Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Козак

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(семестр 1)

Ростов–на–Дону
ИздательствоЮжного федерального университета
2015

Козак А.В.
Лекции по математическому анализу (семестр 1). – Ростов–на–Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – 106 с.

В методическом пособии излагаются основы математического анализа: предел последовательности, предел функции, дифференцирование функций одного переменного. Изложение основано на курсе лекций автора для студентов прикладного отделения института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета и соответствует материалу первого семестра.

Для преподавателей, студентов и старшеклассников.

Публикуется в авторской редакции.

Оглавление

Введение

Математический анализ является основой математического образования при подготовке специалистов любого естественно–научного направления. Первоначальное знакомство с предметом сопряжено с определенными трудностями, связанными с многообразием понятий и сложными логическими связями между ними. По математическому анализу имеется обширная литература. В ней используются разнообразные подходы к одним и тем же понятием, различное построение материала. Объем, как правило, существенно превышает учебные программы. Все это значительно затрудняет самостоятельное изучение математического анализа по учебникам на младших курсах. Предлагаемое учебное пособие основано на реальных лекция читавшихся в течение 20 лет на отделении прикладной математики механико–математического факультета Ростовского государственного университета (ныне Южный федеральный университет).

Для понимания излагаемого материала необходимо знакомство с основными понятиеми теории множеств, теории функции и простейшими логическими операциями.

Приведем основные обозначения. Логические операции будем обозначать символами $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция). Очень часто мы будем использовать кванторы $\exists$, $\forall$ (существования, всеобщности). Запись $\exists x\, P(x)$ означает, что утверждение $P(x)$ верно хотя бы для одного x. Запись $\forall x\, P(x)$ означает, что утверждение $P(x)$ верно для всех x. Операции над множествами будем обозначать символами $\cup$, $\cap$, $\setminus$ (объединение, пересечение, разность).

1. Предел числовой последовательности

1.1. Вещественные числа.

Существует несколько подходов к определению вещественных чисел. Мы будем придерживаться аксиоматического подхода. Подробное изложение всех свойств вещественных чисел занимает очень много времени, поэтому мы ограничимся только основными. Детальное изложение теории вещественных чисел содержится в [1].

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется полем вещественных чисел, если выполняются следующие группы аксиом.

I. В $\mathbb{R}$ определена операция сложения, обладающая следующими свойствами:
   1) $x+y=y+x$ (коммутативность),
   2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность),
   3) $\exists 0 \quad \forall x \quad x+0=x$ (существование нуля),
   4) $\forall x \quad \exists y \quad x+y=0$ (существование противоположного числа).

II. В $\mathbb{R}$ определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:
   1) $x\cdot y=y\cdot x$ (коммутативность),
   2) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (ассоциативность),
   3) $\exists 1\neq 0 \quad \forall x \quad 1\cdot x=x$ (существование единицы),
   4) $\forall x\neq 0 \quad \exists y \quad x\cdot y=1$ (существование обратного числа).

III. Операции сложения и умножения связаны следующим свойством:
   1) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (дистрибутивность).

IV. На множестве $\mathbb{R}$ введено отношение линейного порядка $(\leq)$. Т.е. выполняются следующие свойства:
   1) $x\leq x$ (рефлексивность),
   2) если $x\leq y$ и $y\leq x$, то $x=y$ (симметричность),
   3) если $x\leq y$ и $y\leq z$, то $x\leq z$ (транзитивность),
   4) для любых x,y $x\leq y$ или $y\leq x$.

V. Отношение порядка связано с операцией сложения следующей аксиомой:

1) если $x \le y$, то для любого $z \quad x+z \le y+z$.

VI. Отношение порядка связано с операцией умножения следующей аксиомой:

1) если $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

VII. На множестве $\mathbb{R}$ выполняется следующая аксиома непрерывности (полноты):

1) для любых непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x \le y)$ существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $x \le a \le y$ для всех $x \in X, \quad y \in Y$.

Можно доказать, что из этих аксиом вытекают все остальные свойства вещественных чисел.

Приведем ряд важных определений.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \quad \forall x \in X \quad x \le M$. Число M, удовлетворяющее последнему условию, называется верхней гранью множества X.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \quad \forall x \in X \quad x \ge m$. Число m, удовлетворяющее последнему условию, называется нижней гранью множества X.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу, то есть $\exists M \quad \exists m \quad \forall x \in X \quad m \le x \le M$.

Определение. Элемент $x_0 \in X$ называется наибольшим элементом множества X, если $\forall x \in X \quad x \le x_0$. Для этого элемента будем использовать обозначение $x_0 = \max X$.

Определение. Элемент $x_0 \in X$ называется наименьшим элементом множества X, если $\forall x \in X \quad x \ge x_0$. В этом случае используется обозначение $x_0 = \min X$.

Из определений сразуже следует, что если наибольший (наименьший) элемент существует, то он единствен.

Определение. Наименьшая верхняя грань множества X называется его точной верхней гранью и обозначается как $\sup X$.

Теорема. *Любое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть $X \neq \varnothing$, X – ограниченно сверху. Обозначим через Y множество всех его верхних граней. Очевидно, что $Y \neq \varnothing$ и выполняется условие $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq y$. Тогда по аксиоме непрерывности $\exists a \in \mathbb{R}$, обладающий свойством $x \leq a \leq y$ для всех $x \in X, y \in Y$. То есть a – точная верхняя грань. Теорема доказана.

Непосредственно из определения точной верхней грани вытекает утверждение.

Теорема. *Справедлива эквивалентность*

$$a = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \leq a \\ \forall b < a \quad \exists x \in X \quad x > b \end{cases}.$$

Определение. Наибольшая из нижних граней множества X называется точной нижней гранью и обозначается через $\inf X$.

Для точной нижней грани справедливы теоремы, аналогичные приведенным выше.

Теорема. *Любое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.*

Теорема. *Справедлива эквивалентность*

$$a = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \geq a \\ \forall b > a \quad \exists x \in X \quad x < b \end{cases}.$$

При аксиоматическом определении вещественных чисел натуральные числа определяются как часть вещественных, обладающих некоторыми свойствами.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если:

1) $1 \in I$,
2) если $x \in I$, то $(x+1) \in I$.

Определение. Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств.

Множество натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$.

Следующая теорема формализует принцип математической индукции.

Теорема. *Пусть* $P(n)$ *– некоторое высказывание, определенное на множестве натуральных чисел. Пусть далее:*

1) $P(1)$*– истина,*

2) $\forall n \quad (P(n) \to P(n+1))$.

Тогда $\forall n \quad P(n)$ *– истина.*

Доказательство. Пусть $M = \{ n \in \mathbb{N} | P(n) - \textit{истина} \}$. По определению $M \subset \mathbb{N}$. Кроме того, так как $P(1)$ – истина, то $1 \in M$. Если $n \in M$, то $P(n)$ – истина, следовательно, $P(n+1)$ – истина, а значит $(n+1) \in M$. Таким образом M – индуктивное множество. Любое индуктивное множество содержит $\mathbb{N}$. Следовательно, $M = \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Теорема. *Для любого* $x \ge -1$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$(1+x)^n \ge 1 + n \cdot x$$

(неравенство Бернулли). Неравенство Бернулли превращается в равенство тогда и только тогда, когда $n = 1$ *или* $x = 0$.

Доказательство.

1) Если $n = 1$, то неравенство $(1+x)^1 \ge 1 + 1 \cdot x$ верно.

2) Допустим, что неравенство $(1+x)^n \ge 1 + nx$ верно для некоторого n, тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \ge 1 + (n+1)x.$$

Т.е. $(1+x)^{n+1} \ge 1 + (n+1)x$.

По принципу математической индукции неравенство Бернулли справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Докажем вторую часть утверждения. Очевидно, что при $n = 1$ и $x = 0$ неравенство Бернулли превращается в равенство:

$$n = 1, \quad (1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x,$$

$$x = 0, \quad (1+0)^n = 1 + n \cdot 0.$$

Пусть $(n>1)\wedge(x\geq -1)\wedge(x\neq 0)$, тогда $n=m+1$, где $m\in\mathbb{N}$ и, следовательно,

$$(1+x)^n=(1+x)^{m+1}=(1+x)(1+x)^m\geq(1+x)(1+mx)=1+x+mx+mx^2>$$
$$>1+(m+1)x=1+nx.$$

Т.е. неравенство является строгим. Теорема доказана.

Определение. Пусть $n\in N$, тогда $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Определение. По определению полагаем $0!=1$.

Определение. Пусть $n\in N$ $\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Биноминальным коэффициентом называется число $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Лемма. *Справедливо равенство* $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Имеем

$$C_n^k+C_n^{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Что и требовалось доказать.

Запишем биномиальные коэффициенты в виде таблицы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Эта таблица называется треугольником Паскаля. По лемме сумма любых двух соседних коэффициентов из одной строки равна элементу следующей строки, стоящему между ними. Это правило дает простой способ вычисления биномиальных коэффициентов. Имеем

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Теорема. *Справедлива формула*

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \text{.}$$

Приведенная формула называется биномом Ньютона. Если ввести обозначение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

то бином Ньютона можно записать в виде

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Пусть $n=1$, тогда $\left(a+b\right)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$ и формула верна.

2) Допустим, что формула справедлива для некоторого n. Докажем её справедливость для $n+1$. Имеем

$$\left(a+b\right)^{n+1} = \left(a+b\right)\left(a+b\right)^n =$$

$$= \left(a+b\right)(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \cdots + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_n^n a b^n +$$

$$+ C_n^0 a^n b + \cdots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-1} + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n b^{n+1} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + \left(C_n^1 + C_n^0\right) a^n b + \cdots + \left(C_n^{n-1} + C_n^{n-2}\right) a^2 b^{n-1} + \left(C_n^n + c C_n^{n-1}\right) a b^n + C_n^n b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \cdots + C_{n+1}^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$$

$$= \left(a+b\right)^{n+1}.$$

В силу принципа математической индукции формула доказана.

Определение. Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется число $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Определение. Средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$ называется число $\Gamma_n = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$.

Теорема. *Для любых вещественных чисел* $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$

$$A_n \geq \Gamma_n$$

или более подробно

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}.$$

Это неравенство называется неравенством Коши для среднего арифметического и среднего геометрического. Неравенство Коши превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство.

1) Если хотя бы одно из исходных чисел $a_k = 0$, то $\Gamma_n = 0$ $A_n \geq 0$ и, следовательно, неравенство $A_n \geq \Gamma_n$ выполнено. В этом случае неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

2) Если $n = 1$, тогда $A_1 = a_1$, $\Gamma_1 = a_1$ и $A_1 \geq \Gamma_1$.

3) Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ и $n > 1$. Тогда с помощью неравенства Бернулли получаем

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} =$$

$$= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Т.е. $\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq \frac{a_n}{A_{n-1}}$. Умножив это неравенство на A_{n-1}^n $\left(A_{n-1}^n > 0\right)$, получим

$$A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1}.$$

Отсюда

$$A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \cdots \geq a_n a_{n-1} \cdots a_2 A_1^1 = a_1 a_2 \cdots a_n = \Gamma_n^n.$$

Или $A_n \geq \Gamma_n$.

4) Допустим теперь, что $A_n = \Gamma_n$. Тогда справедлива цепочка равенств

$$A_n^n = a_n A_{n-1}^{n-1} = a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} = \cdots = a_n a_{n-1} \cdots a_2 A_1^1.$$

Так как в неравенстве Бернулли $(1+x)^n \ge 1+nx$ равенство будет тогда, и только тогда, когда $n=1$ или $x=0$ и в нашем случае $n>1$, то

$$x=\frac{A_n}{A_{n-1}}-1=0.$$

Отсюда

$$A_n=A_{n-1}=A_{n-2}=\cdots=A_1.$$

Из условия $A_n=A_{n-1}$ получаем

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

$$(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}),$$

$$(n-1)a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1},$$

$$a_n=A_{n-1}.$$

Мы получили, что равенство $A_n=A_{n-1}$ равносильно условию $a_n=A_{n-1}$. Так как $A_n=A_{n-1}=A_{n-2}=\cdots=A_2=A_1=a_1$, то $a_1=a_2=\cdots=a_n$. Теорема доказана.

Теорема Кантора. *Для любой последовательности сегментов* $[a_n,b_n]$, *такой что* $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\cdots$, *существует элемент* $x\in\mathbb{R}$, *такой что* $\forall n\in\mathbb{N}\quad x\in[a_n,b_n]$. *Если* $\forall\varepsilon>0\quad\exists n$, *такое что* $b_n-a_n<\varepsilon$, *то такой элемент* x *ровно один.*

Доказательство.

1) Обозначим через A множество левых концов сегментов, а через B множество правых концов $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. Докажем, что $a_k\le b_l\quad\forall k,l$. Допустим противное. Тогда существуют такие числа k и l, что $a_k>b_l$. В этом случае справедлива цепочка неравенств $a_l\le b_l<a_k\le b_k$. Но тогда $[a_l;b_l]\cap[a_k;b_k]=\varnothing$, чего быть не может в силу вложения сегментов. По аксиоме непрерывности существует x, такое что $a_k\le x\le b_l$. Отсюда в частности $a_k\le x\le b_k$, то есть $x\in[a_k,b_k]\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

2) Пусть для $\forall\varepsilon>0\quad\exists n\quad b_n-a_n<\varepsilon$, Допустим, что существует две точки $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, такие что $x_1\ne x_2$, $x_1\in[a_k,b_k]$, $x_2\in[a_k,b_k]$для любых $k\in\mathbb{N}$.

Возьмем $\varepsilon = |x_1 - x_2| > 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ $\quad \varepsilon \le b_k - a_k$. По условию теоремы существует n такое, что $b_n - a_n < \varepsilon$. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

1.2. Предел числовой последовательности.

Дадим определение числовой последовательности.

Определение. Функция $f : \mathbb{N} \to Y$, где $Y \subset \mathbb{R}$ называется числовой последовательностью.

Пусть $a_n = f(n)$. Для последовательности используются следующие обозначения: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1, a_2, a_3, \cdots$.

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon .$$

Теорема. *Если предел последовательности существует, то он ровно один.*

Доказательство. Допустим противное, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет два предела $A,\quad B,\quad A \ne B$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{2} > 0$. По определению предела

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

и

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad |a_n - B| < \varepsilon .$$

Пусть $n_0 > N_1, N_2$, тогда

$$|a_{n_0} - A| < \varepsilon, \quad |a_{n_0} - B| < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|A - B| = \left|\left(A - a_{n_0}\right) + \left(a_{n_0} - B\right)\right| \le |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < 2\varepsilon = |A - B|.$$

Мы получили противоречивое неравенство $|A-B|<|A-B|$. Теорема доказана.

Если A предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то будем писать $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to A$ при $n\to\infty$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной сверху, если $\exists M \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n \le M$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной снизу, если $\exists m \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n \ge m$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Теорема. *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N \quad \forall n>N \quad |a_n - A|<1$, или, что то же самое

$$-1 < a_n - A < 1,$$
$$A-1 < a_n < A+1.$$

Пусть $M=\max\{a_1,\cdots,a_N,A+1\}$, $m=\min\{a_1,\cdots,a_N,A-1\}$, тогда

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad m\le a_n \le M .$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\quad a_n\ne 0,\quad A\ne 0$, *то последовательность* $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– ограничена.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$, тогда $\exists N \quad \forall n>N \quad |a_n - A|<\dfrac{|A|}{2}$. Так как $\big||a_n|-|A|\big| \le |a_n - A|$, то $\big||a_n|-|A|\big|<\dfrac{|A|}{2}$. Отсюда $-\dfrac{|A|}{2}<|a_n|-|A|$ и $\dfrac{|A|}{2}<|a_n|$.

Следовательно, $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{|A|}$. Положив $M = \max\left\{\frac{1}{|a_1|}, \frac{1}{|a_2|}, \cdots, \frac{1}{|a_N|}, \frac{2}{|A|}\right\}$, получим

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| \le M$. Теорема доказана.

1.3. Бесконечно малые последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,

2) $\{a_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ *– бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. По определению предела то, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon \tag{1}$$

То, что последовательность $\{a_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$. Т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A - 0| < \varepsilon. \tag{2}$$

Очевидно, что условия в (1) и (2) совпадают. Теорема доказана.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1) Если последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малые, то последовательность* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *также бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число. По определению пределов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

$$\forall n > N \quad |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Следовательно, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность. Свойство доказано.

2) Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, то для любого числа α последовательность $\{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Доказательство.

a) Если $\alpha = 0$, то свойство очевидно.

b) Если $\alpha \ne 0$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Отсюда

$$|\alpha a_n| = |\alpha||a_n| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon .$$

Мы доказали, что $\forall n > N \quad |\alpha a_n| < \varepsilon$. Свойство доказано.

3) Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности, то $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Так как $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности, то в силу свойств 1) и 2) последовательность

$$\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + (-1)\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

бесконечно малая.

4) Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то последовательность $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Доказательство. По условию $\exists M>0 \quad \forall n\in N \quad |b_n|\le M$.

Возьмем $\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, тогда $\exists N \quad \forall n>N \quad |a_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. Отсюда

$$|a_nb_n|=|a_n||b_n|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon .$$

Значит $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность. Что и требовалось доказать.

1.4. Арифметические свойства предела последовательности.

Отметим некоторые свойства предела последовательности.

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, то последовательности $\{a_n-A\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n-B\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.. Следовательно, $\{(a_n-A)+(b_n-B)\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.. Отсюда $\{(a_n+b_n)-(A+B)\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$. Что и требовалось доказать.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n)=\alpha A$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, то последовательность $\{a_n-A\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.. Тогда $\{\alpha(a_n-A)\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.. Отсюда $\{\alpha a_n-\alpha A\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. и $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n)=\alpha A$. Свойство доказано.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A-B$.

Доказательство вытекает из свойств *1)* и *2)*.

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.

Доказательство. Запишем равенства

$$a_nb_n-AB=a_nb_n-Ab_n+Ab_n-AB=b_n(a_n-A)+A(b_n-B).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то последовательности $\{a_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n - B\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.. Так как $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограничена, то последовательность $\{b_n(a_n - A) + A(b_n - B)\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$. Свойство доказано.

5) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ для любого n $b_n \neq 0$ и $B \neq 0$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Доказательство. Имеем равенства

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} = \frac{a_n B - AB + AB - b_n A}{b_n B} = \frac{(a_n - A)B - A(b_n - B)}{b_n B} =$$

$$= \frac{1}{B}\frac{1}{b_n}\big((a_n - A)B - A(b_n - B)\big).$$

Так как $\dfrac{1}{B}$ – константа, $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность и $\{(a_n - A)B - A(b_n - B)\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{B}\dfrac{1}{b_n}\big((a_n - A)B - A(b_n - B)\big)\right\}_{n=1}^{\infty}$ также бесконечно малая. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$. Свойство доказано.

1.5. Свойства предела последовательности, связанные с неравенствами.

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $A < B$, то $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B$.

Доказательство. По определению предела для

$$\varepsilon = B - A > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon,$$
$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon = A + (B - A) = B,$$
$$\forall n > N \quad a_n < B.$$

Свойство доказано.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и* $A > B$*, то* $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n > B$.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -A$ и $-A < -B$. Тогда по свойству 1 $\exists N \quad \forall n > N \quad -a_n < -B$. Т.е. $a_n > B$. Свойство доказано.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и для любого* n $a_n \le B$*, то* $A \le B$.

Доказательство. Допустим противное, что $A > B$, тогда по предыдущему свойству $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n > B$, но по условию $\forall n \quad a_n \le B$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и для любого* n $a_n \ge B$*, то* $A \ge B$.

Доказать самостоятельно.

5) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ *и* $A < B$*, то* $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n < b_n$.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B < 0$, значит по первому свойству $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n - b_n < 0$. Что и требовалось доказать.

6) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ *и для любого* n $a_n \le b_n$*, то* $A \le B$.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$ и *для любого* n $a_n - b_n \le 0$, следовательно, по третьему свойству $A - B \le 0$. Что и требовалось доказать.

Теорема (о трёх последовательностях**).** *Пусть для любого* n $a_n \le b_n \le c_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Доказательство. По определению предела $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |a_n - A| < \varepsilon,$$
$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad |c_n - A| < \varepsilon.$$

Отсюда для $\forall n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon,$$
$$A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon,$$
$$A-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A+\varepsilon,$$
$$A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon,$$
$$|b_n - A| < \varepsilon.$$

А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Теорема доказана.

Следствие. *Если для любого n $A \le b_n \le c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.*

Доказательство. Положим $a_n = A$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad a_n \le b_n \le c_n$$

И по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Следствие доказано.

1.6. Бесконечно большие последовательности.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > E.$$

Такие последовательности будем называть бесконечно большими.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > E.$$

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < -E.$$

Теорема. *Пусть члены последовательности $a_n \ne 0$. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно большая тогда и только тогда, когда $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно малая.*

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ положим $E = \frac{1}{\varepsilon}$. По определению бесконечно большой последовательности

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > E.$$

Отсюда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{E} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. Возьмем произвольное число $E > 0$.

Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{E}$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$. Отсюда $|a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} = E$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся, если она имеет **конечный** предел.

1.7. Примеры вычисления пределов.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Справедливы равносильные неравенства $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$, $\dfrac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$, $n^\alpha > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Пусть $N \geq \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ произвольное натуральное число. Тогда для любого $n > N$ $n > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ и $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$. Утверждение доказано.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1)$.

На основании неравенства Бернулли справедлива оценка:

$$|a|^n = \left(1 + (|a| - 1)\right)^n \geq 1 + n(|a| - 1) > n(|a| - 1).$$

Отсюда

$$0<\frac{1}{\left|a^{n}\right|}<\frac{1}{n\left(|a|-1\right)}.$$

Так как $\frac{1}{n\left(|a|-1\right)}\to 0$, то $\frac{1}{|a|^{n}}\to 0$ и, следовательно, $\frac{1}{a^{n}}\to 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}=0 \quad \left(|a|>1\right)$.

Существует $k\in\mathbb{N}$ такое, что $k\ge\alpha+1$. С помощью неравенства Бернулли получаем оценку

$$|a|^{\frac{n}{k}}=\left(1+\left(|a|^{\frac{1}{k}}-1\right)\right)^{n}=\left(1+x\right)^{n}\ge 1+nx>nx,$$

где $x=|a|^{\frac{1}{k}}-1$. Отсюда $\frac{1}{|a|^{\frac{n}{k}}}<\frac{1}{nx}$, $\frac{n}{|a|^{\frac{n}{k}}}<\frac{1}{x}$, $\frac{n^{k}}{|a|^{n}}<\frac{1}{x^{k}}$, $\frac{n^{k-1}}{|a|^{n}}<\frac{1}{nx^{k}}$ и

$$\frac{n^{\alpha}}{|a|^{n}}\le\frac{n^{k-1}}{|a|^{n}}<\frac{1}{nx^{k}}.$$

Так как $\frac{1}{nx^{k}}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\to 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=0 \quad \left(a>0\right)$

Рассмотрим два случая.

a) Пусть $a\ge 1$. Тогда

$$1\le\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\times\underbrace{1\times 1\times\cdots\times 1}_{n-1}}\le\frac{a+n-1}{n}=\frac{a-1}{n}+1\to 1$$

и $\sqrt[n]{a}\to 1$.

b) Если $0<a\le 1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

5) Если $0<m\le a_{n}\le M$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n}}=1$.

Так как $\sqrt[n]{m}\le\sqrt[n]{a_{n}}\le\sqrt[n]{M}$, $\sqrt[n]{m}\to 1$ и $\sqrt[n]{M}\to 1$ при $n\to\infty$, то $\sqrt[n]{a_{n}}\to 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Так как

$$1\le\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\times\sqrt{n}\times\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-2}}\le\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}$$

и $\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}\right)\to1$, то $\sqrt[n]{n}\to1$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

Если $|a|\le1$, то утверждение очевидно. Пусть $|a|>1$. Обозначим через k целую часть числа $|a|$. Тогда $k\le|a|<k+1$ и для $n>k$

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a^n|}{n!}=\frac{|a||a|\cdots\cdots|a|}{1\cdot2\cdots n}=\frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{1\cdot2\cdots k}\frac{|a|}{(k+1)}\cdots\frac{|a|}{(n-1)}\frac{|a|}{n}\le C\frac{|a|}{n},$$

где $C=\frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{1\cdot2\cdots k}$. Так как $C\frac{|a|}{n}\to0$, то $\frac{a^n}{n!}\to0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

Так как $0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1\times2\times\cdots\times n}{n\times n\times\cdots\times n}\le\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n}\to0$, то $\frac{n!}{n^n}\to0$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$

Пусть, сначала, $a>1$, и $\varepsilon>0$ произвольное число. Следующие неравенства равносильны:

$$\left|\frac{\log_a n}{n}-0\right|<\varepsilon,\ \log_a n<n\varepsilon,\ n<a^{n\varepsilon},\ \sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1<a^{\varepsilon}$, то $\exists N\ \ \forall n>N\ \ \sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}$. Следовательно, $\forall n>N\quad \left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon$.

Случай $0<a<1$ сводится к предыдущему.

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^\alpha}=0 \quad \left(a>0, a\neq 1, \alpha>0\right).$

Пусть $a>1$. Пусть $m_n=\left[n^\alpha\right]-1$, здесь $\left[x\right]$ – целая часть x. Тогда $m_n-1\le n^\alpha<m_n$, $n^\alpha\to+\infty$ и $m_n\to+\infty$. Справедлива оценка

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha}=\frac{\frac{1}{\alpha}\log_a n^\alpha}{n^\alpha}\le\frac{\frac{1}{\alpha}\log_a m_n}{m_n-1}=\frac{\frac{1}{\alpha}m_n}{m_n-1}\frac{\log_a m_n}{m_n}\le\frac{2}{\alpha}\left(\frac{\log_a m_n}{m_n}\right).$$

Так как $\left(\dfrac{\log_a m}{m}\right)\to 0$ при $m\to+\infty$, то $\exists M \quad \forall m>M \quad \left|\dfrac{2}{\alpha}\dfrac{\log_a m}{m}\right|<\varepsilon$. Так как $m_n\to+\infty$, то $\exists N \quad \forall n>N \quad m_n>M$, следовательно, для $n>N$ $\left|\dfrac{2}{\alpha}\dfrac{\log_a m_n}{m_n}\right|<\varepsilon$ и $\dfrac{\log_a n}{n^\alpha}<\varepsilon$.

Случай $0<a<1$ сводится к предыдущему.

1.8. Монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^\infty$ называется возрастающей, если $\forall n \quad a_{n+1}\ge a_n$.

Определение. Последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^\infty$ называется строго возрастающей, если $\forall n \quad a_{n+1}>a_n$.

Определение. Последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^\infty$ называется убывающей, если $\forall n \quad a_{n+1}\le a_n$.

Определение. Последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^\infty$ называется строго убывающей, если $\forall n \quad a_{n+1}<a_n$.

Теорема. *Любая возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть $\left\{a_n\right\}_{n=1}^\infty$ – возрастает, то есть $a_{n+1}\ge a_n$, и ограничена сверху, то есть $\exists M \quad \forall n \quad a_n\le M$. Пусть $A=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$. Докажем, что

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Так как $A = \sup\limits_{n\in N} a_n$, то $\forall n \quad a_n \le A$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда число $A-\varepsilon$ не является верхней гранью для $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, $\exists n_0 \quad a_{n_0} > A-\varepsilon$, тогда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\forall n > n_0 \quad a_n > A-\varepsilon$. Таким образом $\forall n > n_0 \quad A-\varepsilon \le a_n \le A$. Следовательно, $|a_n - A| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Теорема доказана.

Теорема. *Любая убывающая ограниченная снизу последовательность имеет конечный предел.*

Доказать самостоятельно.

Лемма. *Последовательность* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *– строго возрастает, а последовательность* $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *– строго убывает.*

Доказательство.

1). Воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}\times 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$a_n < a_{n+1}.$$

Следовательно, последовательность a_n строго возрастает.

2). Аналогично

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n}\times 1} < \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \; b_{n-1} > b_n .$$

Следовательно, последовательность b_n строго убывает. Лемма доказана.

Теорема. *Последовательности* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *имеют конечные пределы и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Доказательство. Для последовательностей

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

при $n>1$ справедливы неравенства

$$2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4 .$$

Последовательности a_n и b_n монотонны и ограниченны, следовательно, обе имеют конечные пределы и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Теорема доказана.

Определение. Числом Непера называется число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Из доказанной теоремы вытекает, что для любого $n\in\mathbb{N}$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Приведем приближенное значение числа e

$$e = 2{,}718281828459045\cdots .$$

Предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

называют вторым замечательным пределом.

1.9. Подпоследовательности.

Определение. Последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $b_k = a_{n_k}$.

Замечание. *Если последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *строго возрастает, то* $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Действительно, так как

$$\begin{aligned} &n_1 \ge 1, \\ &n_2 > n_1, \quad n_2 \ge 2, \\ &n_3 > n_2, \quad n_3 \ge 3, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

то для любого k $n_k \ge k$ и $n_k \to +\infty$.

Теорема. *Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет этот же предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $b_k = a_{n_k}$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $A \in \mathbb{R}$. Из определения предела последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Так как $n_k \to +\infty$, то для числа N $\exists K \quad \forall k > K \quad n_k > N$. Отсюда

$$\forall k > K \quad |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

Т.е.

$$\forall k > K \quad |b_k - A| < \varepsilon$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A$.

2) $A = +\infty$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то

$$\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > E.$$

Из того, что $n_k \to +\infty$, следует, что $\exists K \quad \forall k > K \quad n_k > N$. Отсюда

$$\forall k > K \quad a_{n_k} > E.$$

Т.е.

$$\forall k > K \quad b_k > E,$$

следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = +\infty$.

Случаи, когда $A = -\infty$ и $A = \infty$ доказываются аналогично.

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая её подпоследовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $A = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$.

Теорема. *Число $A \in \mathbb{R}$ – является частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1) Пусть A – частичный предел, то есть существует подпоследовательность a_{n_k} такая, что $a_{n_k} \to A$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k > K \quad |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

Так как $n_k \to +\infty$, то $\forall N \quad \exists K_1 \quad \forall k > K_1 \quad n_k > N$. Пусть $k_0 > K, K_1$, тогда для числа $n_0 = n_{k_0}$ $\quad |a_{n_0} - A| < \varepsilon$. Мы получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n_0 > N \quad |a_{n_0} - A| < \varepsilon.$$

2). Пусть теперь $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$. Докажем, что A – частичный предел. Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему алгоритму

$\varepsilon = 1 \quad N = 1 \quad \exists n_1 > 1 \quad |a_{n_1} - A| < 1,$

$\varepsilon = \dfrac{1}{2} \quad N = n_1 \quad \exists n_2 > n_1 \quad |a_{n_2} - A| < \dfrac{1}{2},$

$\varepsilon = \dfrac{1}{3} \quad N = n_2 \quad \exists n_3 > n_2 \quad |a_{n_3} - A| < \dfrac{1}{3},$

$\ldots$

По построению $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ и для любого k $0 \le \left|a_{n_k} - A\right| < \dfrac{1}{k}$. Отсюда $a_{n_k} \to A$ и, следовательно, A – частичный предел. Теорема доказана.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ m \le x_n \le M$. Не нарушая общности можно считать, что $m < M$. Положим $a_1 = m,\quad b_1 = M$. Рассмотрим сегмент $[a_1, b_1]$. Разделим его на два равных сегмента. Обозначим через $[a_2, b_2]$ тот, который содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Разделим его пополам и обозначим через $[a_3, b_3]$ тот, который содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и так далее. В результате мы получили последовательность вложенных друг в друга сегментов

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots.$$

По теореме Кантора $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A \in [a_n, b_n]$. Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$\exists n_1 \quad x_{n_1} \in [a_1, b_1]$,

$\exists n_2 > n_1 \quad x_{n_2} \in [a_2, b_2]$,

$\exists n_3 > n_2 \quad x_{n_3} \in [a_3, b_3]$,

$\dots$

Мы получили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Так как $A, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, то $\left|x_{n_k} - A\right| \le b_k - a_k$. Для длин сегментов справедливы равенства $b_1 - a_1 = M - m$, $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{M - m}{2}$ и т. д. $b_k - a_k = \dfrac{M - m}{2^{k-1}}$. Отсюда $(b_k - a_k) \to 0$, следовательно, и $\left|x_{n_k} - A\right| \to 0$. Значит $x_{n_k} \to A$. Мы получили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, имеющую предел. Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall m,n>N \quad |a_m-a_n|<\varepsilon$.

Лемма. *Любая фундаментальная последовательность ограниченна.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon=1$**,** тогда по условию

$$\exists N \quad \forall m,n>N \quad |a_m-a_n|<1.$$

Пусть $m_0>N$ фиксированное число, тогда $\forall n>N \quad |a_{m_0}-a_n|<1$. Т.е. $\forall n>N \quad a_{m_0}-1<a_n<a_{m_0}+1$. Так как для $n\le N$ имеется конечное число членов, то последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Лемма доказана.

Критерий Коши. *Последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальная.*

Доказательство.

1) Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – имеет конечный предел, то есть $\exists A\in\mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. По определению предела последовательности для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N \quad \forall n>N \quad |a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, аналогично, $\forall m>N \quad |a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда для $m,n>N$

$$|a_m-a_n|=\left|(a_m-A)+(A-a_n)\right|\le|a_m-A|+|A-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

2) Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. По определению фундаментальности

$$\exists N \quad \forall m,n>N \quad |a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

По лемме последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $a_{n_k}\to A\in\mathbb{R}$. Докажем, что вся последовательность сходится к A. Так как $a_{n_k}\to A$, то для выбранного ε

$$\exists K \quad \forall k > K \quad \left|a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $n_k \to +\infty$, то $\exists K_1 \quad \forall k > K_1 \quad n_k > N$. Пусть $k > \max\{K, K_1\}$, тогда $\forall n > N$

$$\left|a_n - A\right| = \left|\left(a_n - a_{n_k}\right) + \left(a_{n_k} - A\right)\right| \le \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

То есть $\forall n > N \quad \left|a_n - A\right| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Критерий доказан.

1.10. Верхний и нижний пределы последовательности.

В этом параграфе для простоты мы будем рассматривать только ограниченные последовательности. Все что мы докажем, с небольшими изменениями, переносится на произвольные последовательности.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность. Будем считать, что $\forall n \in \mathbb{N}\ m \le a_n \le M$. Введем новую последовательность $b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad b_n \in \mathbb{R}$. очевидно, что $m \le b_n \le M$, $b_n \ge a_n$, $b_{n+1} \le b_n$. Т.е. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, она имеет конечный предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Так как b_n монотонно убывают, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_n b_n$.

Определение. Верхним пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется число $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Для верхнего предела используется обозначение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. По определению

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n = \inf_n \sup_{k\ge n} a_k.$$

Аналогично вводиться нижний предел. Пусть

$$c_n = \inf_{k\ge n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда $m \le c_n \le M$, $c_n \le a_n$, $c_n \le c_{n+1}$.

Определение. Нижним пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется число $C = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Для нижнего предела используется обозначение $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Из определения получаем:

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sup\limits_n c_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\ge n} a_k .$$

Так как $c_n \le a_n \le b_n$, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Теорема. *Число* $B = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ *тогда и только тогда, когда:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M \quad a_m > B - \varepsilon$.

Доказательство.

1) Докажем необходимость. Пусть $B = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$, тогда $B = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon .$$

Так как $a_n \le b_n$, то $a_n < B + \varepsilon$. Мы получили, что выполняется первое условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon .$$

Докажем, что выполнено и второе условие. Пусть ε и N будут теже, что и раньше. Возьмем произвольное натуральное число M. Пусть $n > \max\{M, N\}$. Тогда $B - \varepsilon < b_n$. Так как $b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k$, то из определения точной верхней грани следует, что существует $m \ge n > M$ для которого $B - \varepsilon < a_m$. Мы получили второе условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M \quad a_m > B - \varepsilon .$$

2) Докажем достаточность. Пусть выполняются два условия теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу первого условия $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon$. Отсюда при $n > N$ $b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k \le B + \varepsilon$. Из второго условия для $M = n > N$ существует $m > M$ для которого $a_m > B - \varepsilon$.

Отсюда для $n > N$ $b_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k > B - \varepsilon$. Таким образом

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad B - \varepsilon < b_n \leq B + \varepsilon .$$

А это и означает, что

$$B = \lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n .$$

Теорема доказана.

Теорема. *Число* $C = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *тогда и только тогда, когда:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > C - \varepsilon$,
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M \quad a_m < C + \varepsilon$.

Доказать самостоятельно.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная ограниченная последовательность, L – множество всех ее частичных пределов. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса $L \neq \varnothing$.

Теорема. *Верхний предел последовательности равен наибольшему частичному пределу. Т.е.* $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \max L$.

Доказательство. Пусть $B = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$. Докажем, что верхний предел является частичным. То есть, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M \quad B - \varepsilon < a_m < B + \varepsilon$.

По доказанной теореме

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M \quad a_m > B - \varepsilon \end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \quad \exists m > M, N \quad a_m > B - \varepsilon \quad a_m < B + \varepsilon .$$

Это означает, что B частичный предел.

Теперь докажем, что B – наибольший частичный предел. Пусть $A \in L$ – произвольный частичный предел. Тогда существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $a_{n_k} \to A$. Так как $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ и $b_{n_k} \to B$, то $A \leq B$. Т.е. B – наибольший частичный предел. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Нижний предел последовательности равен наименьшему частичному пределу. Т.е.* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min L$.

Доказать самостоятельно.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, *то* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A$.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Тогда $L = \{A\}$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \max\{A\} = A$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \min\{A\} = A.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Доказательство. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A \in \mathbb{R}$. Так как $c_n \le a_n \le b_n$, $c_n \to A$ и $b_n \to A$, то $a_n \to A$. Теорема доказана.

2. Предел функции

2.1. Предел функции.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – произвольное множество.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества X, если $\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta$.

Теорема. *Число $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда $\exists x_n \in X \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a$.*

Доказательство.

1) Пусть a – предельная точка множества X, то есть

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta.$$

Тогда для $\delta = \dfrac{1}{n} \quad \exists x_n \quad 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, следовательно $x_n \neq a$ и $x_n \to a$.

2) Пусть $\exists x_n \in X \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a$, докажем, что a – предельная точка. Имеем $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \delta$. Так как $x_n \neq a$, то $0 < |x_n - a| < \delta$. Теорема доказана.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}, \quad f : X \to Y$, a – предельная точка множества X.

Определение (Коши). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to A$.

Теорема. *Определения Коши и Гейне равносильны.*

Доказательство.

1) Покажем, что из определения Коши вытекает определение Гейне. Пусть $x_n \in X \quad x_n \to a \quad x_n \neq a$ и выполняется определение Коши. Докажем, что $f(x_n) \to A$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда по определению Коши $\exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $x_n \to a$, то

$\exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \delta$, учитывая, что $x_n \neq a$, получаем $0 < |x_n - a| < \delta$. Следовательно, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ для любого $n > N$. Т.е. $f(x_n) \to A$.

2). Докажем, что из определения Гейне вытекает определение Коши. Допустим, что условие Гейне выполнено, а условие Коши нет, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \quad \exists x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Отсюда для $\delta = \dfrac{1}{n} \quad \exists x_n \in X \quad 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Так как $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, то $x_n \neq a, x_n \to a$. Следовательно, по определению Гейне $f(x_n) \to A$, что противоречит тому, что $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$.

Теорема доказана.

Из определения Гейне следует, что если предел существует, то он ровно один. Для предела функции используются обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Лемма. *Справедливо неравенство* $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \sin x < x < tgx$.

Доказательство. Напомним, что площадь сектора радиуса r с центральным углом α вычисляется по формуле $S_{сектора} = \dfrac{1}{2} r^2 \alpha$. Рассмотрим тригонометрическую окружность (см. Рис.1.). Рассмотрим треугольник OAB сектор OAB и треугольник OAC . Для их площадей справедливы неравенства $S_{\Delta OAB} < S_{СекторOAB} < S_{\Delta OAC}$. Площади этих фигур легко находятся:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{СекторOAB} = \frac{1}{2}x, \quad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Отсюда $\sin x < x < tgx$. Лемма доказана.

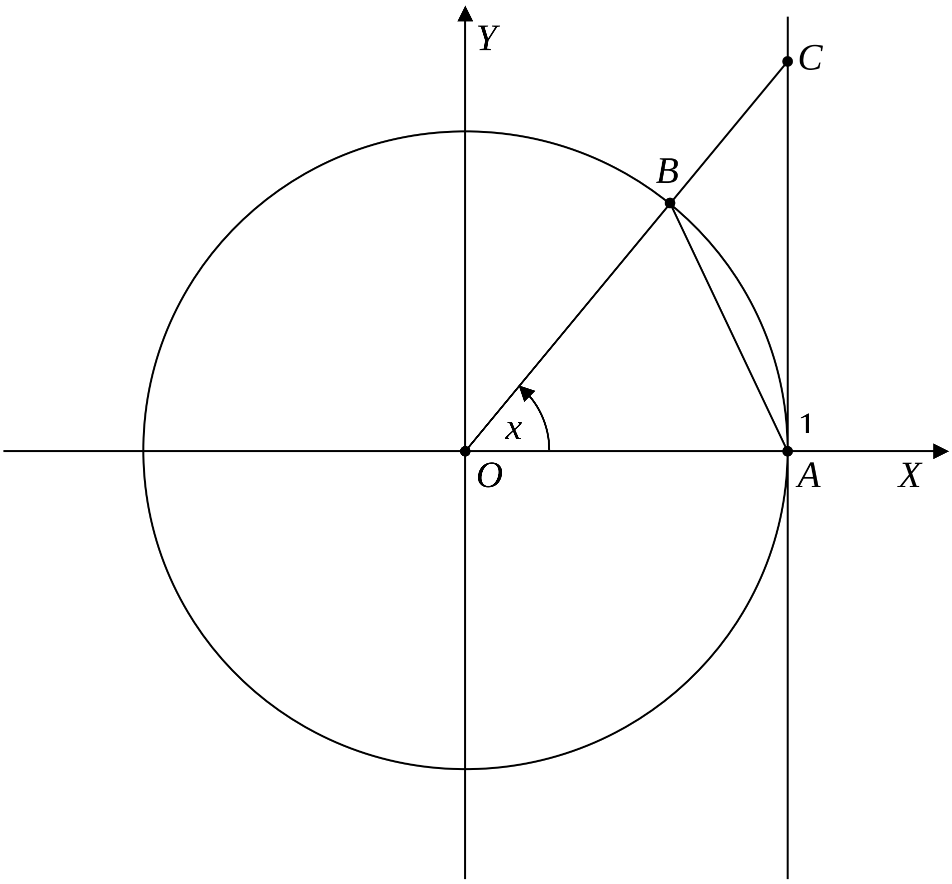

Рис. 1.

Теорема (первый замечательный предел). *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство.

1) Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$\sin x<x<tgx,\quad \frac{\sin x}{x}<1,\quad x<\frac{\sin x}{\cos x},\quad \frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|=1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^2}{2}.$$

Отсюда при $\delta=\min\left\{\dfrac{\pi}{2},\sqrt{2\varepsilon}\right\}$ и $0<x<\delta$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

2) Пусть $-\delta < x < 0$. Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, то при таких x неравенство тоже выполняется. Следовательно, если $0 < |x - 0| < \delta$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые обобщения предела. Пусть a – предельная точка множества X.

Определение (Коши). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$.

Определение (Коши). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < -E$.

Определение (Коши). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| > E$.

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to +\infty$.

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to -\infty$.

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to \infty$.

Легко доказать, что определения Гейне равносильны определениям Коши.

Пусть теперь $x \to +\infty$.

Определение. Будем говорить, что $+\infty$ является предельной точкой множества X, если $\forall D>0 \quad \exists x\in X \quad x>D$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists D>0 \quad \forall x\in X \quad x>D \quad |f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, если $\forall E>0 \quad \exists D>0 \quad \forall x\in X \quad x>D \quad f(x)>E$.

Аналогично определяются пределы при $x\to-\infty$ и $x\to\infty$. Все эти определения можно объединить в одно с помощью понятия окрестности.

Определение. Окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$, называется интервал $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ произвольное число.

Определение. Окрестностью точки $+\infty\in\mathbb{R}$, называется произвольный интервал $U_D(+\infty)=(D;+\infty)$.

Определение. Окрестностью точки $-\infty\in\mathbb{R}$, называется произвольный интервал $U_D(-\infty)=(-\infty;D)$.

Определение. Окрестностью точки $\infty\in\mathbb{R}$, называется объединение интервалов $U_D(\infty)=(-\infty;-D)\cup(D;+\infty)$.

Очевидно, что условие $|x-a|<\varepsilon$ равносильно тому, что $x\in U_\varepsilon(a)$.

Определение. Проколотой окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$, называется множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\setminus\{a\}$.

Для точек $-\infty,+\infty,\infty$ проколотая окрестность совпадает с окрестностью: $\overset{\circ}{U}_\infty=U_\infty$, $\overset{\circ}{U}_{\pm\infty}=U_{\pm\infty}$. Очевидно, что условия $x>D$ и $x\in U_D(+\infty)$ равносильны.

Пусть $f:X\to Y \quad a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$ – предельная точка X. Пусть $A\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x\in X\cap\overset{\circ}{V}(a) \quad f(x)\in U(A).$$

2.2. Свойства предела функции.

Арифметические свойства предела функции.

1) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha A$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то по определению Гейне для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x_n\in X$, $x_n\neq a$ и $x_n\to a$ выполняется $f(x_n)\to A$, но тогда и $\alpha f(x_n)\to\alpha A$. Последнее означает, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha A$. Свойство доказано.

2) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$.

Это свойство и следующие доказываются аналогично первому.

3) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$.

4) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, $g(x)\neq 0$ и $B\neq 0$ то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Свойства предела функции, выражаемые неравенствами.

1) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $A<B$, то $\exists\overset{\circ}{U}(a)\quad\forall x\in X\cap\overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)<B$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon=B-A>0$. По определению предела для окрестности $U_\varepsilon(A)$ $\exists\overset{\circ}{V}(a)\quad\forall x\in X\cap\overset{\circ}{V}(a)\quad f(x)\in U_\varepsilon(A)$.

Последнее условие означает, что $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=A+B-A=B$.

Т.е. $\forall x\in X\cap\overset{\circ}{V}(a)\quad f(x)<B$. Свойство доказано.

2) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $A>B$, то $\exists\overset{\circ}{U}(a)\quad\forall x\in X\cap\overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)>B$.

Доказывается аналогично.

3) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ и $A<B$, то

$\exists\overset{\circ}{U}(a)\quad\forall x\in X\cap\overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)<B$.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B<0$. По свойству 1) $\exists \overset{\circ}{U}(a)\quad \forall x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)-g(x)<0$. Что и требовалось доказать.

4) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и для $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)\ge B$, то $A\ge B$.

Доказательство. Так как a предельная точка X, то $\exists x_n\in X$ такая, что $x_n\ne a$ и $x_n\to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n)\to A$. Но $f(x_n)\ge B$, следовательно, $A\ge B$. Свойство доказано.

5) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и для $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)\le B$, то $A\le B$.

Доказывается аналогично.

6) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ и для $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)\le g(x)$, то $A\le B$.

Доказательство. Так как для $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)-g(x)\le 0$, то по свойству 5) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B\le 0$. Что и требовалось доказать.

7) Если для $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\ f(x)\le g(x)\le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая последовательность, что $x_n\in X$, $x_n\ne a$ и $x_n\to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n)\to A$ и $g(x_n)\to A$. Так как по условию $f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n)$, то по теореме о трех последовательностях $g(x_n)\to A$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$. Свойство доказано.

Теорема (первая теорема о пределе композиции). *Если* $f:X\to Y$, a *– предельная точка* X, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, b *– предельная точка* Y, $g:Y\to Z$, $\lim\limits_{y\to b} g(y)=A$ *и для* $x\in X\cap \overset{\circ}{U}(a)\quad f(x)\ne b$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=A$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y)=A$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall y\in Y \quad 0<|y-b|<\delta \quad |g(y)-A|<\varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то для

$$\varepsilon=\delta \quad \exists\sigma>0 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\sigma \quad |f(x)-b|<\delta.$$

По условию для $x\in X\cap\mathring{U}(a)$ $f(x)\neq b$, следовательно, для $x\in X\cap\mathring{U}(a)\cap\mathring{U}_\sigma$ $0<|f(x)-b|<\delta$. Следовательно, $|g(f(x))-A|<\varepsilon$ для $x\in X\cap\mathring{U}(a)\cap\mathring{U}_\sigma$. Т.е. $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=A$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема о пределе композиции). *Пусть* $f:X\to Y$, a *– предельная точка* X, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, b$ *– предельная точка* Y, $g:Y\to Z$, $\lim\limits_{y\to b} g(y)=A$ *и если* $b\in Y$, *то* $g(b)=A$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=A$.

Доказательство: Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y)=A$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall y\in Y \quad 0<|y-b|<\delta \quad |g(y)-A|<\varepsilon.$$

По условию $g(b)=A$, следовательно, и для $y=b$ утверждение справедливо. Т.е.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall y\in Y \quad |y-b|<\delta \quad |g(y)-A|<\varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то для

$$\varepsilon=\delta \quad \exists\sigma>0 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\sigma \quad |f(x)-b|<\delta.$$

Полагая $y=f(x)$, получим $|g(f(x))-A|<\varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=A$. Теорема доказана.

Теорема (Критерий Коши). *Пусть* $f:X\to Y$, a *– предельная точка множества* X. *Функция* $f(x)$ *имеет конечный предел при* $x\to a$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x',x''\in X$ *таких, что* $0<|x'-a|<\delta$ *и* $0<|x''-a|<\delta$ *выполняется* $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $x', x'' \in X \quad 0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$, то

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \le |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Пусть теперь выполнено условие Коши: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x', x'' \in X$ таких, что $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Для доказательства существования предела функции воспользуемся определением Гейне. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность, такая что $x_n \in X, \quad x_n \ne a, \quad x_n \to a$. Тогда для δ $\exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \delta$. Так как $x_n \ne a$, то $0 < |x_n - a| < \delta$. Полагая для $m, n > N \qquad x' := x_n, \quad x'' := x_m$, из условия Коши будем иметь $\forall m, n > N \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Т.е. $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$. Докажем, что предел A не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ – другая последовательность такая, что $x'_n \in X \quad x'_n \to a, \quad x'_n \ne a$. По доказанному существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = A' \in \mathbb{R}$. Докажем, что $A' = A$. Для этого рассмотрим новую последовательность

$$x_1, x'_2, x_3, x'_4, x_5, x'_6, \cdots.$$

Обозначим ее как $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $x''_n \in X, \quad x''_n \ne a, \quad x''_n \to a$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = A'' \in \mathbb{R}$. По теореме о пределе подпоследовательности имеем $A'' \leftarrow f(x''_{2n-1}) = f(x_{2n-1}) \to A$. Отсюда $A'' = A$. Аналогично $A'' \leftarrow f(x''_{2n}) = f(x'_{2n}) \to A'$ и $A'' = A'$. Следовательно, $A = A'$.

По определению Гейне $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Теорема доказана.

2.3. Односторонние пределы.

Пусть $f: X \to Y$, $a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения $X_a^+ = X \cap (a;+\infty)$, $X_a^- = X \cap (-\infty;a)$. Допустим, что a – предельная точка множества X_a^+.

Определение. Число A называется правым пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < x - a < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Правый предел обозначается как $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Запись $x \to a + 0$ означает, что x стремится к a справа.

Определим сужение функции f на множество X_a^+ следующим образом $f|_{X_a^+}: X_a^+ \to Y$, $f|_{X_a^+}(x) = f(x)$ для $x \in X_a^+$. Очевидно, что

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f|_{X_a^+}(x).$$

Определение. Число A называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < a - x < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Левый предел обозначается как $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Если $f|_{X_a^-}: X_a^- \to Y$, $f|_{X_a^-}(x) = f(x)$ для $x \in X_a^-$, то

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f|_{X_a^-}(x).$$

Теорема. *Если a – предельная точка множества X_a^+ (X_a^-) и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$).*

Доказательство. Пусть a – предельная точка множества X_a^+. По условию имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Отсюда, если $0 < x - a < \delta$, то $0 < |x - a| < \delta$ и, следовательно, $|f(x) - A| < \varepsilon$. Мы доказали, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Случай левого предела расматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема. *Если* a *– предельная точка множеств* X_a^+, X_a^- *и* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. По определению предела $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < a - x < \delta_1 \quad \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Аналогично, из того, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ для того же самого ε

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < x - a < \delta_2 \quad \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Теорема доказана.

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \le f(x_2)$ и строго возрастающей, если $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \ge f(x_2)$ и строго убывающей, если $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема. *Пусть* a *– предельная точка множества* X_a^-, $f(x)$ *возрастает и ограничена сверху на* X_a^-, *тогда существует* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $A = \sup\limits_{x \in X_a^-} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Число $A - \varepsilon$ – не является верхней гранью, следовательно, $\exists x_0 \in X_a^- \quad f(x_0) > A - \varepsilon$. Положим $\delta = a - x_0$. Тогда $\forall x \in X \quad 0 < a - x < \delta$ справедливы неравенства $x_0 < x$ и

$$A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A < A + \varepsilon .$$

Отсюда $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$. Теорема доказана.

Замечание. *При выполнении условий теоремы* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup\limits_{x\in X_a^-} f(x)$.

Сформулируем аналогичную теорему для правого предела.

Теорема. *Пусть* a *– предельная точка множества* X_a^+, $f(x)$ *возрастает и ограничена снизу на* X_a^-, *тогда существует* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A\in\mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in X_a^+} f(x)$.

Аналогичные теоремы справедливы и для убывающей функции.

2.4. Второй замечательный предел.

Лемма. *Справедливы пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = e$.

Доказательство. Первый предел уже доказан, докажем второй. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = e.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Справедливо равенство* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, то

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_1\quad \forall n>N_1\quad e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = e$, то для того же самого ε

$$\exists N_2\quad \forall n>N_2\quad e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<e+\varepsilon.$$

Пусть $N=\max\{N_1,N_2\}$ и $x>N+1$. Тогда $n=[x]>N$ и $n\le x<n+1$. Справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$$

и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n} \ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} > e-\varepsilon .$$

Отсюда $e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e+\varepsilon$. Таким образом

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D = N+1 \quad \forall x > D \quad \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon .$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. Теорема доказана.

Следствие. *Справедливо равенство* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$**.**

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{(y=-x)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \overset{(z=y-1)}{=} \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e.$$

Следствие доказано.

Теорема (второй замечательный предел для функций). *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\textbf{.}$$

Доказательство. Так как по доказанному

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e, \quad \text{то}$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$**.** Теорема доказана.

2.5. Примеры вычисления пределов функций.

1) $\lim\limits_{x\to a} x = a$ – очевидно по определению.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + \cdots + a_n$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены и $Q(a) \neq 0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \quad (a > 0)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. При $x \to +0 \quad \dfrac{1}{x} \to +\infty$. Пусть $n = \left[\dfrac{1}{x}\right]$, тогда $n \leq \dfrac{1}{x} < n+1$ и $\dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}$. Отсюда $1 \leftarrow a^{\frac{1}{n+1}} < a^x \leq a^{\frac{1}{n}} \to 1$. Следовательно, $a^x \to 1$ и $\lim\limits_{x\to +0} a^x = 1$. Для левого предела имеем

$$\lim_{x\to -0} a^x = \lim_{y\to +0} a^{-y} = \lim_{y\to +0}\frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to +0} a^y} = 1.$$

При $0 < a < 1$ утверждение доказывается заменой $a = \dfrac{1}{b}$. Свойство доказано.

5) $\lim\limits_{x\to \alpha} a^x = a^\alpha$

Доказательство. Имеем $\lim\limits_{x\to\alpha} a^x \overset{(x=y+\alpha)}{=} \lim\limits_{y\to 0} a^{y+\alpha} = \lim\limits_{y\to 0} a^\alpha a^y = a^\alpha \lim\limits_{y\to 0} a^y = a^\alpha$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$.

Доказательство. Докажем по определению. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Следующие неравенства равносильны

$$|\ln x - 0| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \ln x < \varepsilon, \quad e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon}, \quad -\left(1 - e^{-\varepsilon}\right) < x - 1 < e^{\varepsilon} - 1.$$

Положим $\delta = \min\left\{1 - e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon} - 1\right\}$, тогда

$$\forall x > 0 \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad |\ln x - 0| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

7) $\lim\limits_{x\to\alpha} \log_a x = \log_a \alpha \quad (\alpha > 0)$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\ln x=\lim_{x\to\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha}\alpha\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\ln\frac{x}{\alpha}+\ln\alpha\right)\overset{(x=\alpha y)}{=}\lim_{y\to1}\ln y+\ln\alpha=\ln\alpha,$$

$$\lim_{x\to\alpha}\log_a x=\lim_{x\to\alpha}\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln\alpha}{\ln a}=\log_a\alpha.$$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0 \quad (\alpha>0,\quad a>1)$

Доказательство. Пусть $n=[x]$, тогда $n\le x<n+1$ и

$$\frac{x^\alpha}{a^x}\le\frac{(n+1)^\alpha}{a^n}=\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{n^\alpha}{a^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\frac{n^\alpha}{a^n}\le2^\alpha\frac{n^\alpha}{a^n}\to0.$$

Аналогично $\dfrac{x^\alpha}{a^x}\ge\dfrac{(n)^\alpha}{a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}\dfrac{n^\alpha}{a^n}\to0$. Отсюда $0\leftarrow\dfrac{(n)^\alpha}{a^{n+1}}\le\dfrac{x^\alpha}{a^x}\le\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}\to0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0$. Свойство доказано.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a^\beta x}{x^\alpha}=0 \quad (a>1,\quad \alpha>0,\quad \beta>0)$.

Доказательство. Пусть $y=\log_a x$, тогда при $x\to+\infty$ $\quad y\to+\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^\beta}{a^{\alpha y}}\overset{(b=a^\alpha>1)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^\beta}{b^y}=0.$$

Свойство доказано.

Следствие. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a^\beta n}{n^\alpha}=0 \quad (a>1,\quad \alpha>0,\quad \beta>0)$.

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\quad a\ne1)$.

Доказательство. Пусть $y = a^x - 1$, тогда при $x \to 0 \quad y \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$

Доказательство. Имеем $(1+x)^\mu = e^{\ln(1+x)^\mu} = e^{\mu\ln(1+x)^\mu}$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)^\mu} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{e^{\mu\ln(1+x)^\mu} - 1}{\mu\ln(1+x)}\right)\mu\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right) = \mu.$$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\mu - 1}{x-1} = \mu.$

Доказательство. Пусть $y = x - 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\mu - 1}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^\mu - 1}{y} = \mu.$$

16) Если $U(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} U(x) = A$, $A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} V(x) = B$, то

$$\lim_{x\to a} U(x)^{V(x)} = A^B.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\lim_{x\to a} U(x)^{V(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln U(x)^{V(x)}} = \lim_{x\to a} e^{V(x)\ln U(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} V(x)\ln U(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} V(x)\lim\limits_{x\to a}\ln U(x)} =$$

$$= e^{B\ln A} = e^{\ln A^B} = A^B.$$

2.6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a \quad a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a \quad a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Следующие две теоремы очевидны.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *– бесконечно большая при* $x \to a$*, то* $\frac{1}{f(x)}$ *– бесконечно малая при* $x \to a$.

Теорема. Если $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \to a$.

Пусть $f, g : X \to Y$ и a – предельная точка множества X.

Определение. Будем говорить, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если

$$\exists L \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le L|g(x)|.$$

Теорема. *Если* $g(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$*, то* $f(x) = O(g(x))$ *тогда и только тогда, когда* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *– ограничена в некоторой окрестности* $\overset{\circ}{V}(a)$.

Определение. Будем говорить, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|.$$

Теорема. *Если* $g(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $f(x) = o(g(x))$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Введенные символы O, o называются символами Ландау.

Свойства символов Ландау.

1) Если при $x \to a$ $f(x) = O(g(x))$, то для любого числа c

$$c \cdot f(x) = O(g(x)).$$

Доказательство. Так как $f(x) = O(g(x))$, то

$$\exists L \quad \exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le L|g(x)|.$$

Тогда $|c \cdot f(x)| \le (|c| L)|g(x)|$. Свойство доказано.

2) Если при $x \to a$ $f(x) = O(g(x))$ и $c \neq 0$, то $f(x) = O(cg(x))$.

Доказательство. Так как $f(x) = O(g(x))$, то

$$\exists L \quad \exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le L|g(x)|.$$

Тогда $|f(x)| \le \dfrac{L}{|c|}|c \cdot g(x)|$. Свойство доказано.

3) Если при $x \to a$ $f(x) = O(h(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то

$$(f(x) \pm g(x)) = O(h(x)).$$

Доказательство. По определению символов Ландау

$\exists L_1 \quad \exists \delta_1 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad |f(x)| \le L_1 |h(x)|$,

$\exists L_2 \quad \exists \delta_2 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad |f(x)| \le L_2 |h(x)|$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $x \in X$, таких что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется

$$|f(x) \pm g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le L_1|h(x)| + L_2|h(x)| = (L_1 + L_2)|h(x)| = L_3|h(x)|.$$

Свойство доказано.

4) Если при $x \to a$ $f(x) = O(g(x))$, а $g(x) = O(h(x))$, то

$$f(x) = O(h(x)).$$

Доказательство. По определению имеем

$$\exists L_1 \quad \exists \delta_1 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad |f(x)| \le L_1 |g(x)|,$$

$$\exists L_2 \quad \exists \delta_2 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad |g(x)| \le L_2 |h(x)|.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого $x \in X$, такого что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется

$$|f(x)| \le L_1|g(x)| \le L_1 L_2 |h(x)| = L_3 |h(x)|.$$

5) Если при $x \to a$ $f(x) = o(g(x))$, то для любого числа c

$$c \cdot f(x) = o(g(x)).$$

6) Если при $x \to a$ $f(x) = o(g(x))$ и $c \neq 0$, то $f(x) = o(cg(x))$.

7) Если при $x \to a$ $f(x) = o(h(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то

$$\left(f(x) \pm g(x)\right) = O\left(h(x)\right).$$

8) Если при $x \to a$ $f(x) = o\left(g(x)\right)$, а $g(x) = O\left(h(x)\right)$, то

$$f(x) = o\left(h(x)\right).$$

Доказательство. Так как $g(x) = O\left(h(x)\right)$, то

$$\exists L \quad \exists \delta_1 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad |g(x)| \le L|h(x)|.$$

Не нарушая общности можно считать, что $L > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как $f(x) = o\left(g(x)\right)$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{L}$

$$\exists \delta_2 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad |f(x)| \le \frac{\varepsilon}{L}|g(x)|.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого $x \in X$, такого что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется

$$|f(x)| \le \frac{\varepsilon}{L}|g(x)| \le \frac{\varepsilon}{L} L|h(x)| = \varepsilon|h(x)|.$$

Следовательно, $f(x) = o\left(h(x)\right)$

9) Если при $x \to a$ $f(x) = O\left(g(x)\right)$, а $g(x) = o\left(h(x)\right)$, то

$$f(x) = o\left(h(x)\right).$$

Доказывается точно так же, как и предыдущее свойство.

10) Если при $x \to a$ $f(x) = o\left(g(x)\right)$, то $f(x) = O\left(g(x)\right)$.

11) Если при $x \to a$ $f_1(x) = O\left(g_1(x)\right)$ и $f_2(x) = O\left(g_2(x)\right)$, то

$$f_1(x) f_2(x) = O\left(g_1(x) g_2(x)\right).$$

12) Если при $x \to a$ $f_1(x) = O\left(g_1(x)\right)$ и $f_2(x) = o\left(g_2(x)\right)$, то

$$f_1(x) f_2(x) = o\left(g_1(x) g_2(x)\right).$$

Пусть $f, g : X \to Y$ и a – предельная точка множества X. Будем считать, что $f(x) \ne 0, \quad g(x) \ne 0$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a)$.

Определение. Будем говорить, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Свойства эквивалентности.

1) Если при $x \to a$ $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$.

2) При $x \to a$ $f(x) \sim f(x)$.

3) Если при $x \to a$ $f(x) \sim g(x)$, а $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$.

Основные эквивалентности.

1) $\sin x \sim x \quad (x \to 0)$.

2) $\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$.

3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$.

4) $\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$.

5) $e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$.

6) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (x \to 0)$.

7) $x^\mu - 1 \sim \mu(x-1) \quad (x \to 1)$.

Теорема. *Если* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a$*, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to a} g(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

Теорема доказана.

2.7. Непрерывность функции.

Пусть $f: X \to Y$ и $x_0 \in X$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется изолированной, если $\exists \delta > 0 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$.

Замечание. *В изолированной точке любая функция непрерывна. Предел в такой точке не определен.*

Теорема. *Если $x_0 \in X$ – предельная точка, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Переформулируем определение непрерывности на языке окрестностей.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\forall U\big(f(x_0)\big) \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in X \cap V(x_0) \quad f(x) \in U\big(f(x_0)\big)$$

или

$$\forall U\big(f(x_0)\big) \quad \exists V(x_0) \quad f\big(X \cap V(x_0)\big) \subset U\big(f(x_0)\big).$$

Свойства непрерывности.

1) *Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $cf(x)$ непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если x_0 изолированная точка, то утверждение очевидно. Если x_0 предельная точка множества X, то

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = cf(x_0).$$

Что и требовалось доказать.

2) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функция $f(x) \pm g(x)$ также непрерывна в этой точке.*

3) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функция*

$f(x)\cdot g(x)$ *также непрерывна в этой точке.*

4) *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0 *и* $g(x_0)\neq 0$, *то функция* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *также непрерывна в этой точке.*

Теорема. *Пусть* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$, *а* $g(x)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то* $(g\circ f)(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$.

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad |y - y_0| < \delta \quad |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon .$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то для полученного δ

$$\exists \sigma > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \sigma \quad |f(x) - f(x_0)| < \delta .$$

Так как $|f(x) - y_0| < \delta$, то полагая $y = f(x)$ будем иметь $|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$ или $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. А это и означает, что $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Обозначим через $C(X)$ – класс всех непрерывных на множестве X функций.

Свойства непрерывных на множестве функций.

1) Если $f \in C(X)$, то для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha f \in C(X)$.
2) Если $f, g \in C(X)$, то $(f \pm g) \in C(X)$.
3) Если $f, g \in C(X)$, то $f \cdot g \in C(X)$.
4) Если $f, g \in C(X)$ и для любого $x \in X$ $g(x) \neq 0$, то $\dfrac{f}{g} \in C(X)$.

Приведем классификацию точек разрыва.

Пусть функция $f: X \to Y$ не является непрерывной в точке $x_0 \in X$. Тогда x_0 – предельная точка множества X.

Определение. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$.

Положив $f(x_0)=A$, мы получим непрерывную в точке x_0 функцию.

Определение. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B\notin\mathbb{R}$ и $A\neq B$.

Определение. Пусть x_0 является предельной точкой для $X_{x_0}^-$ и $X_{x_0}^+$. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Определение. Пусть x_0 является предельной точкой для множества $X_{x_0}^+$ и не является предельной для $X_{x_0}^-$. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, если предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Определение. Пусть x_0 является предельной точкой для множества $X_{x_0}^-$ и не является предельной для $X_{x_0}^+$. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, если предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не существует или бесконечен.

2.8. Непрерывные на сегменте функции.

Напомним, что сегментом называется множество

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\} \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная на сегменте функция ограничена.*

Доказательство. Пусть $f\in C([a,b])$. Докажем, что $f(x)$ ограничена. Допустим противное, то есть $\forall n\in N \quad \exists x_n\in[a,b] \quad |f(x_n)|>n$. Так как

$a \le x_n \le b$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_{n_k} \to \alpha \in \mathbb{R}$. Так как $a \le x_{n_k} \le b$, то $a \le \alpha \le b$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке α, следовательно, $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$, что противоречит тому, что $\left|f(x_{n_k})\right| > n_k \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная на сегменте функция принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство. Докажем, что $f(x)$ принимает наибольшее значение. Функция $f(x)$ по первой теореме Вейерштрасса ограничена. Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\exists x_0 \in [a,b] \quad f(x_0) = M$. По определению супремума $\forall \delta > 0 \quad \exists x \in [a;b] \quad f(x) > M - \varepsilon$. Положим $\delta = \dfrac{1}{n}$, тогда $\exists x_n \in [a,b] \quad f(x) > M - \dfrac{1}{n}$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, $\exists x_{n_k} \to \alpha \in [a,b]$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$. Так как $M \leftarrow M - \dfrac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$, то $f(x_{n_k}) \to M$ и $f(\alpha) = M$.

Доказательство второй части теоремы аналогично. Теорема доказана.

Теорема (первая теорема Больцано–Коши). *Если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то $\exists x_0 \in (a,b) \quad f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Будем считать, что $f(a) < 0, \quad f(b) > 0$. Разделим сегмент $[a,b]$ пополам. Возможны три случая:

1) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, тогда, очевидно, $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, тогда будем рассматривать сегмент $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. На его концах значения разных знаков.

3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, тогда будем рассматривать сегмент $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$. На его концах значения разных знаков.

Полученный сегмент делим пополам и опять получаем один из трех случаев. Если на каком то шаге выполнится условие 1), то мы нашли искомое x_0, если нет, то получим бесконечную последовательность вложенных сегментов $[a_n,b_n]$, таких что $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$. Тогда по теореме Кантора $\exists\alpha\in[a_n,b_n]$ для всех n. Так как $a_n\to\alpha$, то $f(a_n)\to f(\alpha)$. Кроме того, $f(a_n)<0$, следовательно, $f(\alpha)\leq 0$. Так как $b_n\to\alpha$, то $f(b_n)\to f(\alpha)$. Кроме того, $f(b_n)>0$, следовательно, $f(\alpha)\geq 0$. Мы доказали, что $f(\alpha)=0$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема Больцано–Коши). *Пусть функция f непрерывна на снгментн $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ и $A\neq B$. Тогда $\forall C$, лежащего между A и B, $\exists c\in(a,b)$ $f(c)=C$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-C$. Эта функция непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах значения разных знаков, тогда по первой теореме Больцано–Коши $\exists\alpha\in(a,b)$ $g(\alpha)=0$, то есть $f(\alpha)-C=0,\quad f(\alpha)=C$. Что и требовалось доказать.

2.9. Непрерывность монотонных на промежутке функций.

Определение. Множество $P\subset\mathbb{R}$ называется промежутком, если для любых чисел $x_1,x_2\in P$ и любого числа x, такого что $x_1<x<x_2$, $x\in P$, то есть, если $x_1,x_2\in P$, то $[x_1,x_2]\subset P$.

Теорема. *Монотонная функция* f*, определенная на промежутке* P*, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда* $Q = \operatorname{Im} f = f(P)$ *является промежутком.*

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что функция f возрастает.

1) Пусть функция f непрерывна. Докажем, что Q является промежутком. Пусть $y_1 < y < y_2$ и $y_1, y_2 \in Q$. Докажем, что $y \in Q$.
Так как $y_1, y_2 \in Q$, то $\exists x_1, x_2 \quad f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2$. Так как возрастает, то $x_1 < x_2$. Функция f непрерывна на сегменте $[x_1, x_2]$ и принимает на его концах различные значения y_1 и y_2. По второй теореме Больцано–Коши для числа $y \in (y_1, y_2) \quad \exists x \in (x_1, x_2) \quad f(x) = y$. Т.е. $y \in Q$ и, следовательно, Q – промежуток.

2) Пусть $Q = f(P)$ – промежуток. Докажем, что f непрерывна на P. Пусть $x_0 \in P$, x_0 – внутренняя точка P или правый конец P (если он существует). Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Если $x < x_0$, то $f(x) \le f(x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Так как $f(x) \le f(x_0)$, то $A \le f(x_0)$. Докажем, что $A = f(x_0)$. Допустим противное, что $A < f(x_0)$. Возьмем $x_1 < x_0$ и $x_1 \in P$, тогда $f(x_1) = y_1 \le A$. Пусть $y_1 \le A < y_2 < y_0 = f(x_0)$. Так как $y_1 < y_2 < y_0$ и $y_1 \in Q, \quad y_0 \in Q$, то $y_2 \in Q$, т.е. $\exists x_2 \in P \quad f(x_2) = y_2$. Так как $y_2 < y_0$, то $x_2 < x_0$ и $f(x_2) \le A$, следовательно, $y_2 \le A$. Но $y_2 > A$ по выбору. Мы получили противоречие. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, если x_0 внутренняя точка P или левый конец P , то $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, а это означает непрерывность функции f. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция* $f : P \to Q$ *строго возрастает и непрерывна на* P*, где* P *– промежуток, а* $Q = f(P)$*. Тогда* Q *– промежуток и* $f^{-1} : Q \to P$ *строго возрастает и непрерывна на* Q*.*

Доказательство.

1) $Q = f(P)$ – промежуток по предыдущей теореме.

2) Докажем, что $f^{-1}: Q \to P$ строго возрастает.

Пусть $y_1, y_2 \in Q$ и $y_1 < y_2$, докажем, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Допустим противное, что $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Тогда $f(x_1) \geq f(x_2)$, так как f возрастает. Но $f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$, следовательно, $y_1 \geq y_2$, что противоречит допущению.

3) Докажем, что f^{-1} непрерывна.

Функция f^{-1} строго возрастает, $f^{-1}(Q) = P$ – промежуток, следовательно, f^{-1} непрерывна на Q по предыдущей теореме.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Такая же теорема справедлива и для строго убывающей функции.

Примеры:

1) Пусть $f(x) = \sin x$, $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Тогда $f^{-1}(x) = \arcsin x$ непрерывная функция.
2) Пусть $f(x) = \cos x$, $f: [0, \pi] \to [-1,1]$. Тогда $f^{-1}(x) = \arccos x$ непрерывная функция.
3) Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывная функция.

2.10. Равномерная непрерывность.

Определение. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Фиксируя x_1 или x_2 мы получим просто непрерывность, то есть из равномерной непрерывности следует обычная непрерывность.

Теореме (Кантора). *Любая непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на сегменте $[a,b]$. Допустим, что она не является равномерно непрерывной, тогда

$$\exists\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x_1,x_2\in[a,b] \quad |x_1-x_2|<\delta \quad |f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon .$$

Возьмем $\delta=\dfrac{1}{n}$, тогда $\exists x_1^{(n)},x_2^{(n)}\in[a,b]$ $\left|x_1^{(n)}-x_2^{(n)}\right|<\dfrac{1}{n}$ $\left|f\left(x_1^{(n)}\right)-f\left(x_2^{(n)}\right)\right|\geq\varepsilon$.

Так как $x_1^{(n)}\in[a,b]$, то последовательность $\left\{x_1^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Следовательно, $\exists x_1^{(n_k)}\to\alpha\in[a,b]$. Так как $\left|x_1^{(n_k)}-x_2^{(n_k)}\right|<\dfrac{1}{n_k}$, то $\alpha\leftarrow\left(x_1^{(n_k)}-\dfrac{1}{n_k}\right)<x_2^{(n_k)}<\left(x_1^{(n_k)}+\dfrac{1}{n_k}\right)\to\alpha$ и $x_2^{(n_k)}\to\alpha$. Функция f непрерывна в точке α, значит $f\left(x_1^{(n_k)}\right)\to f(\alpha)$, $f\left(x_2^{(n_k)}\right)\to f(\alpha)$ и, следовательно, $f\left(x_1^{(n_k)}\right)-f\left(x_2^{(n_k)}\right)\to 0$. Это противоречит тому, что $\left|f\left(x_1^{n}\right)-f\left(x_2^{n}\right)\right|\geq\varepsilon$. Теорема доказана.

3. Дифференцирование

3.1. Определение производной. Её физический и геометрический смысл.

Пусть функция $f:X\to Y$, $x_0\in X$, x_0 – предельная точка X.

Определение. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$. Этот предел называется производной функции f в точке x_0 и обозначается, как $f'(x_0)$. Т.е. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Если положить $x-x_0=\Delta x$, то $x=\Delta x+x_0$ и можно написать

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пусть $x = f(t)$ – уравнение движения точки по числовой прямой. Тогда $S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ – путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Средняя скорость на этом промежутке определяется формулой $v_{cp} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Предел средней скорости, когда длина промежутка времени стремится к нолю, называется мгновенной скоростью. Таким образом $f'(t_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} v_{cp} = v(t_0)$. В данном случае физический смысл производной – это мгновенная скорость.

Пусть теперь Γ – график функции $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ (см. Рис. 2.) Рассмотрим точку $M_0 \; x_0, y_0$ на графике.

Определение. Касательной к кривой Γ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M когда точка M стремится к точке M_0 вдоль кривой Γ.

Тангенс углового коэффициента секущей M_0M вычисляется по формуле

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Касательная существует тогда и только тогда, когда существует предел углового коэффициента, то есть когда существует производная $f'(x_0)$. Итак, угловой коэффициент k касательной $y = kx + b$ равен $f'(x_0)$. Найдем коэффициент b. Имеем $y_0 = kx_0 + b$ и $b = y_0 - kx_0$. Подставляя полученные значения коэффициентов в уравнение касательной, будем иметь

$$y = ax - ax_0 + y_0,$$

$$y = a(x - x_0) + y_0,$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

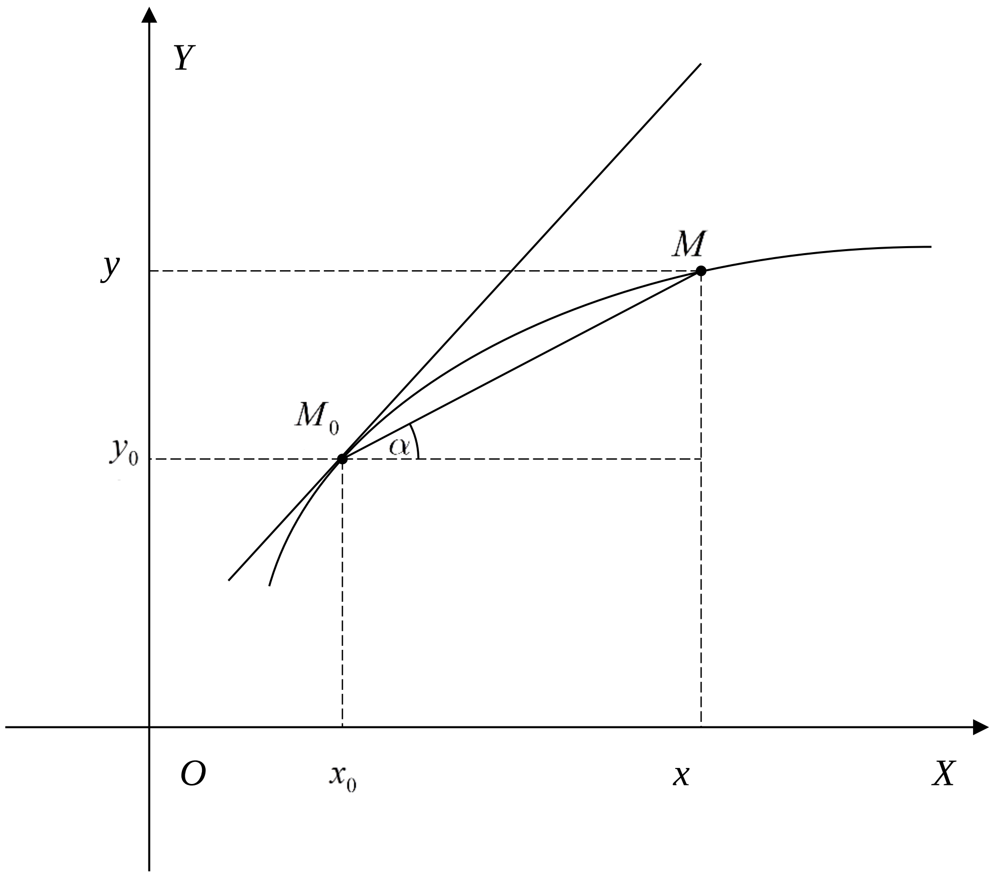

Рис. 2.

Итак, уравнение касательной к графику Γ функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0\,.$$

Для производной функции кроме $f'(x)$ используются обозначения $\dot{f}(x)$ и $\dfrac{df}{dx}(x)$.

Таблица производных элементарных функций.

1) Пусть $f(x) \equiv c$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0\,.$$

Т.е. $c' = 0$.

2) Пусть $f(x) \equiv x$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1.$$

Т.е. $x'=1$.

3) Пусть $f(x)=x^n \quad (n\in N)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)-x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\right]}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}.$$

Т.е. $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$.

4) Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}.$$

Т.е. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

5) Пусть $f(x)=\sqrt{x}$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Т.е. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

6) Пусть $f(x)=x^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\alpha\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Т.е. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

7) Пусть $f(x) = a^x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \ln a}{1} = a^x \ln a.$$

Т.е. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. Отметим частный случай $\left(e^x\right)' = e^x$.

8) Пусть $f(x) = \log_a x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{x}\log_a e}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Т.е. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Отметим частный случай $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

9) Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x$$

Т.е. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

10) Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

Т.е. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

Перейдем к изучению свойств производной.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$. Тогда $\alpha(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$. Отсюда $f(x)-f(x_0)=\left(\alpha(x)+f'(x_0)\right)(x-x_0)\to 0$. Т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Это означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, то функция* $h(x)=c\cdot f(x)$ *также дифференцируема в точке* x_0 *и* $h'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. По определению производной имеем

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c\cdot f(x)-c\cdot f(x_0)}{x-x_0}=c\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c\cdot f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x_0*, то функция* $h(x)=f(x)\pm g(x)$ *также дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$h'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0).$$

Доказать самостоятельно.

Теорема. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x_0*, то функция* $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$h'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Доказательство. По определению производной имеем

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x_0 *и* $g(x_0)\neq 0$, *то функция* $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$h'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. По определению производной имеем

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема доказана.

Теорема (о дифференцировании композиции функций). *Пусть* x_0 *– предельная точка множества* X, *функция* $f:X\to Y$ *дифференцируема в точке* x_0. *Пусть* $y_0=f(x_0)$ *– предельная точка множества* Y *и функция* $g:Y\to Z$ *– дифференцируема в точке* y_0. *Тогда функция* $h=g\circ f$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* $h'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Введем функцию

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ g'(y_0), & y=y_0\end{cases}.$$

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0}G(y)=G(y_0)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то применяя вторую теореме о пределе композиции, получим

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}G(f(x))\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{y\to y_0}G(y)\cdot f'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Теорема (о дифференцирование обратной функции). *Пусть* x_0 *– предельная точка множества* X, *биективная функция* $f:X\to Y$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* $f'(x_0)\neq 0$. *Пусть, кроме этого, функция* $f^{-1}:Y\to X$ *непрерывна в точке* $y_0=f(x_0)$. *Тогда* y_0 *– предельная точка множества* Y, *функция* f^{-1} *дифференцируема в точке* y_0 *и* $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство.

1) Так как x_0 – предельная точка X, то $\exists x_n\in X \quad x_n\to x_0 \quad x_n\neq x_0$. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, значит, непрерывна в точке x_0. Следовательно, $y_n=f(x_n)\to y_0=f(x_0)$. Так как $f(x)$ биективна и $x_n\neq x_0$, то $y_n\neq y_0$. Тогда y_0 – предельная точка множества Y.

2) Так как функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0, то при $y\to y_0$ $f^{-1}(y)\to f^{-1}(y_0)=x_0$. Функция $f(x)$ биективна, следовательно, и $f^{-1}(y)$ биективна, т.е. $f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y_0)$ при $y\neq y_0$. По определению производной и первой теореме о пределе композиции имеем

$$\frac{1}{f'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-x_0}{f\left(f^{-1}(y)\right)-f(x_0)}=$$
$$=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\left(f^{-1}\right)'(y_0).$$

Т.е. $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Теорема доказана.

Таблица производных (продолжение).

11) Пусть $f(x)=\operatorname{tg}x$. Тогда

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Т.е. $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

12) Пусть $f(x)=\operatorname{ctg}x$. Тогда $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13) Пусть $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ и $f^{-1}(y)=\arcsin y$. Тогда $f'(x)=\cos x\neq 0$ при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. По теореме о дифференцируемости обратной функции для $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Т.е. $(\arcsin y)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, для $y\in(-1,1)$.

14) Пусть $f(x)=\cos x$. Аналогично предыдущему примеру можно доказать, что $(\arccos y)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ для $y\in(-1,1)$.

15) Пусть $f:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$ и $f^{-1}(y)=\operatorname{arctg}y$. Тогда

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

Т.е. $\left(\operatorname{arctg}y\right)'=\frac{1}{1+y^2}$

16) Пусть $f(x)=\operatorname{ctg}x$. Точно так же, как и в предыдущем примере, доказывается, что

$\left(\operatorname{arcctg}y\right)'=-\frac{1}{1+y^2}$.

Гиперболические функции.

Определение. Гиперболическим синусом называется функция $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, где $x\in\mathbb{R}$.

Определение. Гиперболическим косинусом называется функция $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, где $x\in\mathbb{R}$.

Следующие равенства легко проверяются $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, $\operatorname{sh}'x=\operatorname{ch}x$, $\operatorname{ch}'x=\operatorname{sh}x$. Найдем функции обратные к гиперболическим.

1) Пусть $f(x)=\operatorname{sh}x,\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Пусть $y\in\mathbb{R}$. Решим уравнение

$$\operatorname{sh}x=y$$

относительно x. Имеем

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=y.$$

Сделаем замену $e^x=t\quad(t>0)$. Получим

$$t-\frac{1}{t}=2y,\ t^2+2yt-1=0,\ t=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

Так как $t>0$, то $t=y+\sqrt{y^2+1}$. Отсюда

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

и

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

Мы получили, что уравнение имеет единственное решение при любом $y\in\mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(x)=\operatorname{sh}x$ обратима, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и

$$f^{-1}(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

Функция обратная к обозначается как $\operatorname{Arsh}y$. Таким образом

$$\operatorname{Arsh}y=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

Найдем производную этой функции. Имеем

$$\left(\operatorname{Arsh}y\right)'=\frac{1}{\operatorname{sh}'x}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Т.е. $\left(\operatorname{Arsh}y\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.

2) Пусть $f(x)=\operatorname{ch}x$. Для $y\in\mathbb{R}$ решим уравнение $\operatorname{ch}x=y$. Имеем

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y.$$

При $y\le 0$ уравнение решений не имеет. Пусть $y>0$. Положим $e^x=t$. Тогда

$$t+\frac{1}{t}=2y,\ t^2-2yt-1=0,\ t=y\pm\sqrt{y^2-1}.$$

При $0<y<1$ решений нет. При $y\ge 1$

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

и

$$x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right).$$

Мы получили два решения $x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \geq 0$ и

$x_2 = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) = \ln\dfrac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = -\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) = -x_1 \leq 0$. Если функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$ рассматривать как действующую из $[0, +\infty)$ в $[1, +\infty)$, то она будет биективной и обратная к ней функция будет иметь вид

$$f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Эта функция обозначается как $\operatorname{Arch} y$. Таким образом

$$\operatorname{Arch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Найдем производную этой функции. Имеем

$$(\operatorname{Arch} y)' = \frac{1}{\operatorname{ch}' x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} =$$

(но так как $x > 0$, то $\operatorname{sh} x > 0$ и перед дробью следует выбрать знак «+»)

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Мы получили, что $(\operatorname{Arch} y)' = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

3) Пусть $f(x) = \operatorname{th} x$. Так как $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, то

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Пусть $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение $\operatorname{th} x = y$. Имеем

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y.$$

Сделаем замену $e^x = t > 0$. Тогда

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = y,\ t^2 - 2 = t^2 y + y,\ t^2 = \frac{y + 1}{1 - y}.$$

Последнее уравнение имеет решение $t > 0$ тогда и только тогда, когда $y \in (-1, 1)$. При выполнении этого условия решение единственно и имеет вид

$t=\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}}$. Отсюда $e^x=\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}}$ и $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{1-y}$. Таким образом, если функцию $f(x)=\operatorname{th}x$ рассматривать как действующую из $\mathbb{R}$ в $(-1,1)$, то она будет обратимой и $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{1-y}$. Эту функцию обозначим $\operatorname{Arth}y$. Т.е.

$$\operatorname{Arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}.$$

Найдем производную этой функции

$$(\operatorname{Arthy})'=\frac{1}{\operatorname{th}'x}=\frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2x}=\frac{1}{1-y^2}.$$

Мы получили $(\operatorname{Arthy})'=\dfrac{1}{1-y^2}, \quad y\in(-1,1)$.

4) Пусть $f:\mathbb{R}/\{0\}\to(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ и $f(x)=\operatorname{cth}x$. Тогда

$$(\operatorname{cth}x)'=\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)'=\frac{\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

Для $y\in(-1,1)$ решим уравнение $\operatorname{cth}x=y$. Имеем $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=y$. Сделаем замену $e^x=t>0$. Тогда

$$\frac{t^2+1}{t^2-1}=y,\ t^2=\frac{y+1}{y-1},\ t=\sqrt{\frac{y+1}{y-1}},\ e^x=\sqrt{\frac{y+1}{y-1}},\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}.$$

Мы получили, что функция f обратима и $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$. Обратную функцию обозначим через $\operatorname{Arth}y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$. Найдем ее производную. Имеем

$$(\operatorname{Arcth}y)'=\frac{1}{\operatorname{cth}'x}=\frac{1}{-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}}=\frac{1}{1-\operatorname{cth}^2x}=\frac{1}{1-y^2}.$$

Т.е. $\left(\operatorname{Arcth} y\right)' = \dfrac{1}{1-y^2} \quad y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

3.2. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Пусть $f : X \to Y$, $f : X \to Y$ и x_0 – предельная точка множества X. Будем предполагать, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Лемма 1. *Если* $f'(x_0) > 0$*, то* $\exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\forall x \in X \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad f(x) < f(x_0),$$
$$\forall x \in X \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad f(x) > f(x_0).$$

Доказательство. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

то $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Отсюда

$$\forall x \in X \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad f(x) < f(x_0),$$
$$\forall x \in X \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad f(x) > f(x_0).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $f'(x_0) < 0$*, то* $\exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\forall x \in X \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad f(x) > f(x_0),$$
$$\forall x \in X \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad f(x) < f(x_0).$$

Доказывается сведением к лемме 1 заменой $f(x)$ на $-f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b).

Определение. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad |x - x_0| < \delta \quad f(x) \le f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой строгого максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < f(x_0)$.

Аналогично вводятся минимум и строгий минимум.

Теорема Ферма. *Если* $x_0 \in (a,b)$, x_0 *– точка максимума или минимума функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *то* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка максимума. Допустим противное, то есть, что $f'(x_0)\neq 0$. Возможны два случая:

1) Если $f'(x_0)>0$, то $\exists\delta \quad \forall x\in X \quad x_0<x<x_0+\delta \quad f(x)>f(x_0)$. Следовательно, x_0 не является точкой максимума.

2) Если $f'(x_0)<0$, то $\exists\delta \quad \forall x\in X \quad x_0-\delta<x<x_0 \quad f(x)>f(x_0)$. Следовательно, x_0 не является точкой максимума.

В обоих случаях мы получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема Ролля. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема на* (a,b) *и принимает на концах сегмента равные значения, то есть* $f(a)=f(b)$, *то* $\exists c\in(a,b) \quad f'(c)=0$.

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса она принимает наибольшее и наименьшее значения. То есть

$$\exists x_1 \quad f(x_1)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=M,$$

$$\exists x_2 \quad f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=m.$$

a) Если $m=M$, то $f(x)\equiv const$, $f'(x)\equiv 0$ и в качестве c можно взять любую точку из (a,b).

b) Если $m\neq M$, то либо $x_1\in(a,b)$, либо $x_2\in(a,b)$. Пусть c та из них, что лежит внутри интервала. Тогда она является точкой экстремума, а значит по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Теорема доказана.

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема на* (a,b), *то* $\exists c\in(a,b) \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Доказательство. Обозначим $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Функция $g(x)$ дифференцируема на (a,b), непрерывна на $[a,b]$ и $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(a)$. Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)$ $g'(c)=0$. Но

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Следовательно, $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ и $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема на* (a,b) *и* $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=0$, *то* $f(x)\equiv const$ *на* $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $x\in(a,b]$. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на сегменте $[a,x]$. Тогда $\exists c\in(a,x)$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$. Отсюда $f(x)=f(a)$ $\forall x\in[a,b]$. Следовательно, $f(x)\equiv const$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы на* (a,b), *непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=g'(x)$, *то существует константа с такая, что* $f(x)\equiv g(x)+c$.

Доказательство. По условию имеем $\left(f(x)-g(x)\right)'\equiv 0$, следовательно $f(x)-g(x)\equiv const$. Следствие доказано.

Теорема Коши. *Если функции* $f(x), g(x)$ *прерывны на* $[a,b]$, *дифференцируемы на* (a,b) *и* $\forall x\in(a,b)$ $g'(x)\neq 0$, *то* $\exists c\in(a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

1) Покажем, что $g(b)-g(a)\neq 0$. Допустим противное, что

$g(b)-g(a)=0$. Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)\quad g'(c)=0$, что противоречит условию.

2) Введем функцию $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$.

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $F(a)=f(a),\quad F(b)=f(a)$. Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)\quad F'(c)=0$. Имеем

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если положить $g(x)=x$, то $g'(x)=1\neq 0$ и по доказанной теореме $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{1}$. Таким образом теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

Лемма. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на* $[a,b]$ *и* $f'(x)$ *принимает на концах сегмента* $[a,b]$ *значения разных знаков*, то $\exists c\in(a,b)\quad f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть $f'(a)<0$, а $f'(b)>0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса $\exists c\in[a,b]\quad f(c)=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$.

Если $c=a$, то по лемме 1, в силу того, что $f'(a)<0$, $\exists\delta>0\quad\forall x\in[a,b]\quad a<x<a+\delta\quad f(x)<f(c)$. Это противоречит тому, что $f(c)=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$. То есть $c\neq a$.

Если $c=b$, то по лемме 2, в силу того, что $f'(b)>0$, $\exists\delta>0\quad\forall x\in[a,b]\quad b-\delta<x<b\quad f(x)<f(c)$. Это опять противоречит тому, что $f(c)=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$. То есть $c\neq b$.

Следовательно, $c\in(a,b)$ и по теореме Ферма $f'(c)=0$. Случай, когда $f'(a)>0$, а $f'(b)<0$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Теорема Дарбу. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, то $f'(x)$ принимает на (a,b) все промежуточные значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Доказательство. Пусть $f'(a)=A,\quad f'(b)=B$. Докажем, что $f'(x)$ принимает все промежуточные значения между A и B.

Допустим, что $A<B$ и $A<C<B$. Введем функцию $F(x)=f(x)-C\cdot x$. Тогда $F'(x)=f'(x)-C$ и

$$F'(a)=A-C<0,\quad F'(b)=B-C>0.$$

В силу леммы $\exists c\in(a,b)\quad F'(c)=0$. Отсюда $f'(c)-C=0$ и $f'(c)=C$.

Случай $A>B$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b), непрерывна в точке a и существует $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=A\in\mathbb{R}$, то $f(x)$ дифференцируема в точке a и $f'(a)=A$.*

Доказательство. Пусть $x\in(a,b)$**.** К функции $f(x)$ на сегменте $[a,x]$ применим теорему Лагранжа. Имеем $\exists c(x)\in(a,x)$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c(x)).$$

Так как $a<c(x)<x$то при $x\to a\quad c(x)\to a$ и $c(x)\neq a$. По определению производной и первой теореме о пределе композиции имеем

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}f'(c(x))=\lim_{t\to a+0}f'(t)=A.$$

Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для правого конца сегмента.

Замечание. *Если функция дифференцируема на промежутке, то ее производная не может иметь устранимых разрывов и разрывов первого рода.*

Теорема. *Дифференцируемая на интервале* (a,b) *функция* $f(x)$ *возрастает на нем тогда и только тогда, когда* $f'(x)\geq 0$, *и убывает тогда и только тогда, когда* $f'(x)\leq 0$.

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ возрастает на (a,b) и $x_0\in(a,b)$. Тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\quad \forall x\neq x_0$ и, следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$.

2) Пусть $f'(x)\geq 0\quad \forall x\in(a,b)$ и пусть $x_1,x_2\in(a,,b)\quad x_1<x_2$. Применим к функции $f(x)$ на сегменте $[x_1,x_2]$ теорему Лагранжа. Тогда $\exists c\in(x_1,x_2)$, такое что $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geq 0$. Следовательно, $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Аналогично доказывается критерий убывания. Теорема доказана.

Замечание. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a (*в точке* b) *и возрастает на* (a,b), *то она возрастает и на* $[a,b)$ (*на* $(a,b]$).

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in[a,b)$ и $x_1<x_2$. Если $x_1>a$, то $f(x_1)\leq f(x_2)$ в силу возрастания функции на (a,b). Если $x_1=a$, то переходя к пределу в неравенстве $f(x)\leq f(x_2)\quad (a<x<x_2)$ при $x\to a+0$, получим $f(a)\leq f(x_2)$. Замечание доказано.

Теорема. *Дифференцируемая на интервале* (a,b) *функция строго возрастает на нем тогда и только тогда, когда:*

1) $f'(x)\geq 0\quad \forall x\in(a,b)$,

2) $\nexists(\alpha,\beta)\subset(a,b)\quad f'(x)\equiv 0\quad x\in(\alpha,\beta)$.

Доказательство. Докажем необходимость.

1) Пусть функция $f(x)$ строго возрастает, тогда она просто возрастает и $f'(x)\geq 0$.

Допустим, что $\exists(\alpha,\beta)\subset(a,b)\quad f'(x)\equiv 0\quad x\in(\alpha,\beta)$. Тогда $f(x)\equiv const\quad x\in(a,b)$, что противоречит строгому возрастанию.

2) Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда $f(x)$ возрастает. Допустим, что нестрого. Тогда $\exists x_1,x_2\in(a,b)\quad x_1<x_2\quad f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда $\forall x\,(x_1\le x\le x_2)\quad f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$. Следовательно, $f(x)\equiv const$ на (x_1,x_2) и $f'(x)\equiv 0$ на (x_1,x_2). Мы получили противоречие.

Теорема доказана.

3.3. Приложение производных к вычислению пределов.

Теорема (Правило Лопиталя $\frac{0}{0}$). *Пусть функции* $f(x),g(x)$ *дифференцируемы на* (a,b), $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$, $g'(x)\ne 0\quad x\in(a,b)$ *и* $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists a_1\in(a,b)\quad \forall x\in(a_1,b)\quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon .$$

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке b нулями. Т.е. положим $f(b)=0,\quad g(b)=0$. Доопределенные функции $f(x),\quad g(x)$ будут непрерывны в точке b. Пусть $x\in(a_1,b)$. Применим к сегменту $[x,b]$ и функциям $f(x),g(x)$ теорему Коши. Тогда $\exists x_0\in(x,b)$, такое что

$$\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Так как $f(b)=0,\quad g(b)=0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Так как $a_1 < x < x_0 < b$, то для точки x_0 выполняется неравенство

$$\left| \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - A \right| < \varepsilon .$$

Отсюда $\forall x \in (a_1, b)$ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$. По определению предела $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание 1. *Аналогичная теорема справедлива при* $x \to a+0$*, а, следовательно, и при* $x \to x_0$ $\quad (x_0 \in (a,b))$.

Замечание 2. *Теорема остаётся в силе, если* $A = \pm\infty$.

Теорема. *Пусть функции* $f(x), g(x)$ *дифференцируемы на* $(a, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ $\; x \in (a, +\infty)$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\left(A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \right)$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. На основании предыдущей теоремы имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{1}{x} = y\right)}{=} \lim_{y \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Теорема доказана.

Замечание. *Аналогичная теорема справедлива и при* $x \to -\infty$.

Теорема (Правило Лопиталя $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции* $f(x), g(x)$ *дифференцируемы на* (a, b), $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = +\infty$, $g'(x) \neq 0$ $\; x \in (a, b)$ *и* $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_1 \in (a,b) \quad \forall x \in (a_1,b) \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$, то $\exists a_2 \in (a_1,b) \quad \forall x \in (a_2,b) \quad g(x) > 0$ и $g(x) > g(a_1)$. К сегменту $[a_1,x]$и функциям $f(x), g(x)$ применим теорему Коши. Тогда $\exists x_0 \in (a_1,x)$ такое, что

$$\frac{f(x) - f(a_1)}{g(x) - g(a_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Так как для точки x_0 выполнено неравенство $\left|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(a_1)}{g(x) - g(a_1)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $g(x) - g(a_1) > 0$, то

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) < f(x) - f(a_1) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right),$$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) + f(a_1) < f(x) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) + f(a_1).$$

Так как $g(x) > 0$, то

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(a_1)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(a_1)}{g(x)}.$$

При $x \to b - 0$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(a_1)}{g(x)} \to A - \frac{\varepsilon}{2} > A - \varepsilon,$$

$$\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(a_1)}{g(x)} \to A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon.$$

Поэтому $\exists a_3 \in (a_2, b) \quad \forall x \in (a_3, b) \quad A - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$. Т.е.

$\forall x \in (a_3, b) \quad \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Теорема доказана.

Замечание. *Аналогичные теоремы справедливы и при* $x \to a+0, \quad x \to \pm\infty, \quad x \to x_0, \quad A \in \mathbb{R}, \quad A = \pm\infty.$

3.4. Старшие производные.

Определение. Второй производной функции $f(x)$ называется функция $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$. Если $f^{(n)}(x)$ уже определена, то $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$.

Определение. Нулевой производной по определению полагаем $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Примеры.

1) Если $f(x) = e^x$, то $f^{(n)}(x) = e^x$.

2) Если $f(x) = a^x$, то $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$.

3) Если $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$, то $f'(x) = n x^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ и т. д. $f^{(n)}(x) = n!$, $f^{(n+1)}(x) = 0$.

4) Если $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \notin N)$, то $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

5) Если $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$f''(x) = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$ и т. д. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

6) Если $f(x) = \cos x$, то $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

7) Если $f(x)=\ln x$, то $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$ и т. д. $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

8) Если $f(x)=\log_a x$, то $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n(\ln a)^n}$.

Отметим простейшие свойства n–ной производной:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$,

2) $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$,

3) $(f(ax+b))^{(n)}=f^{(n)}(ax+b)a^n$.

Теорема. *Если функции* $f(x), g(x)$ – n *раз дифференцируемы в точке* x *, то* $f(x)g(x)$ – n *раз дифференцируема в этой точке и*

$$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Эта формула называется формулой Лейбница.

Доказательство. Доказательство проведём по индукции.

1) При $n=1$

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\sum_{k=0}^{1}C_1^k f^{(1-k)}(x)g^{(k)}(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Формула верна.

2) Допустим, что формула верна для n. Докажем, что она верна и для $n+1$. Имеем

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(x)=\left((f\cdot g)^{(n)}(x)\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right)=$$

$$= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+C_n^1 f^{(n)}(x)g^{(1)}(x)+\cdots+C_n^n f^{(1)}(x)g^{(n)}(x)+$$
$$C_n^0 f^{(n)}(x)g^{(1)}(x)+\cdots+C_n^{n-1} f^{(1)}(x)g^{(n)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)=$$
$$= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+C_{n+1}^1 f^{(n)}(x)g^{(1)}(x)+\cdots+C_{n+1}^n f^{(1)}(x)g^{(n)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Теорема доказана.

3.5. Формула Тейлора.

Лемма 1. *Пусть* $P(x)$ *– многочлен степени* n, $x_0 \in R$. *Тогда многочлен* $P(x)$ *можно представить в виде*

$$P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n.$$

Такое представление единственно и

$$b_0=P(x_0),\quad b_1=P'(x_0),\quad b_2=\frac{P''(x_0)}{2!},\cdots,b_n=\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Доказательство.

1) Пусть $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Положим $y=x-x_0$, тогда $x=y+x_0$ и

$$P(x)=a_0(y+x_0)^n+a_1(y+x_0)^{n-1}+\ldots+a_n=b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots+b_ny^n=$$
$$=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n.$$

2) Пусть $P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n$. Тогда

$P(x_0)=b_0$,

$P'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+\ldots+n\,b_n(x-x_0)^{n-1}$,

$P'(x_0)=b_1$,

$P''(x)=2b_2+6b_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)\,b_n(x-x_0)^{n-2}$,

$P''(x_0)=2b_2,\quad b_2=\dfrac{P''(x_0)}{2!}$

и т.д.

$P^{(n)}(x)=n!b_n,$

$P^{(n)}(x_0)=n!b_n,\quad b_n=\dfrac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$

Мы получили, что для коэффициентов этого разложения справедлива формула

$$b_k=\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\quad \left(k=0,1,2,\cdots,n\right).$$

Отсюда следует единственность разложения. Теорема доказана.

Представление

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется формулой Тейлора для многочлена.

Лемма 2. *Пусть функция* $f(x)$ $\left(n-1\right)$ *раз дифференцируема на* $\left[a,b\right]$, *существует* $f^{(n)}(a)$ *и* $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$. *Тогда* $f(x)=o((x-a)^n)$ *при* $x\to a$.

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции.

1) Пусть $n=1$. Так как $f(a)=f'(a)=0$, то

$$0=f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}.$$

Следовательно, $f(x)=o(x-a)$ при $x\to a$.

2) Докажем переход от n к $n+1$. По условию имеем

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=f^{(n+1)}(a)=0.$$

Введем новую функцию $g(x)=f'(x)$. Для нее

$$g(a)=g'(a)=g''(a)=\ldots=g^{(n)}(a)=0$$

и по предположению индукции $g(x)=o((x-a)^n)$ $\left(x\to a\right)$. Следовательно, $f'(x)=o((x-a)^n)$ $\left(x\to a\right)$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in\ a,a+\delta\ \cap\ a,b\quad \left|f'\ x\ \right|\le\varepsilon\left|x-a\right|^n.$$

Пусть $x\in\ a,a+\delta\ \cap\ a,b$. Применим к функции $f(x)$ на сегменте $\left[a,x\right]$ теорему Лагранжа. Имеем $\exists c\in(a,x)$ такое, что $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$. Так как $f(a)=0$, то $f(x)=f'(c)(x-a)$. В силу того, что $c\in(a,x)$ $|f'(c)|\le\varepsilon|c-a|^n$. Отсюда $|f(x)|=|f'(c)||x-a|\le\varepsilon|c-a|^n|x-a|\le\varepsilon|x-a|^{n+1}$ и, следовательно, $f(x)=o((x-a)^{n+1})$ при $x\to a$. Теорема доказана.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда ее можно представить в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

Такое представление называется формулой Тейлора, $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора. Следующие теоремы посвящены оценкам остаточного члена.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на* $[a,b]$ *и существует* $f^{(n)}(a)$, *тогда при* $x\in[a,b]$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

и $R_n(x)=o((x-a)^n)$ *при* $x\to a+0$. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. Введем многочлен

$$P(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

По лемме 1 $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}=\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$, следовательно, $f^{(k)}(a)=P^{(k)}(a)$. Пусть $R_n(x)=f(x)-P(x)$. Тогда $R_n(a)=R_n'(a)=\ldots=R_n^{(n)}(a)=0$ и по лемме 2 $R_n(x)=o((x-a)^n)$ при $x\to a+0$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на* $[a,b]$ *и существует* $f^{(n)}(b)$. *Тогда* $\forall x\in[a,b]$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n+R_n(x)$$

и $R_n(x)=o((x-b)^n)$ *при* $x\to b-0$.

Доказательство. Сведем эту теорему к предыдущей. Пусть $g(x)=f(-x),\quad x\in[-b,-a]$. Тогда $g(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема на $[-b,-a]$, существует $g^{(n)}(-b)$. Тогда по предыдущей теореме будем иметь

$$g(x)=g(-b)+g'(-b)(x+b)+\frac{g''(-b)}{2!}(x+b)^2+\ldots+\frac{g^{(n)}(-b)}{n!}(x+b)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=o((x+b)^n)$ при $x\to -b+0$. Заменяя x на $-x$ получим

$$g(-x)=g(-b)+g'(-b)(-x+b)+\frac{g''(-b)}{2!}(-x+b)^2+\ldots+\frac{g^{(n)}(-b)}{n!}(-x+b)^n+$$
$$+R_n(-x).$$

Отсюда, учитывая что $g^k(x)=(-1)^k f^k(-x)$, будем иметь

$$f(x)=f(b)+f'(b)(-1)(-1)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(-1)^2(-1)^2(x-b)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(-1)^n(-1)^n(x-b)^n+R_n(-x)$$

и

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n+\tilde{R}_n(x),$$

где $\tilde{R}_n(x)=R_n(-x)=o((-x+b)^n)=o((x-b)^n)$ при $x\to b-0$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на* $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ *и существует* $f^{(n)}(x_0)$. *Тогда*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ *при* $x\to x_0$.

Теорема (Обобщенная теорема Коши). *Пусть функция* $f(x)$ n *раз дифференцируема на сегменте* $[a,b]$, $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *на интервале* (a,b) *существует* $f^{(n+1)}(x)$. *Пусть функция* $g(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема на* (a,b) *и* $g'(x)\neq 0\quad \forall x\in(a,b)$. *Тогда* $\exists c\in(a,b)$ *такое, что*

$$f(b)-\left[\,f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$

$$=\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Доказательство. Пусть

$$F(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Тогда $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). К функциям $F(x)$ и $g(x)$ применим теорему Коши. Имеем $\exists c\in(a,b)$ такое, что

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{F'(c)}{g'(c)}.$$

Отсюда

$$F(b)-F(a)=\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}F'(c).$$

Так как

$$F'(x)=f'(x)+\left(\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-f'(x)\right)+\left(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2-\frac{f''(x)}{1!}(b-x)\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n-\frac{f^{(n)}(x)}{n-1!}(b-x)^{n-1}\right)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n,$$

то $F'(c)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$ и формула принимает вид

$$F(b)-F(a)=\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Т.к.

$$F(b)-F(a)=f(b)-\left[\,f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right],$$

то

$$f(b)-\left[\,f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$

$$=\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Полагая* $g(x)=(b-x)^{n+1}$, *получим*

$$\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n=\frac{-(b-a)^{n+1}}{-(n+1)(b-c)^n}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

и

$$f(b)=\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Мы получили формулу Лагранжа.

Следствие 2. *Полагая* $g(x)=b-x$, *получим*

$$\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n=\frac{-(b-a)}{-1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n(b-a)$$

и

$$f(b)=\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n(b-a).$$

Мы получили формулу Коши.

Аналогичные формулы имеют место для разложения по правому концу сегмента и в его внутренней точке. Сформулируем окончательные теоремы.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ n *раз дифференцируема на* $[x_0,x]$ (*на* $[x,x_0]$), $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[x_0,x]$ (*на* $[x,x_0]$), *существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на* (x_0,x) (*на* (x,x_0)). *Тогда* $\exists c\in(x_0,x)$ $\left(\exists c\in(x,x_0)\right)$ *такое, что*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ n *раз дифференцируема на* $[x_0, x]$ (*на* $[x, x_0]$), $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[x_0, x]$ (*на* $[x, x_0]$), *существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на* (x_0, x) (*на* (x, x_0)). *Тогда* $\exists c \in (x_0, x)$ $(\exists c \in (x, x_0))$ *такое, что*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)(x - c)^n.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

Примеры разложение функций по формуле Тейлора.

1) Пусть $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$. Тогда $f^{(n)}(x_0) = e^{x_0} = e^0 = 1$ и формула Тейлора принимает вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

или в сокращенной записи

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

2) Пусть $f(x) = \sin x$ и $x_0 = 0$. Тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n}(x).$$

3) Пусть $f(x) = \cos x$ и $x_0 = 0$. Тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x).$$

4) Пусть $f(x)=\ln(1+x)$ и $x_0=0$. Тогда

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ и формула Тейлора принимает вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+R_n(x).$$

5) Пусть $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ и $x_0=0$. Тогда

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}=C_{\alpha}^{n}$ и

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{a(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+R_n(x)$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}x^k+R_n(x).$$

В частном случае, когда $\alpha=n$ $R_n(x)=0$ и формула Тейлора превращается в бином Ньютона.

3.6. Исследование функции с помощью производной.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Пусть x_0 – внутренняя точка промежутка P и в этой точке функция имеет экстремум (*$\max$ *или* $\min$*). Тогда в точке x_0 производная либо не существует, либо равна нулю.*

Доказательство вытекает из теоремы Ферма.

Определение. Если $f'(x_0)=0$ то точка x_0 называется стационарной.

Определение. Если в точке x_0 производная не существует, то точка x_0 называется критической.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть* x_0 *– внутренняя точка промежутка* P, $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и дифферн-цируема в некоторой проколотой окрестности* $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ *точки* x_0. *Если при этом*

$$f'(x)\geq 0 \quad x\in(x_0-\delta, x_0),$$
$$f'(x)\leq 0 \quad x\in(x_0, x_0+\delta),$$

то x_0 *– точка максимума. Если*

$$f'(x)>0 \quad x\in(x_0-\delta, x_0),$$
$$f'(x)<0 \quad x\in(x_0, x_0+\delta),$$

то x_0 *– точка строгого максимума.*

Доказательство. Так как $f'(x)\geq 0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$, то функция $f(x)$ возрастает на $(x_0-\delta, x_0]$. Следовательно, $f(x)\leq f(x_0)$ при $x\in(x_0-\delta, x_0]$.

Так как $f'(x)\leq 0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то $f(x)$ убывает на $[x_0, x_0+\delta)$. Следовательно, $f(x)\leq f(x_0)$ при $x\in[x_0; x_0+\delta)$.

Мы доказали, что x_0 – точка максимума.

Для строгого максимума доказательство аналогично. Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для минимума.

Теорема (второе достаточное условие). *Пусть* x_0 *– внутренняя точка промежутка* P, *функция* $f(x)$ *дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0 *и существует* $f''(x_0)$. *Пусть, кроме того,* $f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0$.

1) Если $f''(x_0)<0$*, то* x_0 *– точка строгого максимума.*

2) Если $f''(x_0)>0$*, то* x_0 *– точка строгого минимума.*

Доказательство.

1) Пусть $f''(x_0)<0$. Применим лемму, предшествующую теореме Ферма, к функции $f'(x)$. Так как $f''(x_0)<0$, то $\exists\delta>0$ такое, что

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad f'(x) > f'(x_0) = 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Отсюда по предыдущей теореме x_0 – точка строгого локального максимума.

2) Случай $f''(x_0) > 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема (третье достаточное условие). *Пусть* x_0 *– внутренняя точка промежутка* P, *функция* $f(x)$ $n-1$ *раз дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0, *существует* $f^{\,n}\ \ x_0$ *и*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0.$$

1) *Если* n *– нечетное, то в точке* x_0 *экстремума нет.*

2) *Если* n *– четное и*

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$, *то в точке* x_0 *строгий максимум.*

b) $f^{(n)}(x_0) > 0$, *то в точке* x_0 *строгий минимум.*

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Учитывая условие теоремы, эту формулу можно переписать так:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right).$$

Так как $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, то $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. $\alpha(x) = \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ – бесконечно малая функция.

Итак, мы получили, что $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right)$.

1) Пусть n – нечетное число. Допустим, что $f^{(n)}\left(x_0\right) > 0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} + \alpha(x)\right) > 0$, следовательно,

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) > 0 .$$

Тогда при

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) - f(x_0) < 0,$$
$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f(x) - f(x_0) > 0.$$

Следовательно, в точке x_0 экстремума нет.

Аналогично рассматривается случай $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2) Пусть n – четное число и $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \quad \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \alpha(x) > 0 .$$

Так как $(x - x_0)^n > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Следовательно, в точке x_0 строгий минимум.

Аналогично рассматривается случай $f^{(n)}(x_0) < 0$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, $x_1, x_2, ..., x_k$ *– стационарные или критические точки этой функции, принадлежащие интервалу* (a,b). *Тогда*

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max\left\{ f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k), f(b) \right\},$$
$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min\left\{ f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k), f(b) \right\}.$$

Доказательство очевидно.

3.7. Исследование функции на выпуклость.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке P.

Определение. Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз, если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \forall x_1, x_2 \in P \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) .$$

Называется выпуклой вверх, если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \forall x_1, x_2 \in P \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) .$$

Линейная функция удовлетворяет обоим неравенствам и, следовательно, является одновременно выпуклой и вверх и вниз.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вниз, если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 > 0\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ \forall x_1, x_2 \in P\ x_1 \neq x_2 \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Называется строго выпуклой вверх (см. Рис. 4), если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 > 0\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ \forall x_1, x_2 \in P\ x_1 \neq x_2 \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

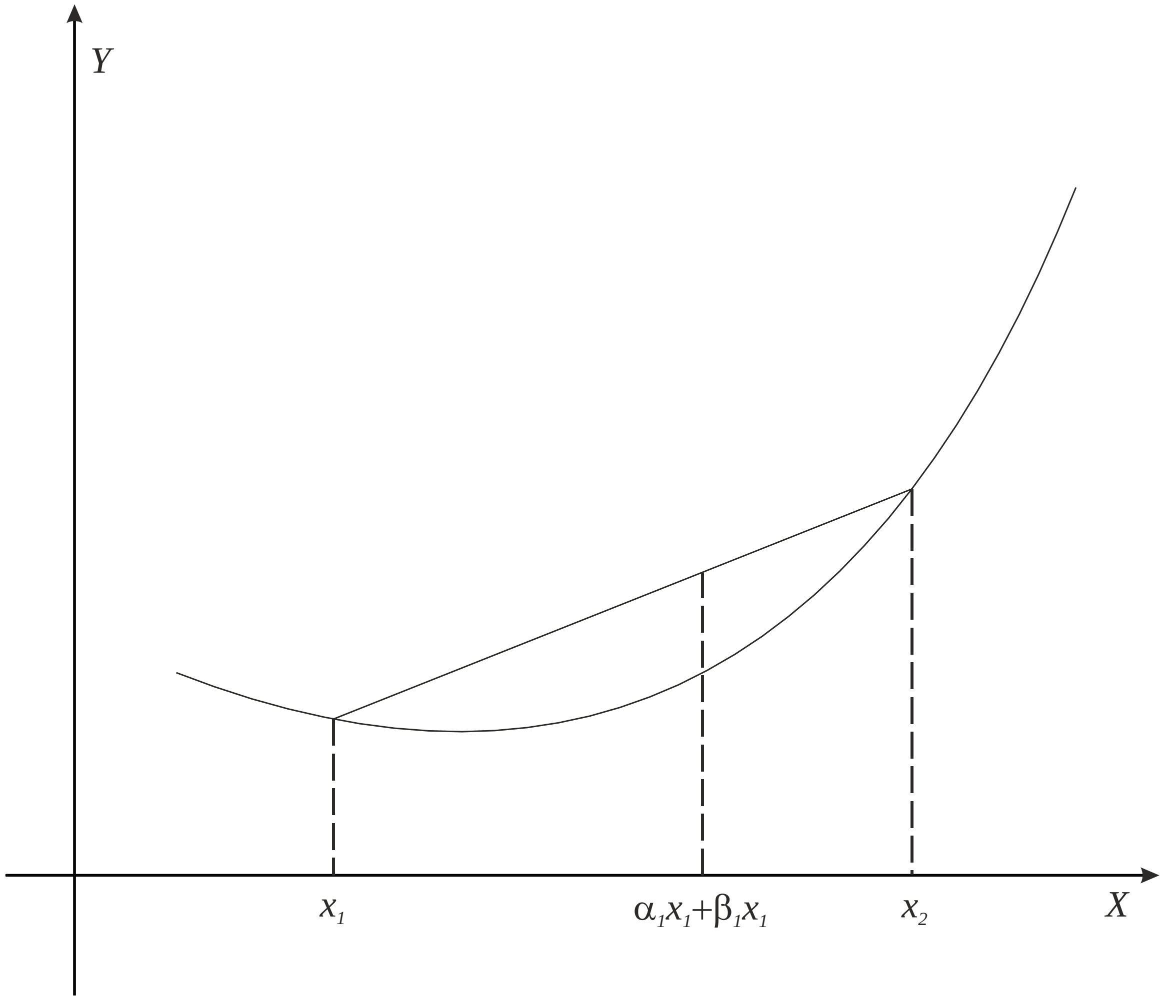

Рис. 3.

Ниже мы докажем теоремы для нестрогой выпуклости. Для строгой доказательства аналогичны.

В определении выпуклости несущественно требовать $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ или $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Если $x_1 = x_2$, то неравенство автоматически выполняется, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $x_1 \neq x_2$.

Придадим условию выпуклости вниз другую форму. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $x_1 < x_2$. Возьмем произвольное число x такое, что $x_1 < x < x_2$. Найдем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, для которых $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases}.$$

Решая ее, получим $\alpha_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\alpha_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя эти значения в условие выпуклости будем иметь

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Преобразуем это неравенство следующим образом

$$(x_2 - x_1) f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$\left[(x_2 - x) + (x - x_1)\right] f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$(x_2 - x)\big(f(x) - f(x_1)\big) \le (x - x_1)\big(f(x_2) - f(x)\big),$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Таким образом справедлива теорема.

Теорема. *Функция* $f(x)$ *выпукла вниз тогда и только тогда, когда* $\forall x_1, x, x_2 \in P$ *таких, что* $x_1 < x < x_2$, *выполняется неравенство*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Теорема. *Дифференцируемая на промежутке* P *функция* $f(x)$ *выпукла вниз на нем тогда и только тогда, когда* $f'(x)$ *возрастает.*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз, $x_1, x_2 \in P$ $x_1 < x_2$. Тогда $\forall x$ $x_1 < x < x_2$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $x \to x_1 + 0$ получим

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Переходя теперь к пределу при $x \to x_2 - 0$ будем иметь

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2).$$

Отсюда $f'(x_1) \le f'(x_2)$. Следовательно функция $f'(x)$ возрастает.

2) Пусть функция $f'(x)$ возрастает. По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ такое, что $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$. Аналогично $\exists c_2 \in (x, x_2)$ такое, что $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$. Так как $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) \le f'(c_2)$ и

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Дифференцируемая функция строго выпукла вниз тогда и только тогда, когда ее производная строго возрастает.*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ строго выпукла вниз. Тогда ее производная по предыдущей теореме возрастает. Допустим, что возрастание не строгое. Тогда $\exists (\alpha, \beta) \subset P$, такое что $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f'(x) = c$, но тогда $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) = cx + d$, что противоречит строгой выпуклости.

2) Пусть функция $f'(x)$ строго возрастает. Точно так же, как и в предыдущей теореме для любых чисел $x_1, x, x_2 \in P$ таких, что $x_1 < x < x_2$

$$\exists c_1 \quad x_1 < c_1 < x \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$$

и

$$\exists c_2 \quad x < c_2 < x_2 \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Так как $f'(x)$ строго возрастает и $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) < f'(c_2)$, следовательно,

$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. То есть, $f(x)$ строго выпукла вниз.

Теорема доказана.

Теорема. *Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f''(x)\ge 0$.*

Теорема. *Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ строго выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f''(x)\ge 0$ и $\nexists(\alpha,\beta)\subset P \quad f''(x)\equiv 0 \quad x\in(\alpha,\beta)$.*

Теорема. *Дифференцируемая функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда её график лежит выше любой касательной (см. Рис. 4).*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз и дифференцируема. Пусть точка $x_0\in P$. Рассмотрим функцию $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, график которой является касательной в точке x_0. Докажем, что $f(x)\ge g(x)$, то есть, что

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\ge 0.$$

Применяя теорему Лагранжа получим равносильные неравенства

$$f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\ge 0,$$

$$\left(f'(c)-f'(x_0)\right)(x-x_0)\ge 0.$$

Так как точка c лежит между x и x_0, а функция $f'(x)$ возрастает, то:

a) Если $x>x_0$, то $c>x_0$,

$$\begin{cases} f'(c)-f'(x_0)\ge 0 \\ x-x_0>0 \end{cases}$$

и неравенство выполняется.

b) Если $x<x_0$, то $c<x_0$,

$$\begin{cases} f'(c)-f'(x_0)\le 0 \\ x-x_0<0 \end{cases}$$

и неравенство выполняется.

c) Если $x=x_0$, то $f(x_0)=g(x_0)$ и неравенство также выполняется.

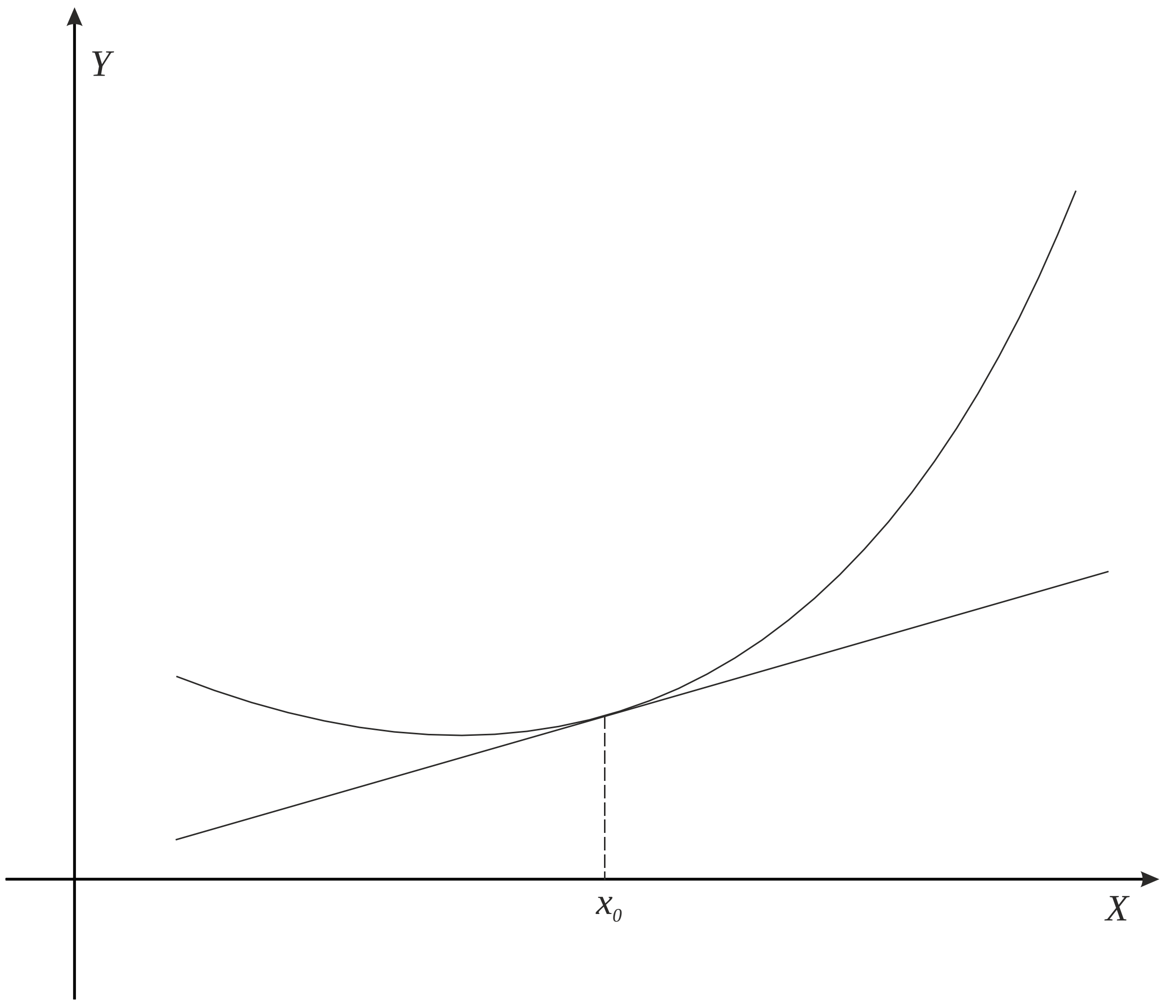

Рис. 4.

2) Пусть график лежит выше любой касательной, то есть
$\forall x_0\ \forall x \quad f(x) \ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ или $f(x)-f(x_0) \ge f'(x_0)(x-x_0)$.
Пусть $x_1 < x_0 < x_2$ произвольные точки промежутка. Тогда для чисел x_0, x_1
$f(x_1)-f(x_0) \ge f'(x_0)(x_1-x_0)$. Следовательно,

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le f'(x_0).$$

Для чисел x_0, x_2 $\quad f(x_2)-f(x_0) \ge f'(x_0)(x_2-x_0)$. Следовательно,

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \ge f'(x_0).$$

Следовательно, $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ и функция выпукла вниз.

Теорема доказана.

Теорема (Неравенство Йенсена). *Если функция* $f(x)$ *выпукла вниз на* P*, то* $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1 \quad \forall x_1, x_2 ... x_n \in P$ *выполняется неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Это неравенство называется неравенством Йенсена.

Доказательство. Доказательство проведём методом индукции.

1) Если $n=1$, то неравенство принимает вид $f(x_1) \leq f(x_1)$.

2) Допустим, что неравенство справедливо для n и докажем, что оно справедливо для $n+1$. Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 1 \quad x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \in P.$$

Обозначим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Рассмотрим два случая.

a) Пусть $\alpha = 0$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, $\alpha_{n+1} = 1$ и неравенство очевидно.

b) Пусть $\alpha > 0$. Так как $\alpha + \alpha_{n+1} = 1$, то

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f\left[\alpha\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right] =$$

$$= f(\alpha x + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha f(x) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \alpha f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leq$$

$$\leq \alpha\left[\frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} f(x_n)\right] + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Теорема доказана.

Аналогичные теоремы справедливы для выпуклых вверх функций.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке P.

Определение. Точка $x_0 \in P$ называется точкой перегиба, если существует $\delta > 0$ такое, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция выпукла вниз, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вверх или наоборот.

Если в точке перегиба x_0 существует касательная, то с одной стороны она будет выше графика, а с другой ниже, то есть в точке x_0 касательная пересекает график.

Теорема. *Точка x_0 является точкой перегиба дважды дифференцируемой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 слева от нее $f''(x) \le 0$, а справа $f''(x) \ge 0$, или наоборот. Если в точке перегиба вторая производная непрерывна, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство очевидно.

3.8. Асимптоты.

Определение. Вертикальная прямая $x = x_0$ называется асимптотой функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (при $x \to x_0 + 0$), если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty\right)$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0$.

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема. *Прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда* $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Доказательство.

1) Пусть $y = kx + b$ – асимптота функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[f(x) - (kx + b) \right] + (kx + b)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\left[f(x)-(kx+b)\right]+b\right)=b.$$

2) Пусть $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$. Следовательно, $y=kx+b$ − асимптота.

Теорема доказана.

3.9. Дифференциал функции.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная функция $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x$ (см. Рис. 5).

Для дифференциала используют обозначение $df\quad x_0$. По определению $\left(df(x_0)\right)(\Delta x)=f'(x_0)\Delta x$. Рассмотрим тождественную функцию $i(x)\equiv x$. Для дифференциала этой функции имеем $di(x_0)=i$ или $dx=i$. Используя это обозначение можно написать $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

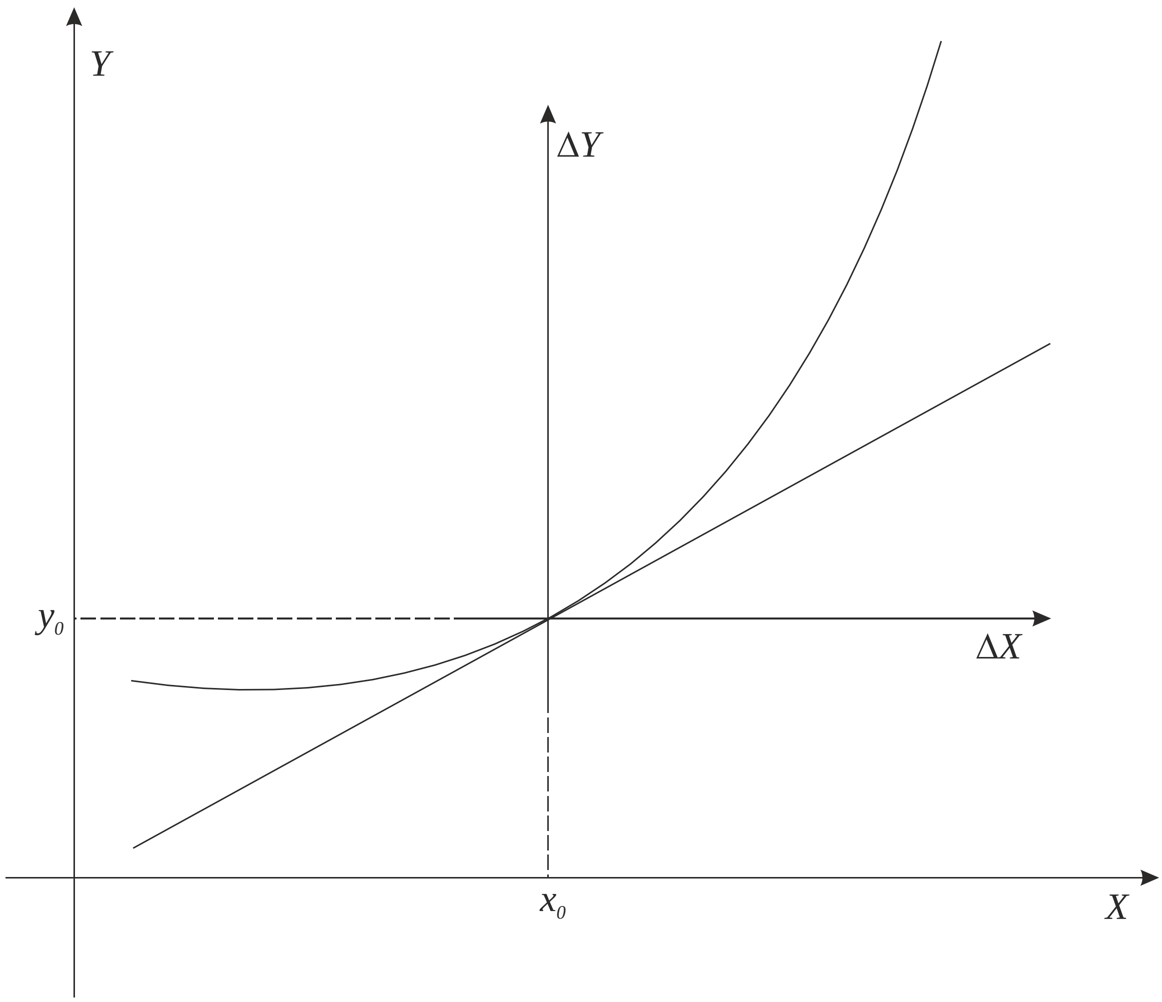

Рис. 5.

Условие дифференцируемости функции $f(x)$ можно переписать в виде

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right] = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x) \right] - \left[f'(x)\Delta x \right]}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x) \right) - df(x)(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Легко доказать следующие свойства дифференциала:

1) $d\left(cf\left(x\right)\right)=cd\left(f\left(x\right)\right)$,

2) $d\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=d\left(f\left(x\right)\right)+d\left(g\left(x\right)\right)$,

3) $d\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=g\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)d\left(g\left(x\right)\right)$,

4) $d\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\dfrac{g\left(x\right)df\left(x\right)-f\left(x\right)dg\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$,

5) $d\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)=df\left(g\left(x\right)\right)dg\left(x\right)$.

По аналогии с производной n–ного порядка можно определить дифференциал n–ного порядка

$$d^n f\left(x\right)=f^{(n)}\left(x\right)\left(dx\right)^n.$$

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – М.: Наука, 1981.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. – М.: Наука, 1982.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. – М.: Наука, 1969.
6. Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Демидович Б.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел, непрерывность, дифференцируемость. – Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003.