ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического анализа

Коршикова Т. И., Калиниченко Л. И.,
Кирютенко Ю. А., Спинко Л. И.

Методические указания
к практическим занятия по математическому анализу
I курс, 1-й семестр
Предел и непрерывность функции

Ростов-на-Дону
2007 год

Методические указания разработаны сотрудниками кафедры математического анализа Коршиковой Т. И., Калиниченко Л. И., Кирютенко Ю. А., Спинко Л.И. В них рассматриваются методы решения типовых примеров, традиционно решаемых на практических занятиях по математическому анализу в первом семестре первого курса на отделениях «Математика» и «Механика». После каждого раздела приведены задачи для самостоятельной работы. В указаниях авторы существенно опираются на теоретический материал, изложенный в курсе лекций по математическому анализу [3], используют его определения и обозначения.

Ответственный редактор доктор физ.-мат. наук А. В. Абанин

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-мат. наук Ю. А. Кирютенко

Печатается в соответствии с решением кафедры математического анализа факультета «Математика, механика и компьютерные науки», протокол №8 от 17 апреля 2007 г.

1 Предел функции

1.1 Предельная точка множества

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $X \neq \emptyset$. Точка a (конечная или бесконечно удаленная) называется предельной точкой множества X, если в любой ее окрестности содержится хотя бы один элемент множества X, отличный от a.*

С помощью логической символики определение 1 можно записать так:

$$a \text{ — предельная точка множества} X \iff \left(\forall\, U_a \Rightarrow \overset{\circ}{U}_a \cap X \neq \emptyset\right).$$

Определение 1 равносильно следующему.

Определение 2. *Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой множества X ($X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$), если в любой ее окрестности содержится бесконечно много элементов множества X.*

Теорема 1. *Для того чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ была предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X, отличных от a, сходящаяся к a.*

Существует большое разнообразие возможных ситуаций: множество может состоять только из предельных точек или не иметь ни одной предельной точки; предельные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству и так далее. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Указать множество предельных точек следующих множеств:

$$a)\ X = \{(-1)^n,\, n \in N\};\ b)\ X = \{\frac{1}{n},\, n \in N\};\ c)\ X = \{\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}.\, n \in N\}.$$

■ a) Множество X состоит из двух элементов: -1 и 1. Поэтому для любой точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ в любой окрестности U_a содержится не более двух точек множества X. В силу определения 2 точка a не является предельной точкой X. Следовательно, множество X не имеет предельных точек в $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Рассмотрим числовую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n = \dfrac{1}{n}$. Ее элементы составляют множество X и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, причем $\forall\ n \in \mathbb{N}\ x_n \neq 0$. Следовательно, согласно критерию предельной точки числового множества, точка $x = 0$ является предельной точкой множества X. Заметим, что так как множество элементов последовательности $\{x_n\}$ и исследуемое множество X

совпадают, то вне любой окрестности точки $x = 0$ содержится не более конечного числа элементов из X. Поэтому,

$$\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}\, \exists\, U_a : \overset{\circ}{U}_a \cap X \neq \emptyset.$$

Следовательно, X не имеет предельных точек, кроме $x = 0$.

c) Элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{1}{n}$, составляют множество X. Рассмотрим последовательность $\{x_n^{'}\}_{n=1}^{\infty} : x^{'}{}_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$. Ясно, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = x_n^{'} + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Выпишем первые элементы последовательности $\{x^{'}{}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots .$$

Можно утверждать, что данная последовательность исчерпывается подпоследовательностями : $\{x^{'}{}_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} : x^{'}{}_{2k-1} = 0$, $\{x^{'}{}_{4k-2}\}_{k=1}^{\infty} : x^{'}{}_{4k-2} = 1$ и $\{x^{'}{}_{4k}\}_{k=1}^{\infty} : x^{'}{}_{4k} = -1$ (то есть каждый элемент последовательности принадлежит одной и только одной из указанных подпоследовательностей). Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, существуют следующие пределы

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 0,\ \lim_{k\to\infty} x_{4k-1} = 1,\ \lim_{k\to\infty} x_{4k} = -1. \tag{2}$$

А поскольку для всех $k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \neq 0,\ x_{4k-1} = 1 + \frac{1}{4k-1} \neq 1,\ x_{4k} = -1 + \frac{1}{4k} \neq -1,$$

по критерию предельной точки числового множества, точки $0, 1, -1$ — предельные точки множества X.

Докажем, что X не имеет других предельных точек. Так как

$$-1 \leq x_n^{'} \leq 1\,,\ 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то, в силу (1), $-1 \leq x_n \leq 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Поэтому множество X ограничено, а значит бесконечно удаленные точки не являются его предельными точками. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. В силу аксиомы непрерывности для множества вещественных чисел, существуют попарно непересекающиеся окрестности U_{-1}, U_0, U_1, U_a, точек $-1, 0, 1, a$, соответственно. Из (2) следует, что вне окрестностей U_{-1}, U_0, U_1 находится не более конечного числа элементов подпоследовательностей

$$\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty},\ \{x_{4k-2}\}_{k=1}^{\infty},\ \{x_{4k}\}_{k=1}^{\infty},$$

а значит, не более конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда в окрестности $\overset{\circ}{U}_a$ находится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Последнее означает, что точка a не является предельной точкой множества X (см. определение 2).

Итак, в силу сказанного ранее, предельными для множества X являются точки $-1, 0, 1$ и только они. $\square$

1.1.1 Задания для самостоятельной работы

Найти предельные точки следующих множеств:

a) $X = \left\{(-1)^n \dfrac{2n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

b) $X = \left\{\dfrac{(-1)^n+1}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

c) $X = (0, 2)$.

d) $X = \{-n(1+\cos n\pi),\ n \in \mathbb{N}\}$.

e) $X = \left\{\sin \dfrac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

f) $X = \left\{\cos \dfrac{\pi}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.2 Определение предела функции в точке

Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела функции в точке a, связанное с поведением функции в проколотой окрестности этой точки.

Определение 3 (Коши). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества X. Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или, говорят, при x стремящемся к a), если для любой окрестности U_A точки A существует окрестность U_a точки a такая, что $f(x) \in U_A$, $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \cap X$; при этом используют одно из следующих обозначений:* $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $A = \lim\limits_{a} f$, $f(x) \to A$ *при* $x \to a$.

Данное определение можно записать, используя логические символы:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow (\forall\, U_A\, \exists\, U_A : \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \cap X \Rightarrow f(x) \in U_A).$$

Замечание. Используя понятие окрестности точки из $\overline{\mathbb{R}}$ определение 3 можно записать в эквивалентном виде на языке “$\varepsilon - \delta$”.

1) $a, A \in \mathbb{R}$, $A = \lim\limits_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow$

$$(\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall\, x \in X : 0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)\,;$$

2) $a \in \mathbb{R},\ A = -\infty,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$

$$(\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall\,x \in X : 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon)\,;$$

3) $a = +\infty,\ A \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow$

$$(\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall\,x \in X : x > \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

Аналогично описываются остальные возможные случаи.

Из указанного определения следует, что существование и величина предела функции $f(x)$ в точке a не зависит ни от значения функции $f(x)$ в точке a (функция может быть даже не определена в этой точке), ни от поведения функции $f(x)$ вне некоторой окрестности точки a.

Приведем еще одно, равносильное первому, определение предела функции в точке в терминах последовательностей.

Определение 4 (Гейне). *Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X. Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что*

$$x_n \in X,\ x_n \neq a,\ \forall\,n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

соответствующая ей последовательность образов $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный A, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Это определение можно записать с помощью логических символов:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Big(\forall\,\{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\ x_n \in X, x_n \neq a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\Big)\,.$$

Следует отметить, что последнее определение часто используется для доказательства отсутствия предела функции в точке.

Тот факт, что a из $\overline{\mathbb{R}}$ не является пределом функции f в точке a означает следующее.

1) по Коши (в случае $a, A \in \mathbb{R}$):

$$\exists\,\varepsilon_0 > 0 : \forall\,\delta > 0\,\exists\,x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - a| < \delta,\ |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0;$$

2) по Гейне: $\exists\,\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in X, x_n \neq a, \forall\,n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но A не является пределом последовательности $\{f(x_n)\}$.

Из определения предела функции в точке по Гейне следует, что если существуют последовательности аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие всем требованиям определения 4, но соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеют различные пределы (либо предел одной из них вовсе не существует), то не существует и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 2. Используя определение предела функции в точке доказать:

$a)$ $\lim\limits_{x\to -1}(1-2x)=3$ $\qquad$ $b)$ $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$

$c)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0$ $\qquad$ $d)$ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty$

■ $a)$ Рассмотрим функцию $f(x)=1-2x$. Понятно, что $D(f)=\mathbb{R}$ и точка $a=-1$ — предельная точка множества $D(f)$. Фиксируем число $\varepsilon>0$. Найдем те $x\in D(f)$, для которых выполняется неравенство $|f(x)-3|<\varepsilon$:

$$|(1-2x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x+1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда получим:

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}>0:\forall\,x\in\mathbb{R},\,0<|x+1|<\delta\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon.$$

По определению предела функции в точке по Коши $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.

$b)$ Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Так как $D(f)=\mathbb{R}$, то точка $a=-3$ — предельная для множества $D(f)$. Фиксируем число $\varepsilon>0$. Найдем те $x\in\mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство $|f(x)-9|<\varepsilon$. Так как $|f(x)-9|=|x^2-9|=|x-3|\,|x+3|$, то оценим сверху $|x-3|$ в некоторой окрестности точки $a=-3$. Например, в окрестности $U_{-3}(1)$

$$|x-3|=|(x+3)-6|\le|x+3|+6<7.$$

Следовательно,

$$|x^2-9|<7|x+3|,\,\forall\,x\in U_{-3}(1). \tag{3}$$

Далее, заметим, что $7|x+3|<\varepsilon \iff |x+3|<\frac{\varepsilon}{7}$. Чтобы можно было использовать полученное неравенство (3), искомая δ-окрестность точки $a=-3$ должна лежать в $U_{-3}(1)$. Поэтому положим $\delta=\min\{1;\varepsilon/7\}$. Таким образом, получаем, что

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,:\,\big(\forall\,x:0<|x+3|<\delta\Rightarrow|x^2-9|<\varepsilon\big).$$

По определению предела функции в точке по Коши $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=9$.

c) Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+100x+3000}$. Нетрудно убедиться в том, что $D(f) = \mathbb{R}$ и, следовательно, точка $+\infty$ является предельной точкой множества $D(f)$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует число $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in (\delta, +\infty)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Выберем удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$, например, $U_{+\infty}(1) = (1, +\infty)$. Тогда для всех $x \in U_{+\infty}(1)$ $x^2+100x+3000 > x^2$ и $|\sin x| \le 1$, значит, $|f(x)| = \dfrac{1}{x}$. Но $\dfrac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Чтобы использовать полученные оценки, искомая окрестность $U_{+\infty}(\delta) = (\delta, \infty)$ должна содержаться в $U_{+\infty}(1)$. Положим $\delta = \max\{1; 1/\varepsilon\}$. Тогда из неравенства $x > \delta$ следует, что $|f(x)| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta = \max\left\{1; \frac{2}{\varepsilon}\right\} : |f(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in (\delta, +\infty).$$

По определению предела функции в точке по Коши $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty$. Положим $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Область определения этой функции $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Точка $a = -1$ является предельной точкой множества $D(f)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Докажем, что функция $f(x)$ является бесконечно большой в точке $x = -1$, для чего оценим $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки, например, в $U_{-1}(1/2) = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < \dfrac{1}{2}\}$. Так как для всех $x \in U_{-1}(1/2)$ $|x+1| < 1/2$ и

$$|x| = |(x+1) - 1| \ge 1 - |x+1| > 1 - 1/2 = 1/2,$$

то $|f(x)| = \dfrac{|x^3|}{(x+1)^2} > \dfrac{1}{8\,(x+1)^2} > \dfrac{1}{4\,|x+1|}$. Но $\dfrac{1}{4\,|x+1|} > \varepsilon \Longleftrightarrow 0 < |x+1| < \dfrac{1}{4\,\varepsilon}$, поэтому положим $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4\varepsilon}\right\}$. Заметим, что в $U_{-1}(1/2)$, а, значит, и для $x \in U_{-1}(\delta)$, $f(x) < 0$. Поэтому $-f(x) > \dfrac{1}{4\,|x+1|} > \varepsilon$. Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4\varepsilon}\right\} > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < |x+1| < \delta \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

По определению предела функций в точке по Коши $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$. $\square$

Пример 3. Доказать, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

■ Воспользуемся следствием из определения Гейне об отсутствии предела функции в точке. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Очевидно, что $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то $\lim f(x_n) = 1$.

Аналогично, для последовательности $x_n' : x_n' = 1/\pi n$ имеем:

$$x_n' \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} x_n' = 0,\ \sin x_n' = 0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 0.$$

Следовательно, не существует $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$. $\square$

Из приведенных выше примеров видно, что определение предела функции в точке позволяет доказать, что данная величина является пределом рассматриваемой функции в точке, но не дает конструктивного метода вычисления предела.

1.2.1 Задания для самостоятельной работы

1. Что означает на языке “$\varepsilon - \delta$” утверждение:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$;
   c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq +\infty$?

2. Используя определение предела функции в точке, доказать:

   a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = 8$; b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos x^2 = 0$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0$;

   e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)}{2x^2+x+5} = 0$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2\sin x + 3}{x^2+x-1} = 0$;

   g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-2x}{x+1} = +\infty$; h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(x+1)}{\sqrt{x}+1} = 0$.

1.3 Примеры вычисления предела функции

Чтобы вычислить предел функции в точке, следует использовать теоремы [3, 2.34 – 2.44] и их следствия о свойствах функций, имеющих предел в точке, а также свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Но непосредственное применение этих результатов часто невозможно, например, при вычислении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. В этом случае говорят, что имеет место *неопределенность* вида $\dfrac{0}{0}$. Аналогично вводятся символические обозначения других неопределенностей: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

В тех случаях, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела — "раскрытия неопределенности" — выражение следует преобразовать так, чтобы получить возможность применить теоремы о функциях, имеющих предел. Для таких преобразований используют либо тождественные (в проколотой окрестности предельной точки) преобразования, либо сравнение поведения функций при стремлении аргумента к предельной точке.

Определение 5. *Если в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}_a$ *точки* a *определены функции* f, g, h *такие, что* $f(x)=g(x)h(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a}h(x)=1$, *то функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называют эквивалентными при* $x\to a$ *и пишут* $f(x)\sim g(x)$ *при* $x\to a$.

В частности, если $g(x)\neq 0$, $\forall x\in\overset{\circ}{U}_a$, то

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to a \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1) если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$, то $g(x)\sim f(x)$ при $x\to a$ (свойство симметричности);

2) если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$ и $g(x)\sim h(x)$ при $x\to a$, то $f(x)\sim h(x)$ при $x\to a$ (свойство транзитивности);

При вычислении пределов часто используют следующий результат.

Теорема 2. *Если* $f_1(x)\sim f(x)$, $g_1(x)\sim g(x)$ *при* $x\to a$, *то из существования предела функции* $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *при* $x\to a$ *следует существование предела функции* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x\to a$ *и справедливость равенства* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела функции состоит в замене функции, не являющейся множителем, на эквивалентную функцию (чаще всего, это ошибочная замена в отдельном слагаемом алгебраической суммы или в суперпозиции функций).

Напомним некоторые эквивалентные при $x \to 0$ функции:

$\sin x \sim x$	$(1+x)^{1/x} \sim e$
$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$e^x - 1 \sim x$
$\operatorname{ctg} x \sim \dfrac{1}{x}$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$ $(\mu \in R \setminus \{0\})$

Кроме перехода к эквивалентным при вычислении пределов функций надо помнить некоторые результаты о сравнении поведения двух функций при стремлении аргумента к предельной точке. Напомним два определения для бесконечно больших функций.

Определение 6. *Говорят, что бесконечно большая функция $g(x)$ по сравнению с бесконечно большой функцией $f(x)$ имеет при $x \to a$ более высокий порядок роста и пишут $f(x) = o(g(x))$, если $f(x) = \alpha(x)\, g(x)$ где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.*

В частности,

1) так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a^{\beta} x}{x^{\alpha}} = 0$ $(\forall\, \alpha,\ \beta > 0;\ \forall\, a > 1)$, то x^{α} — бесконечно большая функция более высокого порядка роста по сравнению с $\log_a^{\beta} x$ при $x \to +\infty$;

2) так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0$ $(\forall\, \alpha > 0;\ \forall\, a > 1)$, то a^x — бесконечно большая более высокого порядка роста по сравнению с x^{α} при $x \to +\infty$.

Определение 7. *Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими функциями одного порядка роста при $x \to a$, если функции f/g и g/f ограниченные функции в некоторой проколотой окрестности точки a (в частности, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).*

Например, функции $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = 2x + \ln x$ — бесконечно большие функции одного порядка роста при $x \to +\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1/2$.

Аналогичные определения существуют и для бесконечно малых функций (см., например, [3, раздел 2.2.8].

1.4 Вычисление предела рациональной функции

Рациональной функцией или рациональной дробью называется функция вида $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m, соответственно. Множество предельных точек области определения рациональной функции есть $\overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим вычисление пределов $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Если $a\in\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a}P_n(x)=\lim\limits_{x\to a}Q_m(x)=0$, то для вычисления указанного предела (раскрытия неопределенности вида $0/0$) обычно преобразуют дробь, выделяя в числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)$.

Если $a=\infty$ (или $\pm\infty$), то $\lim\limits_{x\to a}P_n(x)=\lim\limits_{x\to a}Q_m(x)=\infty$ и для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ выносят в числителе и в знаменателе за скобку x^n и x^m, соответственно, а, затем, используют свойства пределов и сравнивают рост бесконечно больших функций x^n и x^m при $x\to\infty$: :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+a_1\dfrac{1}{x}+a_2\dfrac{1}{x^2}+\ldots+a_n\dfrac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+b_1\dfrac{1}{x}+b_2\dfrac{1}{x^2}+\ldots+b_n\dfrac{1}{x^m}\right)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m\\ 0, & \text{если } n<m\\ \infty, & \text{если } n>m\end{cases}$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

■ Так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x-3)=0$, то имеем неопределенность вида $0/0$. Представим числитель и знаменатель в виде

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),\quad x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

При $x\neq 1$ имеем: $\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$.

Но $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$, а $\lim\limits_{x\to 1}(x-3)=2$, поэтому по теореме о пределе частного $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}=\dfrac{3}{2}$. □

Замечание. При делении многочлена на $(x-a)$ часто используются при $n\in\mathbb{N}$ следующие равенства:

$$x^{2n}-a^{2n}=(x-a)\left(x^{2n-1}+x^{2n-2}a+x^{2n-3}a^2+\cdots+x\,a^{2n-2}+a^{2n-1}\right),$$

$$x^{2n}-a^{2n}=(x+a)\left(x^{2n-1}-x^{2n-2}a+x^{2n-3}a^2-\dots+x\,a^{2n-2}-a^{2n-1}\right),$$
$$x^{2n+1}-a^{2n+1}=(x-a)\left(x^{2n}+x^{2n-1}a+x^{2n-2}a^2+\dots+x\,a^{2n-1}+a^{2n}\right).$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^{20}+2x+1}{x^{30}+3x+2}$.

■ Так как $\lim\limits_{x\to-1}(x^{20}+2x+1)=\lim\limits_{x\to-1}(x^{30}+3x+2)=0$, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и для ее раскрытия выделим в числителе и знаменателе множитель $(x+1)$:

$$x^{20}+2x+1=x^{20}-1+2(x+1)=(x+1)\left(x^{19}-x^{18}+\dots+x-1\right)+2(x+1)=$$
$$=(x+1)\left(x^{19}-x^{18}+\dots+x-1+2\right),$$
$$x^{30}+3x+2=(x^{30}-1)+3(x+1)=(x+1)\left(x^{29}-x^{28}+\dots+x-1\right)+3(x+1)=$$
$$=(x+1)\left(x^{29}-x^{28}+\dots+x-1+3\right).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^{20}+2x+1}{x^{30}+3x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^{19}-x^{18}+\dots+x-1)+2}{(x^{29}-x^{28}+\dots+x-1)+3}=\dfrac{-18}{-27}=\dfrac{2}{3}$. Заметим, что вычисление этого предела, завершается применением утверждения (см. теорему [3, 2.36]) о пределе суммы и частного. □

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^{20}(3x+1)^{11}}{(5x-17)^{30}}$.

■ Так как $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)^{20}(3x+1)^{11}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-17)^{20}=+\infty$, то имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем исходное отношение:

$$\frac{(x-1)^{20}(3x+1)^{11}}{(5x-17)^{30}}=\frac{x^{20}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{20}x^{11}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{11}}{x^{30}\left(5-\dfrac{17}{x}\right)^{30}}=x\cdot\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{11}}{\left(5-\dfrac{17}{x}\right)^{30}}.$$

Применяя теорему о пределе суммы, произведения и частного, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{11}}{\left(5-\dfrac{17}{x}\right)^{30}}=\frac{3^{11}}{5^{30}}\neq0.$$

Теперь, учитывая свойства бесконечно больших функций, получаем, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{11}}{\left(5-\dfrac{17}{x}\right)^{30}}\right)=-\infty.\quad\square$$

1.4.1 Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\(x\to 0;x\to -1)}} \dfrac{x^3-x}{x(x+1)}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)-1}{x+3x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x+1-(1+x)^5}{x^2-3x^5}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+5)^5-(x+6)^5}{x^4+x^3}$,

7) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^{15}(2x+3)^{20}}{(3x+5)^{35}}$, 8) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x+1-(1+x)^5}{x^2-3x^5}$,

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, $(n,m\in\mathbb{N})$, 10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$,

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$, 12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$.

1.5 Вычисление предела иррациональной функции

Общих указаний, как вычислять предел иррациональной функции, дать нельзя. Все зависит от вида функции. Поэтому рассмотрим применяемые методы на конкретных примерах.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

■ Имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Поскольку нуль в числителе получается от разности двух функций, одна из которых — иррациональное выражение, умножим числитель и знаменатель на выражение $(\sqrt{3+x}+2)$, то есть на выражение, «сопряжённое» к числителю, и получим

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}. \ \square$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

■ Имеем неопределённость вида $0/0$. В числителе и знаменателе данной дроби имеем почти ту же ситуацию, что и в числителе предыдущего примера. Отличие состоит в том, что в знаменателе стоит корень кубический. В этом случае выражением «сопряженным» к знаменателю будет неполный квадрат разности. В остальном метод решения остается прежним: умножим и разделим исходное отношение на выражения, «сопряжённые» к числителю и знаменателю, и получим

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)(8+x)}=$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{12}{6}=-2\,.\ \square$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sqrt[5]{x^7}}{2-\sqrt[3]{8-x}}$.

■ Имеем неопределённость вида 0/0. Числитель рассматриваемой функций является суммой степенных функций x и $x^{7/5}$. Так как $x\to0$, то для выяснения порядка малости этой суммы вынесем в числителе за скобку слагаемое с наименьшей степенью, то есть x. Знаменатель является разностью двух функций, одна из которых является иррациональной. Отношение умножим и разделим на выражение, «сопряжённое» к знаменателю.

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt[5]{x^7}}{2-\sqrt[3]{8-x}}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x^{2/5})\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}(1+x^{2/5})(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})=1\cdot12=12\,.\ \square$$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие функции при $x\to\infty$, часто бывает полезно вынести за скобку в числителе и знаменателе функцию, имеющую наибольший рост при $x\to\infty$.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[5]{x^7}+\sqrt{x+1}}$.

■ Имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так как при $x\to+\infty$ функция $\sqrt{x^2+5}$ имеет тот же порядок роста, что и x, а $x^{2/3}$ имеет меньший рост, чем x, то в числителе вынесем за скобки x. Аналогично, в знаменателе наибольший порядок роста при $x\to+\infty$ имеет функции $x^{7/5}$, поэтому вынесем за скобки ее:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[5]{x^7}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\dfrac{1}{x^{1/3}}+\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}\right)}{x^{7/5}\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{x^{9/5}}+\dfrac{1}{x^{14/5}}}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2/5}} \cdot \frac{\dfrac{1}{x^{1/3}} + \sqrt{1 + \dfrac{5}{x^2}}}{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x^{9/5}} + \dfrac{1}{x^{14/5}}}}.$$

Используя свойства бесконечно больших функций и результаты о пределе суммы и частного ([3, теорема 2.36]), получим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2/5}} = 0, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x^{1/3}} + \sqrt{1 + \dfrac{5}{x^2}}}{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x^{9/5}} + \dfrac{1}{x^{14/5}}}} = 1.$$

Окончательно, из утверждения о пределе произведения той же теоремы, следует, что $A = 0 \cdot 1 = 0$. $\square$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$, где

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty (\text{или } -\infty),$$

то есть при раскрытии неопределенности вида $(\infty - \infty)$, поступают следующим образом:

1) если $f(x)$ и $g(x)$ не являются функциями одного порядка роста при $x \to \infty$, то выносят за скобку функцию, имеющую больший рост;

2) если $f(x)$ и $g(x)$ — функции одного порядка роста при $x \to \infty$, то выполняют тождественные преобразования в проколотой окрестности U_∞ так, чтобы можно было воспользоваться свойствами пределов. В частности, если одна из функций $f(x)$, $g(x)$ является иррациональной, то часто полезно умножить и разделить исходное выражение на «сопряжённое» к $f(x) - g(x)$.

Пример 11. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1 + 2x + x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1})$.

■ Имеем неопределённость вида $(\infty - \infty)$, при этом слагаемые являются иррациональными выражениями. Поэтому умножим и разделим исследуемую разность на «сопряжённое» к ней выражение и получим, что

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{1 + 2x + x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$$

Последнее отношение представляет собой неопределённость вида ∞/∞ при $x \to +\infty$, но в знаменателе стоит сумма двух бесконечно больших функций одного знака, порядок роста каждой их которых при $x \to +\infty$ равен x.

Выноса в знаменателе x за скобку, имеем:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 3\,. \ \square$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}+2x)$.

■ Заметим, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$. Так как

$$\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

то при $x \to -\infty$ функции $\sqrt{x^2+1}$ и $2x$ имеют одинаковый порядок роста. Вынесем в исходном выражении за скобку x и получим:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right) = +\infty,$$

поскольку предел последнего сомножителя равен 1. $\square$

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[4]{x^4+2}-|x|}$.

■ Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6}+|x|) = +\infty$, а знаменатель представляет собой неопределённость вида $(\infty-\infty)$ и является разностью эквивалентных при $x\to\infty$ функций. Для её раскрытия можно было бы умножить и разделить исходное отношение на выражение, сопряжённое знаменателю. Однако, оно имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому выполним следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[4]{x^4+2}-|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}+1\right)}{|x|\left(\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^4}}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}+1}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^4}}-1} = +\infty,$$

так как предел числителя равен 2, а знаменатель является положительной бесконечно малой функцией при $x\to\infty$. $\square$

1.5.1 Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x+1}}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{1-x}-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$,

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{3x+5})}$,

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2-1}+x)$, 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x}+x\right)$,

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

1.6 Первый замечательный предел

Прежде всего напомним, что $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, для любого числа $a \in \mathbb{R}$, и $\lim\limits_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a$ для любого числа $a \in [-1, 1]$. В частности, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Имеет место равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, называемое первым замечательным пределом, из которого следует, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Таким образом, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$. Используя эти соотношения и теорему о пределе суперпозиции, получаем, что при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$,

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)\, \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x).$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{\sin x^2}$.

■ Имеем неопределенность вида $0/0$. Поскольку $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$ и эквивалентными можно заменять функции только в произведении и частном, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{\sin x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x \sin 2x}{\sin x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{5x\cdot 2x}{x^2} = 20. \quad \square$$

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

■ Имеем неопределенность вида $0/0$. Следует обратить внимание на то, что хотя $\lim\limits_{x\to 1} \sin n\pi x = 0$, $n \in \mathbb{N}$, но $n\pi x \to n\pi \neq 0$ при $x \to 1$, поэтому $\sin n\pi x \not\sim$

$n\pi x$ при $x \to 1$. Чтобы применить первый замечательный проедел, используем представление $n\pi x = n\pi + n\pi(x-1)$ и формулы приведения

$$\sin 7\pi x = \sin(7\pi + 7\pi(x-1)) = -\sin 7\pi(x-1),$$

$$\sin 2\pi x = \sin(2\pi + 2\pi(x-1)) = \sin 2\pi(x-1).$$

При $x \to 1$ $\sin 7\pi(x-1) \sim 7\pi(x-1)$, $\sin 2\pi(x-1) \sim 2\pi(x-1)$, поэтому

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x} = -\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)} = -\lim_{x\to 1} \frac{7\pi(x-1)}{2\pi(x-1)} = -\frac{7\pi}{2\pi} = -\frac{7}{2}. \ \square$$

Пример 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

■ Имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Так как $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$ и $\sin\dfrac{x}{2} \sim 1$ при $x \to \pi$, а $\cos\dfrac{x}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}(x-\pi)\right) = -\sin\dfrac{1}{2}(x-\pi)$, то $\cos\dfrac{x}{2} \sim -\dfrac{1}{2}(x-\pi)$ при $x \to \pi$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to\pi}(\pi - x)\frac{\sin x/2}{cos x/2} = \lim_{x\to\pi}(\pi - x)\,\frac{-2}{(x-\pi)} = 2. \ \square$$

Пример 17. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\cos(\dfrac{2\pi}{3} - x)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$.

■ Имеем неопределенность вида $(0/0)$. Но

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right),$$

$$\sqrt{3} - 2\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\right) =$$

$$= -4\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\,\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

Переходя в числителе и знаменателе при $x \to \pi/6$ к эквивалентным и учитывая, что при этом

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \to \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

получим

$$A = \lim_{x\to\pi/6} \frac{\dfrac{\pi}{6} - x}{4\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)} = \lim_{x\to\pi/6} \frac{1}{2\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)} = 1. \ \square$$

Пример 18. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\arcsin x^2-\cos x}{\sin^2 3x}$.

■ Имеем неопределенность вида 0/0. Так как $\sin^2 3x \sim 9x^2$ при $x\to 0$, то

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+\arcsin x^2-\cos x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x^2}{9x^2}+\frac{1-\cos x}{9x^2}\right).$$

Но $\arcsin x^2\sim x^2$, $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$ при $x\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{9x^2}=\frac{1}{9},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{9x^2}=\frac{1}{18}.$$

Пользуясь теоремой 2.36 из [3], получаем, что $A=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{6}$. □

Пример 19. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$.

■ Заметим, что при $x\to\infty$ каждое из слагаемых не имеет предела, но

$$\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}=2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

Так как при $x\to\infty$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}=\frac{2}{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\to 0,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}=0$. Но

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\right|\le 1,\ \forall x\ : |x|\ge 1.$$

Поэтому по свойству бесконечно малых функций

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})=0.\ \square$$

Пример 20. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

■ Так как $\pi-4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}=4\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}\right)\to 0$ при $x\to 0$, то

$$\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\sim\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right).$$

Воспользуемся формулой тангенса разности:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right)}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x}{2+x}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}\right)}{x}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2+x)}=4\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=2.\quad\square$$

1.6.1 Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin x\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$,

6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg}6x}$,

9) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sin 2x-\cos 2x+1}$,

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

1.7 Второй замечательный предел и его следствия

Справедливо утверждение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Этот предел называется вторым замечательным пределом. Используя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e,$$

если $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_a$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. В частности, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Из второго замечательного предела получаем как следствия следующие три часто используемых предела:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}\quad (a>0, a\neq 1)$, в частности,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0, a\neq 1)$, в частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$.

Используя теорему о пределе суперпозиции в предположении, что $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{x_0}$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, легко устанавливаем справедливость следующих равенств:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{\ln a}\quad (a>0, a\neq 1)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a\quad (a>0, a\neq 1)$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(1+\alpha(x))^\mu-1}{\alpha(x)}=\mu,\ \ \mu\in\mathbb{R}$.

Если

(1) $u(x)\to 1$ при $x\to x_0$,

(2) $u(x)\neq 1$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0,

то при $x\to x_0$
$$\log_a u(x)\sim\frac{u(x)-1}{\ln a}\quad (a>0,\ a\neq 1);$$
$$(u(x))^\mu-1\sim\mu\,(u(x)-1),\ \forall\,\mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Замечание. Следует отметить, что в силу теоремы 3.4 из [3] последние соотношения эквивалентности остаются справедливыми и в том случае, когда условие (2) не выполняется. В последующем мы не будем проверять это условие. Рассмотрим примеры.

Пример 21. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$.

■ Имеем неопределенность вида 0/0. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, то $\ln(1+\sin x)\sim\sin x$ при $x\to 0$. Поэтому
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\ \ \square$$

Пример 22. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x^2 - 12x + 20}$.

■ Имеем неопределенность вида 0/0. Легко видеть, что

$$A = \lim_{x\to 10} \frac{\lg \dfrac{x}{10}}{(x-10)(x-2)}\,.$$

Так как $\dfrac{x}{10} \to 1$ при $x \to 10$ и $\dfrac{x}{10} \neq 1$ в некоторой проколотой окрестности точки $a = 10$, то $\lg \dfrac{x}{10} \sim \left(\dfrac{x}{10} - 1\right) \lg e$, и $x - 2 \sim 8$ при $x \to 10$. Поэтому

$$A = \lim_{x\to 10} \frac{\left(\dfrac{x}{10} - 1\right)\lg e}{(x-10)\,(x-2)} = \frac{\lg e}{10} \lim_{x\to 10} \frac{(x-10)}{(x-10)\,(x-2)} = \frac{\lg e}{80}\,. \ \square$$

Пример 23. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}$.

■ Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = \lim\limits_{x\to 0} \cos 5x = 1$, то при $x \to 0$ $\ln\cos 2x \sim \cos 2x - 1$, $\ln\cos 5x \sim \cos 5x - 1$. Поэтому,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 5x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x}{-2\sin^2 \dfrac{5x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\dfrac{(5x)^2}{4}} = \frac{4}{25}. \ \square$$

Пример 24. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right)}{\operatorname{arctg} 2x}$.

■ Имеем неопределенность вида 0/0. Так как при $x \to 0$ $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) \to 1$, то $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) \sim \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) - 1$ при $x \to 0$. Поэтому, переходя к эквивалентным, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right)}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2x\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right)\cos\dfrac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{4x}{x\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 4. \ \square$$

Для сравнения рассмотрим методы вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}, \text{ когда } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$

Пример 25. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$.

■ Имеем неопределенность вида ∞/∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^{10}\left(1+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^9}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^9}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{1}{\ln|x|}\ln\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{10+\dfrac{1}{\ln|x|}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^9}\right)}=$$

$$=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5},$$

так как функции $\dfrac{1}{\ln|x|}\ln\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$, $\dfrac{1}{\ln|x|}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^9}\right)$ являются бесконечно малыми функциями при $x\to-\infty$. □

Пример 26. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+x^2+2^{3x})}{\ln(3+x^4+3^{2x})}$.

■ Имеем неопределенность вида ∞/∞. Преобразуем аргументы логарифмов, вынося за скобку функции, имеющие наибольший рост при $x\to+\infty$: 2^{3x} — в числителе, 3^{2x} — в знаменателе.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+x^2+2^{3x}\right)}{\ln\left(3+x^4+3^{2x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2^{3x}\left(1+\dfrac{2}{2^{3x}}+\dfrac{x^2}{2^{3x}}\right)\right)}{\ln\left(3^{2x}\left(1+\dfrac{3}{3^{3x}}+\dfrac{x^4}{3^{2x}}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{2}{2^{3x}}+\dfrac{x^2}{2^{3x}}\right)}{2x\ln 3+\ln\left(1+\dfrac{3}{3^{3x}}+\dfrac{x^4}{3^{2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln 2+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{2}{2^{3x}}+\dfrac{x^2}{2^{3x}}\right)}{2\ln 3+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{3}{3^{3x}}+\dfrac{x^4}{3^{2x}}\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\ln 2}{\ln 3},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{2}{2^{3x}}+\dfrac{x^2}{2^{3x}}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{3}{3^{3x}}+\dfrac{x^4}{3^{2x}}\right)=0$. □

Пример 27. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+2^x)}{\ln(x^2+4^x)}$.

■ Имеем неопределенность вида $0/0$. Переходя к эквивалентным, получим:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{x + 2^x - 1}{x^2 + 4^x - 1}.$$

Но функции x, $2^x - 1$, $4^x - 1$, являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 0$, а функция x^2 — бесконечно малая более высокого порядка. Поэтому, вынося за скобки в числителе и знаменателе x и пользуясь теоремой об арифметических операциях с пределами, получим, что

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dfrac{2^x - 1}{x}}{x + \dfrac{4^x - 1}{x}} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}}{0 + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x - 1}{x}} = \frac{1 + \ln 2}{\ln 4} = \frac{\ln 2e}{\ln 4}. \ \square$$

Пример 28. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{x^2 + 10x + 1}}{\sin x}$.

■ Имеем неопределенность вида $0/0$. Заметим, что при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, \quad 2x^2 + 10x + 1 \to 1, \quad x^2 + 10x + 1 \to 1.$$

Поэтому $A = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - 1}{x} - \dfrac{\sqrt[7]{x^2 + 10x + 1} - 1}{x} \right)$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5}(2x^2 + 10x)}{x} = 2,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{x^2 + 10x + 1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 10x}{7x} = \frac{10}{7},$$

то $A = 2 - \dfrac{10}{7} = \dfrac{4}{7}$. $\square$

Пример 29. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^7 x}{x^2}$.

■ Имеем неопределенность вида $0/0$. При $x \to 0$ $\cos x \to 1$, поэтому

$$\cos^7 x - 1 \sim 7(\cos x - 1) \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^7 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-7(\cos x - 1)}{x^2} = 7 \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = 7 \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{7}{2}. \ \square$$

Пример 30. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{a^x - a}$ $(a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0)$.

■ Имеем неопределенность вида $(0/0)$. При $x \to 1$ $\pi x^\alpha \to \pi$, поэтому

$$\sin(\pi x^\alpha) = \sin(\pi + \pi(x^\alpha - 1)) = -\sin \pi(x^\alpha - 1) \sim -\pi(x^\alpha - 1) \sim -\pi\alpha(x - 1),$$

$a^x - a = a(a^{x-1} - 1) \sim a(x-1)\ln a$, и

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{a^x - a} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\alpha(x-1)}{a(x-1)\ln a} = -\frac{\pi\alpha}{a\ln a}. \quad \square$$

1.7.1 Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^3)^{10} - 1}{x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+x^2} - 1}{\ln(1+x^2)}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[10]{x} - \sqrt[12]{x}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^\pi x - 1}{3^{x^2} - 2^{x^2}}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^{10} x - 1}{\cos^2 x}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)} \quad (\alpha, \beta \neq 0)$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^\alpha - 2^\alpha}{\ln x - \ln 2} \quad (\alpha \neq 0)$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{4x} - 2^{\sin x}}{5^{\sin x} - 5^{\sin 3x}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{\cos 3x} - 2^x}{\arcsin x - 2\sin x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[5]{1+2x} - (1+x)}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}$

1.8 Односторонние пределы

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Правосторонней (правой) ε-окрестностью $U_a^+(\varepsilon)$ точки a называют интервал $(a, a+\varepsilon)$. Левосторонней (левой) ε-окрестностью $U_a^-(\varepsilon)$ точки a — интервал $(a-\varepsilon, a)$. Очевидно, что $\dot{U}_a = U_a^-(\varepsilon) \cup U_a^+(\varepsilon)$.

Определение 8. *Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing, a \in \mathbb{R}$. Точка a называется левосторонней предельной точкой множества X, если a — предельная точка множества $X \bigcap (-\infty, a)$. Аналогично, точка a называется правосторонней предельной точкой множества X, если a — предельная точка множества $X \bigcap (a, +\infty)$.*

Точка a называется двусторонней предельной точкой X, если она является и левосторонней, и правосторонней предельной точкой X. Точка a называется односторонней предельной точкой множества X, если она либо только левосторонняя, либо только правосторонняя предельная точка X.

Введем понятие одностороннего предела функции в точке.

Определение 9. *Пусть функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ является левосторонней (правосторонней) предельной точкой множества X. Величина $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется левым (правым) пределом функции $f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если* $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)\big|_{X\bigcap(-\infty,a)}$ $\left(A = \lim\limits_{x\to a} f(x)\big|_{X\bigcap(a,+\infty)}\right)$.

При этом пишут:

$$A = \lim_{x\to a-0} f(x) \;\text{ или } A = f(a-0),$$

$$A = \lim_{x\to a+0} f(x) \;\text{ или } A = f(a+0).$$

Если $A \in \mathbb{R}$, то в терминах "$\varepsilon - \delta$" (по Коши) определение одностороннего предела функции в точке a имеет вид:

$A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\left(\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\,x \in X\bigcap(a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right),$$

$A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\left(\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\,x \in X\bigcap(a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right),$$

а в терминах последовательностей (по Гейне):

$A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\left(\forall\,\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} : x_n \in X\bigcap(-\infty, a),\, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A\right),$$

$A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\left(\forall\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} : x_n \in X\bigcap(a, +\infty),\, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A\right).$$

Односторонние пределы обладают теми же свойствами, что и пределы.

Связь между пределом функции в точке и ее односторонними пределами в этой же точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 3 (критерий существования предела функции в точке через односторонние пределы). *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — двусторонняя предельная точка множества X. Для того чтобы существовал предел функции f в точке a, равный A, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела функции f в точке a, равные A.*

Из теоремы и ее доказательства (см. [3, теоремы 2.42]) следует:

1) если существуют оба односторонних предела и $f(a-0) \neq f(a+0)$, причем хотя бы одно из значений конечно, то не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) если оба односторонних предела бесконечны и имеют разные знаки, то $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;

3) если не существует хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке a, то не существует и предела $f(x)$ в точке a.

Замечание. Если a — односторонняя предельная точка области определения функции f, то понятие предела функции в точке a и соответствующего ее одностороннего предела в этой точке совпадают.

Пример 31. Вычислить односторонние пределы функции $f(x)$ в точке a:

$$a)\ f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3},\ a = 1; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/(x+1)}},\ a = -1.$$

■ a) Область определения функции — множество $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$, $x = 1$ — ее двусторонняя предельная точка.

Для любого $\delta > 0$ $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & x \in (1-\delta, 1) \\ x-1, & x \in (1, 1+\delta) \end{cases}$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{x^2(1-x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x^2(1-x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-1}{x^2} = -1.$$

Поскольку $f(1-0) \neq f(1+0)$, то не существует $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Область определения функции — множество $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Точка $a = -1$ — двусторонняя предельная точка множества $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Так как

$$x \to -1-0 \Longleftrightarrow x+1 \to -0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} \to -\infty \Longleftrightarrow e^{1/(x+1)} \to 0,$$

$$x \to -1+0 \Longleftrightarrow x+1 \to +0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} \to +\infty \Longleftrightarrow 1 + e^{1/(x+1)} \to +\infty,$$

то

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{1}{1+e^{1/(x+1)}} = 1, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{1+e^{1/(x+1)}} = 0.$$

По теореме 3 не существует $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. □

1.8.1 Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить следующие односторонние пределы :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to+0\\(x\to-0)}} \dfrac{|\sin x|}{x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to-2-0\\(x\to-2+0)}} \dfrac{x+2}{|x+2|}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to+0\\(x\to-0)}} \operatorname{sgn}(\sin x)$; 4) $\lim\limits_{x\to+0} (\ln(x+e^x))^{1/\operatorname{arctg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to1-0} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{1/\arccos^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi+0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$;

7) $\lim\limits_{x\to+0\ (x\to-0)} \dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{(a^x-a)^3}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-2}}$; 10) $\lim\limits_{\substack{x\to2+0\\(x\to2-0)}} \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

2. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

a) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty\ (-\infty)$; b) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$;

c) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; d) $\lim\limits_{x\to-3-0} f(x)=0$.

2 Непрерывность функции в точке

Всюду далее будем считать, что функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Определение 10. *Функция f называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.*

Тот факт, что функция f непрерывна в точке a записывают коротко в виде $f \in C(\{a\})$.

Сравнивая определения непрерывности и предела функции в точке, замечаем следующее.

1. В определении непрерывности функции точка a обязательно принадлежит множеству X, в то время, как в определении предела она является предельной точкой множества X, а значит может как принадлежать X, так и не принадлежать ему.

2. В определении непрерывности рассматриваются значения функции f в $U_a(\delta)\cap X$, а в определении предела в $\overset{\circ}{U}_a(\delta)\cap X$.

3. Если $a \in X$ и a — предельная точка множества X, то непрерывность функции f в точке a, означает, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Из определения 10 следует, что если $a \in X$ и a — изолированная точка множества X, то функция f непрерывна в точке a.

Определение 11. *Если функция f непрерывна в каждой точке множества X, то её называют непрерывной на множестве X. Класс функций, непрерывных на множестве X, обозначают $C(X)$.*

При исследовании функции на непрерывность часто используются следующие результаты.

Теорема 4 (об арифмических операциях). *Если функции f и φ определены на множестве X, непрерывны в точке a, то функции $f \pm \varphi, f.\varphi, f/\varphi$ (при условии, что $\varphi(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.*

Теорема 5 (о непрерывности суперпозиции функций). *Пусть функция $\varphi : X(\subset \mathbb{R}) \to Y(\subset \mathbb{R})$ непрерывна в точке $a \in X$, а функция $f : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$. Тогда суперпозиция этих функций $f \circ \varphi$ непрерывна в точке a.*

Теорема 6 (о непрерывности обратной функции). *Если функция f возрастает (убывает) на промежутке X и непрерывна на нём, то обратная функция $f^{-1} : f(X) \to X$ возрастает (убывает) и непрерывна на промежутке $f(X)$.*

Напомним, что все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей естественной области определения.

По аналогии с понятием левого (правого) предела функции в точке вводится понятие непрерывности слева (справа) в точке. В частности, если a — левосторонняя предельная точка множества X, $a \in X$ и существует $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, то есть $\exists f(a-0) = f(a)$, то функция f называется непрерывной слева в точке a. Поэтому определение непрерывности функции в односторонней предельной точке $a \in X$ множества X совпадает с определением ее односторонней непрерывности. Если же a — двусторонняя предельная точка множества X, $a \in X$, то функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в точке a слева и справа.

Определение 12. *Точка a называется точкой разрыва функции f, если либо $a \in X$ и f не является непрерывной в ней, либо $a \notin X$, но a является двусторонней предельной точкой множества X.*

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — двусторонняя предельная точка множества X и точка разрыва функции f. Если существуют конечные односторонние пределы

$f(a-0)$, $f(a+0)$, то a называется точкой разрыва первого рода функции f, а разность $f(a+0)-f(a-0)$ — скачком функции f в точке a. Если при этом существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то a называется точкой устранимого разрыва.

Пусть $a \in X$ — левосторонняя предельная точка множества X и точка разрыва функции f. Если существует конечный односторонний предел $f(a-0)$, то a также называется точкой разрыва первого рода. Скачком функции f в точке a тогда называют разность $f(a-0)-f(a)$. Аналогично рассматривается и правосторонняя предельная точка множества X, являющаяся точкой разрыва функции f. Скачком функции f в точке a тогда называют разность $f(a)-f(a+0)$. В этих двух случаях существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, и точка a — точка устранимого разрыва.

Замечание. Если a — точка устранимого разрыва f, то функция

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X \setminus \{a\}, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & \text{если } x=a, \end{cases}$$

является непрерывной в точке a.

Если a — точка разрыва функции f, но a не является точкой разрыва первого рода, то её называют точкой разрыва второго рода функции f. В точках разрыва второго рода хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 32. Используя определение доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна на множестве $[0,+\infty)$.

■ 1). Пусть $a \in (0,+\infty)$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Так как для всех $x>0$

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

то, полагая $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$, получим, что для всех $x \in U_a(\delta)$

$$|f(x)-f(a)|<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\delta}{\sqrt{a}}=\varepsilon\,.$$

Следовательно, $f \in C(\{a\}), \forall a>0$.

2). Пусть $a=0$. Тогда $|f(x)-f(a)|=\sqrt{x},\ \forall\, x \geq 0$. Найдем те $x \geq 0$, для которых $\sqrt{x}<\varepsilon$:

$$\sqrt{x}<\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x<\varepsilon^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \big[0,\varepsilon^2\big).$$

Положим $\delta=\varepsilon^2$ и получим, что

$$|f(x)-f(a)|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon,\ \forall\, x \in [0,\delta).$$

Значит f непрерывна в точке $a = 0$ и $f \in C([0; \infty))$. $\square$

Заметим, что непрерывность функции f в данном случае можно доказать и с помощью теоремы 6 о непрерывности функции, обратной к монотонной. Покажем это. Положим $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Функция φ на промежутке $X = [0, +\infty)$ возрастает и непрерывна. Из теоремы Дарбу и замечания к ней (см. [3, теорема 3.9]) следует, что $\varphi(X) = [\varphi(0), \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)) = [0, +\infty)$. А потому, в силу теоремы 6 $f(x) = \varphi^{-1}(x) \in C([0, +\infty))$ и возрастает.

Пример 33. Используя определение, доказать непрерывность функции $f(x) = x^3$ на множестве $\mathbb{R}$.

■ Пусть a — некоторая точка из $\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Если $x \in U_a(1)$, то есть $|x - a| < 1$, то $|x| = |(x - a) + a| < 1 + |a|$, а, значит, для всех $x \in U_a(1)$

$$|f(x) - f(a)| = |x^3 - a^3| = |x - a| \cdot |x^2 + ax + a^2| \leq |x - a|(|x|^2 + |a| \cdot |x| + a^2)$$

$$< |x - a|((1 + |a|)^2 + |a|(1 + |a|) + a^2) = |x - a|(3a^2 + 3|a| + 1).$$

Положим $\delta = \min\left\{1; \dfrac{\varepsilon}{3a^2 + 3|a| + 1}\right\}$. Тогда для всех $x \in U_a(\delta)$

$$|f(x) - f(a)| < |x - a|(3a^2 + 3|a| + 1) < \delta(3a^2 + 3|a| + 1) < \varepsilon,$$

то есть $f \in C(\{a\})$, и значит $f \in C(\mathbb{R})$. $\square$

Пример 34. Исследовать на непрерывность следующие функции $f(x)$, найти их точки разрыва, классифицировать их род:

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, \quad b)\ f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 3x}, \quad c)\ f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x^2 + 3x}.$$

■ a). Область определения функции f : $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. Поскольку f — рациональная функция, то $f \in C(D(f))$. Точки $x = 1$, $x = 2$ являются двусторонними предельными точками множества $D(f)$ и не принадлежат ему. Поэтому они являются точками разрыва функции f. Установим их характер. Прежде всего заметим, что на множестве $D(f)$

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2} \in C(\mathbb{R} \setminus \{2\}), \quad \lim_{x \to 1} f(x) = -2.$$

Поэтому точка $x = 1$ — точка устранимого разрыва функции f.

Далее, $\lim\limits_{x \to 2 \mp 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2 \mp 0} \dfrac{x + 1}{x - 2} = \mp\infty$. Поэтому точка $x = 2$ является точкой разрыва второго рода функции f.

b). Область определения функции f : $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$. Функция f является отношением функций $\varphi(x) = |x|$ и $g(x) = x^2 + 3x$, которые, очевидно, непрерывны в $\mathbb{R}$. Следовательно, в силу теоремы 4 об арифметических операциях с непрерывными функциями, функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}: g(x)=0\}=D(f)$.Точки $x=-3$ и $x=0$ являются двусторонними предельными для множества $D(f)$ и не принадлежат ему, поэтому являются точками разрыва функции f. Установим их характер.

Так как $\lim\limits_{x\to-3\mp0} f(x)=\lim\limits_{x\to-3\mp0}\dfrac{|x|}{(x+3)x}=-\lim\limits_{x\to-3\mp0}\dfrac{1}{x+3}=\pm\infty$, то у функции f в точке $x=-3$ разрыв 2-го рода.

Так как $\lim\limits_{x\to\mp0} f(x)=\lim\limits_{x\to\mp0}\dfrac{\operatorname{sgn} x}{x+3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\mp0}\operatorname{sgn} x=\mp\dfrac{1}{3}$, то $x=0$ — точка разрыва первого рода, причем неустранимого. Заметим, что функция

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\notin\{-3,0\},\\ -\dfrac{1}{3}, & x=0,\end{cases}$$

является непрерывной слева в точке $x=0$, а функция

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & x\notin\{-3,0\},\\ \dfrac{1}{3}, & x=0,\end{cases}$$

является непрерывной справа в точке $x=0$.

c). Область определения функции $f: D(f)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Функция f — отношение функций $\varphi(x)=\ln(1+x)$ и $g(x)=x^2+3x$. Функция φ — суперпозиция функций $P(x)=1+x$ и $\psi(x)=\ln(x)$. $P(x)\in C(\mathbb{R})$, поэтому $P(x)\in C(-1,+\infty)$. Множество значений функции $P(x)$ на $(-1,+\infty)$ совпадает с $(0,+\infty)$, поскольку функция P возрастает, непрерывна и $\lim\limits_{x\to-1+0} P(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$. Так как $\psi(x)\in C((0,+\infty))$, то, в силу теоремы 5 о непрерывности сложной функции, $\varphi(x)\in C((-1,+\infty))$. Далее, $g(x)\in C((-1,+\infty))$ и

$$g(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=-3,\\ x=0.\end{cases}$$

Поскольку $x=-3\notin(-1,+\infty)$, то из теоремы 4 об арифметических операциях с непрерывными функциями следует, что $f(x)\in C(D(f))$.

Изучим точку $x=0$. Она не принадлежит $D(f)$, но является двусторонней предельной точкой. Поэтому $x=0$ — точка разрыва f. Далее,

$$\lim_{x\to\pm0} f(x)=\lim_{x\to\pm0}\frac{\ln(1+x)}{x(x+3)}=\lim_{x\to\pm0}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3},$$

так как $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. Следовательно, существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$, и потому $x = 0$ — точка устранимого разрыва функции f. $\square$

Пример 35. Выяснить, существует ли число a, при котором функция f непрерывна в точке $x = x_0$, если

$$\text{а) } x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2+3x}, & x \in (-1,0) \cup (0,+\infty), \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/(x-1)}}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

■ Так как x_0 — предельная точка множества $D(f)$, то для решения поставленной задачи следует выяснить, существует ли предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если он существует и конечен, то полагая a равным этому числу, получим непрерывность функции f в точке $x = x_0$. В противном случае функцию нельзя доопределить в точке x_0 по закону непрерывности.

a). Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$ (см. пример 34 c)), то при $a = \dfrac{1}{3}$ функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$.

b). Справедливы утверждения:

$$x \to 1-0 \Rightarrow x-1 \to -0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow e^{1/(x-1)} \to 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}} \to 1, \text{ то есть } \ f(1-0) = 1.$$

Аналогично:

$$x \to 1+0 \Rightarrow x-1 \to +0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow e^{1/(x-1)} \to +\infty \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}} \to 0, \text{ то есть } \ f(1+0) = 0.$$

Таким образом, функция f не имеет предела и точке $x_0 = 1$. Следовательно, нельзя подобрать такое a, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 1$. $\square$

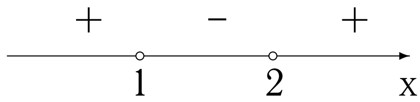
Пример 36. Исследовать на непрерывность функцию f, найти ее точки разрыва, классифицировать их род, если

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{sgn}(x^2-3x+2); \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \le 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

■ a). Прежде всего напомним, что

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ \ \ 0, & \text{если } x = 0, \\ \ \ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи найдем промежутки знакопостоянства функции $y = x^2 - 3x + 2$. Так как $x^2 - 3x + 2 = 0$ в точках $x = 1$ и $x = 2$, то квадратный трехчлен имеет следующие знаки



и потому

$$f(x) = \begin{cases} \ \ 1, & x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), \\ \ \ 0, & x \in \{1, 2\}, \\ -1, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

Следовательно, $D(f) = \mathbb{R}$. Изучим поведение функции f на интервале $(-\infty, 1)$. Если $a \in (-\infty, 1)$, то $\exists\, \delta_a = |a - 1| > 0\ : U_a(\delta_a) \subset (-\infty, 1)$. Поэтому $f\Big|_{U_a(\delta_a)}(x) = 1$, $\forall x \in U_a(\delta_a)$, значит,

$$\exists \lim_{x\to a} f\Big|_{U_a(\delta_a)}(x) = 1 \ \text{ и } \ \exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f\Big|_{U_a(\delta_a)}(x) = 1 = f(a),$$

то есть функция f непрерывна в точке a. Поскольку точка a — произвольная точка интервала $(-\infty, 1)$, то $f \in C((-\infty, 1)$. Аналогично доказывается, что функция f непрерывна на интервалах $(1, 2)$, $(2, +\infty)$, то есть $f(x) \in C(\mathbb{R} \setminus \{1; 2\})$. Точки $x = 1$, $x = 2$ — двусторонние предельные точки $D(f)$ и принадлежат $D(f)$. Найдем односторонние пределы функции f в этих точках:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 1 = 1, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (-1) = -1,$$
$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (-1) = -1, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} 1 = 1.$$

Поскольку $f(1-0), f(1+0) \in \mathbb{R}$ и $f(1-0) \neq f(1+0)$, то $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода, причем неустранимого. Аналогично, $x = 2$ — также точка неустранимого разрыва 1-го рода.

Замечание. Если функция f определена на множестве X, а функция φ — на (a, b), $(a, b) \subset X, f\Big|_{(a,b)} = \varphi$, $\forall\, x \in (a, b)$ и $\varphi \in C((a, b))$, то $f \in C((a, b))$.

b). Функция f определена на $\mathbb{R}$. Функция

$$\varphi(x) = f(x)\Big|_{(-\infty,0)} = 1, \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$

Поскольку постоянная функция непрерывна на $(-\infty, 0)$, то есть

$$\varphi \in C((-\infty,0)), \text{ то } f \in C((-\infty,0)).$$

Пусть $g(x) = f(x)\Big|_{(0,+\infty)}$, то есть $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$. Функция $g(x)$ является суперпозицией функций $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $g_1 : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ и $g_2(x) = \sin x$, $g_2 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, то есть для всех $x \in (0,+\infty)$ $g(x) = (g_2 \circ g_1)(x)$. Так как функция $g_1(x)$ является рациональной и ее знаменетель отличен от нуля на $(0,+\infty)$, то $g_1(x) \in C((0,+\infty))$. Функция $g_2(x)$ является элементарной, поэтому $g_2(x) \in C((0,+\infty))$. В силу теоремы 5 о непрерывности сложной функции $g(x) \in C((0,+\infty))$, а значит $f \in C((0,+\infty))$.

Итак, $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Для изучения поведения функции в $x = 0$ — двусторонней предельной точке $D(f)$, найдем ее односторонние пределы. Так как $f(x)\Big|_{(-\infty,0)} \equiv 1$, то $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1 = f(1)$ и функция f непрерывна слева в точке $x = 0$. Так как $f(x)\Big|_{(0,+\infty)} = \sin\dfrac{1}{x}$, и не существует предела $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$, то $\nexists \lim\limits_{x\to+0} f(x)$, а значит $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода. □

Пример 37. Доказать непрерывность функции $f(x) = [x]\sin \pi x$ в $\mathbb{R}$.

■ Напомним, что функция

$$[x] = \begin{cases} n, & \text{если } x = n, \\ n-1, & \text{если } x \in (n-1, n), \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

является непрерывной на множестве $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, а в точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет разрыв 1-го рода, так как $\lim\limits_{x\to n-0}[x] = n-1$, $\lim\limits_{x\to n+0}[x] = n$.

Функция f является произведением функций $[x]$ и $g(x) = \sin \pi x$. Функция $g(x)$ является суперпозицией функций $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \pi x$, которые непрерывны на $\mathbb{R}$, и действуют из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. В силу теоремы 5 о непрерывности сложной функции $g(x) \in C(\mathbb{R})$. По теореме 4 об арифметических операциях с непрерывными функциями $f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.

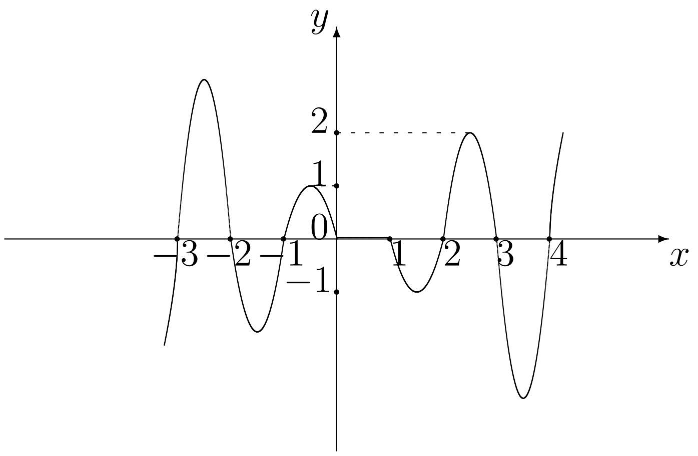
Если $n_0 \in \mathbb{Z}$, то n_0 — двусторонняя предельная точка $D(f)$ и

$$f(n_0 + 0) = \lim_{x\to n_0+0}[x]\,\sin \pi x = n_0 \cdot 0 = 0 = f(n_0),$$

$$f(n_0 - 0) = \lim_{x\to n_0-0}[x]\,\sin \pi x = (n_0 - 1) \cdot 0 = 0 = f(n_0).$$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{x\to n_0} f(x) = 0 = f(n_0)$, и $f \in C(\{n_0\})$. В силу произвольности $n_0 \in \mathbb{Z}$ и непрерывности функции f на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ получаем, что $f \in C(\mathbb{R})$. Так

как
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = n, \\ n \sin \pi x, & \text{если } x \in (n, n+1), \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
то эскиз графика функции принимает следующий вид:



$\square$

Пример 38. Найти числа a и b, при которых функция
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \le 0, \\ ax + b, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$
непрерывна на $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$ Область определения функции $f : D(f) = \mathbb{R}$. Пусть
$$\varphi(x) = f(x)\Big|_{(-\infty,0)}, \ x \in (-\infty, 0); \ \psi(x) = f(x)\Big|_{(0,+\infty)}, \ x > 0.$$
Поскольку $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются многочленами на соответствующих множествах, то они непрерывны на них. С учетом сделанного выше замечания получаем, что $f \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Изучим поведение функции f в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является двусторонней предельной точкой множества $D(f)$, поэтому найдем односторонние пределы:
$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x^2 + 1) = 1 = f(0),$$
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (ax + b) = b, \forall a \in \mathbb{R}.$$
Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = A (\in \mathbb{R}) \iff f(-0) = f(+0) = A$, то функция f будет непрерывной в точке $x = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 1$, а a — произвольное число. $\square$

2.1 Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать функцию на непрерывность, указать точки разрыва, их род:

1) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{1-3^{\frac{x}{x+1}}}$,

2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{|x^2-x|}$,

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$,

4) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{2-2^{\frac{2x+1}{x+1}}}$,

5) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}}{\sqrt{1+x^2}-1}$,

6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\pi x-2x^2}$,

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{|x^2+2x|}$,

8) $f(x)=\dfrac{3^x-9}{x-2}\cdot 3^{-1/x}$,

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x}$,

10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

2. Выяснить, существует ли число a, при котором функция f непрерывна в точке x_0:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x\neq 1\\ a, & \text{если } x=1\end{cases},\quad x_0=1,$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{|x^2+3x|}, & \text{если } x>-1,\ x\neq 0\\ a, & \text{если } x=0\end{cases},\quad x_0=0,$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{1-\sqrt{1+2x}}, & \text{если } x>-\dfrac{1}{2},\ x\neq 0\\ a, & \text{если } x=0\end{cases},\quad x_0=0,$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos x}{2-2^{x^2+1}}, & \text{если } 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\\ a, & \text{если } x=0\end{cases},\quad x_0=0,$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{|\sin x|}, & \text{если } -\pi<x<\pi\\ a, & \text{если } x=0\end{cases},\quad x_0=0,$

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x^2}}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ a, & \text{если } x=0\end{cases},\quad x_0=0.$

3. Исследовать функцию на непрерывность, указать точки разрыва, их род:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-4}, & \text{если } x < 4, \\ (x-4)\ln(x-4), & \text{если } x > 4. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2^{1/(x-1)}, & \text{если } x < 1, \\ \sin \pi x^2, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ \dfrac{\sqrt{1+x}+x^2-1}{x^2+3x^3}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}, & \text{если } x < 1, \\ \sin \dfrac{x}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} e^{1/(1-x^2)}, & \text{если } x < -1, \\ \arcsin x, & \text{если } |x| \leq 1, \\ (x-1)\ln(x-1), & \text{если } x > 1. \end{cases}$,

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3x - \sin^2 x}, & \text{если } x < 0, \\ \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$.

4. Исследовать на непрерывность функцию f, построить эскиз графика функции:

1) $f(x) = \operatorname{sgn}(1+3x-4x^2)$,

2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{x+1}$,

3) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}\right)$,

4) $f(x) = \log_{1/2}(1+x)$,

5) $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \operatorname{sgn}(x+1)$,

6) $f(x) = x - [x]$.

Список литературы

[1] Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1 [Текст]: учебное пособие для вузов/ Виноградова И. А. С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : Высшая школа, 2000.

[2] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: учеб. для вузов/ Демидович Б. П. – М. : Наука, 1990.

[3] Курс лекций по математическому анализу, I курс, 1-й семестр [Текст]: учебное пособие для вузов/ Коршикова Т.И. [и другие] – Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2006.

Содержание