepsilon$, а затем найдем номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_n| > \varepsilon, \forall\, n > N$. Часть для упрощения решения неравенства $|x_n| > \varepsilon$ подбирают такую последовательность $\{\alpha_n\}$, что $|x_n| \geq \alpha_n, \forall\, n > n_0$, и неравенство $\alpha_n > \varepsilon$

легко разрешается относительно n. Выбирая натуральное число $N_0 = N_0(\varepsilon) > n_0$ такое, что $\alpha_n \geq \varepsilon$, $\forall\, n > N_0$, получаем, что

$$|x_n| \geq \alpha_n > \varepsilon,\ \forall\, n > N_0,$$

что завершает доказательство в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$.

a) Так как $|x_n| = |(-1)^n n + 1| \geq |(-1)^n n| - 1 = n - 1$, $\forall n \geq 1$, и $n - 1 > \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon + 1$, то, положив $N = [\varepsilon + 1]$, получим, что для всех $n > N$

$$|x_n| \geq n - 1 > \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность является бесконечно большой, причем знак ее указать нельзя (все элементы с четными номерами положительны, а с нечетными — отрицательны).

b) Так как $\sqrt[3]{n} > 1, \forall n > 1$, то $x_n = \sqrt[3]{n} + (-1)^n > 0, \forall n > 1$. Далее, $x_n = \sqrt[3]{n} + (-1)^n \geq \sqrt[3]{n} - 1$ и $\sqrt[3]{n} - 1 > \varepsilon \Leftrightarrow n > (1+\varepsilon)^3$. Положим $N = [(1+\varepsilon)^3]$, получим $x_n = \sqrt[3]{n} + (-1)^n > \sqrt[3]{n} - 1 \geq \varepsilon$, $\forall n > \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность является положительной бесконечно большой.

c) Прежде всего заметим, что $\sin n - n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Так как

$$|x_n| = |\sin n - n| = n - \sin n > n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ и } n - 1 > \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \varepsilon,$$

то положим $N = [1+\varepsilon]$ и получим, что $|\sin n - n| = n - \sin n > n - 1 > \varepsilon$, $\forall\, n > \mathbb{N}$. Последнее означает, что последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, а, учитывая знак ее членов — отрицательной бесконечно большой последовательностью. □

Пример 29. Доказать, что последовательность $\{x_n\} : x_n = n^{(-1)^n}$ является неограниченной, но не является бесконечно большой.

■ Выпишем члены этой последовательности и отметим соответствующие им точки числовой оси: 1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6, 1/7, ...

Расположение членов последовательности зависит от четности (нечетности) номера n. Последовательность $\{x_{2k}\} = \{2k\}$ является бесконечно большой, так как $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \max\{1; [\varepsilon/2]\}$ такой, что $\forall k > N$ выполняется неравенство $|x_{2k}| = 2k > 2(\varepsilon/2) = \varepsilon$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ не ограничена (последовательность, имеющая бесконечно большую подпоследовательность, не ограничена). Последовательность $\{x_{2k-1}\} = \left\{\dfrac{1}{2k-1}\right\}$ имеет предел, и он равен 0, так как $\forall \varepsilon > 0$

$$0 < \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{k+(k-1)} < 1/k < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ k > 1,\, k > 1/\varepsilon,$$

а значит $0 < x_{2k-1} < 1/k < \varepsilon, \forall k > \max\{1; [1/\varepsilon]\} := N_1$.

Итак, в окрестности $U_\infty(\varepsilon)$ бесконечно удаленной точки содержатся элементы $x_{2k}, \forall k > N$, а вне ее (в окрестности $U_0(\varepsilon)$) находится бесконечное множество элементов последовательности с нечетными номерами x_{2k-1}, $k > N_1$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно большой. Заметим, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, поскольку у нее есть две подпоследовательности, имеющие различные пределы. □

Пример 30. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если

$$a)\ x_n = \ln n, \qquad b)\ x_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right).$$

■ a) Так как $\ln n > 0, \forall n > 1$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\ln n > \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n > e^\varepsilon$, то положим $N = [e^\varepsilon]$ и получим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ :\ \ln n > \varepsilon, \forall\, n > N.$$

Поэтому, последовательность является положительной бесконечно большой, а поэтому расходится.

b) Выпишем члены последовательности $\left\{n \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right\}$: $1, 0, -3, 0, 5, 0, \ldots$. Все элементы с четными номерами равны нулю, значит подпоследовательность $\{x_{2k}\}$ сходится к 0. Но

$$x_{2k-1} = (2k-1)\, \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}(2k-1), \forall k \geq 1,$$

поэтому $|x_{2k-1}| = 2k-1, \forall k \in \mathbb{N}$ и $x_{2k-1} \to \infty$. Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ является бесконечно большой. А поскольку подпоследовательность $\{x_{2k}\}$ является бесконечно малой, то последовательность $\{x_n\}$ расходится. □

2.4.1 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $\lim x_n = \infty$. Доказать, что $\lim |x_n| = +\infty$.

2. Пусть $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Доказать, что последовательность $\{x_n \cdot \sin\frac{\pi}{2} n\}$ расходится.

3. Используя определение бесконечно большой последовательности, доказать, что

a) $\lim \dfrac{n^2}{2n-1} = +\infty$, b) $\lim(\cos n - 2n) = -\infty$;

c) $\lim \dfrac{n^2-3n}{n+10} = +\infty$, d) $\lim \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1} = \infty$;

e) $\lim(\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n}) = -\infty$, f) $\lim \dfrac{\sqrt{n^5-1}}{2n^2-n+1} = +\infty$.

4. Доказать, что последовательность $\{(1+(-1)^n)\cdot n\}$, $n \in \mathbb{N}$, является неограниченной, но не является бесконечно большой.

2.5 Вычисление предела последовательности

При вычислении предела последовательности часто используются следующие факты:

1. Если $P(n) = \sum\limits_{k=1}^{k_0} a_k n_k$ и $a_{k_0} \neq 0$, то $\lim\limits_n P(n) = \operatorname{sgn} a_{k_0} \cdot \infty$;
2. $\lim\limits_n \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, если $\alpha > 0$;
3. $\lim\limits_n \sqrt[n]{a+\alpha_n} = 1$, если $a > 0$ и $\alpha_n \to 0$;
4. $\lim\limits_n \sqrt[k]{a+\alpha_n} = \sqrt[k]{a}$, если $a > 0$ и $\alpha_n \to 0$;
5. $\lim\limits_n \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$, если $|a| > 1$;
6. $\lim\limits_n \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, если $\alpha > 0$;
7. $\lim\limits_n \dfrac{a^n}{n!} = 0$, если $a \in \mathbb{R}$.

Кроме того, используется теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями, свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей и теорема о представлении членов сходящейся последовательности в терминах бесконечно малых последовательностей. Все эти результаты приведены ниже.

Теорема 3. *1) Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

2) Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim x_n = a, \lim y_n = b$, то*
1) последовательность $\{x_n \pm y_n\}$сходится и $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$,
2) последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и $\lim(x_n \cdot y_n) = ab$,
3) если $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $b \neq 0$, последовательность $\{x_n/y_n\}$ сходится и $\lim x_n/y_n = a/b$.

Теорема 5. *1) Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.*
2) Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака — бесконечно большая последовательность того же знака.
3) Произведение бесконечно большой и отграниченной от нуля последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

Определение 10. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется отграниченной от нуля, если существуют число m>0 и номер n_0 такие, что $|x_n| \geq m, \forall n > n_0$.*

При доказательстве отграниченности от нуля последовательности либо используют тот факт, что последовательность имеет предел, отличный от нуля, либо приводят оценки снизу модуля ее общего члена.

Пример 31. Доказать, что последовательность $\{2+\sin\sqrt{n}\}$ отграничена от нуля.

■ Так как $|2+\sin\sqrt{n}| \geq 2-|\sin\sqrt{n}| \geq 2-1 = 1, \forall n \geq 1$, то последовательность отграничена от нуля. □

Теорема 6. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся к $a \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.*

Пример 32. Вычислить предел последовательности $\{x_n\}$, если

$a)\ x_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{3n + 2\ln n}$, $\qquad b)\ x_n = \left(\dfrac{3n-1}{n+5}\right)^2 - \left(\dfrac{n}{n+5}\right)^2$,

$c)\ x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}$, $\qquad d)\ x_n = \dfrac{(2n+1)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$,

$e)\ x_n = \sqrt{2n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-n+3}$, $\qquad f)\ x_n = (7+\sin n)\ln n$,

$g)\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

■ a) Числитель и знаменатель в представлении x_n являются бесконечно большими. Вынесем в них за скобки максимальные степени числа n, получим:

$$x_n = \frac{n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^{3/2}}\right)}{n\left(3 + 2\dfrac{\ln n}{n}\right)} = n\,\frac{1 - \dfrac{1}{n^{3/2}}}{3 + 2\dfrac{\ln n}{n}}.$$

Последовательности $\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ являются бесконечно малыми. В силу теоремы 5 последовательность $\left\{2\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ — бесконечно малая. По теореме 6 имеем: $1 - \frac{1}{n^{3/2}} \to 1$ и $3 + 2\cdot\dfrac{\ln n}{n} \to 3$, а по теореме 4:

$$\frac{1 - \dfrac{1}{n^{3/2}}}{3 + 2\dfrac{\ln n}{n}} \to 1/3 \neq 0.$$

Поэтому последняя последовательность отграничена от нуля. Учитывая, что $\{n\}$ — бесконечно большая последовательность, согласно теореме 5 делаем вывод: $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Наконец, замечая, что $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, получаем, что $\lim x_n = +\infty$.

b) Разность дробей приведем к общему знаменателю, получим

$$x_n = \frac{(3n-1)^2 - n^2}{(n+5)^2}.$$

Числитель и знаменатель отношения являются многочленами 2-ой степени. Деля числитель и знаменатель на n^2, получим, что

$$x_n = \frac{(3 - 1/n)^2 - 1}{(1 + 5/n)^2} \Rightarrow \lim x_n = 8.$$

Замечание. Нецелесообразно в числителе раскрывать скобки!

c) Поскольку подкоренные выражения являются многочленами 2-ой степени с одинаковыми коэффициентами при n^2, то избавляясь от иррациональности в числителе, получим:

$$x_n = \frac{(n^2+2n+3) - (n^2-2n+3)}{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2-2n+3}} = \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2-2n+3}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}}}\ .$$

Так как $\left\{\pm\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые последовательности, то, в силу теоремы 6,

$$\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\to 1,\quad \sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\to 1,$$

а поэтому в силу теоремы 4 $\lim x_n = 4/2 = 2$.

d) В числителе дроби стоит разность многочленов третьей степени, причем коэффициенты в одночленах, содержащих n^3, равны, а в знаменателе — сумма многочленов второй степени также с равными коэффициентами при n^2. Раскроем в числителе куб суммы $(1+2n)^3$ и приведем подобные, затем разделим числитель и знаменатель на n^2 и получим:

$$x_n = \frac{1+6n+12n^2}{(1+2n)^2+4n^2} = \frac{1/n^2+6/n+12}{(1/n+2)^2+4} \quad\Rightarrow x_n \quad \to 12/8 = 3/2.$$

e) В отличие от примера b) подкоренные выражения являются многочленами 2-ой степени с различными коэффициентами при n^2. Поэтому вынесем из под корней и за скобки n:

$$x_n = n\left(\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right).$$

Тогда выражение в скобках имеет предел, равный $\sqrt{2}-1>0$, и поэтому образует положительную отграниченную от нуля последовательность. Так как $\{n\}$ — положительная бесконечно большая последовательность, то (в силу теоремы 5) $\lim x_n = +\infty$.

f) Заметим, что $|7+\sin n| \geq 7-|\sin n| > 6, \forall n\in\mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\{7+\cos n\}$ отграничена от нуля и положительна. Поскольку $\{\ln n\}$ — положительная бесконечно большая, то $\lim x_n = +\infty$.

g) Каждое слагаемое в x_n можно оценить следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ k=1,2,\dots,n.$$

Поэтому $\dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}, \forall n\in\mathbb{N}$. Используя теорему 1 получим, что $\lim x_n = 1$. $\square$

Пример 33. Вычислить предел последовательности $\{x_n\}$, если

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n+\dfrac{1}{n}}{(-1)^n-\dfrac{1}{n^2}}$, *b*) $x_n = \dfrac{2n^2+3n-1}{(2n+1)(6n+1)}\sqrt[n]{n+1}$.

■ a) Прежде всего, заметим, что числитель и знаменатель отношения образуют расходящиеся последовательности, но

$$x_n = \frac{(-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)}{(-1)^n \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)} = \frac{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}{1 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}}.$$

Так как $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые последовательности, то $\lim x_n = 1$.

b) Последовательность $\{x_n\}$ — произведение 2-х последовательностей

$$\left\{\frac{2n^2+3n-1}{(2n+1)(6n+1)}\right\} \text{ и } \{\sqrt[n]{n+1}\}.$$

Так как $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$, то, в силу теорем 4 и 1, $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$. Далее,

$$y_n = \frac{2n^2+3n-1}{(2n+1)(6n+1)} = \frac{n^2(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n})(6+\frac{1}{n})} \Rightarrow \lim y_n = 1/6.$$

Следовательно, в силу теоремы 4, $\lim x_n = 1/6$. □

2.5.1 Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить предел последовательности $\{x_n\}$:

a) $x_n = \dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$,

b) $x_n = \dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt{n}}$,

c) $x_n = \dfrac{\ln(n^2+\ln n)}{\ln(n^4+\cos n)}$,

d) $x_n = \dfrac{1+2+...+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

e) $x_n = \dfrac{n+(-6)^n+3^{-n}}{9^n+\sqrt{n}}$,

f) $x_n = (n+1)\operatorname{arctg} n$,

g) $x_n = (3+\cos n)\, 2^{-n}$,

$x_n = \sqrt[3]{n^4}\left(\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[3]{n^2-3}\right)$.

2. Доказать, что последовательность $\left\{(-1)^{n(n+1)/2} \cdot \dfrac{n}{n+1}\right\}$ расходится.

Список литературы

[1] Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1 [Текст]: учебное пособие для вузов/ Виноградова И. А. С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : Высшая школа, 2000.

[2] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: учеб. для вузов/ Демидович Б. П. – М. : Наука, 1990.

[3] Курс лекций по математическому анализу, I курс, 1-й семестр [Текст]: учебное пособие для вузов/ Коршикова Т.И. [и другие] – Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2006.

Содержание