МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т. И. Коршикова, Ю.А. Кирютенко

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

(Методическое пособие по практическим занятиям)

Ростов-на-Дону
2013

Печатается по решению
кафедры математического анализа и учебно-методической комиссии
факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Т. И. Коршикова, Ю.А. Кирютенко
Несобственные интегралы, зависящие от параметра (методическое пособие по практическим занятиям). — ЮФУ, Ростов-на-Дону. — 2013. — 44 с.

Изложен материал практических занятий, посвященный исследованию на поточечную и равномерную сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Изложение соответствует программе проводимых сотрудниками кафедры математического анализа ЮФУ (РГУ) практических занятий на отделениях «Математика» и «Механика» в рамках курса «Математический анализ» в третьем семестре.

1 Поточечная и равномерная сходимость функции двух переменных

В дальнейшем будем считать, что $X \subset \mathbb{R}^1_x$, $Y \subset \mathbb{R}^1_y$, функция f определена на множестве $X \times Y \subset R^2_{x,y}$ и y_0 — предельная точка множества Y. Обозначим через X_0 совокупность тех точек $x \in X$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Множество X_0 назовем множеством сходимости функции $f(x, y)$ при $y \to y_0$, а функцию $\varphi(x)$, определенную на X_0, — предельной функцией функции $f(x, y)$ при $y \to y_0$. При этом будем говорить, что функция $f(x, y)$ поточечно сходится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, и писать коротко $f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x)$.

Приведем формальную запись определения поточечной сходимости функции к предельной:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x) \Leftrightarrow\ \forall x \in X_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists U_{y_0} : |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall y \in \overset{o}{U}_{y_0} \cap Y.$$

В терминах ε–δ определение поточечной сходимости функции к предельной при $y \to y_0 \in \mathbb{R}$ формально можно записать так:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x) \Leftrightarrow\ \forall x \in X_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 :$$
$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall y \in Y,\ 0 < |y - y_0| < \delta.$$

В том случае, когда $y_0 = +\infty$ такое определение формально можно записать так:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \to +\infty]{X_0} \varphi(x) \Leftrightarrow\ \forall x \in X_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 :$$
$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall y \in Y,\ y > \delta.$$

Заметим, что если $f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_0} \varphi(x)$ и $X_1 \subset X_0$, то $f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X_1} \varphi(x)$.

Пример 1. *Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^y$, определенную на $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$, при $y \to +\infty$.*

$\triangle$ Если $x \in [0, 1)$, то при $y \to +\infty$ $f(x, y) = x^y \to 0$. Если $x = 1$, то $f(x, y) = 1 \to 1$. Наконец, если $x > 1$, то $f(x, y) = x^y \to +\infty$ при $y \to +\infty$. Следовательно, множество сходимости функции $f(x, y) = x^y$ при $y \to +\infty$ совпадает с отрезком $[0, 1]$, а предельная функция $\varphi(x)$ равна

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Заметим, что если множество Y совпадает с $\mathbb{N}$ — множеством натуральных чисел, то $y_0 = +\infty$ и мы имеем функциональную последовательность $f_n(x) := f(x,n)$.

Определение 1. *Пусть функция $f(x,y)$ поточечно сходится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Если для любого положительного числа ε найдется такая окрестность U_{y_0} точки y_0, что для всех $y \in \overset{o}{U}_{y_0} \cap Y$ и всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, то говорят, что функция $f(x,y)$ равномерно сходится к предельной функции $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$ и пишут $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$ или $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$.*

Если же $f(x,y)$ сходится поточечно на множестве X при $y \to y_0$, но не удовлетворяет определению (1), то говорят, что $f(x,y)$ сходится к $\varphi(x)$ на X неравномерно при $y \to y_0$ и символически пишут: $f(x,y) \overset{X}{\not\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Стоит отметить, что фраза «функция $f(x,y)$ не является равномерно сходящейся на множестве X при $y \to y_0$» не утверждает, что функция $f(x,y)$ сходится на множестве X при $y \to y_0$.

Приведем формальную запись равномерной сходимости и неравномерной сходимости функции $f(x,y)$ к предельной $\varphi(x)$ на X при $y \to y_0$.

$$f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \text{ при } y \to y_0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists U_{y_0} : |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall y \in \overset{o}{U}_{y_0} \cap Y,\ \forall x \in X,$$

$$f(x,y) \overset{X}{\not\rightrightarrows} \varphi(x) \text{ при } y \to y_0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall U_{y_0}(\delta)\ \exists y_\delta \in \overset{o}{U}_{y_0} \cap Y,\ \exists x_\delta \in X :\ |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Пример 2. *Пусть $f : (0,2) \times (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{3x+y}{x+y}$. Исследовать сходимость функции $f(x,y)$ при $y \to +0$ на промежутках: а) $X_1 = (1,2)$, б) $X_2 = (0,1)$.*

$\triangle$ Выясним, имеет ли функция $f(x,y)$ предельную при $y \to +0$ на множестве $X = (0,2)$. Фиксируем $x_0 \in (0,2)$. Так как $\lim\limits_{y \to +0} \dfrac{3x_0 + y}{x_0 + y} = 3$, то предельная функция функции $f(x,y)$ при $y \to +0$ на X равна $\varphi(x) = 3$.

Для изучения характера сходимости на X_1 и X_2 рассмотрим

$$|f(x,y) - \varphi(x)| = \frac{2y}{x+y}.$$

Покажем, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ при $y \to +0$ на множестве X_1 и неравномерно сходится на X_2.

При каждом $x \in (1,2)$ и $y > 0$ имеем: $\dfrac{2y}{x+y} < 2y$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда $\forall x \in (1,2)$ и $y > 0$

$$|f(x,y) - \varphi(x)| = \frac{2y}{x+y} < 2y.$$

Поскольку $2y < \varepsilon$ $\forall y \in (0, \varepsilon/2)$, то

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \ \forall y \in (0, \varepsilon/2), \ \forall x \in (1,2).$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ найдено $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ такое, что $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall y \in (0,\delta)$, $\forall x \in X_1$, то есть, $f(x,y) \overset{X_1}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +0$.

Если $x \in X_2 = (0,1)$, то $\forall \delta > 0$ $(\delta < 1)$, $\forall y \in (0,\delta)$ и $x = y \in (0,1)$

$$|f(y,y) - \varphi(y)| = \frac{2y}{y+y} = 1.$$

Полагая $\varepsilon_0 = 1$, получим, что

$$\forall \delta \in (0,1) \ \exists y_\delta = \delta/2 \in (0,\delta) \ \exists x_\delta = y_\delta \in (0,1) : |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(y_\delta)| = 1 = \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что $f(x,y) \overset{X_2}{\not\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +0$. ▲

На практике при изучении характера сходимости на множестве X функции $f(x,y)$ к предельной при $y \to y_0$ чаще всего используется следующий критерий.

Теорема 1 (критерий в терминах супремумов). *Пусть $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Для того чтобы функция $f(x,y)$ равномерно сходилась к предельной на множестве X при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{y \to y_0} \sup_{x \in X} |f(x,y) - \varphi(x)| = 0. \qquad (1)$$

Следствие 1.1. *Пусть $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to y_0$ и существуют функция $g(y)$ и окрестность U_{y_0} точки y_0 такие, что выполняется неравенство*

$$|f(x,y) - \varphi(x)| \le g(y), \ \forall x \in X, \ \forall y \in \overset{o}{U}_{y_0} \cap Y.$$

Если $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = 0$, то $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Вернемся к примеру 2 и воспользуемся последним утверждением. Имеем:

$$f(x,y) = \frac{3x+y}{x+y}, \ f : (0,2) \times (0,1) \to \mathbb{R}, \ y_0 = 0.$$

Как показано ранее, при $y \to +0$ предельная функция равна $\varphi(x) = 3$ и $|f(x,y) - \varphi(x)| = \dfrac{2y}{x+y}$, $\forall x \in (0,2)$, $\forall y \in (0,1)$.

Если $x \in (1,2)$, то $|f(x,y) - \varphi(x)| \le \dfrac{2y}{1+y}$, $\forall y > 0$. Положим $g(y) = \dfrac{2y}{1+y}$. Так как $\exists \lim\limits_{y\to+0} g(y) = \lim\limits_{y\to+0} \dfrac{2y}{1+y} = 0$, то $f(x,y) \overset{(1,2)}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +0$.

Пусть теперь $x \in (0,1)$. Найдем $\sup\limits_{x\in(0,1)} |f(x,y) - \varphi(x)| = \sup\limits_{x\in(0,1)} \dfrac{2y}{x+y}$. Для этого зафиксируем $y_0 \in (0,1)$. Функция $\psi(x) = \dfrac{2y_0}{x+y_0}$ является убывающей на интервале $(0,1)$, поэтому $\sup\limits_{x\in(0,1)} \psi(x) = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{2y_0}{x+y_0} = 2$. Поскольку в этом случае условие (1) критерия не выполнено, то $f(x,y) \overset{X_2}{\not\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Вернемся к примеру 1 и изучим характер сходимости функции $f(x,y) = x^y$ при $y \to +\infty$ на множествах а) $X = [0,1)$, б) $X = [0,x_0]$, где $x_0 \in (0,1)$.

$\triangle$ Напомним, что для функции $f(x,y) = x^y$ на множестве $X = [0,1)$ при $y \to +\infty$ предельная функция $\varphi(x) = 0$.

а) Если $x \in [0,1)$, то $|f(x,y) - \varphi(x)| = x^y$. Зафиксируем $y_0 > 2$. Тогда $x_0 = 1 - \dfrac{1}{y_0} \in (0,1)$ и $|f(x_0,y_0) - \varphi(x_0)| = \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)^{y_0}$. Поэтому

$$\alpha(y_0) := \sup_{x\in(0,1)} |f(x,y) - \varphi(x)| \ge \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)^{y_0} \ \forall y_0 > 2.$$

Но $\lim\limits_{y\to+\infty} \alpha(y_0) = e^{-1}$, то есть $\alpha(y) \not\to 0$ при $y \to +\infty$, следовательно, в силу теоремы 1, функция $f(x,y) = x^y$ поточечно, но не равномерно сходится к $\varphi(x)$ на множестве $[0,1)$ при $y \to +\infty$.

б) Если $x \in [0,x_0]$, где $x_0 \in (0,1)$, то при каждом фиксированном $y_0 > 2$ функция $\psi(x) = |f(x,y_0) - \varphi(x)| = x^{y_0}$ является возрастающей на отрезке $[0,x_0]$, а потому

$$\alpha(y) := \sup_{x\in[0,x_0])} |f(x,y) - \varphi(x)| = x_0^y \to 0 \text{ при } y \to +\infty.$$

Это означает, что $f(x,y) \overset{[0,x_0]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$. $\blacktriangle$

Пример 3. *Пусть* $f : [0,1]\times[0,+\infty) \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{-xy}$. *Исследовать функцию* $f(x,y)$ *на сходимость на множестве* $X = [0,1]$ *при* $y \to +\infty$.

$\triangle$ Зафиксируем $x \in X = [0,1]$. Так как $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{x}{e^{xy}} = 0$, то $\varphi(x) = 0$ и $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$.

Пользуясь теоремой 1, выясним, является ли эта сходимость равномерной на множестве X. Заметим, что $|f(x,y)-\varphi(x)| = xe^{-xy}$ при $x \in X$ и $y \in [0,+\infty)$. Зафиксируем $y_0 > 1$. Пусть $\psi(x) = xe^{-xy_0}$. Функция $\psi(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, поэтому и на X, а значит множество ее критических точек совпадает с множеством стационарных точек. Найдем стационарные точки функции $\psi(x)$, лежащие на $(0,1)$. Так как

$$\psi'(x) = (1-xy_0)e^{-xy_0},\ \forall x \in (0,1),$$

то $\psi'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \dfrac{1}{y_0}$.

Так как $y_0 \in (1,+\infty)$, стационарная точка $x = \dfrac{1}{y_0} \in (0,1)$ и

$$\psi\left(\frac{1}{y_0}\right) = \frac{1}{ey_0},\ \psi(0) = 0,\ \psi(1) = \frac{1}{e^{y_0}}.$$

Сравнивая полученные значения, замечаем, что при $y_0 > 2$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{ey_0} > \dfrac{1}{e^{y_0}}$. Следовательно,

$$\alpha(y) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x,y)-\varphi(x)| = \sup_{x\in[0,1]} xe^{-xy} = \frac{1}{ey},\ \forall y > 2.$$

Но $\lim\limits_{y\to+\infty} \alpha(y) = 0$, и в силу теоремы 1, $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$. ▲

Пример 4. *Пусть* $f(x,y) = xye^{-xy}$, $f : [0,1]\times[1,+\infty) \to \mathbb{R}$. *Исследовать функцию* $f(x,y)$ *на сходимость на множестве* $X = [0,1]$ *при* $y \to +\infty$.

△ При каждом фиксированном $x \in X$ $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{xy}{e^{xy}} = 0$, поэтому $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in X$ и $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$. Для изучения характера сходимости вновь воспользуемся теоремой 1:

$$|f(x,y)-\varphi(x)| = xye^{-xy},\ x \in X,\ \forall y > 1.$$

Зафиксируем $y_0 > 1$ и найдем $\sup\limits_{x\in[0,1]} \psi(x)$, где $\psi(x) = xy_0e^{-xy_0}$. Заметим, что функция $\psi(x)$ дифференцируема на множестве X. Поскольку $\psi'(x) = y_0(1-xy_0)e^{-xy_0}$, $\forall x \in (0,1)$, то функция $\psi(x)$ имеет одну стационарную точку $x = 1/y_0$. Так как $y_0 > 1$, то $1/y_0 \in (0,1)$ и $\psi(1/y_0) = e^{-1}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = \dfrac{y_0}{e^{y_0}}$. Но $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y}{e^y} = 0$, поэтому для достаточно больших y

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x,y)-\varphi(x)| = \sup_{x\in[0,1]} xye^{-xy} = e^{-1}.$$

Условие (1) критерия не выполнено и $f(x,y) \overset{X_2}{\not\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$. ▲

Остановимся еще на одном методе доказательства того, что функция $f(x,y)$ сходится неравномерно к предельной функции $\varphi(x)$ на множестве X при $y \to y_0$. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 2 (свойство непрерывности предельной функции)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ определена на $X \times Y$ и удовлетворяет условиям*

1) $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$,

2) для каждой фиксированной точки $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на множестве X.

Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве X.

Следовательно, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию 2) и $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to y_0$, но функция $\varphi(x)$ не является непрерывной на множестве X, то $f(x,y) \overset{X}{\not\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Еще раз вернемся к примеру 1, предполагая, что $X = [0,1]$. В этом случае $f(x,y) \xrightarrow{X} \varphi(x)$ при $y \to +\infty$, где функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $x = 1$, а функция $f(x,y)$ при каждом фиксированном $y \in (0,+\infty)$ непрерывна на $[0,1]$. Поэтому в этом случае нет равномерной сходимости функции $f(x,y)$ к предельной при $y \to +\infty$.

1.1 Задания для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость функцию $f(x,y)$ на множестве X при $y \to y_0$.

1. $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y^2}$, $X = [1,+\infty)$, $y \to +\infty$;
2. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{2y-x}$, $X = [0,1]$, $y \to +\infty$;
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $X = [-1,1]$, $y \to 0$;
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $X = (1,+\infty)$, $y \to +\infty$;
5. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}$, а) $X = (1,a)$, где $a \in (1,+\infty)$,
   б) $X = (1,+\infty)$, $y \to +0$;

6. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $X = (0,+\infty)$, $y \to +0$;

7. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $X = (1,a)$, где $a \in (1,+\infty)$, $y \to +\infty$;

8. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $X = (1,+\infty)$, $y \to +0$;

9. $f(x,y) = \ln(1+y^2\cos x)$, $X \in (0,\dfrac{\pi}{2})$, $y \to 0$;

10. $f(x,y) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\sin^2 x\right)$, $X = [0,\dfrac{\pi}{2}]$, $y \to +\infty$;

11. $f(x,y) = \dfrac{y\,\mathrm{arctg}(xy)}{y+1}$, $X = (0,+\infty)$, $y \to +0$;

12. $f(x,y) = \dfrac{1}{x}(e^{xy}-1)$, $X = (0,+\infty)$, $y \to +0$;

13. $f(x,y) = \dfrac{1}{x}(e^{xy}-1)$, $X = (0,+\infty)$, $y \to -\infty$;

2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $[a,b) \times Y \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ и при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y) \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если $f(x,y) \in \mathcal{R}[a,b)$ для любого $y \in Y$, то на множестве Y определена функция

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{2}$$

которую называют несобственным интегралом, зависящим от параметра (который будем коротко называть НИЗП). Далее, если не оговорено другое, перечисленные выше условия предполагаются выполненными.

Определение 2. *Несобственный интеграл (2), зависящий от параметра, называют равномерно сходящимся на множестве Y, если для любого положительного числа ε найдется такое $b_0 \in (a,b)$, что для всех $t \in (b_0,b)$ и всех $y \in Y$ выполняется неравенство* $\left|\int\limits_t^b f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Приведем формальную запись равномерной сходимости на множестве Y несобственного интеграла, зависящего от параметра:

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \text{ равномерно сходится на множестве } Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists b_0 \in (a,b) : \Big|\int\limits_t^b f(x,y)\,dx\Big| < \varepsilon,\ \forall t \in (b_0,b),\ \forall y \in Y.$$

Формальная запись неравномерной сходимости на множестве Y несобственного интеграла, зависящего от параметра, имеет следующий вид:

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \text{ не сходится равномерно на множестве } Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0 :\ \forall b_0 \in [a,b)\ \exists t_{b_0} \in (b_0,b),\ \exists y_{b_0} \in Y : \Big|\int\limits_{t_{b_0}}^b f(x,y_{b_0})\,dx\Big| \geq \varepsilon_0.$$

Если ввести функцию

$$F(t,y) = \int\limits_t^b f(x,y)\,dx,\ t \in [a,b),\ y \in Y, \tag{3}$$

то из определения 2 следует, что равномерная сходимость на множестве Y несобственного интеграла $J(y)$, зависящего от параметра, равносильна равномерной сходимости на множестве Y функции $F(t,y)$ к функции $J(y)$ при $t \to b$ $(t \in [a,b))$.

Пример 5. *Исследовать на равномерную сходимость на множестве Y несобственный интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$, *если*

а) $Y = [a,b]$, $0 < a < b < +\infty$, *б)* $Y = [0,b]$, $0 < b < +\infty$.

△ Заметим, что на множестве $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна, поэтому точка $b = +\infty$ — единственная особая точка подынтегральной функции $f(x,y)$ при каждом фиксированном $y \in [0,+\infty)$.

а) Пусть $0 < a \leq y \leq b < +\infty$. Тогда

$$\int\limits_t^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = -e^{-xy}\Big|_t^{+\infty} = e^{-ty},\ \forall t > 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Так как $0 < e^{-ty} \le e^{-at}$, $\forall y \in [a,b]$, и

$$e^{-at} < \varepsilon \Longleftrightarrow t > \frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

то $\forall \varepsilon \in (0,1)\ \exists b_0 = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{\varepsilon} \in [0,+\infty)$:

$$0 < \int\limits_t^{+\infty} ye^{-xy}\,dx < \varepsilon\ \forall y \in [a,b],\ \forall t > b_0.$$

Следовательно, данный интеграл равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, когда $0 < a < b < +\infty$.

б) Пусть теперь $y \in [0,b]$. Заметим, что

$$\text{при } y = 0\ \int\limits_t^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = 0,\ \text{при } y \in (0,b]\ \int\limits_t^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-ty},\ \forall t > 0.$$

Если $y = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, а $t = n$, то $e^{-ty} = e^{-n/n} = e^{-1}$. Итак,

$$\exists \varepsilon_0 = e^{-1} > 0 : \forall b_0 \in [0,+\infty)\ \exists t_{b_0} = n > b_0,\ \exists y_{b_0} = 1/n \in [0,b] :$$

$$\int\limits_{t_{b_0}}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx \ge \varepsilon_0 = e^{-1}.$$

Поэтому данный интеграл сходится не равномерно на отрезке $[0,b]$. ▲

Из определения 2 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *и интеграл* $\int\limits_a^b g(x,y)\,dx$ *с единственной особой точкой* $x = b$ *равномерно сходятся на множестве* Y*, то для любых чисел* α *и* β *интеграл* $\int\limits_a^b (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx$ *равномерно сходится на множестве* Y*.*

При исследовании равномерной сходимости функции $f(x,y)$ к предельной чаще всего используется критерий 1 и его следствие. Но их применение к функции (3) при исследовании на равномерную сходимость несобственных интегралов (3), зависящих от параметра, весьма затруднительно. Здесь чаще используются достаточные признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). *Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $\forall y \in Y$, и $\sup\limits_{y\in Y}|f(x,y)| = g(x)$, $x \in [a,b)$. Если функция $g(x)$ локально интегрируема на $[a,b)$ и интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл (2) равномерно и абсолютно сходится по y на множестве Y.*

Следствие 3.1. *Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$ при каждом $y \in Y$ и существует функция $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ и число $a_0 \in [a,b)$ такие, что $|f(x,y)| \le g(x)$, $\forall x \in [a_0,b)$, $\forall y \in Y$. Если $g(x) \in \mathcal{R}_{loc}[a_0,b)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{a_0}^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ абсолютно и равномерно сходится на Y.*

Часто признаком Вейерштрасса называют это следствие!

Обратите внимание: Выбор точки a_0 не должен зависеть от $y \in Y$! Если $a_0 = a_0(y)$, то интеграл (2) может сходиться неравномерно на Y.

Пример 6. *Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$, если а) $y \in [a,+\infty)$, где $a > 0$, б) $y \in (0,b]$.*

$\triangle$ а) Очевидно, что $f(x,y) = e^{-xy} \in C([0,+\infty)\times[a,+\infty))$, поэтому f непрерывна по x на $[0,+\infty)$ при каждом фиксированном $y \in [a,+\infty)$, и $+\infty$ — единственная особая точка функции $f(x,y)$ на $[0,+\infty)$, когда $y \ge a > 0$.

Используя определение 2, докажем, что интеграл равномерно сходится на множестве $Y = [a,+\infty)$, $a > 0$. Заметим, что $\forall t > 0$, $\forall y \in [0,+\infty)$

$$\int\limits_t^{+\infty} e^{-xy}\,dx = -\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_t^{+\infty} = -\frac{1}{y}\Big(\lim_{x\to+\infty} e^{-xy} - e^{ty}\Big) = \frac{1}{y}\,e^{-ty}.$$

Зафиксируем положительное число ε. Так как $\forall t > 0$ и $\forall y \ge a > 0$

$$0 < \frac{1}{y}\,e^{-ty} \le \frac{1}{a}\,e^{-at}, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a}\,e^{-at} = 0,$$

то $\exists b_0 = b_0(\varepsilon) > 0 : \dfrac{1}{a}e^{-at} < \varepsilon$, $\forall t \in (b_0,+\infty)$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 \in (0,+\infty) : \frac{1}{y}\,e^{-ty} < \varepsilon,\ \forall t \in (b_0,+\infty),\ \forall y > a,$$

то есть $\left|\int\limits_t^{+\infty} e^{-xy}\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall t > b_0,\ \forall y \in Y$, что означает равномерную сходимость рассматриваемого интеграла на множестве Y.

Достаточно просто провести исследование этого интеграла и с помощью признака Вейерштрасса (теорема 3). Легко видеть, что $|e^{-xy}| = e^{-xy} \le e^{-ax}$ для всех $y \in Y = [a, +\infty)$ и всех $x \in [0, +\infty)$.

Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ сходится, а поэтому в силу следствия теоремы 3 рассматриваемый несобственный интеграл сходится равномерно на множестве Y.

б) Пусть теперь $y \in Y = (0, b]$. Докажем, что рассматриваемый несобственный интеграл сходится неравномерно на множестве $Y = (0, b]$. Поскольку теорема 3 и ее следствие — достаточные признаки, то следует пользоваться определением 2 равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, или критерием 1 по отношению к функции $F(t, y) = \int\limits_t^b f(x, y)\,dx$, $t \in [a, b)$, $y \in Y$. В этом случае воспользуемся определением 2:

$$\int\limits_t^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{e^{-ty}}{y},\ \forall y \in (0, b].$$

Если $y_n = 1/n$, а $t_n = n$, $b \in \mathbb{N}$, то $\dfrac{e^{-t_n y_n}}{y_n} = ne^{-1} > 1$, если $n \ge 3$. Таким образом, $\exists \varepsilon_0 = 1 :$

$$\forall n > \max\{3, [b] + 1\} \exists y_n = 1/n \in (0, b] \exists t_n = n \in [0, +\infty) : \int\limits_{t_n}^{+\infty} e^{-xy_n}\,dx > 1.$$

Последнее означает, что рассматриваемый несобственный интеграл сходится неравномерно на множестве $Y = (0, b]$. ▲

Пример 7. *Пусть $a > 0$, $Y = [0, a]$. Исследовать на равномерную сходимость на Y интеграл* $\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^y}{\sqrt{x}}\,dx$.

△ Прежде всего заметим, что для каждого $y \ge 0$ функция $f(x, y) = \dfrac{|\ln x|^y}{\sqrt{x}}$

непрерывна на $(0,1]$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x,y)=+\infty$, поэтому $f(x,y)\in\mathcal{R}_{loc}(0,1]$ при каждом $y\in[0,a]$ и $x=0$ — ее единственная особая точка. Далее, $\forall x\in(0,1]$ и $\forall y\in[0,a]$ справедливо неравенство $|\ln x|^y\le\max\{1,|\ln x|^a\}$, а значит,

$$|\ln x|^y\le 1+|\ln x|^a \text{ и } 0\le f(x,y)\le\frac{1+|\ln x|^a}{\sqrt{x}}.$$

Но $\ln\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\forall\alpha>0$, в некоторой правосторонней окрестности точки $x=0$, то есть на интервале $(0,x_0(\alpha))$. Поэтому $\forall x\in(0,x_0(1/4))$, $\forall y\in[0,a]$

$$1+|\ln x|^a=1+\left(\ln\frac{1}{x}\right)^a<\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ и } 0\le f(x,y)\le\frac{1}{x^{3/4}}.$$

Так как интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{3/4}}$ сходится (эталонный с $\alpha=\dfrac{3}{4}<1$), то в силу следствия 3.1 теоремы 3 исходный интеграл равномерно сходится на множестве $[0,a]$. ▲

Когда подынтегральная функция является знакопеременной и несобственный интеграл, зависящий от параметра, при некотором $y\in Y$ сходится условно, то его характер сходимости нельзя изучить, применяя признак Вейерштрасса, поскольку из признака Вейерштрасса следует равномерная и абсолютная сходимость интеграла на множестве Y. В этом случае можно воспользоваться следующими двумя признаками.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть функции $g(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены на множестве $[a,b)\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$, при любом $y\in Y$ имеют на $[a,b)$ единственную особую точку $x=b$ и удовлетворяют условиям:*

1) $g(x,y)$ монотонна по x на $[a,b)$ при каждом фиксированном $y\in Y$;

2) $g(x,y)\overset{Y}{\rightrightarrows}0$ при $x\to b$ $(x\in(a,b))$;

3) $\exists M>0$: $\left|\displaystyle\int\limits_a^t\varphi(x,y)\,dx\right|\le M$, $\forall y\in Y$, $\forall t\in(a,b)$.

Тогда интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b g(x,y)\varphi(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть функции $g(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены на $[a,b)\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$, локально интегрируемы на $[a,b)$ при $\forall y\in Y$ и удовлетворяют условиям:*

1) $g(x,y)$ монотонна по x на $[a,b)$ при каждом фиксированном $y \in Y$;

2) $\exists M > 0$: $|g(x,y)| \le M$, $\forall x \in [a,b)$, $\forall y \in Y$;

3) интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x,y)\varphi(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.

Отметим, что применение признаков Абеля и Дирихле к несобственным интегралам, зависящим от параметра, когда подынтегральная функция является знакопостоянной не имеет смысла, поскольку для таких интегралов они эквивалентны признаку Вейерштрасса.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8. *Исследовать на равномерную сходимость на $Y = [0,+\infty)$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{y^2\cos(yx)}{x+y^2}\,dx$.*

$\triangle$ Очевидно, что для каждого $y \in Y$ подынтегральная функция локально интегрируема на $[1,+\infty)$ и $+\infty$ — ее единственная особая точка на $[1,+\infty)$. Решение задачи проведем с помощью признака Дирихле (теорема 4). Положим $g(x,y) = \dfrac{y}{x+y^2}$ и $\varphi(x,y) = y\cos(xy)$. При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонно убывает по x на $[1,+\infty)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} g(x,y) = 0$, то есть $g(x,y)$ поточечно сходится на Y к функции $\tilde{g}(y) = 0$ при $x \to +\infty$. С помощью критерия 1 докажем, что $g(x,y) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to +\infty$.

Зафиксируем $x \in [1,+\infty)$ и найдем $\alpha(x) = \sup\limits_{y\in Y} |g(x,y) - 0| = \sup\limits_{y\in Y} \dfrac{y}{x+y^2}$. Так как

$$g'_y(x,y) = \frac{x-y^2}{(x+y^2)^2},\ \forall (x,y) \in [1,+\infty) \times Y,$$

то единственной критической точкой функции $g(x,y)$ по переменной y, лежащей на $(0,+\infty)$, является стационарная точка $y = \sqrt{x} \in (0,+\infty)$. Поскольку

$$g(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g(x,0) = 0,\ \lim_{y\to+\infty} g(x,y) = 0,$$

то $\alpha(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (легко проверить, что при фиксированном $x \in [1,+\infty)$ функция

$g(x, y)$ имеет в точке $y = \sqrt{x}$ локальный максимум, и потому

$$\alpha(x) = g(x, \sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall x \in [1, +\infty)).$$

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ и по критерию 1 $\quad g(x, y) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to +\infty$.

Так как, $\forall t \in (1, +\infty)$, $\forall y \in [0, +\infty)$

$$\Big|\int\limits_1^t y\cos xy)\,dx\Big| = \Big|\sin(xy)\big|_1^t\Big| = |\sin(ty) - \sin y| \le 2,$$

то функция $\Phi(t, x) = \int\limits_1^t y\cos(xy)\,dx$ ограничена на множестве $[1, +\infty) \times Y$. Следовательно, выполнены все условия признака Дирихле (теорема 4) и исходный несобственный интеграл равномерно сходится на множестве Y. ▲

Пример 9. *Исследовать на равномерную сходимость на* $Y = [0, +\infty)$ *интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^y}\,dx$*.*

△ Функция $f(x, y) = \dfrac{\sin x^2}{1 + x^y}$ непрерывна по x на множестве $[1, +\infty)$ при каждом фиксированном $y \in Y$, поэтому $f(x, y) \in \mathcal{R}_{loc}[1, +\infty)$ и $+\infty$ — единственная особая точка функции $f(x, y)$ при каждом $y \in Y$.

Сделаем в интеграле замену переменной, положив $x^2 = t$, а значит, $x = \sqrt{t}$, $t \in [1, +\infty)$. Так как функция $t = x^2$ не зависит от параметра y и непрерывно дифференцируема по x на $(1, +\infty)$, то исходный интеграл и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t\,dt}{(1 + t^{y/2})\sqrt{t}}$ одновременно либо сходятся, либо расходятся и, в случае сходимости, характер их сходимости одинаков.

Исследование полученного интеграла проведем с помощью признаков Дирихле и Абеля. Пусть $g(t, y) = \dfrac{1}{1 + t^{y/2}}$, $\varphi(t, y) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $(t, y) \in [1, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$, очевидно сходится в силу признака Дирихле. Поскольку он не зависит от параметра y, то он равномерно сходится на Y.

Изучим функцию $g(t,y)$. При $(t,y)\in[1,+\infty)\times Y$ справедливо неравенство

$$|g(t,y)|=\frac{1}{1+t^{y/2}}\le 1,$$

а при фиксированном $y\ge 0$ функция $g(t,y)$, как функция от t, монотонно убывает на $[1,+\infty)$. Все условия признака Абеля (теорема 5) выполнены, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{(1+t^{y/2})\sqrt{t}}$ сходится равномерно на Y, а значит, исходный несобственный интеграл также равномерно сходится на Y. ▲

По аналогии с определением сходимости несобственного интеграла с несколькими особыми точками вводится определение равномерной сходимости несобственного интеграла с несколькими особыми точками.

Определение 3. *Пусть $X=\langle a,b\rangle$ — промежуток в $\mathbb{R}$ (конечный или бесконечный), Y — подмножество в $\mathbb{R}$,*

$$f: X\times Y\subset\mathbb{R}^2_{x,y}\to\mathbb{R}.$$

Пусть функция f имеет при каждом $y\in Y$ конечное число особых точек (считая и бесконечно удаленные) и существует такой набор точек $\tau=\{a_k\}_{k=1}^m$: $a=a_1<a_2<\dots<a_m=b$, что на каждом промежутке $\langle a_k,a_{k+1}\rangle$, $k=1,2,\dots,m-1$, функция $f(x,y)$ при каждом $y\in Y$ имеет единственную особую точку, совпадающую с одним из его концов. Если каждый из интегралов $\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y, то говорят, что исходный интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y. Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x,y)\,dx$ не сходится равномерно на Y, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ не является равномерно сходящимся на множестве Y.

Пример 10. *Исследовать на равномерную сходимость на $Y=[0,1]$ интеграл* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin\left(x+\frac{y}{x}\right)}{x}\,dx.$

$\triangle$ Очевидно, что $f(x,y) = \dfrac{y}{x}\sin\Big(x+\dfrac{y}{x}\Big) \in C((0,+\infty)\times[0,1])$, поэтому $f(x,y)\in\mathcal{R}_{loc}(0,+\infty)$ при каждом $y\in Y$. Далее, $f(x,0)=0$ и при $y\in(0,1]$ существует последовательность $\{x_k\}$:

$$x_k = \frac{1}{4}\Big(\pi(1+2k)-\sqrt{\pi^2(1+2k)^2-16y}\Big) = \frac{4y}{\pi(1+2k)+\sqrt{\pi^2(1+2k)^2-16y}},$$

$k\in\mathbb{N}$, такая что $x_k\in(0,1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$ и $\sin\Big(x_k+\dfrac{y}{x_k}\Big)=(-1)^k$. Поэтому функция $f(x,y)$ является неограниченной при каждом фиксированном $y\in(0,1]$ в любой правосторонней полуокрестности точки $x=0$. Следовательно, функция $f(x,y)$ имеет на $(0,+\infty)$ при фиксированном $y\in Y$ две особые точки: $x=0$ и $+\infty$. В силу определения 3 исследуем на равномерную сходимость на $Y=[0,1]$, например, несобственные интегралы $I_1=\displaystyle\int\limits_0^{1/2} f(x,y)\,dx$ и $I_2=\displaystyle\int\limits_{1/2}^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

Воспользуемся тем, что $\sin\Big(x+\dfrac{y}{x}\Big)=\sin x\cos\dfrac{y}{x}+\cos x\sin\dfrac{y}{x}$. Пусть

$$f_1(x,y)=\frac{y}{x}\sin x\cos\frac{y}{x},\ \ f_2(x,y)=\frac{y}{x}\cos x\sin\frac{y}{x},\ \ x\in(0,+\infty),\ \ y\in Y.$$

1) Исследуем на равномерную сходимость на Y интеграл I_1.

Так как для любого $x\in(0,1/2]$ и любого $y\in Y$

$$|f_1(x,y)|=\frac{y}{x}\left|\sin x\cdot\cos\frac{y}{x}\right|=\frac{y}{x}\,\sin x\left|\cos\frac{y}{x}\right|\le\frac{\sin x}{x}\le 1,$$

а интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} dx$ сходится, то интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} f_1(x,y)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y в силу признака Вейерштрасса.

Исследуем интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} f_2(x,y)\,dx$, если $y\in Y$. Представим функцию $f_2(x,y)$ в виде $f_2(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}\cdot x\cos x$, $\forall(x,y)\in(0,1/2]\times Y$, и применим признак Дирихле. Пусть $g(x,y)=x\cos x$, $\varphi(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}$. Функция $g(x,y)$ не зависит от y и $\lim\limits_{x\to0}g(x,y)=\lim\limits_{x\to+0}x\cos x=0$, поэтому $g(x,y)\overset{[0,1]}{\rightrightarrows}0$ при $x\to+0$. На интервале $(0,1/2)$ $g'_x(x,y)=\cos x-x\sin x=\cos x(1-x\operatorname{tg}x)>\cos x(1-\operatorname{tg}^2x)>0$, так как $x<\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}x\in(0,1)$, $\forall x\in(0,\pi/4)\supset(0,1/2]$. Следовательно, функция

$g(x,y)$ монотонна на $(0,1/2]$ при каждом фиксированном $y \in Y$. Наконец,

$$|\Phi(t,y)| = \Big|\int\limits_t^{1/2} \varphi(x,y)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_t^{1/2} \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\,dx\Big| = \Big|-\int\limits_t^{1/2} \sin\frac{y}{x} d\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\cos\frac{y}{x}\Big|_t^{1/2}\Big| \leq |\cos 2y| + |\cos\frac{y}{t}| \leq 2,\ \forall t \in (0,1/2],\ \forall y \in Y,$$

то есть функция $\Phi(t,y)$ ограничена на множестве $(0,1/2] \times Y$. Все условия признака Дирихле (теорема 4) выполнены, поэтому интеграл $\int\limits_0^{1/2} f_2(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.

Интеграл I_1, являясь суммой двух равномерно сходящихся на Y интегралов, также является равномерно сходящимся на Y (в силу леммы 1).

2) Исследуем на равномерную сходимость на Y интеграл I_2.

Рассмотрим $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f_2(x,y)\,dx$. Заметим, что $\dfrac{y}{x} \in [0,2]$, $\forall y \in [0,1]$ и $\forall x \geq 1/2$, а поэтому $0 \leq \sin\dfrac{y}{x} \leq \dfrac{y}{x}$ и $|f_2(x,y)| = \dfrac{y}{x}|\cos x|\,\sin\dfrac{y}{x} \leq \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится, значит по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f_2(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Для исследования интеграла $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f_1(x,y)\,dx$ можно использовать либо признак Абеля, либо признак Дирихле, в зависимости от представления функции $f_1(x,y) = \dfrac{y}{x}\sin x\cos\dfrac{y}{x}$. Если представить $f_1(x,y) = \dfrac{\sin x}{x}\cdot y\cos\dfrac{y}{x}$, то можно использовать признак Абеля, для чего доказать монотонность по x на $[1/2,+\infty)$ функции $y\cos\dfrac{y}{x}$ при каждом фиксированном $y \in Y$. Если представить $f_1(x,y) = \sin x\cdot\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}$, можно использовать признак Дирихле, для чего доказать монотонность по x на $[1/2,+\infty)$ функции $\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}$ при $y \in Y$, что несколько труднее. Поэтому воспользуемся первым представлением функции $f_1(x,y)$.

Интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ сходится в силу признака Дирихле и не зависит от параметра y, поэтому он равномерно сходится на отрезке $[0,1]$. На множестве $[1/2,+\infty)\times[0,1]$ справедливо неравенство $\left|y\cos\frac{y}{x}\right| \le |y| \le 1$, то есть функция $y\cos\frac{y}{x}$ ограничена. Докажем, что она монотонна по переменной x на $[1/2,+\infty)$ при каждом фиксированном $y\in Y$. Зафиксируем $y\in[0,1]$. Так как

$$\left(y\cos\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y^2}{x^2}\sin\frac{y}{x} \text{ и } \frac{y}{x}\in[0,2],\ \ \forall y\in Y,\ \ \forall x\in[1/2,+\infty),$$

то $\sin\frac{y}{x} \ge 0$ и $\left(y\cos\frac{y}{x}\right)'_x \le 0$. Следовательно, функция $y\cos\frac{y}{x}$ монотонно убывает на $[1/2,+\infty)$ по переменной x при фиксированном $y\in Y$. Все условия признака Абеля выполнены, поэтому несобственный интеграл $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f_1(x,y)\, dx$ равномерно сходится на Y.

Интеграл I_2, являясь суммой двух равномерно сходящихся на Y интегралов, также является равномерно сходящимся на Y (в силу леммы 1).

Из пунктов 1) и 2) по определению 3 следует, что исходный несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,y)\, dx$ равномерно сходится на Y. ▲

2.1 Задания для самостоятельной работы

1. С помощью определений 2, 3 и признака Вейерштрасса исследовать на равномерную сходимость следующие несобственные интегралы, зависящие от параметра, на указанном множестве Y.

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+y)^2+1}$, $Y=[0,+\infty)$,

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{y\, dx}{1+y^2x^2}$, $a)$ $Y=[1,3]$, $b)$ $[1,+\infty)$, $c)$ $Y=[0,3]$,

3) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^y x}$, $Y=[a,+\infty)$, $a>1$,

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{y}{x^2}e^{-y/x}\, dx$, $Y=[0,+\infty)$,

5) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^y \dfrac{1}{x}}$, $Y=[a,+\infty)$, $a>1$,

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+y^2+x^2}$, $Y=[0,+\infty)$,

7) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

8) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{\sqrt{y^2+2}}{y(x^2+1)}\,dx$, $Y=[5,+\infty)$,

9) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^3+y^2}}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

10) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^y}{e^{\sqrt{x}}}\,dx$, $Y=(-\infty,a]$, $a\in\mathbb{R}$,

11) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \ln\Bigl(1+\frac{y\ln x}{x^2}\Bigr)\,dx$, $Y=[0,2)$,

12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} 2^x\sin\frac{y}{3^x}\,dx$, $Y=[-a,a], a>0$,

13) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(x+y^2)}{x\ln^2 x+y^4}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

14) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{2x^2+\cos(xy)}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

15) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{4^x-2^{xy}}$, $Y=(-\infty,a]$, $a<2$,

16) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{e^{xy}+1}\,dx$, $Y=[a,+\infty), a>0$,

17) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{y}{x}}{x^y+1}\,dx$, $Y=[a,+\infty), a>1$,

18) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}}{x+y^2}\,dx$, $Y=[-1,1]$,

19) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x^2+y)^2}$, $Y=[0,+\infty)$,

20) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{(y+x)\,dx}{(y^2+x^2)^{3/2}}$, $Y=(0,+\infty)$,

21) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

22) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^y\ln^2 x}{1-x^2}\,dx$, $Y=[-3/4,0]$,

23) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}\,dx$, $Y=[1,2]$,

24) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-y^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $Y=[-1,1]$,

25) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln^y \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $Y=[0,a]$, $a>0$,

26) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x\cdot\sin 3x}{(x-1)^y}\,dx$, $Y=[2,+\infty)$,

27) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+y^4}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

28) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(3xy)}{(x+y)^2}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

29) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{2x}{x+y}}}{\sqrt{x^5+y}}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

30) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{xy}{1+x^5y^2}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

31) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^y}{\sqrt{x^3+e^y}}\,dx$, $(-\infty,a]$,

32) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}y}{1+x^4y^2}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

33) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} ye^{-x^2y}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

34) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\ln^y x}{x\sqrt{x+1}}\,dx$, $Y=(-\infty,a]$,

35) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x\sqrt{x+y}}\,dx$, $Y=[0,10]$,

36) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$.

2. С помощью признаков Абеля и Дирихле исследовать на равномерную сходимость на множестве Y несобственные интегралы, зависящие от параметра.

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x}+y}\,dx$, $Y=[1,+\infty)$,

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(xy)}{1+x^2}\,dx$, $Y=[1,+\infty)$,

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy^2)}{x+y}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

5) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\ln x+y^2}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

6) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin 2x^2}{\sqrt{x+y}}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

7) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos(x+y^2)}{x\ln x+y}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

8) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin(x\cdot 3^{y^2})\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{x}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x+y}\,dx$, $[a,+\infty)$, $a>0$,

10) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x+2^y}}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

11) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(x-2y)}{\sqrt{\ln x+y}}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(x(1+y^2))}{\sqrt[3]{x+y^2+1}}\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

13) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy}\,dx$, $Y=[0,+\infty)$,

14) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{arctg}(xy)\,dx$, $Y=\mathbb{R}$,

15) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x+1}}\cdot\mathrm{arctg}(xy)\,dx$,

$Y=[1,+\infty)$,

16) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x-\sin x}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{x+y+1}\,dx$,

$Y=[0,+\infty)$,

17) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(x+y)}{\ln x + y} \cdot \frac{x+y}{x+2y}\,dx,$
$Y = [0, +\infty),$

18) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos(2x-y)\arcsin\dfrac{y}{x+y}}{\ln(x+y^2)}\,dx,$
$Y = [0, +\infty),$

19) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin(2x+y)\,\sin\frac{y}{x}\,dx,$
$Y = [-2, 2],$

20) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\cdot 2^{xy}\,dx,$
$Y = (-\infty, 1],$

21) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin(ye^x)\,dx,\ Y = [1, +\infty),$

22) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xy\cos(xy)}{x^2y^4+4}\,dx,\ Y = [1, +\infty),$

23) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \cos\frac{x}{y}\ln\Bigl(1+\frac{y}{x}\Bigr)\,dx,$
$Y = [1, 15]),$

24) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\cos x\,dx,$
$a)\ Y = [2, +\infty),\ b)\ Y = [-1/2, 1/2],$

25) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x+y}}\cdot e^{-xy}\,dx,\ Y = [0, +\infty),$

26) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^y)\,dx,\ Y = [2, +\infty),$

27) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy^2)}{x+y^2}\,2^{\frac{x}{x+y}}\,dx, Y = [1, +\infty),$

28) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(x+2)}{\sqrt{x+y^2}}\,dx,\ Y = \mathbb{R},$

29) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(xy)\,\frac{\sin(xy)\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}, Y = [2, 5],$

30) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos(2xy)}{2x^2+y}\,dx,\ Y = [2, 5].$

3. Используя любые методы, исследовать несобственные интегралы, зависящие от параметра, на равномерную сходимость на указанном множестве Y.

1) $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x\sqrt{x+y}}\,dx,\ Y = [0, 100],$

2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^y}\,dx,\ Y = [0, +\infty),$

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx,$
$Y = [1, 10],$

4) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x^y+1}}e^{\frac{x}{x+y}}\,dx,$
$Y = [2, +\infty),,$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{y\operatorname{arctg} x}{x^2+y}\,dx,\ Y = [0, a],\ a > 0,$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\operatorname{arctg} x^2\,dx,\ Y = [1, +\infty),$

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^3y}\,dx,\ Y=[0,+\infty),$

8) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^y e^{-2x}\,dx,\ Y=[1,10],$

9) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 5x}{\sqrt{x+y}}\cdot 3^{\frac{xy}{1+xy}}\,dx,$
$Y=[0,+\infty),$

10) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^y}\,dx,$
$Y=[a,+\infty),\ a>2,$

11) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x+y}}\arcsin\frac{y}{x+y+1}\,dx,$
$Y=[1,+\infty),$

12) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(x+y)}{\ln x+y}\cdot\cos\frac{x}{x+y}\,dx,$
$Y=[0,+\infty),$

13) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2x}\cdot e^{x/y}\,dx,\ Y=[2,10],$

14) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{y\,dx}{1+x^4y^2},\ Y=[1,+\infty),$

15) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(2xy^2)}{x+1}\cdot\ln\frac{x+y}{2x+y}\,dx,$
$Y=[1,+\infty),$

16) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+y^2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x+8}\,dx,$
$Y=[-2\pi,2\pi],$

17) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{arctg}(xy)\,dx,$
$Y=\mathbb{R},$

18) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(e^{y/x}-1)\,dx,$
$Y=[1,10],$

19) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^y x}{(x+1)\sqrt{x+\sin y}}\,dx,$
$Y=[0,100],$

20) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(x(1+y^2))}{\ln(1+x)}\cdot 2^{\frac{x}{x+y^2}}\,dx,$
$Y=\mathbb{R},$

21) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}\,dx,\ Y=[1/2,3/2],$

22) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{y-1}\ln^2 x\,dx,\ Y=[1,+\infty),$

23) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y}\sin(xy)\,dx,$
$Y=[1,+\infty),$

24) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x+y}\cdot e^{-2xy}\,dx,$
$Y=[0,+\infty),,$

25) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(5x+y^2)}{x^2+y^2+1}\,\mathrm{arctg}(xy)\,dx,$

26) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(yx)}{y+x^2}\,dx,$

$Y = \mathbb{R}$, $\qquad\qquad$ $Y = [a, +\infty)$, $a > 0$,

27) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^y}{\sqrt{x^3 + e^y}}\, dx$, $Y = (-\infty, 1]$, $\qquad$ 28) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\, dx$, $Y = [0, +\infty)$,

29) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{2 + x^y}\, dx$, $Y = [3, +\infty)$, $\qquad$ 30) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \sin(xy)\, dx$, $Y = [1, +\infty)$,

31) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^y}\, dx$, $Y = [0, +\infty)$, $\qquad$ 32) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + y^2x^2}$, $Y = \mathbb{R}$.

3 Свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра

3.1 Непрерывность НИЗП

Для доказательства непрерывности НИЗП по параметру используется

Теорема 6. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, b) \times [c, d]$ и интеграл $J(y) = \displaystyle\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то функция $J(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Обратите внимание: По определению функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой его точке. Поэтому, если Y — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$ и $f(x, y) \in C([a, b) \times Y)$, а несобственный интеграл $J(y)$ равномерно сходится на любом отрезке $[y_1, y_2]$, содержащемся в Y, то функция $J(y)$ непрерывна на Y (но это не означает, что интеграл $J(y)$ равномерно сходится на Y!). В частности, если $Y = (c, d)$, то для доказательства непрерывности функции $J(y)$ на Y достаточно доказать, что $J(y)$ непрерывна на любом отрезке $[y_1, y_2]$, содержащемся в (c, d).

Пример 11. *Доказать, что функция $J(y) = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{y}{x}}{x^y}\, dx$ непрерывна на множестве $Y = (-\infty, 2)$.*

$\triangle$ Сделаем в интеграле замену переменных, полагая $x = \dfrac{1}{t}$ (функция $x = 1/t$ является биекцией из $[1, +\infty)$ в $(0, 1]$, дифференцируема и $x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$,

$\forall t \in [1,+\infty)$). Получим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(ty)}{t^{2-y}}\,dt$, который сходится или расходится одновременно с исходным при $y \in (-\infty, 2)$ и $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(ty)}{t^{2-y}}\,dt$.

Пусть $f(t,y) = \frac{\sin(ty)}{t^{2-y}}$. Ясно, что $f(t,y) \in C([1,+\infty)\times(-\infty,2))$ и при каждом $y \in (-\infty, 2)$ интеграл сходится, то есть определяет функцию $J(y)$. Исследуем полученный интеграл на равномерную сходимость. К нему нельзя применить признак Дирихле равномерной сходимости на промежутке, содержащем точку $y_0 = 0$, так как $\int\limits_1^{t_0} \sin(ty)\,dt = -\frac{\cos(ty)}{y}\Big|_{t=1}^{t=t_0}$, и нельзя применить признак Вейерштрасса на промежутке $[y_1, y_2]$, если $y_1 \geq 1$. Поэтому вопрос о непрерывности функции $J(y)$ решим, рассматривая промежутки $(-\infty, y_0]$ и $[y_0, 2)$, где $y_0 \in (0,1)$. Если $y_0 \in (0,1)$, то

$$|f(t,y)| = \frac{|\sin(ty)|}{t^{2-y}} \leq \frac{1}{t^{2-y_0}},\ \forall y \in (-\infty, y_0],\ \forall t \in [1,+\infty).$$

Так как $2 - y_0 > 1$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-y_0}}$ сходится, и по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t,y)\,dt$ равномерно сходится на $(-\infty, y_0]$, а значит, он равномерно сходится на любом отрезке $[y_1, y_0] \subset (-\infty, y_0]$. По теореме 6 функция $J(y)$ непрерывна на любом отрезке $[y_1, y_0] \subset (-\infty, y_0]$, что означает ее непрерывность на множестве $(-\infty, y_0]$.

Докажем непрерывность функции $J(y)$ на $[y_0, 2)$, для чего рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t,y)\,dt$ на отрезке $[y_0, 2-\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 \in (0,1)$. Воспользуемся признаком Дирихле, для этого положим $g(t,y) = \frac{1}{t^{2-y}}$, а $\varphi(t,y) = \sin(ty)$. Тогда

$$\Big|\int\limits_1^{z_0} \varphi(t,y)\,dt\Big| = \Big|-\frac{1}{y}\cos yt\,\Big|_1^{z_0}\Big| = \frac{|\cos z_0 y - \cos y|}{y} \leq$$

$$\leq \frac{2}{y} \leq \frac{2}{y_0},\ \forall y \in [y_0, 2-\varepsilon_0],\ z_0 \in [1,+\infty),$$

поэтому функция $\Phi(z,y) = \int\limits_1^z \varphi(t,y)\,dt$ ограничена на $[y_0, 2-\varepsilon_0] \times [1,+\infty)$. Так как $g(t,y) = \dfrac{1}{t^{2-y}}$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t,y) = 0$, $\forall y \in [y_0, 2-\varepsilon_0]$, то есть при $t \to +\infty$ функция $g(t,y)$ поточечно сходится на $[y_0, 2-\varepsilon_0]$ к функции $g(y) = 0$. Но

$$0 < \frac{1}{t^{2-y}} \le \frac{1}{t^{\varepsilon_0}},\ \forall y \in [y_0, 2-\varepsilon_0],\ \forall t > 1,$$

и потому $\dfrac{1}{t^{\varepsilon_0}} \to 0$ при $t \to +\infty$. По следствию из критерия равномерной сходимости к предельной функции $g(t,y) \overset{[y_0,2-\varepsilon_0]}{\rightrightarrows} 0$ при $t \to +\infty$. Выполнены все условия признака Дирихле и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[y_0, 2-\varepsilon_0]$, $\forall \varepsilon_0 \in (0,1)$. В силу теоремы 6 функция $J(y)$ непрерывна на отрезке $[y_0, 2-\varepsilon_0]$, $\forall \varepsilon_0 \in (0,1)$. Учитывая произвольность выбора числа ε_0 в интервале $(0,1)$ и определение непрерывной на множестве функции, заключаем, что $J(y)$ — непрерывная на $[y_0, 2)$ функция.

Итак, нами доказано, что функция $J(y)$ непрерывна на $(-\infty, y_0]$ и $[y_0, 2)$, что означает непрерывность $J(y)$ на $(-\infty, 2)$. ▲

Пример 12. *Доказать, что функция* $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{2+x^y}$ *непрерывна на интервале* $(2,+\infty)$.

△ Пусть $f(x,y) = \dfrac{x}{2+x^y}$, на множества $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty), y \in (2,+\infty)\}$. Очевидно, что $f(x,y) \in C(G)$, поэтому при каждом фиксированном $y > 2$ функция $f(x,y)$ имеет единственную особую точку $+\infty$. Кроме того $f(x,y) \ge 0$ на G и фиксированном $y \in (2,+\infty)$

$$f(x,y) = \frac{x}{x^y\left(\dfrac{2}{x^y} + 1\right)} \sim \frac{1}{x^{y-1}} \text{ при } y \to +\infty.$$

Так как при любом $y \in (2,+\infty)$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{y-1}}$ сходится, то по признаку сравнения в предельной форме (см. [8, теорема 6]) несобственный интеграл

$\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится, а значит, на интервале $(2,+\infty)$ определена функция $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^y}$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$. Тогда $0 < f(x,y) \le \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon_0}}$, $\forall x \ge 1$ и $\forall y \in [2+\varepsilon_0, +\infty)$. Но $\frac{x}{2+x^{2+\varepsilon_0}} \sim \frac{1}{x^{1+\varepsilon_0}}$ при $x \to +\infty$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon_0}}$ сходится, и по признаку Вейерштрасса несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на промежутке $[2+\varepsilon_0, +\infty)$. Поэтому он равномерно сходится на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (2,+\infty)$, что в силу теоремы 6 означает непрерывность функции $F(y)$ на отрезке $(2,+\infty)$.

Так как $J(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx + F(y)$, рассмотрим функцию $\Psi(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$. Этот интеграл является собственным, зависящим от параметра y. Поскольку $f(x,y) \in C([0,1]\times(2,+\infty))$, то

$$f(x,y) \in C([0,1]\times[\alpha,\beta]),\ \forall[\alpha,\beta] \subset (2,+\infty).$$

Согласно теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра ([7, теорема 4.10]), функция $\Psi(y)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$. Учитывая произвольность выбора отрезка $[\alpha,\beta]$ в $(2,+\infty)$, заключаем, как и при рассмотрении функции $F(y)$, что функция $\Psi(y)$ непрерывна на $(2,+\infty)$. Но $J(y) = \Psi(y) + F(y)$, поэтому $J(y)$ — непрерывная на $(2,+\infty)$ функция. ▲

3.2 Дифференцируемость НИЗП

Теорема 7. *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\Pi = [a,b)\times[c,d]$ *и, кроме того, удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует функция $f'_y(x,y)$, *которая непрерывна на* Π, *2) интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится хотя бы при одном* $y_0 \in [c,d]$,

3) интеграл $\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на отрезке* $[c,d]$.

Тогда интеграл $J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$, *определяет непрерывно дифференцируемую на* $[c,d]$ *функцию* $J(y)$ *и* $Y'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$.

Следствие 7.1. *Пусть* Y *— промежуток в* $\mathbb{R}$, *функция* $f(x,y)$ *непрерывна на множестве* $[a,b) \times Y$ *и имеет на нем непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *поточечно сходится на* Y, *а интеграл* $\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[c,d] \subset Y$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[c,d] \subset Y$, *функция* $J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *непрерывно дифференцируема на* Y *и* $J'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$, $\forall y \in Y$.

Пример 13. *Доказать, что функция* $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{1+x^2+y^2}\,dx$ *непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}$.

$\triangle$ Функция $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{1+x^2+y^2}$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$, поэтому она непрерывна на множестве $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ и имеет при каждом $y \in \mathbb{R}$ единственную особую точку $+\infty$. Ее частная производная $f'_y(x,y) = -\dfrac{2y\,\cos x}{(1+x^2+y^2)^2}$ также непрерывна на $\mathbb{R}^2$, а значит, и на множестве $[0,+\infty)\times[a,b]$, $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$. Так как

$$|f(x,y)|=\frac{|\cos x|}{1+x^2+y^2}\le\frac{1}{1+x^2},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \forall x\in[0,+\infty),$$

а интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, очевидно, сходится, то в по теореме Вейерштрасса интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Аналогично, если $[y_1,y_2]$ — некоторый отрезок и $y_0=\max\{|y_1|,|y_2|\}$, то

$$|f'_y(x,y)|=\frac{2|y||\cos x|}{(1+x^2+y^2)^2}\le\frac{2y_0}{(1+x^2)^2},\ \forall y\in[y_1,y_2].$$

Так как интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\,dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[y_1,y_2]$. В силу произвольности выбора отрезка $[y_1,y_2]$ из следствия 7.1 теоремы 7 получаем непрерывную дифференцируемость на $\mathbb{R}$ функции $J(y)$. ▲

Пример 14. *Доказать, что функция* $J(y)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+y)^2}\,dx$ *непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}$.

△ Функция $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{1+(x+y)^2}$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$ (а поэтому и на множестве $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$), имеет единственную особую точку $+\infty$ при каждом фиксированном $y\in\mathbb{R}$. Функция $f'_y(x,y)=-\dfrac{2(x+y)\cos x}{(1+(x+y)^2)^2}$ также непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Докажем дифференцируемость функции $J(y)$ на множествах $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$.

Пусть $\tilde{y}$ — некоторое положительное число, тогда функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на $[0,+\infty)\times[0,\tilde{y}]$. Для любых точек $(x,y)\in[0,+\infty)\times[0,\tilde{y}]$

$$|f(x,y)|=\frac{|\cos x|}{1+(x+y)^2}\le\frac{1}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^2}\text{ при }x\to+\infty,$$

$$|f'_y(x,y)|=\frac{2(x+y)|\cos x|}{(1+(x+y)^2)^2}\le\frac{2(x+\tilde{y})}{(1+x^2)^2}\sim\frac{2}{x^3}\text{ при }x\to+\infty.$$

Так как интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{x^3}$ сходятся, то в силу признака сравнения [8, теорема 6] и признака Вейерштрасса интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходятся на отрезке $[0,\tilde{y}]$. Последнее означает, что выполнены условия следствия теоремы 7 на $Y=[0,+\infty)$, поэтому функция $J(y)$ непрерывно дифференцируема на $[0,+\infty)$ и $J'(y)=\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.

Аналогично, рассмотрим функцию $J(y)$ на множестве $(-\infty,0]$. Пусть y_0 — некоторое отрицательное число, тогда функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на отрезке $[y_0,0]$. Далее, $\forall x\in[0,+\infty)$ и $y\in[y_0,0]$

$$|f(x,y)| = \frac{|\cos x|}{1+(x+y)^2} \le \frac{1}{1+(x+y_0)^2} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x\to+\infty,$$

$$|f'_y(x,y)| = \frac{2|x+y|\cdot|\cos x|}{(1+(x+y)^2)^2} \le \frac{x}{1+(x+y_0)^2)^2} \sim \frac{2}{x^3} \text{ при } x\to+\infty.$$

Отсюда, как и выше, делаем вывод о том, что на отрезке $[y_0,0]$ интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходятся равномерно. Так как на множестве $Y=(-\infty,0]$ выполняются все условия следствия теоремы 7, то функция $J(y)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty,0]$ и $J'(y)=\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.

Из проведенных исследований заключаем, что функция $J(y)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $J'(y)=\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$. ▲

Задача решена, но есть и другое ее решение. Сделаем в исходном интеграле замену переменной, положив $x+y=t$, получим

$$J(y) = \int\limits_y^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\,dt - \int\limits_0^{y} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\,dt.$$

Рассмотрим каждый из полученных интегралов.

1) Начнем с интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\,dt$. Функция $g(t,y) = \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^2$ и $g'_y(t,y) = \frac{\sin(t-y)}{1+t^2}$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$. Так как $|g(t,y)| \le \frac{1}{1+t^2}$ и $|g'_y(t,y)| \le \frac{1}{1+t^2}$, $\forall t \in [0,+\infty)$ и $\forall y \in \mathbb{R}$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t,y)\,dt, \qquad \int\limits_0^{+\infty} g'_y(t,y)\,dt$$

равномерно сходятся на множестве $\mathbb{R}$, а значит, на любом отрезке $[y_1,y_2] \subset \mathbb{R}$. По следствию теоремы 7 интеграл $\int\limits_0^{+\infty} g(t,y)\,dt$ определяет непрерывно дифференцируемую в $\mathbb{R}$ функцию $G(y)$, причем $G'(y) = \int\limits_0^{+\infty} g'_y(t,y)\,dt$.

2) Теперь обратимся к интегралу $\int\limits_0^{y} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\,dt$ при $y \in \mathbb{R}$. Он является собственным интегралом, зависящим от параметра y, у которого зависит от параметра еще и верхний предел интегрирования $\beta(y) = y$. Функция $\beta(y)$ является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ и, как отмечалось выше, функция $g(t,y)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^2$. По теореме о непрерывной дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра, пределы интегрирования которого зависят от параметра (см. [7, теорема 4.14]), функция $G_1(y) = \int\limits_0^{y} g(t,y)\,dt$ непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[y_1,y_2] \subset \mathbb{R}$, а значит, и в $\mathbb{R}$, причем $G_1'(y) = \int\limits_0^{y} g'_y(t,y)\,dt + \frac{1}{1+y^2}$.

Из полученных результатов заключаем, что функция $J(y) = G(y) + G_1(y)$

непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\forall y \in \mathbb{R}$

$$J'(y) = \int\limits_0^{+\infty} g'_y(t, y)\, dt - \int\limits_0^{y} g'_y(t, y)\, dt - \frac{1}{1+y^2} =$$

$$= \int\limits_y^{+\infty} g'_y(t, y)\, dt - \frac{1}{1+y^2} = \int\limits_y^{+\infty} \frac{\sin(t-y)}{1+t^2}\, dt - \frac{1}{1+y^2}.$$

3.3 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать непрерывность функции $J(y)$ на указанном множестве Y.

1) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{10 - 4x + x^y}$, $Y = (2, +\infty)$;

2) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$, $Y = \mathbb{R}$;

3) $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{4 + x^y}\, dx$, $Y = (0, +\infty)$;

4) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(yx^2)\, dx$, $Y = (0, +\infty)$;

5) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + (x+y)^2}\, dx$, $Y = \mathbb{R}$;

6) $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-y)^2 + 1}\, dx$, $Y = \mathbb{R}$;

7) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} y e^{-yx}\, dx$, $Y = (0, +\infty)$;

8) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\, dx$, $Y = \mathbb{R}$;

9) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xy)}{1+x^2}\,dx$, $Y = \mathbb{R}$;

10) $J(y) = \int\limits_0^{1} \dfrac{\sin\dfrac{y}{x}}{x^y}\,dx$, $Y = (0,1)$;

11) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\sqrt{x}\cdot e^{-xy}\,dx$, $Y = (0,+\infty)$;

12) $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cdot\sin(x^2)\,dx$, $Y = [0,+\infty)$.

2. Доказать, что функция $J(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на указанном множестве D.

1) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2x^2}\cos\alpha x\,dx$, $D = \mathbb{R}$;

2) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx$, $D = (0,+\infty)$;

3) $J(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x^2}\,dx$, $D = (0,+\infty)$;

4) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2}\,dx$, $D = \mathbb{R}$;

5) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$, $D = (0,+\infty)$;

6) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha x)}{1+x^3}\,dx$, $D = \mathbb{R}$;

7) $J(\alpha) = \int\limits_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$, $D = (0,+\infty)$;

8) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2}\,dx,\ D = (0,+\infty);$

9) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin(\alpha x)}{1+x^3}\,dx,\ D = \mathbb{R};$

10) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x}\cdot e^{-x}\,dx,\ D = \mathbb{R};$

11) $J(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ D = (-1,1);$

12) $J(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ D = \mathbb{R};$

13) $J(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2}\,dx,\ D = (0,+\infty);$

14) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx,\ D = (0,+\infty);$

15) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2}\,dx,\ D = \mathbb{R}.$

4 Гамма- и Бета- функции Эйлера

Интеграл $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ называется Г-функцией Эйлера. Областью определения Г-функции является интервал $(0,+\infty)$. Несобственный интеграл сходится равномерно на множестве $\alpha > \alpha_0 > 0$. В области $\alpha > 0$ функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема любое число раз, причем

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x\, e^{-x}\,dx.$$

Функция $\Gamma(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \forall\alpha>0$ (формула приведения Эйлера);

2) $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1$, поэтому $\Gamma(n+1)=n!$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

3) $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi},\ \forall\alpha\in(0,1)$ (формула дополнения).

В частности, если $\alpha=1/2$, то $\Gamma^2(1/2)=\pi$, поэтому $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Интеграл $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ называется B-функцией Эйлера. Ее область определения — множество $G=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha>0,\beta>0\}$. Несобственный интеграл $B(\alpha,\beta)$ является непрерывно дифференцируемой функцией во всей области определения и по α, и по β. На множестве G B-функция обладает следующими свойствами:

1) $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ (свойство симметрии относительно переменных).

2) $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta),\quad B(\alpha,\beta+1)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$,

$B(\alpha+1,\beta+1)=\dfrac{\alpha}{\alpha+1+\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$ (формулы приведения),

3) $B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx$ (второе интегральное представление),

4) $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ (связь между B- и Γ- функциями).

Отсюда, пользуясь формулой дополнения для Γ-функции, получаем, что

$$B(\alpha,1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\ \forall\alpha\in(0,1).$$

Рассмотрим несколько примеров использования интегралов Эйлера для вычисления несобственных интегралов.

Пример 15. *С помощью эйлеровых интегралов вычислить интеграл*

$$I=\int\limits_0^1\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$\triangle$ Подынтегральная функция непрерывна и положительна на $(0,1]$, 0 — ее единственная особая точка. Полагая $\dfrac{1-x}{x}=t$, $x=\dfrac{1}{t+1}$, получаем

$$dx=-\frac{1}{(1+t)^2}\,dt,\ \ x-2=-\frac{2t+1}{1+t},$$

поэтому $I=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{1/3}}{(2t+1)^2}\,dt$. Положим $2t=u$, и получим

$$I=\frac{1}{2^{4/3}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{1/3}}{(u+1)^2}du=\frac{1}{2^{4/3}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{4/3-1}}{(u+1)^{4/3+2/3}}du=\frac{1}{2^{4/3}}B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{4/3}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2^{4/3}}\frac{1}{3}\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)=\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$. $\blacktriangle$

Пример 16. *Пусть $a>0$, $b>0$. Найти множество сходимости несобственного интеграла* $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{\alpha-1}x\cos^{\alpha-1}x\,dx}{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^\alpha}\,dx$ *и вычислить его.*

$\triangle$ Преобразуем подынтегральную функцию

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{\alpha-1}x\cos^{\alpha-1}x\,dx}{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^\alpha}\,dx=\frac{1}{b^{2\alpha}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^{\alpha-1}x}{\left(\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2x+1\right)^\alpha}\,\frac{dx}{\cos^2x}=$$

$$=\frac{1}{n^{2\alpha}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^{\alpha-2}x}{\left(\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2x+1\right)^\alpha}\,\operatorname{tg}x\frac{dx}{\cos^2x}.$$

Положим $\dfrac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2x=t$. Введенная функция возрастает на $[0,\pi/2)$, $t(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}t(x)=+\infty$. Так как функция $t(x)$ возрастает на $[0,\pi/2)$, у нее есть обратная причем непрерывно дифференцируемая функция $x=x(t)$. Так как

$dt = 2\dfrac{a^2}{b^2}\operatorname{tg} x \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, то

$$I(\alpha) = \frac{b^2}{2b^{2\alpha}a^2}(b/a)^{\alpha-2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha/2-1}}{(t+1)^{\alpha}}\,dt = \frac{1}{2(ab)^{\alpha}}B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right).$$

Функция $B(\alpha,\beta)$, как известно, определена на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, поэтому функция $I(\alpha)$ определена на множестве $\alpha > 0$. ▲

Пример 17. *Найти область определения интеграла* $I(p) = \int\limits_1^{+\infty}(\ln x)^p\dfrac{dx}{x^2}$ *и вычислить его.*

△ Положим $\ln x = t$, $x \in [1,+\infty)$ (условия теоремы о замене переменной в несобственном интеграле, очевидно, выполнены). Функция $t(x)$ действует из $[1,+\infty)$ в $[0,+\infty)$, возрастает, является непрерывно дифференцируемой и $t'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$, поэтому в силу теоремы о замене переменной в несобственном интеграле

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^p\frac{dt}{e^t} = \int\limits_0^{+\infty} t^{(p+1)-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(p+1),$$

а значит, функция $I(p)$ определена на $(-1,+\infty)$. ▲

Пример 18. *Вычислить* $I = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$

△ Положим $x^4 = t$ (условия теоремы о замене переменной выполнены) и получим

$$I = \frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-3/4}\ln^2 t}{1+t}\,dt = \frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{1/4-1}\ln^2 t}{(1+t)^{1/4+3/4}}\,dt.$$

Рассмотрим функцию $B(p,1-p) = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$, определенную на $(0,1)$. Так как B-функция непрерывно дифференцируема любое число раз на множестве $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, а отображение $(p,1-p)$ действует из $(0,1)$ в $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ и непрерывно дифференцируемо на интервале $(0,1)$ любое число раз, то функция $B(p,1-p)$ непрерывно дифференцируема на $(0,1)$ и на любом отрезке $[a,b] \subset (0,1)$

$$\frac{d}{dp}\big(B(p,1-p)\big) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\ln t}{1+t}\,dt, \quad \frac{d^2}{dp^2}\big(B(p,1-p)\big) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\ln^2 t}{1+t}\,dt.$$

Следовательно, последнее равенство имеет место на $(0,1)$, а искомый интеграл I равен $\frac{d^2}{dp^2}\big(B(p,1-p)\big)\Big|_{p=1/4}$. Поскольку $B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $\forall p \in (0,1)$, то для всех $p \in (0,1)$

$$\frac{d^2}{dp^2}(B(p,1-p)) = -\pi\left(\frac{\pi\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\right)'_p = -\pi^2\frac{-\sin^2 p\pi\cdot\pi - 2\cos^2 p\pi\cdot\pi}{\sin^3 p\pi} =$$

$$= \pi^3\frac{\sin^2 p\pi + 2\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi} = \pi^3\frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi},$$

а значит, $I = \dfrac{1}{64}\pi^3\dfrac{1+\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin^3\frac{\pi}{4}} = \dfrac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. ▲

4.1 Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить следующие интегралы.

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^2}\,dx$,

2) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \sqrt{x-x^2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x^2)^2}\,dx$,

4) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}$,

5) $\displaystyle\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2(3-x)^3}}$,

6) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}$,

7) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \sqrt[3]{(2-x)^3(x-1)}\,dx$,

8) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-x^3}}$,

9) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x\cos^{1/2} x\,dx$,

10) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x}\,dx$,

11) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\frac{dx}{(x+3)^2}$,

12) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x+2)^2}$,

13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$,

14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$,

15) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^3}$,

16) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

2. Найти область определения функций, заданных несобственными интегралами, зависящими от параметров, и вычислить их.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\cdot e^{-x^2}\,dx$,

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx$, $n>0$,

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+2x^2)^n}$,

4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x-x^3}}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$,

5) $\displaystyle\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$,

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n}\,dx$,

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}\cdot e^{px}\,dx$,

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\,dx$, $a>0$,

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$, $\alpha>0$,

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx$, $\beta>0$,

11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}e^{-\alpha/(2x^2)}\,dx$, $\alpha>0$,

12) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(1+x)^3}\,dx$,

13) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$,

14) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\beta-1}\,dx$,

15) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln^p x\frac{dx}{x^2}$,

16) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$,

17) $\displaystyle\int_0^{1} (\ln\frac{1}{x})^p\,dx$,

18) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^m}\,dx$,

19) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m}\,dx$,

20) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{3+x^n}\,dx$, $n>0$,

21) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx$,

22) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha-1}}{1+x^2}\,dx$,

23) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^\alpha x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$,

24) $\int\limits_0^{a} x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}\,dx$,

25) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x}\,dx$,

26) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{3\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx$,

27) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(2+x)^\beta}\,dx$,

28) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x\,dx$,

29) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha-1} x\cos^{\beta-1} x}{(\sin x+\cos x)^{\alpha+\beta}}\,dx$,

30) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+a\cos x)^n}\,dx,\ a\in(0,1)$,

31) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^{2m-1}\,dx$,

32) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x^m}\,dx,\ a>0$,

33) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x\,dx$,

34) $\int\limits_a^{b} \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x-c)^{n+m+2}}\,dx$,
$0<a<b,\ c>0$,

35) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}$,

36) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,dx$,

37) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$,

38) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\ln x}{1+x^3}\,dx$,

39) $\int\limits_0^{1} (1-x^2)^p\,dx$,

40) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$.

3. Доказать равенства:

1) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$,

2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n},$

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{n}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^{n}}}\,dx = \frac{2\pi}{n(n-2)}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\ n>2,$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\,dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}},$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^3}\,dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^3}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27},$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n}\,dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\cdot x^{n-m-1}\,dx = \frac{\pi}{n^2}\sin^{-1}\frac{\pi m}{n},\ n>0,\ n>m>0.$

Список литературы

[1] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И., Курс математического анализа. — М.: Изд-во МФТИ. — 2000.

[2] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, т. 1, т. 2.— М.: Изд–во МГУ. — 1979, 1987.

[3] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу, т.2. — М.: Высшая школа. — 2000.

[4] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. для вузов. — М.: Наука. — 1990.

[5] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. — М.: Наука. — 1985.

[6] Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. Курс лекций по математическому анализу, 1 курс, 1-й семестр. — Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР". — 2007.

[7] Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. Курс лекций по математическому анализу, 1 курс, 3-й семестр. — Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР". — 2007.

[8] Коршикова Т.И., Кирютенко Ю.А. Несобственные интегралы (методические указания к практическим занятиям). — Ростов-на-Дону. — Из-во ЮФУ. — 2012.

Содержание