МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д.А. Полякова

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. БИНОМ НЬЮТОНА. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для студентов первого курса
Института математики, механики и компьютерных наук
имени И.И. Воровича

Ростов-на-Дону
2018

Учебно-методическое пособие разработано на кафедре математического анализа и геометрии кандидатом физико-математических наук, доцентом Д.А. Поляковой.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук Ю.С. Налбандян

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-мат. наук Д.А. Полякова

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса Института математики, механики и компьютерных наук, обучающихся по специальностям «Математика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Может быть использовано при проведении практических занятий по математическому анализу, а также для самостоятельной работы студентов.

Пособие состоит из шести параграфов. Каждый из первых пяти параграфов содержит в краткой форме весь необходимый теоретический материал и два блока заданий — Часть A и Часть B. Каждое задание Части B аналогично соответствующему заданию Части A. В заключительном шестом параграфе приведены подробные решения всех заданий Части A. Таким образом, задания Части A целесообразно использовать для аудиторной работы или самостоятельного разбора, а задания Части B — для домашней работы студентов.

1 Метод математической индукции

Метод математической индукции основан на *принципе математической индукции*, который формулируется следующим образом.

> *Если подмножество* E *множества* $\mathbb{N}$ *всех натуральных чисел удовлетворяет двум условиям:*
>
> *1)* $1 \in E$*;*
>
> *2) вместе с каждым своим элементом* n *множество* E *содержит также элемент* $n+1$*;*
>
> *то* $E = \mathbb{N}$.

Суть метода математической индукции заключается в следующем. Предположим, что имеется последовательность пронумерованных утверждений

$$A(1)\,,\ A(2)\,,\ A(3)\,,\ \ldots\,.$$

Для того чтобы доказать справедливость всех этих утверждений, достаточно выполнить два шага.

1) *База индукции:* нужно проверить справедливость утверждения $A(1)$.

2) *Шаг индукции:* необходимо предположить, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, и доказать, что тогда утверждение $A(n+1)$ также верно.

Очевидно, что в качестве подмножества E множества $\mathbb{N}$ в данном случае выступает множество всех $n \in \mathbb{N}$, при которых соответствующее утверждение $A(n)$ верно. Таким образом, истинность всех утверждений $A(n)$ эквивалентна тому, что $E = \mathbb{N}$.

Заметим, что метод математической индукции можно применять для доказательства утверждений $A(n)$, $n \geqslant m$. При этом на первом шаге (база индукции) проверяется справедливость утверждения $A(m)$.

Встречается также метод полной математической индукции, когда на втором шаге утверждение $A(n+1)$ доказывается при предположении о справедливости утверждений $A(1), \ldots, A(n)$.

Приведем стандартный пример.

Пример 1.1. *Доказать формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:*

$$b_1 + b_1 q + \cdots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\,.$$

Здесь $b_1 \neq 0$, $q \neq 1$.

Решение. В качестве проверяемых утверждений $A(n)$ в данном случае выступают равенства

$$A(n): \quad b_1 + b_1 q + \cdots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Воспользуемся методом математической индукции.

1) Проверим первое утверждение $A(1)$. При $n = 1$ равенство тривиально:

$$b_1 = \frac{b_1(1-q)}{1-q}\,.$$

2) Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, т. е. что при этом n выполнено равенство:

$$b_1 + b_1 q + \cdots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{(предположение индукции)}\,.$$

Докажем справедливость утверждения $A(n+1)$:

$$b_1 + b_1 q + \cdots + b_1 q^{n} = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q}\,.$$

Для этого выпишем левую часть последнего равенства, применим предположение индукции и после этого проведем элементарные преобразования:

$$b_1 + b_1q + \cdots + b_1q^{n-1} + b_1q^n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} + b_1q^n =$$
$$= \frac{b_1(1-q^n) + b_1q^n(1-q)}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q}\,.$$

Мы получили правую часть утверждения $A(n+1)$. Тем самым утверждение $A(n+1)$ доказано, и шаг индукции завершен.

Из пунктов 1) и 2) вытекает, что равенства $A(n)$ справедливы при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Задачи

Часть А

Доказать справедливость утверждений для указанных номеров n.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\,,\ n \geqslant 1\,.$

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,\ n \geqslant 1\,.$

3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}\,,\ n \geqslant 2\,.$

4. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}\,,\ n \geqslant 1\,.$

5. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1\,,\ n \geqslant 1\,.$

6. $3 + 20 + 168 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n(n+1)! - 1\,,\ n \geqslant 1\,.$

7. $2^n > n\,,\ n \geqslant 1\,.$

8. $n! > 2^n\,,\ n \geqslant 4\,.$

9. $5^n > 7n - 3\,,\ n \geqslant 1\,.$

10. $2!\,4!\,\ldots\,(2n)! > \big((n+1)!\big)^n\,,\ n \geqslant 2\,.$

11. $7^n + 3n - 1$ кратно $9\,,\ n \geqslant 1\,.$

12. $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно $11\,,\ n \geqslant 1\,.$

13. $n^5 - n$ кратно $5\,,\ n \geqslant 1\,.$

Часть B

Доказать справедливость утверждений для указанных номеров n.

1. $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2\,,\ n\geqslant 1\,.$

2. $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}\,,\ n\geqslant 1\,.$

3. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\dots+(n-1)\cdot n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}\,,\ n\geqslant 2\,.$

4. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}\,,\ n\geqslant 1\,.$

5. $1\ \cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\dots+n(3n+1)=n(n+1)^2\,,\ n\geqslant 1\,.$

6. $5+45+325+\dots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n\,,\ n\geqslant 1\,.$

7. $2^n>n^2\,,\ n\geqslant 5\,.$

8. $3^n>5n^2\,,\ n\geqslant 4\,.$

9. $3^n>2^n+7n\,,\ n\geqslant 4\,.$

10. $n^{n+1}>(n+1)^n\,,\ n\geqslant 3\,.$

11. $n(2n^2-3n+1)$ кратно $6\,,\ n\geqslant 1\,.$

12. 5^n-3^n+2n кратно $4\,,\ n\geqslant 1\,.$

13. $10^n+18n-28$ кратно $27\,,\ n\geqslant 1\,.$

2 Бином Ньютона

Методом математической индукции доказывается формула *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,a^{n-k}\,b^k\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Биномиальные коэффициенты C_n^k (число сочетаний из n по k) определяются равенством $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Напомним, что по соглашению $0!=1$. Таким образом, первый и последний биномиальные коэффициенты равны $C_n^0=C_n^n=1$, второй и предпоследний $C_n^1=C_n^{n-1}=n$, третий от начала и от конца $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и так далее. В результате, если расписать формулу бинома Ньютона подробно, то получится следующее равенство:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}\,a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Приведем простейшие свойства биномиальных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&C_n^k = C_n^{n-k}\,,\ k = 0,1,\dots,n\,;\\
&C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k\,,\ k = 1,2,\dots,n\,;\\
&\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\,;\\
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0\,.
\end{aligned}$$

Как известно, биномиальные коэффициенты могут быть выписаны с помощью треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

Приведем простые примеры.

Пример 2.1. *Записать разложение* $(2-3x)^5$.

Решение. В разложении шесть членов, так что достаточно выписать первые три биномиальных коэффициента. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
(2-3x)^5 &= 1\cdot 2^5 + 5\cdot 2^4\cdot(-3x) + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 2^3\cdot(-3x)^2 + \\
&\quad + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 2^2\cdot(-3x)^3 + 5\cdot 2\cdot(-3x)^4 + (-3x)^5 = \\
&= 2^5 - 5\cdot 2^4\cdot 3x + 10\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot x^2 - 10\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot x^3 + 5\cdot 2\cdot 3^4\cdot x^4 - 3^5\cdot x^5\,.
\end{aligned}$$

□

Пример 2.2. *Выписать коэффициент при* x^7 *в многочлене* $P(x) = (3+5x)^{15}$.

Решение. Разложение $P(x)$ по биному Ньютона выглядит следующим образом:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \, 3^{15-k} (5x)^k \,.$$

Член с x^7 имеет вид $a_7 x^7$, получается он при $k = 7$, так что соответствующий коэффициент a_7 равен

$$a_7 = C_{15}^7 \cdot 3^8 \cdot 5^7 = \frac{15!}{7!\,8!} \cdot 3^8 \cdot 5^7 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 3^8 \cdot 5^7 =$$
$$= 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3^8 \cdot 5^7 = 11 \cdot 13 \cdot 3^{10} \cdot 5^8 \,.$$

□

Задачи

Часть A

Записать разложение

1. $(a-b)^8$;

2. $(3+2x)^6$.

Выписать коэффициент при заданной степени x в многочлене

3. $P(x) = (8-2x)^{20}$ при x^6;

4. $P(x) = (3x^2+4)^{11}$ при x^{12};

5. $P(x) = x^3(2x-1)^{12}$ при x^7;

6. $P(x) = (x+1)(7-5x)^8$ при x^7.

7. Известно, что пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ не зависит от n. Найти n.

Часть B

Записать разложение

1. $(a+b)^6$;

2. $(4x-7)^7$.

Выписать коэффициент при заданной степени x в многочлене

3. $P(x) = (1-6x)^{10}$ при x^5;

4. $P(x) = (x^3 - 4)^{11}$ при x^{15};

5. $P(x) = 2x^2(4 - 3x)^{18}$ при x^9;

6. $P(x) = (2x - 5)(3 - 7x)^{10}$ при x^8.

7. Найти члены разложения $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^8$, являющиеся целыми числами.

3 Числовые последовательности. Ограниченные последовательности

Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и принимающая значения в $\mathbb{R}$. Таким образом, числовая последовательность — это функция $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ее значения $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, удобно обозначать через x_n. Другими словами, числовая последовательность — это упорядоченный набор действительных чисел:

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n\,,\ \ldots\,.$$

Обозначается числовая последовательность символами $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Например, числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$, поэлементно может быть расписана следующим образом:

$$1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ 0\,,\ \ldots\,.$$

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists A, B > 0\ :\ \ A \leqslant x_n \leqslant B\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Левое неравенство означает ограниченность снизу, а правое — сверху. Условие ограниченности можно еще записать в виде

$$\exists M > 0\ :\ \ |x_n| \leqslant M\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Если удастся показать, что неравенства $A \leqslant x_n \leqslant B$ или $|x_n| \leqslant M$ выполняются с некоторого номера, т. е. при $n \geqslant n_0$, то, естественно, это также означает ограниченность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При доказательстве ограниченности числовой последовательности часто используются известные неравенства с модулями:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|\,, \quad |a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|\,.$$

Пример 3.1. *Доказать ограниченность числовой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если* $x_n = \dfrac{n + 5\sin n}{3n - 4}$.

Решение. Можно, очевидно, гарантировать, что $x_n > 0$ при всех $n \geqslant 5$. Учитывая еще, что для любого $n \geqslant 5$ выполняются оценки $5\sin n \leqslant 5 \leqslant n$ и $4 \leqslant n$, получаем, что

$$|x_n| = x_n = \frac{n + 5\sin n}{3n - 4} \leqslant \frac{n+5}{3n-4} \leqslant \frac{n+n}{3n-n} = \frac{2n}{2n} = 1\,,\ n \geqslant 5\,.$$

Итак,

$$\exists M = 1\ :\ \ |x_n| \leqslant M\,,\ \forall n \geqslant 5\,.$$

Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. □

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, означает следующее:

$$\forall M > 0\ \ \exists n = n(M) \in \mathbb{N}\ : |x_n| > M\,.$$

Пример 3.2. *Доказать неограниченность числовой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если* $x_n = n + 2\cos n$.

Решение. Сделаем следующую простую оценку:

$$|x_n| = |n + 2\cos n| \geqslant n - 2|\cos n| \geqslant n - 2\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Зафиксируем $M > 0$. Неравенству $n - 2 > M$ удовлетворяет любое натуральное число $n > M + 2$ и, в частности, $n = [M+2] + 1 = [M] + 3$. Таким образом,

$$\forall M > 0\ \ \exists n = [M] + 3 \in \mathbb{N}\ :\ \ |x_n| \geqslant n - 2 > M\,.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена.

Легко понять, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху и при этом ограничена снизу, так как $x_n > 0$, $n \geqslant 2$. □

Задачи

Часть A

Доказать ограниченность числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

1. $x_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$; **2.** $x_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 - 2}$;

3. $x_n = \sin(n^3) - \dfrac{1}{n}$; **4.** $x_n = \dfrac{1 - n}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

5. $x_n = \dfrac{2n + 3\cos n}{n^2 + n + 1}$; **6.** $x_n = \dfrac{n^2 + 4n + 8}{n^2 + 2n - 1}$;

7. $x_n = \operatorname{arctg}(n!) + 1\,;$ **8.** $x_n = n - \sqrt{n^2 - 1}\,;$

9. $x_n = \dfrac{2^n + n^2}{3 - 2^n}\,;$ **10.** $x_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1}\,.$

Доказать неограниченность числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

11. $x_n = (-1)^n \ln n - 2\,;$

12. $x_n = n^{\cos \pi n}\,;$

13. $x_n = \dfrac{n^2 + 15}{n - 1}\,.$

Часть B

Доказать ограниченность числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

1. $x_n = \dfrac{3n - 5}{n + 7}\,;$ **2.** $x_n = \dfrac{3n + 5}{n - 7}\,;$

3. $x_n = \cos n + 2^{-n}\,;$ **4.** $x_n = \dfrac{(-1)^n - 2n}{\sqrt[3]{n^3 - 5}}\,;$

5. $x_n = \dfrac{n + 7\sin n}{n^5 - n + 9}\,;$ **6.** $x_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 - n - 10}\,;$

7. $x_n = 5 \arcsin \dfrac{1}{n} + 2\,;$ **8.** $x_n = \sqrt{n - 1} - \sqrt{n + 1}\,;$

9. $x_n = \dfrac{n + \cos n \cdot 3^n}{5^n - n^{10}}\,;$ **10.** $x_n = \sqrt[3]{n + 1} - \sqrt[3]{n}\,.$

Доказать неограниченность числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

11. $x_n = n^2 - 5\,;$

12. $x_n = \big(2 + (-1)^n\big)^n\,;$

13. $x_n = \dfrac{n^3 - 2n}{n^2 + 3}\,.$

4 Предел числовой последовательности. Доказательство по определению

Напомним известные определения конечного и бесконечного предела числовой последовательности.

Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ |x_n - a| < \varepsilon\,, \ \forall n \geqslant N\,.$$

Данный факт обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или сокращенно $\lim x_n = a$.

Числовая последовательность, предел которой равен 0, называется *бесконечно малой*.

Последовательности, имеющие конечный предел, называются *сходящимися*.

Если числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривается в $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то символ $+\infty$ называется ее пределом в том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ x_n > \varepsilon\,, \ \forall n \geqslant N\,.$$

Символ $-\infty$ называется пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ x_n < -\varepsilon\,, \ \forall n \geqslant N\,.$$

Обозначаются эти факты $\lim x_n = +\infty$ и $\lim x_n = -\infty$, соответственно. Указанные последовательности называются *бесконечно большими положительными* и *бесконечно большими отрицательными*. Очевидно, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет бесконечно большой отрицательной тогда и только тогда, когда $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой положительной.

При рассмотрении числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ символ ∞ называется ее пределом, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ |x_n| > \varepsilon\,, \ \forall n \geqslant N\,.$$

При этом говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *бесконечно большой*, и пишут $\lim x_n = \infty$.

Естественно, все бесконечно большие последовательности являются *расходящимися*. Помимо них расходящимися будут последовательности, не имеющие предела в $\overline{\mathbb{R}}$.

Для доказательства того факта, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела в $\overline{\mathbb{R}}$, проще всего выделить из рассматриваемой последовательности две подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{m_s}\}_{s=1}^{\infty}$, пределы которых различны.

Приведем несколько простых примеров.

Пример 4.1. *Доказать по определению, что* $\lim \dfrac{n^3+2}{n^3-3n} = 1$.

Решение. Пусть $x_n = \dfrac{n^3+2}{n^3-3n}$. В соответствии с определением, тот факт, что $\lim x_n = 1$, означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; |x_n - 1| < \varepsilon\,, \; \forall n \geqslant N\,.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем номера n, для которых $|x_n - 1| < \varepsilon$. Сначала выпишем и преобразуем $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^3+2}{n^3-8n} - 1\right| = \left|\frac{n^3+2-(n^3-8n)}{n^3-8n}\right| = \frac{8n+2}{n^3-8n}\,, \;\; n \geqslant 3\,.$$

Теперь сделаем несколько простых оценок, чтобы упростить выражение:

$$\frac{8n+2}{n^3-8n} \leqslant \frac{8n+2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{20n}{n^3} = \frac{20}{n^2}\,, \;\; n \geqslant 4\,.$$

Решая неравенство $\dfrac{20}{n^2} < \varepsilon$, получаем, что $n > \sqrt{\dfrac{20}{\varepsilon}}$. Итак, если одновременно $n \geqslant 4$ и $n > \sqrt{\dfrac{20}{\varepsilon}}$, то

$$|x_n - 1| \leqslant \frac{20}{n^2} < \varepsilon\,.$$

Значит, полагаем $N = \left[\sqrt{\dfrac{20}{\varepsilon}}\right] + 4$. Тогда последнее неравенство будет выполнено для всех $n \geqslant N$. Это завершает доказательство.

В заключение можно вычислить значения N для произвольно выбранных ε: если $\varepsilon = 1$, то $N = 8$; если $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, то $N = 10$; если $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, то $N = 18$ и так далее. □

Пример 4.2. *Доказать по определению, что* $\lim\big((-1)^n n + 1\big) = \infty$.

Решение. Обозначим $x_n = (-1)^n n + 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем номера n, при которых $|x_n| > \varepsilon$. Так как

$$|x_n| = \big|(-1)^n n + 1\big| \geqslant \big|(-1)^n n\big| - 1 = n - 1\,,$$

то, решая неравенство $n - 1 > \varepsilon$, получим, что $n > \varepsilon + 1$. Берем $N = [\varepsilon] + 2$ (это первое натуральное число, большее $\varepsilon + 1$). Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = [\varepsilon] + 2 \in \mathbb{N} : \;\; |x_n| > \varepsilon\,, \; \forall n \geqslant N\,.$$

Значит, числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой. □

Пример 4.3. *Доказать по определению, что* $\lim \dfrac{5-n^2}{n+3\cos n} = -\infty$.

Решение. Положим $x_n = \dfrac{5-n^2}{n+3\cos n}$. Поскольку проводить оценки с отрицательными числами неудобно, то проще рассмотреть последовательность $y_n = -x_n = \dfrac{n^2-5}{n+3\cos n}$ и доказать, что она является бесконечно большой положительной. При всех $n \geqslant 4$ имеем следующее:

$$y_n = \frac{n^2-5}{n+3\cos n} \geqslant \frac{n^2-\frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{n^2}{2(n+3)} \geqslant \frac{n^2}{2(n+n)} = \frac{n}{4}\,.$$

Решаем неравенство $\dfrac{n}{4} > \varepsilon$ и получаем, что $n > 4\varepsilon$. Полагая $N = [4\varepsilon]+4$, заключаем, что

$$y_n \geqslant \frac{n}{4} > \varepsilon\,,\ n \geqslant N\,.$$

Таким образом, $\lim y_n = +\infty$ и, следовательно, $\lim x_n = -\infty$. □

Пример 4.4. *Доказать, что последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $x_n = n^{(-1)^n}$, *не имеет предела.*

Решение. Рассмотрим подпоследовательности исходной последовательности с четными и нечетными номерами. Так как $(-1)^{2k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_{2k} = 2k \to +\infty$ при $k \to \infty$. При $n = 2k-1$ имеем, что $(-1)^{2k-1} = -1$ и $x_{2k-1} = \dfrac{1}{2k-1} \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, у рассматриваемой последовательности имеются две подпоследовательности, имеющие различные пределы. Значит, сама последовательность предела не имеет. □

В заключение остановимся на применении теоремы о трех последовательностях. Напомним ее формулировку.

Теорема 4.1 (о трех последовательностях)**.** *Пусть заданы три числовые последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *причем выполняются неравенства* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $n \geqslant n_0$. *Если числовые последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходятся, причем* $\lim x_n = \lim z_n = a$, *то последовательность* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *также сходится и ее предел равен* a.

Напомним еще известные пределы

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1\,; \quad \lim \sqrt[n]{a} = 1\,,\ a > 0\,.$$

Пример 4.5. *С помощью теоремы о трех последовательностях найти*

$$\lim \sqrt[n]{2+\sin n}\,.$$

Решение. Имеем, что $1 \leqslant 2 + \sin n \leqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$1 \leqslant \sqrt[n]{2 + \sin n} \leqslant \sqrt[n]{3}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Так как $\lim \sqrt[n]{3} = 1$, то по теореме о трех последовательностях получаем, что рассматриваемая числовая последовательность сходится и ее предел равен 1. □

Задачи

Часть А

Доказать по определению, что

1. $\lim \dfrac{n+1}{n-5} = 1\,;$

2. $\lim \dfrac{\sin n}{2^n} = 0\,;$

3. $\lim \dfrac{n + \sqrt{n}}{n^4 + n - \operatorname{arctg} n} = 0\,;$

4. $\lim \dfrac{2n^2 - \sin n}{n^2 - (-1)^n} = 2\,;$

5. $\lim \dfrac{7 \cdot 2^n}{3 - 2^n} = -7\,;$

6. $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0\,;$

7. $\lim(\cos n - n) = -\infty\,;$

8. $\lim \left(\sqrt{n+1} + 3\sin(n!)\right) = +\infty\,;$

9. $\lim \dfrac{(-1)^n \cdot n^2}{n+1} = \infty\,;$

10. $\lim n\left(\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+3}\right) = +\infty\,.$

Доказать, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела, если

11. $x_n = \cos \dfrac{\pi n}{3}\,;$

12. $x_n = \left((-1)^n + 1\right) 2^n\,.$

С помощью теоремы о трех последовательностях найти

13. $\lim \sqrt[n]{9n^2 + 2}\,;$ **14.** $\lim \sqrt[n]{5 - 2\sin n}\,;$ **15.** $\lim \dfrac{3 + (-1)^n}{2^n}\,.$

Часть В

Доказать по определению, что

1. $\lim \dfrac{n^2 - 3}{n^2 + 4n} = 1\,;$

2. $\lim \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\ln n} = 0\,;$

3. $\lim \dfrac{n\sqrt{n} + 8}{n^2 - n + 2} = 0\,;$

4. $\lim \dfrac{2n^4 + \cos n}{4n^4 - n - 1} = \dfrac{1}{2}\,;$

5. $\lim \dfrac{3^n + (-1)^n}{n - 5^n} = 0\,;$

6. $\lim \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}\right) = 0\,;$

7. $\lim\big(2\sin n - \ln n\big) = -\infty\,;$ **8.** $\lim(\sqrt{n} - \operatorname{arctg} n) = +\infty\,;$

9. $\lim\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n^2 - 3n}{n+10} = \infty\,;$ **10.** $\lim n^{\frac{3}{2}}\big(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\big) = +\infty\,.$

Доказать, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела, если

11. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4} + \dfrac{1}{n}\,;$ **12.** $x_n = \dfrac{n+1}{n+1+n(-1)^n}\,.$

С помощью теоремы о трех последовательностях найти

13. $\lim\sqrt[n]{n^3-7}\,;$ **14.** $\lim\sqrt[n]{4+3\cos n}\,;$ **15.** $\lim\dfrac{1+2\cdot(-1)^n}{\ln n}\,.$

5 Вычисление предела последовательности

Прежде всего, для нахождения предела числовой последовательности необходимо знать свойства бесконечно малых, бесконечно больших и сходящихся последовательностей. Приведем соответствующие формулировки.

Теорема 5.1 (об арифметических операциях со сходящимися последовательностями)**.** *Пусть числовые последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся. Тогда последовательности $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, причем*

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n\,;$$
$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n\,.$$

Если $\lim y_n \neq 0$, то сходящейся является и последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}\,.$$

Теорема 5.2. *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.3. *Произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.4. *Пусть $x_n \neq 0$, $n \geqslant n_0$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая.*

Теорема 5.5. *Сумма бесконечно больших одного знака есть бесконечно большая того же знака.*

Теорема 5.6. *Сумма бесконечно большой и ограниченной есть бесконечно большая.*

Теорема 5.7. *Произведение бесконечно большой последовательности на последовательность, отграниченную от нуля, есть бесконечно большая последовательность.*

В связи с теоремой 5.7 напомним, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *отграниченной от нуля*, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0\,, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ : \quad |x_n| \geqslant \varepsilon_0\,,\ n \geqslant n_0\,.$$

Понятно, что всякая бесконечно большая последовательность, а также сходящаяся последовательность с отличным от нуля пределом будут отграничены от нуля. Примерами последовательностей, не являющихся отграниченными от нуля, служат $\left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$. Первая содержит подпоследовательность $\left\{\dfrac{1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$, так что в любой окрестности нуля находится бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности. Вторая, как известно, принимает плотное множество значений на $[-1,1]$. Это означает, что на любом интервале $(a,b) \subset [-1,1]$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответственно, в любой окрестности нуля также будет бесконечно много элементов данной последовательности.

Приведем простейший пример нахождения предела числовой последовательности.

Пример 5.1. *Найти* $\lim \dfrac{\sqrt[n]{3}+1}{\sqrt[n]{7n^2} - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

Решение. Имеем, что $\sqrt[n]{3} \to 1$, так что весь числитель стремится к 2. Далее, $\sqrt[n]{7n^2} = \sqrt[n]{7} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1 \cdot 1^2 = 1$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, так что знаменатель стремится к 1. Значит, предел рассматриваемой дроби равен $\dfrac{2}{1} = 2$. Все рассуждения основаны на теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями. Символично перечисленные действия можно записать следующим образом:

$$\lim \frac{\sqrt[n]{3}+1}{\sqrt[n]{7n^2} - \left(\frac{1}{4}\right)^n} \stackrel{?}{=} \frac{\lim\left(\sqrt[n]{3}+1\right)}{\lim\left(\sqrt[n]{7n^2} - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)} = \frac{\lim \sqrt[n]{3} + 1}{\lim \sqrt[n]{7} \cdot \left(\lim \sqrt[n]{n}\right)^2 - \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n} =$$
$$= \frac{1+1}{1 \cdot 1^2 - 0} = 2\,.$$

Знак "?" означает, что соответствующее равенство будет верно лишь в том случае, если предел знаменателя окажется отличным от 0. В противном случае данное действие невозможно. $\square$

Разобранный только что пример представляет собой пример без неопределенностей. Мы сразу смогла дать ответ на основании известных свойств.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров, содержащих неопределенности. Сначала перечислим основные из них.

а) $\infty - \infty$: *разность двух бесконечно больших одного знака*

Как известно, про сумму бесконечно больших разного знака или, другими словами, про разность бесконечно больших одного знака ничего определенного сказать нельзя. Действительно, разберем четыре следующих примера:

$$1)\ x_n = 2n\,,\ y_n = n\,; \qquad 2)\ x_n = n\,,\ y_n = 2n\,;$$

$$3)\ x_n = n\,,\ y_n = n + \frac{1}{n}\,; \qquad 4)\ x_n = n\,,\ y_n = n - (-1)^n\,.$$

В первом случае получим, что $x_n - y_n = n \to +\infty$ при $n \to \infty$; во втором $x_n - y_n = -n \to -\infty$; в третьем $x_n - y_n = -\frac{1}{n} \to 0$; в четвертом $x_n - y_n = (-1)^n$ не имеет предела.

б) $\dfrac{\infty}{\infty} = 0 \cdot \infty$: *отношение двух бесконечно больших или произведение бесконечно малой на бесконечно большую*

По сути, с учетом теоремы 5.4 это одна и та же неопределенность. Проиллюстрируем ее на следующих примерах:

$$1)\ x_n = n^2\,,\ y_n = n\,; \qquad 2)\ x_n = n\,,\ y_n = n^2\,;$$

$$3)\ x_n = n + 1\,,\ y_n = n\,; \qquad 4)\ x_n = n(-1)^n\,,\ y_n = n\,.$$

Все указанные последовательности являются бесконечно большими. В первом примере $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$; во втором $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$; в третьем $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$; в четвертом $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ не имеет предела.

Основной метод раскрытия неопределенностей при вычислении предела последовательности заключается в вынесении слагаемого наибольшего роста. Слагаемое наибольшего роста определяется по шкале роста:

$$1 \ll \ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n\,.$$

Здесь $\alpha, \beta > 0$, $a > 1$. Запись $x_n \ll y_n$ означает, что $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$ или, что то же самое, что $\lim \dfrac{y_n}{x_n} = \infty$.

Рассмотрим два простых примера.

Пример 5.2. *Найти* $\lim \dfrac{n^2 - 10n + (-1)^n}{3n^2 - \cos n}$.

Решение. Последовательность $\{n^2 - 10n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, является бесконечно большой положительной; $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная числовая последовательность. По теореме 5.6 тогда числитель будет бесконечно большой последовательностью. То же самое можно сказать и о знаменателе. Соответственно, в данном примере имеется неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Выносим слагаемые наибольшего роста (без коэффициентов), сокращаем и получаем:

$$\lim \frac{n^2 - 10n + (-1)^n}{3n^2 - \cos n} = \lim \frac{n^2\bigl(1 - \frac{10}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\bigr)}{n^2\bigl(3 - \frac{\cos n}{n^2}\bigr)} = \lim \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}}{3 - \frac{\cos n}{n^2}} = \frac{1}{3}\,.$$

На последнем шаге использовался тот факт, что $\dfrac{(-1)^n}{n^2} \to 0$ и $\dfrac{\cos n}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$ в силу теоремы 5.3, и теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями. □

Пример 5.3. *Найти* $\lim \dfrac{2\sqrt{n} + 3}{\ln^{100} n - \operatorname{arctg} n}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поэтому выносим в числителе и знаменателе слагаемые, которые имеют наибольший рост:

$$\lim \frac{2\sqrt{n} + 3}{\ln^{100} n - \operatorname{arctg} n} = \lim \frac{\sqrt{n}\bigl(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\bigr)}{\ln^{100} n\bigl(1 - \frac{\operatorname{arctg} n}{\ln^{100} n}\bigr)} = +\infty\,.$$

Поясним последнее равенство. Последовательность $x_n := \dfrac{\sqrt{n}}{\ln^{100} n}$ является бесконечно большой положительной (в силу шкалы роста). Далее, $y_n := \dfrac{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\operatorname{arctg} n}{\ln^{100} n}} \to 2$, $n \to \infty$, так что $\{y_n\}_{n=2}^{\infty}$ является отграниченной от нуля и положительной. По теореме 5.7 тогда $x_n y_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. □

Что касается раскрытия неопределенности $\infty - \infty$, то здесь можно выделить две ситуации. Если рассматриваемые бесконечно большие последовательности имеют разный порядок роста или равный порядок роста, но разные коэффициенты при старшем порядке, то достаточно, как и выше, вынести слагаемое большего роста.

Если же указанные бесконечно большие последовательности имеют равный порядок роста и равные старшие коэффициенты, то необходимо применить вспомогательные средства для того, чтобы выявить главное слагаемое разности. Чаще всего такими средствами выступают формула бинома Ньютона и метод домножения на сопряженное.

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 5.4. *Найти*

$$\text{а)}\ \lim\left((n+2)^5-n^4\right); \quad \text{б)}\ \lim\left((n+2)^4-2n^4\right); \quad \text{в)}\ \lim\left(\sqrt{3n^2+1}-n\right).$$

Решение. Во всех трех случаях рассматривается разность бесконечно больших разного роста. В примере а) заданные бесконечно большие растут как n^5 и n^4 (разный порядок роста); в примере б) — как n^4 и $2n^4$ (разные коэффициенты при старшем порядке); в примере в)— как $n\sqrt{3}$ и n (снова разные коэффициенты при старшем порядке). Соответственно, во всех трех случаях достаточно вынести n в наибольшей степени:

$$\text{а)}\ \lim\left((n+2)^5-n^4\right)=\lim n^5\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^5-\frac{1}{n}\right)=+\infty;$$

$$\text{б)}\ \lim\left((n+2)^4-2n^4\right)=\lim n^4\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^4-2\right)=-\infty;$$

$$\text{в)}\ \lim\left(\sqrt{3n^2+1}-n\right)=\lim n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-1\right)=+\infty.$$

На последнем шаге во всех примерах использовалась теорема 5.7: бесконечно большая последовательность умножается на последовательность, которая сходится к отличному от нуля пределу и, следовательно, отграничена от нуля. □

Пример 5.5. *Найти*

$$\text{а)}\ \lim\left((n+2)^4-n^4\right); \qquad \text{б)}\ \lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

Решение. В данных примерах рассматривается разность двух бесконечно больших одинакового роста: n^4 в примере а) и n в примере б). Соответственно, эту разность нужно проявить.

а) Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\lim\left((n+2)^4-n^4\right)=\lim\left(n^4+4n^3\cdot 2+\frac{4\cdot 3}{2}\cdot n^2\cdot 2^2+4n\cdot 2^3+2^4-n^4\right)=$$
$$=\lim(8n^3+24n^2+32n+16)=+\infty.$$

После того, как мы раскрыли $(n+2)^4$ по биному и уничтожили n^4, стало понятно, что главным слагаемым разности является n^3.

Заметим, что если изначально попытаться вынести n^4, как в примере 5.4 б), то неопределенность $\infty - \infty$ перейдет в неопределенность $0 \cdot \infty$:

$$\lim \left((n+2)^4 - n^4\right) = \lim n^4 \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^4 - 1\right).$$

Понятно, это связано с тем, что, как мы видели выше, n^4 в разности на самом деле отсутствует.

б) Домножим и разделим рассматриваемое выражение на $\sqrt{n^2+1}+n$ (сопряженное). В результате получим:

$$\lim \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0\,.$$

$\square$

Задачи

Часть А

Найти

1. $\lim \dfrac{5-\sqrt[n]{2n}}{3^{-n}+\sin\frac{1}{n}+1}$;

2. $\lim \left(2n^3-100n^2-10\right)$;

3. $\lim \dfrac{2n^2+n+\ln^{15} n}{3n^2+\cos n}$;

4. $\lim \dfrac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^{100}+5^n+1}$;

5. $\lim \dfrac{n^5+(-1)^n}{(2n+1)(3n-4)^4}\ \operatorname{arctg}(1-\sqrt{n})$;

6. $\lim \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+\operatorname{arctg}(n^{10})}$;

7. $\lim \dfrac{n^7+7n^6-(n+1)^7}{(n+1)^3(n+\cos^5 n)^2}$;

8. $\lim \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^4+1}-1}$;

9. $\lim \sqrt{n+5}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

10. $\lim \sqrt{n+5}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$;

11. $\lim \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)n^{\frac{2}{3}}}$;

12. $\lim \dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$;

13. $\lim \dfrac{\ln\left(7+3e^{8n}\right)}{\ln(n^2+\operatorname{arctg} n)}$;

14. $\lim \left((-1)^n+\operatorname{arctg} n\right)\ \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

15. $\lim\big((-1)^n+\operatorname{arctg} n\big)(n^2+\ln n)$;

16. $\lim\left(2-\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\ln\left(\sqrt{n}+1\right)$;

17. $\lim\left(\cos\sqrt{n^2+4}-\cos\sqrt{n^2+2}\right)$;

18. $\lim\left(\dfrac{1+2+\dots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

19. $\lim\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\dots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

20. $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Часть B

Найти

1. $\lim\left(2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)\left(7\sqrt[n]{3}+\dfrac{8}{\sqrt[n]{n^2}}\right)$;

2. $\lim\left(n^{10}+\sin n-2^n\right)$;

3. $\lim\dfrac{\sqrt{n}+5}{\ln^{20} n+\operatorname{arctg} n}$;

4. $\lim\dfrac{2^n+3^{-n}+n^5}{3^n+2^{-n}+n^4}$;

5. $\lim\dfrac{n^2(7-2n)^5}{n^7+3}\operatorname{arctg}\sqrt[n]{n}$;

6. $\lim\dfrac{(2n+1)^3-8n^3}{(2n+1)^2+4n^2}$;

7. $\lim\dfrac{(n+2)^{30}-n^{30}-60n^{29}}{3n^{28}+5}$;

8. $\lim\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+1}}{2-\sqrt{n}}$;

9. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}}{3n+4}\,(n^2+1)$;

10. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{3n^2-2n}\right)$;

11. $\lim\dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^3}}-1\right)$;

12. $\lim\dfrac{\ln(n^2+\ln n)}{\ln(n^4+\cos n)}$;

13. $\lim\dfrac{\ln\left(n^4+e^n\right)}{\ln\left(n^{100}+3^n\right)}$;

14. $\lim(100+3\operatorname{arctg} n)\,2^{-n}$;

15. $\lim(100+3\operatorname{arctg} n)\sqrt[4]{n+1}$;

16. $\lim(2+\cos n)\sqrt{\lg n+1}$;

17. $\lim\left(\sin\sqrt{n^2+3n}-\sin\sqrt{n^2-3n}\right)$;

18. $\lim\dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$;

19. $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$;

20. $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right)$.

6 Решение задач Части А

Задачи к § 1

1. Обозначим

$$A(n):\ 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

1) Утверждение $A(1)$, очевидно, верно: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

2) Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, т. е. выполняется равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(предположение индукции)}.$$

Покажем, что тогда утверждение $A(n+1)$ также верно, т. е. что

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Выписываем левую часть требуемого равенства, используем предположение индукции и проводим элементарные преобразования:

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Получили правую часть. Значит, равенство $A(n+1)$ верно.

Из пунктов 1) и 2) вытекает, что утверждения $A(n)$ верны при всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Пусть

$$A(n):\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}.$$

1) Проверяем равенство $A(1)$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ — верно.

2) Предполагаем, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, т. е. что выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Сформулируем равенство $A(n+1)$, которое нужно доказать:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6}\,.$$

Выписываем левую часть, применяем предположение индукции и проводим элементарные преобразования:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6}\,\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) = \frac{n+1}{6}\,(2n^2 + 7n + 6) =$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot 2(n+2)\Big(n + \frac{3}{2}\Big) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.$$

Таким образом, утверждение $A(n+1)$ верно.

На основании пунктов 1) и 2) заключаем, что все утверждения $A(n)$ верны.

3. Положим

$$A(n):\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\,,\ n \geqslant 2\,.$$

1) Проверим утверждение $A(2)$: $1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ — верно.

2) Предположим, что при некотором $n \geqslant 2$ утверждение $A(n)$ справедливо, т. е. что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Проверим утверждение $A(n+1)$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Имеем, что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) =$$

$$= n(n+1)\Big(\frac{n-1}{3} + 1\Big) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Таким образом, заключаем, что утверждения $A(n)$ верны при всех $n \geqslant 2$.

4. Обозначим

$$A(n): \ \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}\,, \ n \geqslant 1\,.$$

1) Утверждение $A(1)$ имеет вид

$$1-\frac{1}{4}=\frac{1+2}{2+2}\,,$$

так что оно верно.

2) Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, т. е. выполнено равенство

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2} \quad \text{(предположение индукции)}\,.$$

Покажем, что тогда утверждение $A(n+1)$ также верно, т. е. что

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+3}{2(n+1)+2}\,.$$

Рассмотрим левую часть:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}\cdot\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)(n+3)}{(2n+2)(n+2)}=\frac{n+3}{2(n+2)}=\frac{n+3}{2n+4}\,.$$

Из этого делаем вывод, что утверждение $A(n+1)$ верно.

Значит, $A(n)$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

5. Пусть

$$A(n): \ 1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1\,, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

1) Утверждение $A(1)$, очевидно, верно: $1\cdot 1! = 2! - 1$.

2) Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение $A(n)$ верно, т. е. что

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1 \quad \text{(предположение индукции)}\,.$$

Докажем, что $A(n+1)$ верно, т. е. что

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+(n+1)\cdot(n+1)!=(n+2)!-1\,.$$

Выписываем левую часть, применяем предположение индукции и получаем:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! =$$

$$= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 = (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1\,.$$

Таким образом, $A(n+1)$ верно.

Из пунктов 1) и 2) заключаем, что $A(n)$ верны при всех $n \in \mathbb{N}$.

6. Положим

$$A(n):\ 3 + 20 + 168 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n (n+1)! - 1\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

1) Утверждение $A(1)$ выполнено: $3 = 2 \cdot 2! - 1$.

2) Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ равенство $A(n)$ справедливо:

$$3+20+168+\cdots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n! = 2^n(n+1)!-1 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Покажем, что тогда $A(n+1)$ также верно, т. е. что

$$3 + 20 + \cdots + (2n+3) \cdot 2^n \cdot (n+1)! = 2^{n+1}(n+2)! - 1\,.$$

Преобразуем левую часть:

$$3 + 20 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! + (2n+3) \cdot 2^n \cdot (n+1)! =$$

$$= 2^n (n+1)! - 1 + (2n+3) \cdot 2^n \cdot (n+1)! = 2^n (n+1)!(1 + 2n + 3) - 1 =$$

$$= 2^n \cdot (n+1)!\, 2(n+2) - 1 = 2^{n+1}(n+2)! - 1\,.$$

Из пунктов 1) и 2) делаем вывод, что все утверждения $A(n)$ верны.

7. При доказательстве неравенств, как правило, удобнее показывать либо что разность положительна, либо что отношение больше 1 (последний способ, понятно, возможен лишь в том случае, если обе части исходного неравенства были положительны).

Запишем рассматриваемое утверждение в виде:

$$A(n):\ 2^n - n > 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

1) При $n = 1$ неравенство, очевидно, верно: $2 - 1 > 0$.

2) Допустим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ утверждение справедливо, т. е. что

$$2^n - n > 0 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Покажем, что тогда $2^{n+1} - (n+1) > 0$. Рассмотрим левую часть неравенства. Имеем, что

$$2^{n+1} - (n+1) = 2(2^n - n) + n - 1 > 0\,,$$

так как $2^n - n > 0$ по предположению индукции, а $n-1 \geqslant 0$. Таким образом, утверждение $A(n+1)$ верно.

Значит, все утверждения $A(n)$ справедливы.

8. Положим

$$A(n): \ \frac{n!}{2^n} > 1\,, \ n \geqslant 4\,.$$

1) Проверим $A(4)$: $\dfrac{4!}{2^4} > 1$ — верно, так как $4! = 24$, $2^4 = 16$.

2) Пусть утверждение $A(n)$ справедливо при некотором $n \geqslant 4$, т. е.

$$\frac{n!}{2^n} > 1 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Покажем, что тогда $A(n+1)$ тоже справедливо, т. е. что $\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}} > 1$. Используя предположение индукции и учитывая, что $\dfrac{n+1}{2} > 1$, заключаем, что

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2} > 1\,.$$

Из пунктов 1) и 2) делаем вывод, что все утверждения $A(n)$ выполнены.

9. Обозначим

$$A(n): \ 5^n - 7n + 3 > 0\,, \ n \geqslant 1\,.$$

1) $A(1)$: $5 - 7 + 3 > 0$ — верно.

2) Предположим, что $A(n)$ справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$, т. е. что

$$5^n - 7n + 3 > 0 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Покажем, что тогда $A(n+1)$ тоже верно. Рассмотрим

$$5^{n+1} - 7(n+1) + 3 = 5^{n+1} - 7n - 4 = 5(5^n - 7n + 3) + 28n - 19\,.$$

Поскольку $5^n - 7n + 3 > 0$ по предположению индукции, а $28n - 19 > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, делаем вывод, что в целом выражение положительно. Таким образом, утверждение $A(n+1)$ доказано.

Значит, все утверждения $A(n)$ справедливы.

10. Пусть

$$A(n): \ \frac{2!\,4!\,\ldots(2n)!}{\big((n+1)!\big)^n} > 1\,, \ n \geqslant 2\,.$$

1) При $n = 2$ получаем неравенство $\dfrac{2!4!}{(3!)^2} > 1$, т. е. $\dfrac{2 \cdot 24}{6^2} > 1$ — верно.

2) Допустим, что $A(n)$ верно при некотором $n \geqslant 2$, т. е. что

$$\frac{2!\,4!\,\ldots(2n)!}{\big((n+1)!\big)^n} > 1 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Проверим справедливость $A(n+1)$. Выписываем левую часть неравенства $A(n+1)$, учитываем предположение индукции и проводим элементарные преобразования. В результате получаем:

$$\frac{2!\,4!\,\ldots(2n)!\,(2n+2)!}{\big((n+2)!\big)^{n+1}} = \frac{2!\,4!\,\ldots(2n)!}{\big((n+1)!\big)^n}\cdot\frac{\big((n+1)!\big)^n}{\big((n+2)!\big)^n}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+2)!} >$$

$$> \left(\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\right)^n\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n+2)}{(n+2)^n}\,.$$

Нетрудно видеть, что в числителе $2n+2-(n+3)+1=n$ сомножителей, каждый из которых больше, чем $n+2$. Значит, в целом дробь больше 1, т. е. $A(n+1)$ доказано.

Из пунктов 1) и 2) заключаем, что утверждения $A(n)$ верны при всех $n \geqslant 2$.

11. Для обозначения кратности будем использовать символ "⋮". Положим

$$A(n):\ 7^n+3n-1 \,\vdots\, 9\,,\ n \geqslant 1\,.$$

1) При $n=1$ имеем утверждение $7+3-1 \,\vdots\, 9$ — верно.

2) Допустим, что $A(n)$ справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$, т. е. что $7^n + 3n-1 \,\vdots\, 9$. Покажем, что тогда $A(n+1)$ также справедливо. Рассмотрим соответствующее выражение:

$$7^{n+1}+3(n+1)-1 = 7(7^n+3n-1)-18n+9\,.$$

В силу предположения индукции $7^n+3n-1 \,\vdots\, 9$. А так как $18n \,\vdots\, 9$ и $9 \,\vdots\, 9$, то получаем, что все выражение кратно 9, т. е. $A(n+1)$ справедливо.

Таким образом, утверждения $A(n)$ выполняются при всех $n \geqslant 1$.

12. Обозначим

$$A(n):\ 6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1} \,\vdots\, 11\,,\ n \geqslant 1\,.$$

1) Утверждение $A(1)$ выглядит следующим образом: $1+3^2+1 \,\vdots\, 11$ — верно.

2) Предположим, что $A(n)$ верно при некотором $n \in \mathbb{N}$, т. е. что

$$6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1} \,\vdots\, 11 \quad (\text{предположение индукции})\,.$$

Проверим $A(n+1)$:

$$6^{2(n+1)-2}+3^{n+2}+3^n = 6^2\cdot6^{2n-2}+3\cdot3^{n+1}+3\cdot3^{n-1} =$$

$$= 6^2\big(6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}\big)-33(3^{n+1}+3^{n-1})\,.$$

Учитывая предположение индукции и то, что $33(3^{n+1}+3^{n-1}) \vdots 11$, получаем, что $A(n+1)$ верно.

Значит, все утверждения $A(n)$ справедливы.

13. Пусть

$$A(n): \; n^5 - n \vdots 5\,, \; n \geqslant 1\,.$$

1) При $n=1$ утверждение верно: 0 делится на 5.

2) Допустим, что $A(n)$ выполнено при некотором $n \in \mathbb{N}$, т. е. $n^5 - n \vdots 5$. Покажем, что $A(n+1)$ тоже верно. Рассмотрим

$$(n+1)^5-(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n-1 =$$
$$= (n^5-n)+5(n^4+2n^3+2n^2+n)\,.$$

С учетом предположения индукции очевидно, что данное выражение кратно 5.

На основании пунктов 1) и 2) заключаем, что $A(n)$ справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

Задачи к § 2

1. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(a-b)^8 = C_8^0\,a^8 + C_8^1\,a^7(-b) + C_8^2\,a^6(-b)^2 + C_8^3\,a^5(-b)^3 + C_8^4\,a^4(-b)^4 +$$
$$+ C_8^5\,a^3(-b)^5 + C_8^6\,a^2(-b)^6 + C_8^7\,a(-b)^7 + C_8^8\,(-b)^8\,.$$

Всего в разложении 9 слагаемых. Учитывая, что коэффициенты симметричны, нам достаточно вычислить 5 коэффициентов:

$$C_8^0 = 1\,; \;\; C_8^1 = 8\,; \;\; C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28\,;$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56\,; \;\; C_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{24} = 5\cdot 2\cdot 7 = 70\,.$$

Таким образом,

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8\,.$$

2. Имеем, что

$$(3+2x)^6 = 3^6 + 6\cdot 3^5\cdot 2x + \frac{6\cdot 5}{2}\cdot 3^4\cdot (2x)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\cdot 3^3\cdot (2x)^3 +$$
$$+ \frac{6\cdot 5}{2}\cdot 3^2\cdot (2x)^4 + 6\cdot 3\cdot (2x)^5 + (2x)^6 = 3^6 + 6\cdot 3^5\cdot 2x + 15\cdot 3^4\cdot 2^2\cdot x^2 +$$
$$+ 20\cdot 3^3\cdot 2^3\cdot x^3 + 15\cdot 3^2\cdot 2^4\cdot x^4 + 6\cdot 3\cdot 2^5\cdot x^5 + 2^6x^6\,.$$

3. Поскольку

$$P(x) = (8-2x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k\, 8^{20-k}(-2x)^k = \sum_{k=0}^{20} \big(C_{20}^k\, 8^{20-k}(-2)^k\big) x^k\,,$$

то слагаемое с x^6 получается при $k = 6$. Соответствующий числовой коэффициент имеет вид:

$$a_6 = C_{20}^6\, 8^{14}(-2)^6 = \frac{20!}{6!\,14!}\, 8^{14}\, 2^6 = \frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\, 8^{14}\, 2^6 =$$
$$= 15\cdot 17\cdot 19\cdot 8^{15}\cdot 2^6\,.$$

4. Выписываем разложение рассматриваемого многочлена по биному:

$$P(x) = (3x^2+4)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k\,(3x^2)^k 4^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} \big(C_{11}^k\, 3^k\, 4^{11-k}\big) x^{2k}\,.$$

Слагаемое с x^{12} получается при $k = 6$. Соответствующий коэффициент

$$a_{12} = C_{11}^6\, 3^6\, 4^5 = \frac{11!}{6!\,5!}\, 3^6\, 4^5 = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\, 3^6\, 4^5 = 2\cdot 7\cdot 11\cdot 3^7\cdot 4^5\,.$$

5. Раскладываем $(2x-1)^{12}$ по биному Ньютона, после чего каждое слагаемое суммы умножаем на x^3:

$$P(x) = x^3(2x-1)^{12} = x^3 \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\,(2x)^k(-1)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\, 2^k(-1)^{12-k}\, x^{k+3}\,.$$

Слагаемое с x^7 получается при $k = 4$. Значит,

$$a_7 = C_{12}^4\, 2^4\,(-1)^8 = \frac{12!}{4!\,8!}\, 2^4 = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}\, 2^4 = 5\cdot 9\cdot 11\cdot 2^4\,.$$

6. Имеем, что

$$P(x) = (x+1)(7-5x)^8 = (x+1)\sum_{k=0}^{8} C_8^k\, 7^{8-k}(-5x)^k =$$
$$= x\sum_{k=0}^{8} C_8^k\, 7^{8-k}(-5x)^k + \sum_{k=0}^{8} C_8^k\, 7^{8-k}(-5x)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k\, 7^{8-k}\,(-5)^k\, x^{k+1} + \sum_{k=0}^{8} C_8^k\, 7^{8-k}(-5)^k\, x^k\,.$$

Слагаемое с x^7 в первой сумме получается при $k = 6$, а во второй — при $k = 7$. Общий коэффициент при x^7 в $P(x)$ равен сумме коэффициентов из первой и второй суммы:

$$a_7 = C_8^6 \cdot 7^2 \cdot (-5)^6 + C_8^7 \cdot 7 \cdot (-5)^7 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 7^2 \cdot 5^6 - 8 \cdot 7 \cdot 5^7 = 4 \cdot 7 \cdot 5^6 \cdot 39\,.$$

7. Выпишем разложение рассматриваемой степени по биному:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,(\sqrt[3]{x})^k \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\cdot} x^{-n+\frac{4k}{3}}\,.$$

Поскольку не имеет значения, какое слагаемое в скобке считать первым, а какое вторым, то необходимо рассмотреть пятый член от начала выписанного разложения (он получается при $k = 4$) и пятый член от конца (он получается при $k = n - 4$). Получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} -n + \dfrac{4 \cdot 4}{3} = 0 \\ -n + \dfrac{4}{3}(n-4) = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{16}{3} \\ n = 16 \end{array}\right. .$$

Единственным натуральным решением является $n = 16$.

Задачи к § 3

1. Имеем, что

$$|x_n| = \left|\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}\right| = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2} \leqslant \frac{2n^2}{n^2} = 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Таким образом,

$$\exists M = 2 : \quad |x_n| \leqslant 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

2. В данном случае получаем:

$$|x_n| = \left|\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 2}\right| \overset{n \geqslant 2}{=} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 2} \overset{n \geqslant 4}{\leqslant} \frac{2n^2 + n^2}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = 6\,,\ n \geqslant 4\,.$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

3. Воспользуемся неравенством $|a + b| \leqslant |a| + |b|$:

$$|x_n| = \left|\sin(n^3) - \frac{1}{n}\right| \leqslant |\sin(n^3)| + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

4. Имеем, что

$$|x_n| = \left|\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

5. Поскольку $3\cos n \geqslant -3$, а $2n \geqslant 4$ при $n \geqslant 2$, то можно гарантировать положительность числителя при $n \geqslant 2$. При $n = 1$ он, вообще говоря, также положителен, поскольку $\cos 1 > 0$. Следовательно,

$$|x_n| = \left|\frac{2n+3\cos n}{n^2+n+1}\right| = \frac{2n+3\cos n}{n^2+n+1} \leqslant \frac{2n+3}{n^2} \leqslant \frac{2n+3n}{n^2} = \frac{5}{n} \leqslant 5\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

6. Так как $2n-1 > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то данную разность в знаменателе можно просто опустить:

$$|x_n| = \left|\frac{n^2+4n+8}{n^2+2n-1}\right| = \frac{n^2+4n+8}{n^2+2n-1} \leqslant \frac{n^2+4n^2+8n^2}{n^2} = 13\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

7. Учитывая, что $0 < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$ при всех $x > 0$, получаем, что

$$|x_n| = \bigl|\operatorname{arctg}(n!) + 1\bigr| = \operatorname{arctg}(n!) + 1 < \frac{\pi}{2} + 1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

8. В данном случае домножим и разделим на сопряженное выражение:

$$|x_n| = \bigl|n - \sqrt{n^2-1}\bigr| = n - \sqrt{n^2-1} = \frac{\bigl(n-\sqrt{n^2-1}\bigr)\bigl(n+\sqrt{n^2-1}\bigr)}{n+\sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

9. Воспользуемся известной оценкой $n^2 \leqslant 2^n$, $n \geqslant n_0$ (в данном случае методом математической индукции можно показать, что неравенство выполнено для всех $n \geqslant 4$). В общем случае, когда n_0 неизвестно, можно считать, что $n_0 \geqslant 3$, чтобы выполнялось неравенство $3 \leqslant \dfrac{2^n}{2}$. Тогда для всех $n \geqslant n_0$ имеем:

$$|x_n| = \left|\frac{2^n+n^2}{3-2^n}\right| = \frac{2^n+n^2}{2^n-3} \leqslant \frac{2^n+2^n}{2^n-\frac{2^n}{2}} = 4\,,\ n \geqslant n_0\,.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

10. Снова используем метод домножения на сопряженное:

$$|x_n| = \sqrt{n^4+n^2+1} - \sqrt{n^4-n^2+1} = \frac{n^4+n^2+1-(n^4-n^2+1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4-n^2+1}} =$$

$$= \frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4-n^2+1}} \leqslant \frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \leqslant \frac{2n^2}{\sqrt{n^4}} = 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

11. Имеем, что

$$|x_n| = \left|(-1)^n \ln n - 2\right| \geqslant \left|(-1)^n \ln n\right| - 2 = \ln n - 2\,.$$

Зафиксируем $M > 0$ и рассмотрим неравенство $\ln n - 2 > M$. Ему удовлетворяют все номера n такие, что $n > e^{M+2}$, и, в частности, $n = \left[e^{M+2}\right] + 1$. Таким образом,

$$\forall M > 0 \quad \exists n = \left[e^{M+2}\right] + 1 \in \mathbb{N}: \quad |x_n| \geqslant \ln n - 2 > M\,.$$

Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена.

12. Так как $\cos \pi n = (-1)^n$, то $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ распадается на две подпоследовательности:

$$x_{2k} = 2k\,;\ \ x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Понятно, что неограниченной является первая. Фиксируем $M > 0$, решаем неравенство $2k > M$, получаем, что $k > \dfrac{M}{2}$. Берем $k = \left[\dfrac{M}{2}\right] + 1$ и получаем, что $x_{2k} = 2k > M$.

13. Сначала проведем следующие простые оценки:

$$|x_n| = \frac{n^2+15}{n-1} \geqslant \frac{n^2}{n} = n\,,\ n \geqslant 2\,.$$

Поэтому для произвольного $M > 0$ достаточно в качестве n взять $n = [M]+2$. В результате будем иметь, что

$$|x_n| \geqslant n = [M] + 2 > M\,.$$

Таким образом, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена.

Задачи к § 4

1. Обозначим $x_n := \dfrac{n+1}{n-5}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 5$. Факт $\lim x_n = 1$ по определению означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad |x_n - 1| < \varepsilon\,,\ \forall n \geqslant N\,.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n-5} - 1\right| = \left|\frac{n+1-(n-5)}{n-5}\right| \overset{n\geqslant 6}{=} \frac{6}{n-5}\,.$$

При $n \geqslant 6$ решаем неравенство $\dfrac{6}{n-5} < \varepsilon$ и получаем, что $n > 5+\dfrac{6}{\varepsilon}$. Полагаем $N := \left[5 + \dfrac{6}{\varepsilon}\right] + 1 = 6 + \left[\dfrac{6}{\varepsilon}\right]$. Тогда при всех $n \geqslant N$ имеем, что

$$|x_n - 1| = \frac{6}{n-5} < \varepsilon\,.$$

Доказательство завершено.

2. Положим $x_n := \dfrac{\sin n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Необходимо доказать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой. По определению это означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; |x_n| < \varepsilon\,,\; \forall n \geqslant N\,.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_n|$:

$$|x_n| = \frac{|\sin n|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}\,.$$

Решая неравенство $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$, получаем, что $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Пусть $N := \max\left\{\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, 1\right\}$ (максимум берется в данном случае потому, что $\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon} < 0$, если $\varepsilon > 1$). Тогда при всех $n \geqslant N$

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon\,.$$

3. Пусть $x_n := \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^4 + n - \operatorname{arctg} n}$. Факт $\lim x_n = 0$ в терминах "$\varepsilon - N$" расписан в предыдущем примере. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Учитывая, что $n - \operatorname{arctg} n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ ($1 - \operatorname{arctg} 1 = 1 - \dfrac{\pi}{4} > 0$; $\operatorname{arctg} n < \dfrac{\pi}{2} < 2$ при $n \geqslant 2$), получаем, что

$$|x_n| = \frac{n+\sqrt{n}}{n^4 + n - \operatorname{arctg} n} \leqslant \frac{n+n}{n^4} = \frac{2}{n^3}\,.$$

Из неравенства $\dfrac{2}{n^3} < \varepsilon$ имеем, что $n > \sqrt[3]{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. Положив $N := \left[\sqrt[3]{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right] + 1$, получаем нужное.

4. Обозначим $x_n := \dfrac{2n^2 - \sin n}{n^2 - (-1)^n}$. Распишем в терминах "$\varepsilon{-}N$" факт $\lim x_n = 2$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \ |x_n - 2| < \varepsilon \, , \ \forall n \geqslant N \, .$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_n - 2|$:

$$|x_n - 2| = \left| \frac{2n^2 - \sin n}{n^2 - (-1)^n} - 2 \right| = \frac{|2(-1)^n - \sin n|}{n^2 - (-1)^n} \leqslant \frac{2 + |\sin n|}{n^2 - (-1)^n} \overset{n \geqslant 2}{\leqslant} \frac{3}{n^2 - 1} \, .$$

Решая неравенство $\dfrac{3}{n^2 - 1} < \varepsilon$, получаем, что $n^2 - 1 > \dfrac{3}{\varepsilon}$, откуда $n > \sqrt{1 + \dfrac{3}{\varepsilon}}$. Возьмем $N := \left[\sqrt{1 + \dfrac{3}{\varepsilon}} \right] + 1$. Тогда $N \geqslant 2$ и при всех $n \geqslant N$ выполняются неравенства

$$|x_n - 2| \leqslant \frac{3}{n^2 - 1} < \varepsilon \, .$$

5. Пусть $x_n := \dfrac{7 \cdot 2^n}{3 - 2^n}$. По определению факт $\lim x_n = -7$ означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \ |x_n + 7| < \varepsilon \, , \ \forall n \geqslant N \, .$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Оценим $|x_n + 7|$:

$$|x_n + 7| = \left| \frac{7 \cdot 2^n}{3 - 2^n} + 7 \right| = \left| \frac{7 \cdot 2^n + 7(3 - 2^n)}{3 - 2^n} \right| \overset{n \geqslant 2}{=} \frac{21}{2^n - 3} \, .$$

Из неравенства $\dfrac{21}{2^n - 3} < \varepsilon$ имеем, что $2^n > \dfrac{21}{\varepsilon} + 3$, так что $n > \log_2 \left(\dfrac{21}{\varepsilon} + 3 \right)$. Положив $N := \left[\log_2 \left(\dfrac{21}{\varepsilon} + 3 \right) \right] + 1$, получаем нужное.

6. Обозначим $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем номера n, для которых $|x_n| < \varepsilon$. Предварительно оценим $|x_n|$:

$$|x_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \, .$$

Решениями неравенства $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ являются все $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Остается положить $N := \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$. Доказательство завершено.

7. Пусть $x_n := \cos n - n$. По определению факт $\lim x_n = -\infty$ означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; x_n < -\varepsilon \, , \; \forall n \geqslant N \;\; \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; -x_n > \varepsilon \, , \; \forall n \geqslant N \, .$$

Имеем, что $-x_n = n - \cos n \geqslant n - 1$. Поэтому, взяв для произвольного $\varepsilon > 0$ номер $N := [\varepsilon + 1] + 1$, получим, что при всех $n \geqslant N$

$$-x_n \geqslant n - 1 > \varepsilon \, .$$

8. Обозначим $x_n := \sqrt{n+1} + 3\sin(n!)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем номера n, для которых $x_n > \varepsilon$. Прежде чем решать неравенство, проведем вспомогательные оценки:

$$x_n = \sqrt{n+1} + 3\sin(n!) \geqslant \sqrt{n+1} - 3 \geqslant \sqrt{n} - 3 \, .$$

Из неравенства $\sqrt{n} - 3 > \varepsilon$ получаем, что $n > (\varepsilon+3)^2$. Пусть $N := \left[(\varepsilon+3)^2\right] + 1$. Тогда для всех $n \geqslant N$ имеем:

$$x_n \geqslant \sqrt{n} - 3 > \varepsilon \, .$$

9. Положим $x_n := \dfrac{(-1)^n \cdot n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. В терминах "$\varepsilon - N$" факт $\lim x_n = \infty$ означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \;\; |x_n| > \varepsilon \, , \; \forall n \geqslant N \, .$$

Рассмотрим $|x_n|$:

$$|x_n| = \frac{n^2}{n+1} \geqslant \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2} \, .$$

Из неравенства $\dfrac{n}{2} > \varepsilon$ имеем, что $n > 2\varepsilon$. Поэтому взяв $N := [2\varepsilon] + 1$, получим нужное.

10. Пусть $x_n := n\big(\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+3}\big)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем номера n, при которых $x_n > \varepsilon$. Имеем, что

$$x_n = \frac{n\big(n+5-(n+3)\big)}{\sqrt[3]{(n+5)^2} + \sqrt[3]{(n+5)(n+3)} + \sqrt[3]{(n+3)^2}} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt[3]{(n+5)^2} + \sqrt[3]{(n+5)(n+3)} + \sqrt[3]{(n+3)^2}} >$$

$$> \frac{2n}{3\sqrt[3]{(n+5)^2}} \overset{n \geqslant 5}{\geqslant} \frac{2n}{3(2n)^{2/3}} \geqslant \frac{\sqrt[3]{n}}{3} \, .$$

Решениями неравенства $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{3} > \varepsilon$ являются все $n > (3\varepsilon)^3$. Для завершения доказательства достаточно положить $N := \left[(3\varepsilon)^3\right] + 1$.

11. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углам поворота

$$\frac{\pi}{3}\,;\quad \frac{2\pi}{3}\,;\quad \frac{3\pi}{3} = \pi\,;\quad \frac{4\pi}{3}\,;\quad \frac{5\pi}{3}\,;\quad \frac{6\pi}{3} = 2\pi\,.$$

Абсциссы этих точек представляют собой первые шесть элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{1}{2}\,;\ \ -\frac{1}{2}\,;\ \ -1\,;\ \ -\frac{1}{2}\,;\ \ \frac{1}{2}\,;\ \ 1\,.$$

Для того чтобы сделать вывод о том, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела, достаточно выписать две подпоследовательности, имеющие разные пределы. Рассмотрим, например,

$$x_{3+6k} = \cos\frac{\pi(3+6k)}{3} = \cos(\pi + 2\pi k) = \cos\pi = -1\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,;$$
$$x_{6+6k} = \cos 2\pi k = 1\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Таким образом, $\{x_{3+6k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к -1, а $\{x_{6k}\}_{k=1}^{\infty}$ — к -1. Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ предела не имеет.

Заметим, что в целом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ может быть разбита на шесть подпоследовательностей:

$$x_{1+6k} = \frac{1}{2}\,;\qquad x_{2+6k} = -\frac{1}{2}\,;\qquad x_{3+6k} = -1\,;$$
$$x_{4+6k} = -\frac{1}{2}\,;\qquad x_{5+6k} = \frac{1}{2}\,;\qquad x_{6+6k} = 1\,.$$

Подпоследовательности $\{x_{2+6k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{4+6k}\}_{k=1}^{\infty}$, а также $\{x_{1+6k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{5+6k}\}_{k=1}^{\infty}$ можно было бы объединить, выписав соответствующие формулы для номеров n_k.

12. В данном случае $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ распадается на две подпоследовательности:

$$x_{2k} = 2\cdot 2^{2k} \to +\infty\,,\ k \to \infty\,;$$
$$x_{2k-1} = 0 \to 0\,,\ k \to \infty\,.$$

Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ предела не имеет.

13. Имеем следующие оценки:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{9n^2+2} \leqslant \sqrt[n]{10n^2}\,,\ n \geqslant 2\,.$$

Так как $\sqrt[n]{10n^2} = \sqrt[n]{10}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$, то по теореме о трех последовательностях заключаем, что $\lim\sqrt[n]{9n^2+2} = 1$.

14. Нетрудно видеть, что

$$\sqrt[n]{3} \leqslant \sqrt[n]{5-2\sin n} \leqslant \sqrt[n]{7}\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Поскольку $\lim\sqrt[n]{3} = \lim\sqrt[n]{7} = 1$, заключаем, что рассматриваемая числовая последовательность сходится и ее предел равен 1.

15. Так как

$$\frac{2}{2^n} \leqslant \frac{3+(-1)^n}{2^n} \leqslant \frac{4}{2^n}\,,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

и $\lim\dfrac{2}{2^n} = \lim\dfrac{4}{2^n} = 0$, то по теореме о трех последовательностях получаем, что исходная числовая последовательность является бесконечно малой.

Задачи к § 5

1. Имеем, что $\lim\sqrt[n]{2n} = \lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\right) = 1$; $\lim 3^{-n} = \lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$; $\lim\sin\dfrac{1}{n} = 0$, поскольку $\dfrac{1}{n}\to 0$ и $\sin 0 = 0$. По теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями получаем, что

$$\lim\frac{5-\sqrt[n]{2n}}{3^{-n}+\sin\frac{1}{n}+1} = \frac{5-1}{0+0+1} = 4\,.$$

2. Имеем, что

$$\lim\left(2n^3-100n^2-10\right) = \lim n^3\left(2-\frac{100}{n}-\frac{10}{n^3}\right) = +\infty\,.$$

На последнем шаге использовался тот факт, что $\{n^3\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, а последовательность $\left\{2-\dfrac{100}{n}-\dfrac{10}{n^3}\right\}$ сходится к 2 и, значит, отграничена от нуля и положительна, начиная с некоторого номера.

3. Последовательности $\{2n^2\}$, $\{n\}$, $\{\ln^{15} n\}$, $\{3n^2\}$ являются бесконечно большими положительными, а $\{\cos n\}$ — ограниченная последовательность. Таким образом, имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Используя шкалу роста, выносим слагаемые большего роста:

$$\lim\frac{2n^2+n+\ln^{15} n}{3n^2+\cos n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{\ln^{15} n}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{2}{3}\,.$$

В знаменателе была использована теорема 5.3 о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную: $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ — бесконечно малая, $\{\cos n\}$ — ограниченная.

4. Снова используя шкалу роста, получаем:

$$\lim \frac{4^n + n^2 \cdot 2^n - 1}{n^{100} + 5^n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{4^n\left(1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)}{5^n\left(\frac{n^{100}}{5^n} + 1 + \frac{1}{5^n}\right)} = 0\,,$$

поскольку

$$\lim \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0\,, \quad \lim \left(1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) = 1\,, \quad \lim \left(\frac{n^{100}}{5^n} + 1 + \frac{1}{5^n}\right) = 1\,.$$

5. В дроби, которая служит первым сомножителем, очевидно, имеется неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, а $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{n}) \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$, поскольку $1-\sqrt{n} \to -\infty$, $\operatorname{arctg} x \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$ (нарисуйте график функции $y = \operatorname{arctg} x$). Выносим в числителе и знаменателе наибольшие степени n:

$$\lim \frac{n^5 + (-1)^n}{(2n+1)(3n-4)^4} \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{n}) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim \frac{n^5\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^5}\right)}{n \cdot n^4\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(3 - \frac{4}{n}\right)^4} \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{n}) = \frac{1}{2 \cdot 3^4} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4 \cdot 3^4}\,.$$

6. В данном случае необходимо раскрыть разность $(n+1)^3 - (n-1)^3$, так как понятно, что после раскрытия n^3 уничтожится:

$$\lim \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + \operatorname{arctg}(n^{10})} = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)}{n^2 + \operatorname{arctg}(n^{10})} =$$

$$= \lim \frac{6n^2 + 2}{n^2 + \operatorname{arctg}(n^{10})} = \lim \frac{n^2\left(6 + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{\operatorname{arctg}(n^{10})}{n^2}\right)} = 6\,.$$

На последнем шаге использовано то, что $\operatorname{arctg}(n^{10}) \to \dfrac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$, так что $\dfrac{\operatorname{arctg}(n^{10})}{n^2} \to 0$.

7. Раскрываем $(n+1)^7$ по биному Ньютона:

$$\lim \frac{n^7+7n^6-(n+1)^7}{(n+1)^3(n+\cos^5 n)^2} = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim \frac{n^7+7n^6-\big(n^7+7n^6+21n^5+C_7^3 n^4+\dots+1\big)}{(n+1)^3(n+\cos^5 n)^2} =$$

$$= \lim \frac{-21n^5-C_7^3 n^4-\dots-1}{(n+1)^3(n+\cos^5 n)^2} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) =$$

$$= \lim \frac{n^5\big(-21-C_7^3\,\frac{1}{n}-\dots-\frac{1}{n^5}\big)}{n^3\big(1+\frac{1}{n}\big)^3 n^2\big(1+\frac{\cos^5 n}{n}\big)^2} = -21\,.$$

Дробь $\dfrac{\cos^5 n}{n}$ стремится к 0 при $n\to\infty$ по теореме о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную.

8. Выражения $\sqrt{n+2}$ и $\sqrt{n^2+2}$ имеют разный порядок роста (первое растет как $\sqrt{n}$, второе — как n). Значит, можно просто выносить старшую степень n:

$$\lim \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^4+1}-1} = \lim \frac{n\Big(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\Big)}{n^{4/3}\Big(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}-\frac{1}{n^{4/3}}\Big)} = 0\,.$$

9. В данном случае $\sqrt{n+1}$ и $\sqrt{n}$ имеют равные порядки роста и равные коэффициенты при старшей степени n. Следовательно, необходимо избавляться от иррациональности:

$$\lim \sqrt{n+5}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big) = (\infty-\infty) = \lim \sqrt{n+5}\cdot\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{5}{n}}}{\sqrt{n}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\Big)} = \frac{1}{2}\,.$$

10. В отличие от предыдущего примера, $\sqrt{2n+1}$ и $\sqrt{n}$, хотя имеют один и тот же порядок роста, но имеют разные коэффициенты при старшей степени n. Следовательно, можно просто выносить наибольшую степень n:

$$\lim \sqrt{n+5}\big(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\big) = \lim \sqrt{n+5}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right) = +\infty\,.$$

На последнем шаге использовалось то, что последовательность $\left\{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-1\right\}$ стремится к $\sqrt{2}-1$ и, значит, отграничена от нуля и положительна, начиная с некоторого номера (очевидно, что с первого), а $\left\{\sqrt{n+5}\cdot\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой положительной.

11. Поскольку $\sqrt[3]{n+1}$ и $\sqrt[3]{n}$ имеют одинаковый рост, домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение, чтобы воспользоваться формулой $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$:

$$\lim\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)n^{\frac{2}{3}}}=(\infty-\infty)=\lim\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\left((n+1)-n\right)n^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{n^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n^{\frac{2}{3}}}=3\,.$$

12. В данном случае необходимо сначала вынести старшие степени n под логарифмами, затем воспользоваться свойствами логарифмов, после чего еще раз вынести слагаемые большего роста в числителе и знаменателе:

$$\lim\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{\ln\left(n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n^{10}\left(1+\frac{1}{n^9}+\frac{1}{n^{10}}\right)\right)}=$$

$$=\lim\frac{2\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{10\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^9}+\frac{1}{n^{10}}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim\frac{\ln n\left(2+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln n\left(10+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^9}+\frac{1}{n^{10}}\right)\right)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\,.$$

Поскольку $1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\to 1$ при $n\to\infty$, то $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)\to 0$, так что $\dfrac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)\to 0$ как произведение двух бесконечно малых последовательностей. Заметим, что опускать в знаменателе слагаемое $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$ до вынесения $\ln n$ нельзя. Подобное действие необоснованно и может привести к ошибке.

13. Поступаем так же, как в предыдущем примере:

$$\lim \frac{\ln(7+3e^{8n})}{\ln(n^2+\operatorname{arctg} n)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\ln\left(e^{8n}\left(\frac{7}{e^{8n}}+3\right)\right)}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= \lim \frac{8n+\ln\left(\frac{7}{e^{8n}}+3\right)}{2\ln n+\ln\left(1+\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}\right)} = \lim \left(\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{8+\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{7}{e^{8n}}+3\right)}{2+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}\right)}\right) = +\infty\,.$$

На последнем шаге использовано то, что дробь $\dfrac{8+\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{7}{e^{8n}}+3\right)}{2+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}\right)}$ стремится к 4 при $n\to\infty$ и, значит, отграничена от 0, а $\dfrac{n}{\ln n}\to+\infty$.

14. Проанализируем сомножители: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — расходящаяся последовательность; $\operatorname{arctg} n \to \dfrac{\pi}{2}$ при $n\to\infty$; $\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n\to\infty$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ и $\operatorname{tg} 0 = 0$. Учитывая, что второй сомножитель является бесконечно малой последовательностью, делаем вывод, что необходимо воспользоваться свойством о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную. Последовательность $\{(-1)^n+\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, ограничена как сумма двух ограниченных последовательностей. Таким образом,

$$\lim\left((-1)^n+\operatorname{arctg} n\right)\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0\,.$$

15. В отличие от предыдущего примера, в данном случае второй сомножитель $\{n^2+\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой положительной последовательностью. Значит, нужно использовать другое свойство — теорему о произведении бесконечно большой последовательности на последовательность, отграниченную от 0. Покажем, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = (-1)^n+\operatorname{arctg} n$, отграничена от 0. При $n\geqslant 2$ имеем, что $\operatorname{arctg} n \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} > 1$, так что

$$|x_n| = \left|(-1)^n+\operatorname{arctg} n\right| = \operatorname{arctg} n + (-1)^n \geqslant \operatorname{arctg} n - 1 > \frac{\pi}{3}-1\,.$$

Итак,

$$\exists\varepsilon_0 = \frac{\pi}{3}-1 \ :\ \ |x_n| = x_n \geqslant \varepsilon_0\,,\ \forall n\geqslant 2\,.$$

Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ отграничена от 0 и положительна. Следовательно, исходный предел равен $+\infty$.

16. Настоящий пример аналогичен предыдущему: $\{\ln(\sqrt{n}+1)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая положительная последовательность, так что необходимо проверить отграниченность от 0 последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = 2-\sin\dfrac{\pi n}{4}$. Имеем, что

$$|x_n| = \left|2-\sin\frac{\pi n}{4}\right| = 2-\sin\frac{\pi n}{4} \geqslant 2-1=1\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Таким образом, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ отграничена от 0 и положительна. Значит,

$$\lim\left(2-\sin\frac{\pi n}{4}\right)\ln(\sqrt{n}+1) = +\infty\,.$$

17. Понятно, что обе последовательности $\{\cos\sqrt{n^2+4}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos\sqrt{n^2+2}\}_{n=1}^{\infty}$ являются расходящимися. Воспользуемся формулой разности косинусов:

$$\lim\big(\cos\sqrt{n^2+4}-\cos\sqrt{n^2+2}\big) =$$

$$=\lim\left(2\sin\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) =$$

$$=\lim\left(2\sin\frac{-1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}\cdot\sin\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) = 0\,.$$

На последнем шаге использовано то, что последовательность $\left\{\sin\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}\right\}$ является бесконечно малой, так как аргумент синуса стремится к 0 при $n\to\infty$, а $\sin 0 = 0$, и то, что $\left\{\sin\dfrac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}{2}\right\}$ является ограниченной последовательностью.

18. Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, получаем:

$$\lim\left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right) = \lim\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right) =$$

$$=\lim\frac{n}{2}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right) = \lim\frac{-n}{2(n+2)} = \lim\frac{-n}{2n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = -\frac{1}{2}\,.$$

19. В § 1, примеры 2 частей A и B были установлены формулы:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,;$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Выписывая данные формулы с $2n$ вместо n и складывая, получим, что

$$2\big(1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\big)=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{2n(2n+1)}{2}\,.$$

Следовательно,

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}\,.$$

В результате имеем, что

$$\lim\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim\frac{n(4n^2-1)}{3n^3}=\lim\frac{n^3\big(4-\frac{1}{n^2}\big)}{3n^3}=\frac{4}{3}\,.$$

20. Поскольку $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ при всех $k\in\mathbb{N}$, то

$$\lim\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$
$$=\lim\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1\,.$$

Литература

1. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 Кн. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов / Под редакцией В.А. Садовничего. М.: Высшая школа, 2000. 725 с.

2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1990. 624 с.

3. *Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А.* Введение в анализ. Предел последовательности. Метод. указания. Ростов-на-Дону, 2007. 36 с.

4. *Коршикова Т.И., Моржаков В.В., Спинко Л.И.* Предел последовательности. Метод. указания. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1988. 31 с.

5. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов / Под редакцией Л.Д. Кудрявцева. Санкт-Петербург, 1994. 496 с.

Содержание