МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. КОЗАК

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (семестр 2)

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2020

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161 я73
К59

Козак, А.В.
К59 Лекции по математическому анализу (семестр 2) : учебно-методическое пособие/ А.В. Козак ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону, 2020. – 104 с.

В методическом пособии излагаются следующие разделы математического анализа: неопределенный интеграл, определенный интеграл, числовые ряды, дифференцирование функций нескольких переменных. Изложение основано на курсе лекций автора для студентов прикладного отделения института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета и соответствует материалу второго семестра.

Для преподавателей, студентов и старшеклассников.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161 я73

Оглавление

Введение

Математический анализ является основой математического образования при подготовке специалистов любого естественно-научного направления. Первоначальное знакомство с предметом сопряжено с определенными трудностями, связанными с многообразием понятий и сложными логическими связями между ними. По математическому анализу имеется обширная литература. В ней используются разнообразные подходы к одним и тем же понятиям, различное построение материала. Объем, как правило, существенно превышает учебные программы. Все это значительно затрудняет самостоятельное изучение математического анализа по учебникам на младших курсах. Предлагаемое учебное пособие основано на реальных лекциях, читавшихся в течение более 25 лет на отделении прикладной математики механико-математического факультета Ростовского государственного университета (ныне Южный федеральный университет). Материал данного учебного пособия соответствует программе второго семестра. Изложение носит сжатый конспективный характер.

4. Неопределенный интеграл

4.1. Первообразная.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке P.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке P, если $\forall x \in P \quad F'(x) = f(x)$.

Теорема. *Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке P, то $F(x)+C$ также является первообразной, и любая ее первообразная может быть представлена в таком виде.*

Доказательство.

1) Если $F(x)$– первообразная функции $f(x)$, то

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

Следовательно, $F(x)+C$ также первообразная.

2) Если $G(x)$ – еще одна первообразная, то $G'(x) = f(x) = F'(x)$, $G'(x) - F'(x) = 0$, $G(x) - F(x) = C$, $G(x) = F(x) + C$. Что и требовалось доказать.

Определение. Общий вид первообразной для функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается: $\int f(x)dx$. Т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

4.2. Вычисление простейших интегралов.

Справедливость следующих формул вытекает непосредственно из определения интеграла дифференцированием:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq -1,$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

5) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

6) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

7) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

8) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

9) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C;$$

11) $$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$$

12) $$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

13) $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

14) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

15) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

4.3. Свойства интеграла.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

2) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

3) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

4) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $a \neq 0$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Теорема. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы, и функция $u(x)v'(x)$ – интегрируема, то $u'(x)v(x)$ – также интегрируема и*

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Доказательство. Так как функции $u(x), v(x)$ – дифференцируемы, то

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Следовательно,

$$\int u'(x)v(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u(x)v'(x)dx$$

и

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть $F'(x) = f(x)$, $\varphi(x)$ – дифференцируема и имеет смысл композиция $F(\varphi(x))$, тогда*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

(формула замены переменной).

Доказательство. Действительно,

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Что и требовалось доказать.

4.4 Часто встречающиеся интегралы.

В этом параграфе мы найдем интегралы, которые часто используются при вычислениях.

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0.$

Действительно

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

2) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ a\neq 0.$

Доказательство аналогично предыдущему.

3) $\int \frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C.$

Имеем

$$\int \frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{a^2\pm x^2}==\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a>0.$

Доказательство такое же, как и для первого интеграла.

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ a\neq 0.$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C,\ a\neq 0.$

Доказательство такое же, как и для третьего интеграла.

7) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c,\ a>0.$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$I=\int \sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Отсюда

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Что и требовалось доказать.

8) $\int\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, a \neq 0.$

Доказывается так же, как и в предыдущем случае.

4.5. Интегрирование рациональных функций.

Определение. Рациональной функцией называется отношение двух многочленов. Т.е. $Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где p, q – многочлены.

Определение. Рациональная дробь называется правильной, если $\deg p < \deg q$.

Лемма 1. *Любую рациональную функцию можно представить в виде многочлена и правильной дроби.*

Доказательство. Пусть $Q(x)$ – рациональная функция. Разделим многочлен p на многочлен q с остатком, т.е. представим его в виде $p(x) = q(x)\cdot s(x) + r(x)$, где $\deg r < \deg q$. Отсюда

$$Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)s(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x).}$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Любой многочлен с вещественными коэффициентами можно представить в виде*

$$P(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}...(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}...(x^2 + p_lx + q_l)^{n_l},$$

где дискриминанты квадратных трехчленов отрицательны. Причем такое представление единственно.

Доказательство этого утверждения приводится в курсе алгебры.

Определение. Дроби вида $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $m, n \in N$, $A, B \in R$ и дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, называются простыми.

Лемма 3. *Пусть* $p(x)=(x-\alpha)^m p_1(x),$ *где* $p_1(\alpha)\neq 0$ *и пусть* $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ *– правильная дробь, тогда эту дробь можно представить в виде*

$$\frac{q(x)}{p(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^m}+\frac{q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}p_1(x)},$$

где последняя дробь правильная.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{q(x)}{(x-\alpha)^m p_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^m}=\frac{q(x)-A\cdot p_1(x)}{(x-\alpha)^m p_1}=$$

(Потребуем, чтобы числитель последней дроби обращался в ноль в точке α, т.е. чтобы $q(\alpha)-Ap_1(\alpha)=0$. Для этого достаточно положить $A=\dfrac{q(\alpha)}{p_1(\alpha)}$. В этом случае $q(x)-A\cdot p_1(x)=\left(x-\alpha\right)q_1\left(x\right))$

$$=\frac{(x-\alpha)q_1(x)}{(x-\alpha)^m p_1(x)}=\frac{q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}p_1(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Любую правильную дробь* $\dfrac{q(x)}{(x^2+px+q)^m p_1(x)}$*, где D<0 и* $p_1(x)$ *не делится на* x^2+px+q*, можно представить в виде*

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}+\frac{q_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}p_1(x)}.$$

Причем последняя дробь также правильная.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{q(x)}{(x^2+px+q)^m p_1(x)}-\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}=\frac{q(x)-(Ax+B)\cdot p_1(x)}{(x^2+px+q)^m p_1(x)}.$$

Пусть $x^2+px+q=(x-z)(x-\overline{z}),$ где $z=a+ib,$ $\overline{z}=a-ib$, $b\neq 0$.

Потребуем, чтобы числитель последней дроби обращался в ноль в точках z и $\overline{z}$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} q(z)-(Az+B)\cdot p_1(z)=0 \\ q(\overline{z})-(A\overline{z}+B)\cdot p_1(\overline{z})=0 \end{cases}.$$

Перепишем ее в виде

$$\begin{cases} Az+B=\dfrac{q(z)}{p_1(z)}=0 \\ A\bar{z}+B=\dfrac{q(\bar{z})}{p_1(\bar{z})}=0 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения второе будем иметь, $A(z-\bar{z})=\dfrac{q(z)}{p_1(z)}-\dfrac{q(\bar{z})}{p_1(\bar{z})}$.

Так как $z-\bar{z}=2bi$ и $\dfrac{q(z)}{p_1(z)}-\dfrac{q(\bar{z})}{p_1(\bar{z})}=2ci$, то $A=\dfrac{2ci}{2bi}=\dfrac{c}{b}\in R$. Далее, складывая уравнения системы, получим $2B+A(z+\bar{z})=\dfrac{q(z)}{p_1(z)}+\dfrac{q(\bar{z})}{p_1(\bar{z})}=2d\in R$.

Следовательно, $B=-Aa+d\in R$. Возвращаясь к исходной дроби получим

$$\frac{q(x)-(Ax+B)\,p_1(x)}{(x^2+px+q)^m\,p_1(x)}=\frac{(x^2+px+q)q_1(x)}{(x^2+px+q)^m\,p_1(x)}=\frac{q_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\,p_1(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Любую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и простых дробей.*

Доказательство вытекает из лемм 1 – 4.

Найдем интегралы от простых дробей.

1) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C;$

2) $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-\alpha)^m}=\frac{A}{(1-m)(x-\alpha)^{m-1}}+C;$

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=$

(Так как D<0, то

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}=(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}=(x+\frac{p}{2})^2+\frac{-D}{4}=y^2+a^2,$$

где $a=\dfrac{\sqrt{-D}}{2}$, $y=x+\dfrac{p}{2}$)

$$=\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx=\int\frac{A(y-\frac{p}{2})+B}{y^2+a^2}dy=\int\frac{Ay+B_1}{y^2+a^2}dy=\int\frac{Aydy}{y^2+a^2}+\int\frac{B_1dy}{y^2+a^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(y^2)}{y^2+a^2}+\frac{B_1}{a^2}\int\frac{dy}{\left(\frac{y}{a}\right)^2+1}=\frac{A}{2}\ln(y^2+a^2)+\frac{B_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln((x+\frac{p}{2})^2+a^2)+\frac{B_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{B_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C;$$

4) $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx=$ (для $m>1$)

$$=\int\frac{Ax+B}{((x+\frac{p}{2})^2+a^2)^m}dx=\int\frac{Ay+B_1}{(y^2+a^2)^m}dy=A\int\frac{ydy}{(y^2+a^2)^m}+B_1\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(y)^2}{(y^2+a^2)^m}+B_1I_m=\frac{A}{2(1-m)(y^2+a^2)^{m-1}}+B_1I_m\ ,$$

где $I_m=\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}$. Для последнего интеграла выведем рекуррентную формулу. Имеем

$$I_m=\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}=\int\frac{y'dy}{(y^2+a^2)^m}=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}-\int y\cdot(-m\cdot(y^2+a^2)^{-m-1}\cdot 2y)dy=$$

$$=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+\int\frac{2my^2}{(y^2+a^2)^{m+1}}dy=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+2m\int\frac{(y^2+a^2)-a^2}{(y^2+a^2)^{m+1}}dy=$$

$$=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+2m\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}-2ma^2\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{m+1}}=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+2mI_m-2ma^2I_{m+1}.$$

Т.е.

$$I_m=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+2mI_m-2ma^2I_{m+1}\,.$$

Отсюда

$$2ma^2I_{m+1}=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+(2m-1)I_m$$

и

$$I_{m+1}=\frac{y}{2ma^2(y^2+a^2)^m}+\frac{(2m-1)}{2ma^2}I_m.$$

Мы получили рекуррентное соотношение, которое позволяет выразить интеграл I_m для любого $m>1$ через I_1.

4.6. Интегралы, сводящиеся к интегралам от рациональных функций.

1) **Интегрирование тригонометрических выражений.**

В этом пункте мы рассмотрим интеграл вида: $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(x,y)$ рациональная функция двух переменных. Используя формулы универсальной подстановки $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, сделаем замену переменной $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Так как $x=2\operatorname{arctg}t$, то $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ и

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\dfrac{2}{1+t^2}dt=\int Q(t)dt$. Мы получили интеграл от рациональной функции.

2) **Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где $R(x,y)$ рациональная функция двух переменных.**

Сделаем замену $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$. Отсюда $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$, $ax+b=cxt^n+dt^n$, $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}$ и $dx=P(t)dt$, где P – некоторая рациональная функция. Мы получим

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\cdot P(t)dt=\int Q(t)dt.$$

3**) Интегрирование биномиального дифференциала** $\int x^p(a+bx^q)^r\,dx$**, где** $p,q,r\in\mathbb{Q}$**,** $a,b\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Пусть $r=n\in Z$, $p=\dfrac{m}{l}$, $q=\dfrac{k}{l}$. Сделаем замену $\sqrt[l]{x}=t$. Отсюда $x=t^l$ и $dx=lt^{l-1}dt$. Следовательно,

$$\int x^p(a+bx^q)^n\,dx=\int t^m(a+bt^k)^n\,lt^{l-1}dt.$$

Мы свели исходный интеграл к интегралу от рациональной функции.

б) Пусть $r\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, тогда полагая $x^q=t$, получим $x=t^{\frac{1}{q}}$, $dx=\dfrac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$ и $\int x^p(a+bx^q)^r\,dx=\int t^{\frac{p}{q}}(a+bt)^r\dfrac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt=\dfrac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}-1}(a+bt)^r\,dt$. Допустим, что $\dfrac{p+1}{q}=m\in Z$, $r=\dfrac{k}{l}$. Тогда $\dfrac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}-1}(a+bt)^r\,dt=\dfrac{1}{q}\int t^{m-1}(\sqrt[l]{a+bt})^k\,dt$. Последний интеграл представляет собой интеграл вида $\int R\left(t,\sqrt[l]{\dfrac{at+b}{ct+d}}\right)dt$ и может быть сведен к интегралу от рациональной функции заменой $u=\sqrt[l]{a+bt}$.

в) Пусть $r\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ и $\dfrac{p+1}{q}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Преобразуем интеграл следующим образом $\int x^p(a+bx^q)^r\,dx=\dfrac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}-1}(a+bt)^r\,dt=\dfrac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}+r-1}\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^r dt$.

Допустим, что $\dfrac{p+1}{q}+r=m\in\mathbb{Z}$ и $r=\dfrac{k}{l}$. Тогда

$\dfrac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}+r-1}\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^r dt=\dfrac{1}{q}\int t^{m-1}\left(\sqrt[l]{\dfrac{a+bt}{t}}\right)^k dt$. Последний интеграл заменой $u=\sqrt[l]{\dfrac{a+bt}{t}}$ сводится к интегралу от рациональной функции.

Замечание. Доказано, что $\int x^p(a+bx^q)^r\,dx$ выражается через элементарные функции только в описанных выше трех случаях.

4) **Нахождение интегралов вида** $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$**.**

а) Пусть дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c неотрицательный. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=|x-x_2|\cdot\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}\,.$$

Мы получили интеграл $\int R(x,|x-x_2|\cdot\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}})dx$, рассмотренный в пункте 2.

б) Пусть дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c отрицательный. В этом случае $a>0$, иначе область определения подынтегральной функции окажется пустой. Введем новую переменную формулой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$. Отсюда $ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx+ax^2$, $x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}=r(t)$ и $dx=P(t)dt$, где $P(t)$ - некоторая рациональная функция, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\,\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}=q(t)$. Делая замену, получим интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R(r(t),q(t))\cdot P(t)dt$ от рациональной функции.

5. Определенный интеграл.

5.1. Интеграл Римана.

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$.

Определение. Упорядоченный набор вещественных чисел $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ называется разбиением сегмента $[a,b]$, если $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

Определение. Сегмент $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,...,\ n-1)$ называется частичными сегментом разбиения.

Обозначим через $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ длину частичного сегмента.

Определение. Диаметром разбиения P называется число $d(P)=\max\limits_{0\le k<n}\Delta x_k$.

Пусть задано некоторое разбиение P сегмента $[a,b]$. На каждом частичном сегменте $[x_k,x_{k+1}]$ выберем точку ξ_k.

Определение. Интегральной суммой называется число $S(f,P,\overline{\xi})=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$, где $\overline{\xi}=(\xi_0,\xi_1,...,\xi_{n-1})$.

Определение. Число I называется интегралом Римана от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$, если $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall P\quad d(P)<\delta\quad\forall\overline{\xi}$ $\left|S(f,P,\overline{\xi})-I\right|<\varepsilon$.

Если выполняются указанные условия, то будем говорить, что $I=\lim\limits_{d(P)\to 0}S(f,P,\overline{\xi})$. Можно доказать, что свойства такого предела аналогичны свойствам предела функции.

Теорема. *Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon=1$. Тогда

$$\exists\delta\ \ \forall P\ \ d(P)<\delta\ \ \forall\overline{\xi}\quad\left|S(f,P,\overline{\xi})-I\right|<1.$$

Зафиксируем разбиение P, диаметр которого $d(P)<\delta$. Тогда

$$I-1<S(f,P,\overline{\xi})<I+1.$$

Пусть $[x_l, x_{l+1}]$ – произвольный частичный сегмент. Докажем, что функция $f(x)$ ограничена на нем. Представим интегральную сумму в виде

$$S(f,P,\overline{\xi})=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k\neq l} f(\xi_k)\Delta x_k+f(\xi_l)\Delta x_l .$$

Будем считать, что числа ξ_k $(k\neq l)$ фиксированы, а число ξ_l переменное. Пусть $C=\sum_{k\neq l} f(\xi_k)\Delta x_k$. Тогда

$$I-1<f(\xi_l)\Delta x_l+C<I+1,$$

$$I-1-C<f(\xi_l)\Delta x_l<I+1-C,$$

$$\frac{I-1-C}{\Delta x_l}<f(\xi_l)<\frac{I+1-C}{\Delta x_l} \qquad \left(\forall \xi_l\in[x_l, x_{l+1}]\right).$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена на $[x_l, x_{l+1}]$. Так как $f(x)$ ограничена на каждом частичном сегменте, то она ограничена и на $[a,b]$. Что и требовалось доказать.

Замечание. *В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные функции.*

Через $R[a,b]$ обозначим класс всех функций, для которых существует интеграл Римана на сегменте $[a,b]$.

5.2. Суммы Дарбу и их свойства.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a,b]$, P – произвольное разбиение сегмента $[a,b]$. Пусть

$$m_k=\inf_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x), \qquad M_k=\sup_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Определение. Верхней суммой Дарбу называется число

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k .$$

Определение. Нижней суммой Дарбу называется число

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k .$$

Свойства сумм Дарбу.

1) $\underline{S}(f,P)\le S(f,P,\overline{\xi})\le \overline{S}(f,P)$.

Доказательство. Так как $m_k\Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k\Delta x_k$, то просуммировав эти неравенства по $k=0,1,\dots,n-1$, получим требуемые неравенства.

2) *Пусть разбиение P' получено из разбиения P добавлением одной точки, тогда:*

$$\overline{S}(f,P')\le \overline{S}(f,P),$$
$$\underline{S}(f,P')\ge \underline{S}(f,P).$$

Доказательство. Пусть точка добавлена к частичному интервалу $[x_l,x_{l+1}]$. Тогда

$$\overline{S}(f,P')=\sum_{\substack{k=0\\k\ne l}}^{n-1} M_k\Delta x_k + M_l{}'\Delta' x_l + M_l{}''\Delta'' x_l \le \sum_{\substack{k=0\\k\ne l}}^{n-1} M_k\Delta x_k + M_l\Delta' x_l + M_l\Delta'' x_l =$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\k\ne l}}^{n-1} M_k\Delta x_k + M_l\left(\Delta' x_l+\Delta'' x_l\right)=\sum_{\substack{k=0\\k\ne l}}^{n-1} M_k\Delta x_k + M_l\Delta x_l=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=\overline{S}(f,P).$$

Для нижних сумм доказательство аналогично.

3) *Пусть разбиение P' получено из разбиения P добавлением одной точки, и пусть $|f(x)|\le M$, тогда:*

$$\overline{S}(f,P)-\overline{S}(f,P')\le 2Md(P),$$
$$\underline{S}(f,P')-\underline{S}(f,P)\le 2Md(P).$$

Доказательство. Пусть точка добавлена к частичному интервалу $[x_l,x_{l+1}]$. Справедлива оценка

$$\overline{S}(f,P)-\overline{S}(f,P')=M_l\Delta x_l-(M_l{}'\Delta x_l{}'+M_l{}''\Delta x_l{}'')\le M\Delta x_l+(M\Delta x_l{}'+M\Delta x_l{}'')=$$
$$=2M\Delta x_l\le 2Md(P).$$

Для нижних сумм доказательство аналогично.

4) *Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением m точек, то*

$$0 \le \overline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P') \le 2Mmd(P),$$
$$0 \le \underline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P) \le 2Mmd(P).$$

Доказательство вытекает из предыдущих свойств.

5) *Для любых разбиений* P_1 и P_2 $\underline{S}(f,P_1) \le \overline{S}(f,P_2)$.

Доказательство. Пусть $P = P_1 \cup P_2$ – разбиение полученное объединением точек разбиений P_1 и P_2. Тогда

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P_2),$$

следовательно, $\underline{S}(f,P_1) \le \overline{S}(f,P_2)$.

Определение. Верхним интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$ называется число $\overline{I} = \inf\limits_{P} \overline{S}(f,P)$.

Определение. Нижним интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$ называется число $\underline{I} = \sup\limits_{P} \underline{S}(f,P)$.

Верхний и нижний интегралы всегда существуют, причем для любых разбиений P_1 и P_2 выполняются неравенства

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}(f,P_2).$$

Теорема Дарбу. *Для верхнего и нижнего интегралов справедливы равенства*

$$\overline{I} = \lim_{d(P)\to 0} \overline{S}(f,P),$$
$$\underline{I} = \lim_{d(P)\to 0} \underline{S}(f,P),$$

где пределы понимаются точно так же, как и в определении интеграла.

Доказательство. По определению $\overline{I} = \inf\limits_{P} \overline{S}(f,P)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Рассмотрим число $\overline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для него существует разбиение P_0, такое что $\overline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2} > \overline{S}(f,P_0)$. Возьмем $\delta > 0$ и произвольное разбиение P, такое что $d(P) < \delta$. Положим $P' = P \cup P_0$. Напишем цепочку неравенств

$$\overline{I} \le \overline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P') + 2Mm_0 d(P) < \overline{S}(f,P_0) + 2Mm_0\delta < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + 2Mm_0\delta.$$

Положим теперь $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4Mm_0}$. Тогда $\overline{I} \le \overline{S}(f,P) \le \overline{I} + \varepsilon$, следовательно, $\left|\overline{S}(f,P) - \overline{I}\right| < \varepsilon$. То есть $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall P \;\; d(P) < \delta \;\; \left|\overline{S}(f,P) - \overline{I}\right| < \varepsilon$. Т.е. $\overline{I} = \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{S}(f,P)$. Для верхнего интеграла формула доказана. Для нижнего интеграла доказательство аналогично.

Теорема (Критерий Дарбу). *Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\overline{I} = \underline{I}$. При этом $I = \overline{I} = \underline{I}$.*

Доказательство.

1) Пусть $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall P \;\; d(P) < \delta \;\; \forall \overline{\xi} \quad \left|S(f,P,\overline{\xi}) - I\right| < \varepsilon .$$

Отсюда $I - \varepsilon < S(f,P,\overline{\xi}) < I + \varepsilon$. Перейдем к инфимуму в левой части неравенства по $\overline{\xi}$. Будем иметь $I - \varepsilon \le \underline{S}(f,P)$. Переходя к супремуму в правой части неравенства, получим $\overline{S}(f,P) \le I + \varepsilon$. Запишем цепочку неравенств

$$I - \varepsilon \le \underline{S}(f,P) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}(f,P) \le I + \varepsilon ,$$

$$I - \varepsilon \le \underline{I} \le \overline{I} \le I + \varepsilon .$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, $I \le \underline{I} \le \overline{I} \le I$. Т.е. $\underline{I} = \overline{I} = I$.

2) Пусть $\overline{I} = \underline{I}$. Тогда

$$\underline{S}(f,P) \le S(f,P,\overline{\xi}) \le \overline{S}(f,P).$$

Но $\overline{S}(f,P) \to \overline{I}$, $\underline{S}(f,P) \to \underline{I}$ при $d(P) \to 0$. Так как $\underline{I} = \overline{I}$, то $\lim\limits_{d(P)\to 0} S(f,P,\overline{\xi}) = I$ и функция $f(x)$ интегрируема.

Теорема доказана.

Определение. Изменением функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ называется число $\omega_k = M_k - m_k$.

Справедливо равенство

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k .$$

Следствие 1. *Ограниченная функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{d(P)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$.

Доказательство. Имеем

$$f\in R[a,b] \Leftrightarrow \overline{I}=\underline{I} \Leftrightarrow \lim_{d(P)\to 0}\overline{S}(f,P)=\lim_{d(P)\to 0}\underline{S}(f,P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{d(P)\to 0}(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P))=0 \Leftrightarrow \lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Ограниченная функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0\ \ \exists P\ \ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$.

Доказательство.

1) Если $f\in R[a,b]$, то $\lim\limits_{d(P)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$ (по следствию 1). Отсюда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists P\ \ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$.

2) Пусть $\forall\varepsilon>0\ \ \exists P\ \ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$. Тогда $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$ и так как $\underline{S}\le\underline{I}\le\overline{I}\le\overline{S}$, то $0<\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Следовательно, $\overline{I}=\underline{I}$ и функция $f(x)$ интегрируема. Следствие доказано.

Пример. Пусть функция $D(x)$ определена на $[0,1]$ равенством

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}.$$

Эта функция называется функцией Дирихле. Возьмем произвольное разбиение P сегмента $[0,1]$. Рассмотрим частичный сегмент $[x_k,x_{k+1}]$. Очевидно, что $M_k=1$, $m_k=0$. Отсюда $\overline{S}(D,P)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}1\Delta x_k=1$, $\underline{S}(D,P)=0$, следовательно, $\overline{I}=1$, $\underline{I}=0$ и $\overline{I}\ne\underline{I}$. Таким образом функция Дирихле не интегрируема по Риману.

5.3. Классы интегрируемых функций.

Теорема. *Любая непрерывная на сегменте функция интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f \in C[a,b]$, тогда по теореме Кантора она равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in [a,b] \ \ |x' - x''| < \delta \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon .$$

Пусть P – произвольное разбиение с $d(P) < \delta$, тогда

$$\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon ,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \Delta x_k = \varepsilon (b-a) .$$

По следствию 2 функция $f(x)$ интегрируема. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет на* $[a,b]$ *конечное число точек разрыва и ограничена, то она интегрируема.*

Доказательство. Докажем теорему в случае одной точки разрыва. Пусть $|f(x)| \le M$ и x_0 - точка разрыва. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим сегмент $[a, x_0 - \varepsilon]$. На нем функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, на этом сегменте $f(x)$ – интегрируема. Т.е. $\exists P_1 \ \sum\limits_{P_1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$. Аналогично для сегмента $[x_0 + \varepsilon, b]$ $\exists P_2 \ \sum\limits_{P_2} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$. Пусть $P = P_1 \cup P_2$. Тогда

$$\sum_{P} \omega_k \Delta x_k = \sum_{P_1} \omega_k \Delta x_k + \omega' 2\varepsilon + \sum_{P_2} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon + 4M\varepsilon + \varepsilon = (2+4M)\varepsilon ,$$

где ω' – изменение функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. По следствию 2 функция $f(x)$ интегрируема. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Любая монотонная на сегменте* $[a,b]$ *функция интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, $\varepsilon > 0$ – произвольное число и P – произвольное разбиение сегмента $[a,b]$ с диаметром $d(P) < \varepsilon$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\varepsilon = \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k) = \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \varepsilon(f(b) - f(a)).$$

По следствию 2 функция интегрируема. Что и требовалось доказать.

Отметим свойства интегрируемых функций.

1) *Если* $f(x)\in R[a,b]$, *то* $\alpha\cdot f(x)\in R[a,b]$ *и*

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0}(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\cdot f(\xi_k)\Delta x_k) = \alpha\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

2) Если $f(x), g(x)\in R[a,b]$, *то* $(f(x)+g(x))\in R[a,b]$ *и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3) Если $f(x), g(x)\in R[a,b]$, *то* $f(x)\cdot g(x)\in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $|f(x)|\le M_1$ и $|g(x)|\le M_2$. Тогда

$$\omega_k(f(x)\cdot g(x)) = \sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')|.$$

Так как

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \le$$
$$\le |f(x')|\cdot|g(x') - g(x'')| + |g(x'')|\cdot|f(x') - f(x'')| \le M_1\omega_k(g(x)) + M_2\omega_k(f(x)),$$

то $\omega_k(f(x)\cdot g(x)) \le M_1\omega_k(g(x)) + M_2\omega_k(f(x))$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f(x)\cdot g(x))\Delta x_k \le M_1\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_k(g(x))\Delta x_k) + M_2\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_k(f(x))\Delta x_k).$$

По следствию 1 для произвольного числа $\varepsilon > 0$

$$\exists\delta_1\ \forall P\ \ d(P)<\delta_1\ \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(g(x))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2M_1},$$

$$\exists\delta_2\ \forall P\ \ d(P)<\delta_2\ \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f(x))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2M_2}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ и $d(P)<\delta$, тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f(x)\cdot g(x))\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

и по следствию 2 произведение функций интегрируемо.

4) *Если* $f\in R[a,b]$, *а функция* $g(x)$ *отличается от функции* $f(x)$ *в конечном числе точек, то она также интегрируема и*

$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ отличаются в одной точке x_0. Для произвольного числа $\varepsilon>0$

$$\exists P\ \ d(P)<\varepsilon\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f(x))\Delta x_k<\varepsilon.$$

Пусть $x_0\in(x_{k_0},x_{k_0+1})$ и $|f(x)|\le M_1$, $|g(x)|\le M_2$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(g(x))\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f(x))\Delta x_k+(\omega_{k_0}(g(x))-\omega_{k_0}(f(x)))\Delta x_{k_0}<$$
$$<\varepsilon+(2M_1+2M_2)\cdot\varepsilon=2(1+M_1+M_2)\cdot\varepsilon.$$

По следствию 2 функция $g(x)$ интегрируема. Найдем ее интеграл. Имеем

$$\int_a^b g(x)dx=\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\Delta x_k=$$

(будем считать, что $\xi_k\ne x_0$)

$$=\lim_{\substack{d(P)\to 0\\ \xi_k\ne x_0}}\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\substack{d(P)\to 0\\ \xi_k\ne x_0}}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

5) *Пусть* $f(x)\in R[a,b]$ *и* $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, *тогда* $f(x)\in R[\alpha,\beta]$.

Доказательство. По следствию 1

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall P\ \ d(P)<\delta\ \ \sum_{[a,b]}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon.$$

Будем считать, что точки α,β входят в разбиение P. Отсюда

$$\sum_{[\alpha,\beta]}\omega_k\Delta x_k\le\sum_{[a,b]}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon,$$

Следовательно, $f(x)\in R[\alpha,\beta]$. Что и требовалось доказать.

6) Если $a<b<c$, $f(x)\in R[a,b]$ *и* $f(x)\in R[b,c]$, *то* $f(x)\in R[a,c]$ *и*

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число, тогда существует разбиение P_1 сегмента $[a,b]$, такое что $\sum_{P_1}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$, существует разбиение P_2 сегмента $[b,c]$, такое что $\sum_{P_2}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $P=P_1\cup P_2$, тогда

$$\sum_{P}\omega_k\Delta x_k=\sum_{P_1}\omega_k\Delta x_k+\sum_{P_2}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

По следствию 2 функция $f(x)\in R[a,c]$. Перейдем к вычислению интеграла. Имеем

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{d(P)\to 0}S(f,P,\overline{\xi})=\lim_{d(P_1)\to 0}S(f,P_1,\overline{\xi})+\lim_{d(P_2)\to 0}S(f,P_2,\overline{\xi})=$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

7) Если $f(x)\in R[a,b]$, $f(x)\geq 0$, *то* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

8) Если $f(x),g(x)\in R[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$, *то* $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

9) Если $f(x)\in R[a,b]$ и $m\leq f(x)\leq M$, то

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$

Доказательство. Имеем

$$m(b-a)=\int_a^b mdx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b Mdx=M(b-a).$$

10) Если $f(x)\in R[a,b]$, *то* $|f(x)|\in R[a,b]$ *и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Так как $\omega_k(|f(x)|) \le \omega_k(f(x))$, то $|f(x)| \in R[a,b]$. Из неравенств $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ следует, что

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Отсюда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Свойство доказано.

Теорема (о среднем значении). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\exists x_0 \in (a,b)$, *такая что* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_0)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она достигает на нем максимального и минимального значений, т.е. $\exists x_1 \quad f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x) = m$ и $\exists x_2 \quad f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = M$. По свойству 9

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

но $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. По второй теореме Больцано-Коши существует точка x_0, лежащая между x_1, x_2, такая что $f(x_0) = c$. Теорема доказана.

Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним интегральным функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Лемма. Если $f(x) \in R[a,b]$, $f(x) \ge 0$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists [\alpha,\beta] \subset [a,b] \quad f(x) < \varepsilon,$$

при $x \in [\alpha,\beta]$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall [\alpha,\beta] \subset [a,b] \;\; \exists x_0 \in [\alpha,\beta] \;\; f(x_0) \ge \varepsilon.$$

Отсюда для любого разбиения P и любого его частичного сегмента $[x_k, x_{k+1}]$ $M_k \ge \varepsilon$, $\overline{S}(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \ge \varepsilon(b-a)$. Но $\overline{S}(f,P) \to \int_a^b f(x)dx = 0$ при $d(P) \to 0$. Мы получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема. *Если* $f(x) \in R[a,b]$ *и* $f(x) > 0$, *то* $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Допустим противное, что $\int_a^b f(x)dx = 0$.

На основании леммы для $\varepsilon = 1$ $\exists [a_1, b_1] \subset [a,b]$ $f(x) < 1$ при $x \in [a_1, b_1]$. Так как $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b} f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$, а $\int_{b_1}^{b} f(x)dx \ge 0$, $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx \ge 0$, $\int_{b_1}^{b} f(x)dx \ge 0$, то $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$. К сегменту $[a_1, b_1]$ еще раз применим лемму. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, такое что $f(x) < \frac{1}{2}$ при $x \in [a_2, b_2]$ и $\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx = 0$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных сегментов $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, для которых $0 < f(x) < \frac{1}{n}$, при $x \in [a_n, b_n]$. По теореме Кантора $\exists x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Для точки x_0 $0 < f(x_0) < \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $f(x) \in C[a,b]$, $f(x_0) > 0$ *для некоторой точки* x_0 *и* $f(x) \ge 0$ *для* $\forall x \in [a,b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x)$

$\exists\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]\ \ f(x)>0$ для $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Тогда по предыдущей теореме $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$ и $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx\geq\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$. Следствие доказано.

До сих пор мы рассматривали интегралы $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, у которых $a<b$. Распространим определение интеграла на остальные случаи.

Определение. По определению полагаем $\int\limits_{a}^{a} f(x)dx=0$.

Определение. Если $a>b$, то по определению полагаем $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=-\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$.

Можно доказать, что все рассмотренные ранее свойства интеграла с несущественными изменениями переносятся на интегралы с произвольными пределами интегрирования.

5.4. Интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть $f(x)\in R[a,b]$, $x\in[a,b]$, $F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$. Функция $F(x)$ определена на $[a,b]$.

Теорема. *Функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $|f(t)|\leq M$ для всех $t\in[a,b]$. Пусть $x_1,x_2\in[a,b]$. Имеем оценку

$$|F(x_1)-F(x_2)|=\left|\int\limits_{a}^{x_1} f(t)dt-\int\limits_{a}^{x_2} f(t)dt\right|=\left|\int\limits_{a}^{x_1} f(t)dt+\int\limits_{x_2}^{a} f(t)dt\right|=\left|\int\limits_{x_2}^{x_1} f(t)dt\right|\leq M\,|x_1-x_2|.$$

Из этой оценки следует, что функция $F(x)$ – равномерно непрерывна. Теорема доказана.

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0\in[a,b]$, то функция $F(x)$ – дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)=f(x_0)$.*

Доказательство. Справедливы равенства

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt\right)-\frac{f(x_0)}{x-x_0}\int_{x_0}^x dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right|.$$

Так как $f(x)$ – непрерывна в точке x_0, то

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in[a,b]$ такого, что $0<|x-x_0|<\delta$ выполняется

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Из условия $0<|x-x_0|<\delta$ следует, что для t лежащих между x_0 и x выполняется $|t-x_0|<\delta$. Отсюда

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right|\le\varepsilon\frac{1}{|x-x_0|}\cdot|x-x_0|=\varepsilon.$$

Мы получили, что $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Любая непрерывная на сегменте функция имеет на этом сегменте первообразную, и общий вид первообразной задается формулой*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C.$$

Теорема (Основная теорема интегрального исчисления). *Если $f(x)\in R[a,b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Пусть $I=\int\limits_a^b f(x)dx$, тогда по определению интеграла

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\ \forall P\quad d(P)<\delta\quad\forall\overline{\xi}\qquad\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon.$$

Выберем разбиение P, удовлетворяющее этому условияю. Справедливы равенства

$$F(b)-F(a)=(F(x_1)-F(x_0))+(F(x_2)-F(x_1))+\ldots+(F(x_n)-F(x_{n-1}))=$$

(к каждой скобке применим теорему Лагранжа)

$$=F'(\xi_0')\Delta x_0+F'(\xi_1')\Delta x_1+\ldots+F'(\xi_{n-1}')\Delta x_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')\Delta x_k .$$

Отсюда $\left|(F(b)-F(a))-I\right|<\varepsilon$, следовательно, $I=F(b)-F(a)$. Теорема доказана.

Замечание. *Существуют интегрируемые по Риману функции, которые не имеют первообразную. Существуют функции, которые имеют первообразную и не интегрируемы по Риману.*

В теории интегралов принято обозначение $F(b)-F(a)=\mathrm{F}\left(x\right)\Big|_a^b$. В этом случае формула Ньютона-Лейбница принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b .$$

Обозначим через $C^1\left[a,b\right]$ класс функций, таких что $f'(x)\in C\left[a,b\right]$.

Теорема. *Если* $f(x),g(x)\in C^1\left[a,b\right]$, *то*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx .$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Доказательство. Пусть $f(x)g(x)=H(x)$. Тогда

$$H'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Отсюда

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx=\int_a^b H'(x)dx=H(x)\Big|_a^b=f(x)g(x)\Big|_a^b .$$

Следовательно,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx .$$

Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $f(x)\in C[a,b]$, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *и* $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, *тогда*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Формула замены переменной в интеграле Римана.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ – непрерывна, то она имеет первообразную, то есть $\exists F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Дифференцируя функцию $F(\varphi(t))$ получим

$$\left[F(\varphi(t))\right]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Отсюда $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)$. Т.е. интегралы равны. Теорема доказана.

5.5. Приложения интеграла Римана.

Площадь криволинейной трапеции.

Пусть $f\in R[a,b]$ и $f(x)\geq 0$. Найдем площадь фигуры ограниченной графиком функции осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (см. рис. 1). Возьмем произвольное разбиение P сегмента $[a,b]$и рассмотрим суммы Дарбу:

$$\underline{S}(f,P)\leq S\leq\overline{S}(f,P).$$

Так как $\underline{S}(f,P)\to I$ и $\overline{S}(f,P)\to I$ при $d(P)\to 0$, то

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

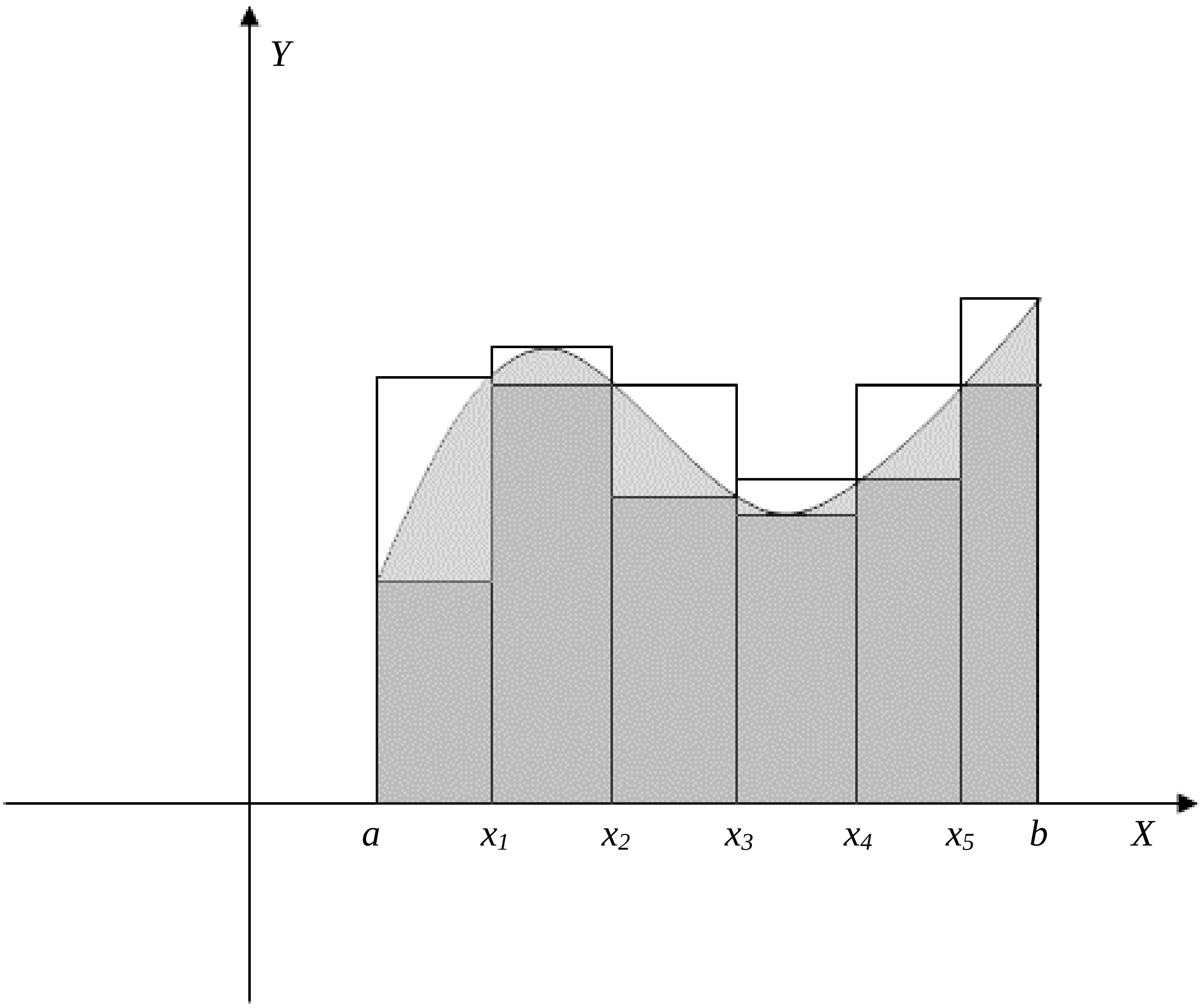

Рис. 1.

Площадь криволинейного сектора.

Рассмотрим функцию $r = R(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, такую что $R^2(\varphi) \in R[\alpha, \beta]$. Найдем площадь S фигуры ограниченной графиком функции $r = R(\varphi)$ в полярной системе координат и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (см. рис. 2) . Пусть P – произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$S \le \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\overline{S}\left(R^2, P\right).$$

Аналогично получаем, что $S \ge \frac{1}{2}\underline{S}\left(R^2, P\right)$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\underline{S}\left(R^2, P\right) \le S \le \frac{1}{2}\overline{S}\left(R^2, P\right).$$

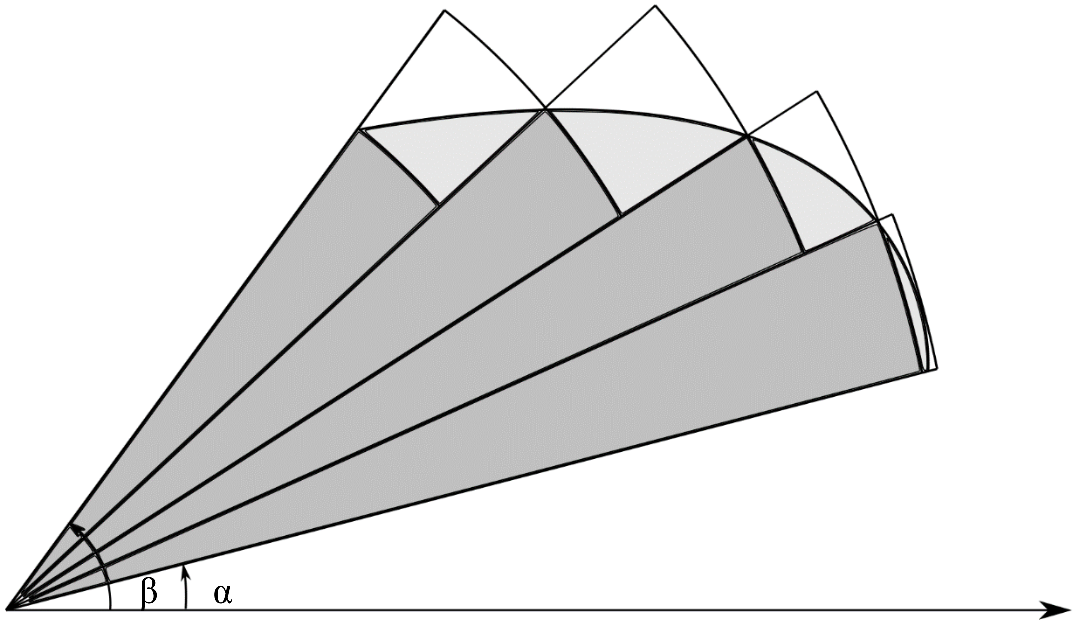

Рис. 2.

Так как $\underline{S}\left(R^2,P\right)\to I$ и $\overline{S}\left(R^2,P\right)\to I$, то

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}R^2\left(\varphi\right)d\varphi .$$

Длина кривой.

Определение. Путем на плоскости называется отображение $F:\left[a,b\right]\to R^2$ действующее по правилу: $\begin{cases}x=f\left(t\right)\\ y=g\left(t\right)\end{cases}$, где $f,g\in C\left[a,b\right]$.

Определение. Образ пути $\operatorname{Im} f$ называется кривой.

Пусть F - путь, $P=\left\{t_k\right\}_{k=0}^{n}$ – произвольное разбиение $\left[a,b\right]$. Обозначим через $L\left(P\right)$ ломанную с узлами $f\;\;t_k\;\;,g\;\;t_k$, где $k=0,1,\cdots,n$. Пусть $\left|L\left(P\right)\right|$ – длина этой ломаной (см. рис. 3).

Определение. Длиной пути F называется число $l=\lim\limits_{d(P)\to 0}\left|L\left(P\right)\right|$. Если предел конечный, то кривая называется спрямляемой.

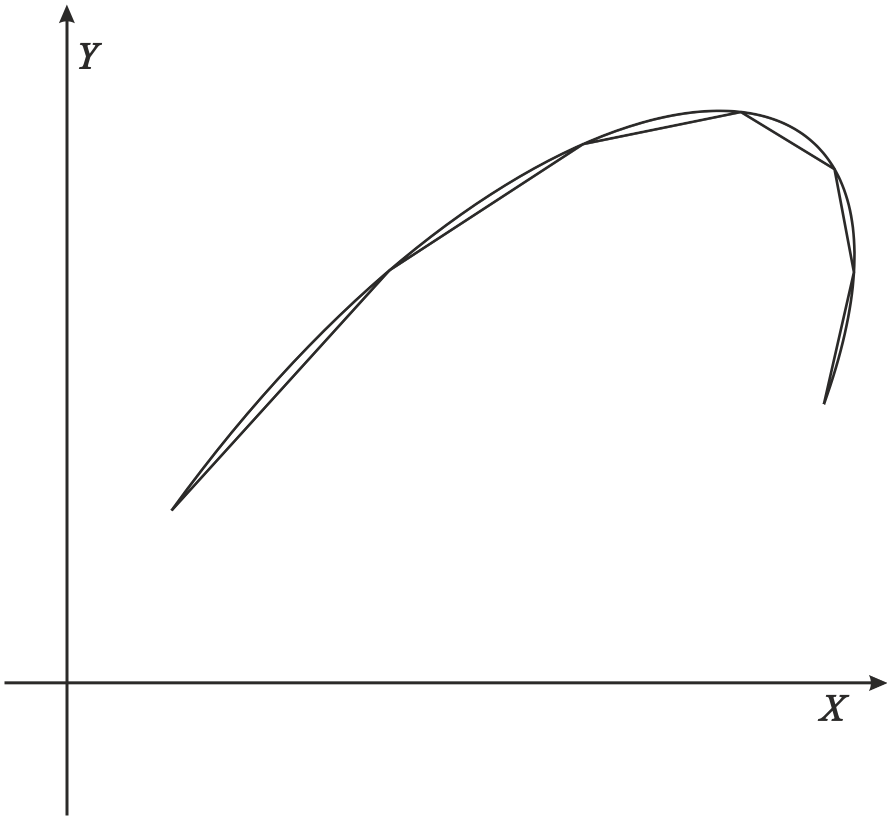

Рис. 3.

Теорема. *Пусть путь* F *задан уравнениями* $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, *где* $f, g \in C^1[a,b]$, *тогда длина пути* $l = \int\limits_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$.

Доказательство. По определению длины пути имеем:

$$l = \lim_{d(P)\to 0} \left|L(P)\right| = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(f(t_{k+1}) - f(t_k)\right)^2 + \left(g(t_{k+1}) - g(t_k)\right)^2} =$$

(к каждой скобке под корнем применим теорему Лагранжа)

$$= \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(f'(\xi_k)\Delta t_k\right)^2 + \left(g'(\zeta_k)\Delta t_k\right)^2} = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2 + \left(g'(\zeta_k)\right)^2}\,\Delta t_k =$$

$$= \lim_{d(P)\to 0} (\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2 + \left(g'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2 + \left(g'(\zeta_k)\right)^2} - \sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2 + \left(g'(\xi_k)\right)^2} \right) \Delta t_k).$$

По определению

$$\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\xi_k)\right)^2}\Delta t_k=\int_a^b\sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}dt.$$

Докажем, что

$$\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\zeta_k)\right)^2}-\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\xi_k)\right)^2}\right)\Delta t_k=0.$$

Воспользуемся неравенством $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\le|b-c|$. Получим

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\zeta_k)\right)^2}-\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\xi_k)\right)^2}\right)\Delta t_k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|g'(\zeta_k)-g'(\xi_k)\right|\Delta t_k.$$

Так как $g'(t)$ - непрерывна, то она равномерно непрерывна, то есть

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t',t''\ \ |t'-t''|<\delta\ \ \left|g'(t'')-g'(t')\right|<\varepsilon.$$

Будем считать, что $d(p)<\delta$, тогда $|\zeta_k-\xi_k|<\delta$ и

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|g'(\zeta_k)-g'(\xi_k)\right|\Delta t_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\Delta t_k=\varepsilon(b-a).$$

Следовательно,

$$\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\zeta_k)\right)^2}-\sqrt{\left(f'(\xi_k)\right)^2+\left(g'(\xi_k)\right)^2}\right)\Delta t_k=0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если Γ - график функции $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, $f\in C^1[a,b]$, то длина Γ вычисляется по формуле:* $l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

Доказательство. График функции $f(x)$ можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=t,\\ y=f(t),\end{cases}\quad \text{где}\ \ t\in[a,b].$$

Применяя к этому представлению доказанную теорему, получим требуемую формулу. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть кривая Γ задана в полярных координатах уравнениями $r=R(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, $R\in C^1[\alpha,\beta]$. Тогда длина этой кривой вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Доказательство. Кривую Γ можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R(\varphi)\cos\varphi, \\ y = R(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Применим доказанную теорему. В нашем случае $f(\varphi) = R(\varphi)\cos\varphi$, $g(\varphi) = R(\varphi)\sin\varphi$. Отсюда

$$f'(\varphi) = R'(\varphi)\cos\varphi - R(\varphi)\sin\varphi,$$
$$g'(\varphi) = R'(\varphi)\sin\varphi + R(\varphi)\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$f'(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2 = R'(\varphi)^2 + R^2(\varphi)$$

и

$$l = \int_a^b \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Следствие доказано.

Объем тела вращения.

Пусть функция $f(x) \geq 0$ определена на сегменте $[a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $\{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$, и будем вращать ее вокруг оси *OX*. Получим некоторое тело вращения (см. рис. 4). Возьмем произвольное разбиение сегмента $[a,b]$. Для объема V тела вращения справедливы оценки

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2 \Delta x_k \leq V \leq \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2 \Delta x_k .$$

Если предположить, что $f^2(x) \in R[a,b]$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2 \Delta x_k \to I, \ \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2 \Delta x_k \to I$$

и, следовательно,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

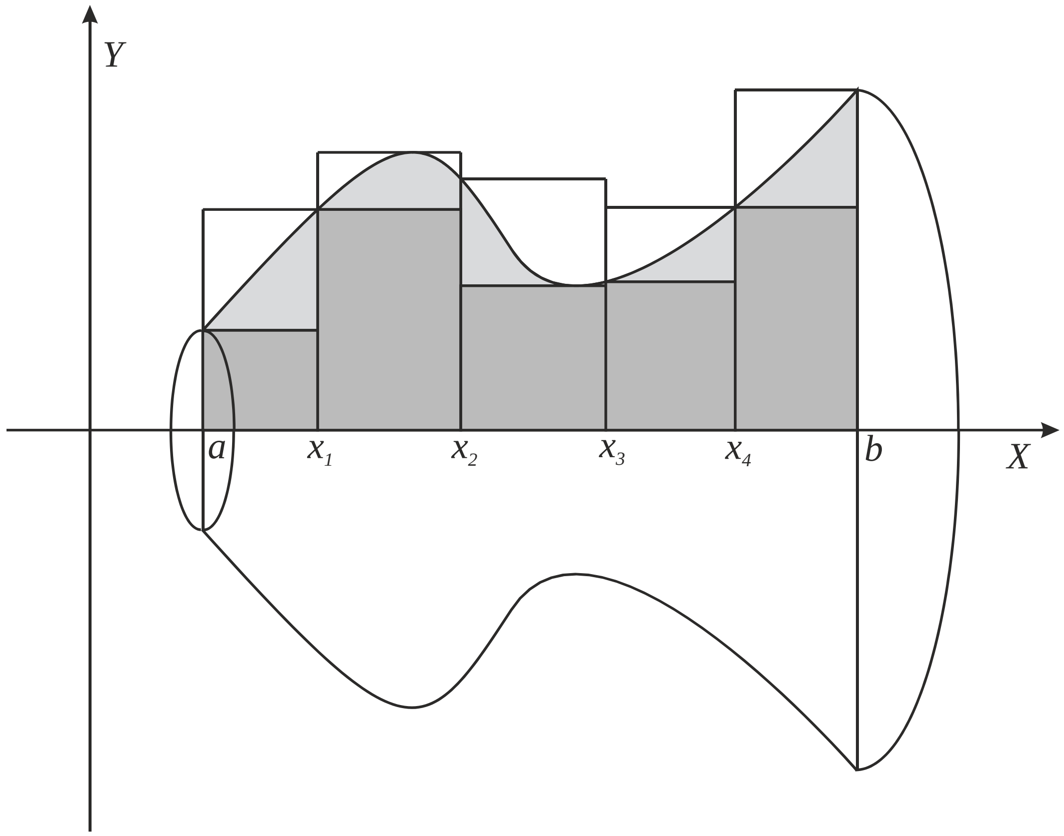

Рис. 4.

Площадь боковой поверхности фигуры вращения.

Пусть функция $f(x) \ge 0$ определена на сегменте $[a,b]$. Рассмотрим тело вращения определенное в предыдущем пункте. Найдем площадь его боковой поверхности. Напомним, что площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле $S_{бок} = \pi(R+r)l$. Для произвольного разбиения P сегмента $[a,b]$ рассмотрим ломанную вписанную в график функции, соответствующую этому разбиению. Площадь боковой поверхности тела, полученного вращением ломанной вокруг оси OX, находится по формуле

$$S_{бок}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi(f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{(f(x_{k+1}) - f(x_k))^2 + \Delta x_k^2} .$$

Площадь боковой поверхности исходной фигуры по определению полагаем $S_{бок} = \lim\limits_{d(P)\to 0} S_{бок}(P)$ (см. рис. 5).

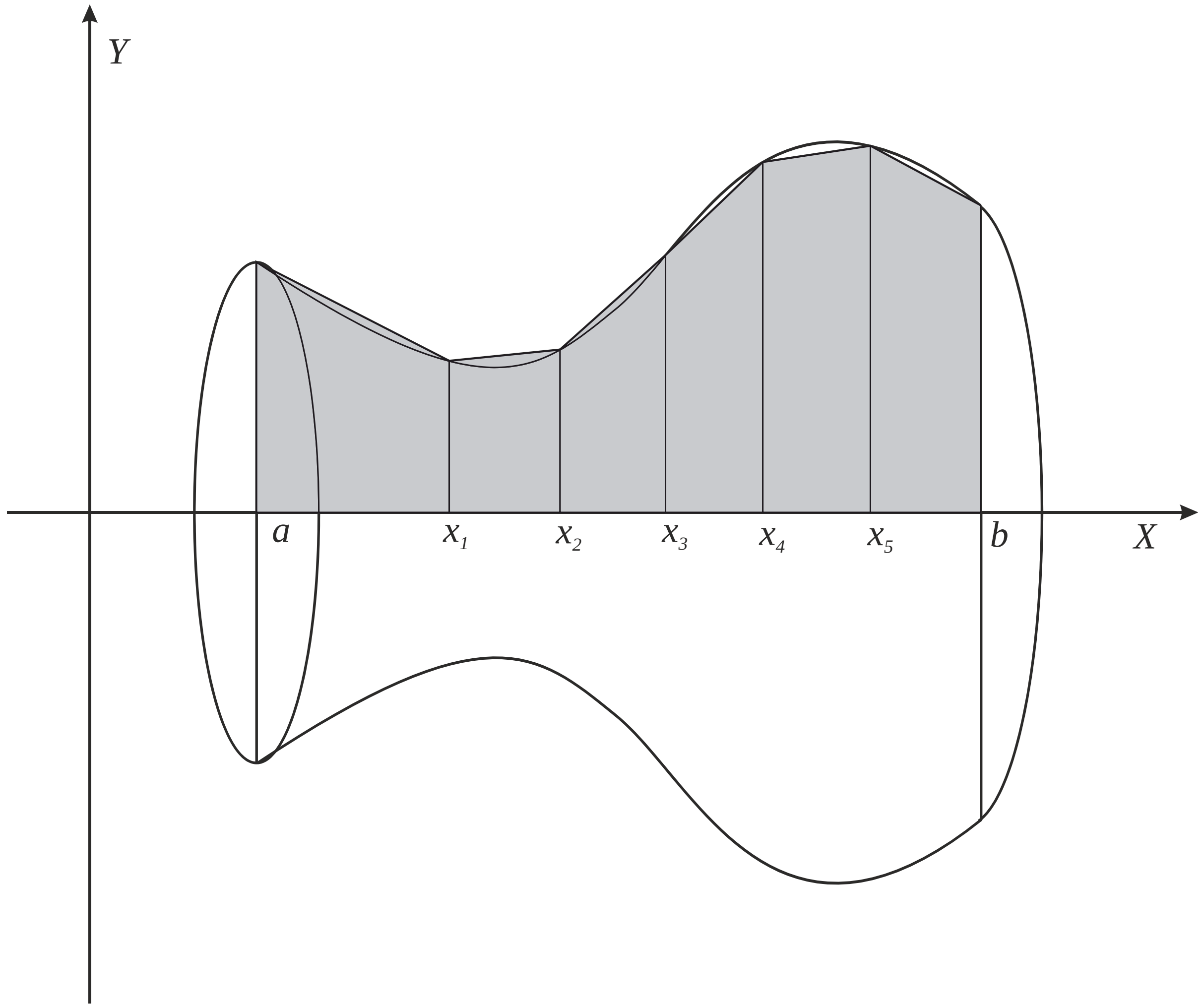

Рис. 5.

Вычислим этот предел при дополнительном ограничении $f(x) \in C^1\left[a,b\right]$. Имеем

$$S_{бок} = \lim_{d(P)\to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) + f(x_k)) \sqrt{(f(x_{k+1}) - f(x_k)^2 + \Delta x_k^2} =$$

$$= \lim_{d(P)\to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f(x_{k+1}) + f(x_k))}{2} \sqrt{(f(x_{k+1}) - f(x_k)^2 + \Delta x_k^2} =$$

(применяя теорему Больцано-Коши и теорему Лагранжа, получим)

$$= \lim_{d(P)\to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \sqrt{f'(\xi_k)^2 + 1} \cdot \Delta x_k = \lim_{d(P)\to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{f'(\xi_k)^2 + 1} \cdot \Delta x_k +$$

$$+\lim_{d(P)\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}(f(\zeta_k)-f(\xi_k))\sqrt{f'(\xi_k)^2+1}\cdot\Delta x_k.$$

Очевидно, что

$$\lim_{d(P)\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{f'(\xi_k)^2+1}\cdot\Delta x_k = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx.$$

Докажем, что

$$\lim_{d(P)\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}(f(\zeta_k)-f(\xi_k))\sqrt{f'(\xi_k)^2+1}\cdot\Delta x_k = 0.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте, то она равномерно непрерывна. Т.е.

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x',x''\in[a,b]\quad |x'-x''|<\delta\quad |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Пусть $d(P)<\delta$ и $\sqrt{f'(x)^2+1}\le M$, тогда

$$\left|2\pi\sum_{k=0}^{n-1}(f(\zeta_k)-f(\xi_k))\sqrt{f'(\xi_k)^2+1}\cdot\Delta x_k\right| \le 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\cdot M\cdot\Delta x_k = 2\pi M(b-a)\varepsilon.$$

Мы доказали, что

$$\lim_{d(P)\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}(f(\zeta_k)-f(\xi_k))\sqrt{f'(\xi_k)^2+1}\cdot\Delta x_k = 0.$$

Следовательно,

$$S_{бок} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx.$$

5.6. Несобственные интегралы.

Сначала рассмотрим интегрирование по бесконечным промежуткам. Пусть $f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и интегрируема на $[a,b]$ $\forall b>a$.

Определение. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае, расходится.

Примеры:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} - e^{-x}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} 1 - e^{-b} = 1.$

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left\{\begin{matrix} \ln x\Big|_1^b \\ \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^b \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left\{\begin{matrix} \ln b, \alpha = 1 \\ \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \end{matrix}\right\} =$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Отметим свойства несобственного интеграла.

1) Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} c\cdot f(x)dx$ *сходится и*

$$\int\limits_a^{+\infty} c\cdot f(x)dx = c\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

2) Если интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходятся, то*

$\int\limits_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ *сходится и*

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3) Для любого $b > a$ *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Имеем $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. Так как $\int_a^b f(x)dx$ – константа при фиксированных a,b, то при $c \to +\infty$ пределы $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$, $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_b^c f(x)dx$ существуют одновременно. Следовательно, интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ сходятся одновременно, и справедлива формула $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$. Свойство доказано.

4) Пусть $f(x) \in R[a,b]$, $\forall b > a$ и $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Обозначим этот предел через $F(+\infty)$ Тогда.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

Это аналог формулы Ньютона-Лейбница для определенного интеграла.

Доказательство. По определению имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a).$$

Свойство доказано.

Теорема (Критерий Коши). *Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists D \;\; \forall b_1, b_2 > D \;\; (b_1 < b_2) \;\; \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Доказательство. Пусть $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Имеем равносильности

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{-сходится} \Leftrightarrow \exists \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \exists \lim_{b\to+\infty} F\left(b\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists D \quad \forall b_1,b_2>D \quad (b_1<b_2) \ \left|F(b_2)-F(b_1)\right|<\varepsilon .$$

Так как $F(b_2)-F(b_1)=\int_a^{b_2} f(x)dx-\int_a^{b_1} f(x)dx=\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$, то

$$\left|F(b_2)-F(b_1)\right|<\varepsilon \ \Leftrightarrow \ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon .$$

Теорема доказана.

Рассмотрим интегралы от положительных функций. Предположим, что $f(x)\ge 0$, $f(x)\in R\left[a,b\right]$ для $\forall b>a$.

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*-сходится* $\Leftrightarrow \ \exists M\forall b>a \quad \int_a^b f(x)dx\le M$.

Доказательство. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\exists \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\in\mathbb{R}$. Пусть $F(b)=\int_a^b f(x)dx$. Так как функция $f(x)\ge 0$, то функция $F(b)$ монотонно возрастает и, следовательно, имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Свойство доказано.

2) Если $0\le f(x)\le g(x)$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится, то* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Так как интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то функция $G(b)=\int_a^b g(x)dx$ ограничена. Отсюда, $F(b)=\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\le M$. Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Свойство доказано.

3) Если $f(x) \le g(x)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *расходится.*

4) Если $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$, *при* $x \to +\infty$ $f(x) = O(g(x))$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. По определению символа O

$$\exists L \quad \exists D \quad \forall x \ge D \quad |f(x)| \le L|g(x)|.$$

Так как $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$, то $f(x) \le Lg(x)$ и из предыдущих свойств следует, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Свойство доказано.

5) Если $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ *и при* $x \to +\infty$ $f(x) \sim g(x)$, *то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходятся одновременно.*

Доказательство. Если $f(x) \sim g(x)$ $(x \to +\infty)$, то $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(f(x))$ и утверждение вытекает из предыдущего пункта.

Перейдем к рассмотрению знакопеременных функций.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in R[a,b]$ $(\forall b > a)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится. Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится и* $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Доказательство. Введем функцию $f_+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$. Очевидно, что $0 \le f_+(x) \le |f(x)|$ и

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}.$$

Аналогично определим функцию $f_-(x)=\dfrac{|f(x)|-f(x)}{2}$. Для нее

$0\le f_-(x)\le |f(x)|$ и

$$f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & f(x)<0\\ 0, & f(x)\ge 0\end{cases}.$$

Кроме того $f_+(x)+f_-(x)=|f(x)|$ и $f_+(x)-f_-(x)=f(x)$.

Так как $f_\pm(x)\le |f(x)|$, то $\int\limits_a^{+\infty} f_\pm(x)dx$ сходятся. Учитывая, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_a^{+\infty} f_+(x)dx-\int\limits_a^{+\infty} f_-(x)dx$ получаем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Переходя к пределу в неравенстве $\left|\int\limits_a^{b} f(x)dx\right|\le\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ при $b\to+\infty$ получим

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right|\le\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$.

Определение. Будем говорить, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится.

Отметим, что:

1) *Если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно, то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f_\pm(x)dx$ *сходятся.*

2) *Если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится условно, то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f_{\pm}(x)dx$ *расходятся.*

Доказательство вытекает из равенства

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f_+(x)dx - \int\limits_a^{+\infty} f_-(x)dx.$$

Примеры:

1) Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$, так как

$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится.

2) Аналогично, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

3) Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-\cos x}{x}\Big|_1^b - \int\limits_1^{b}\frac{\cos x}{x^2}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos b}{b} + \cos 1 - \int\limits_1^{b}\frac{\cos x}{x^2}dx\right) = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится.

Так как при $x \ge 1$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ сходится, то $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx$ расходится. Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится. Мы доказали, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

Рассмотрим признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема. *Пусть* $f(x), g(x) \in C^1[a,+\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = A \in R$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ *сходится, тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ *сходится и*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = A - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

(Это аналог формулы интегрирования по частям для определенного интеграла.)

Доказательство. По определению имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)g'(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \left(f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{b} f'(x)g(x)dx \right) =$$

$$= A - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Теорема доказана.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$ *удовлетворяют условиям:*

1) $f\ \ x \in C\ \ a,+\infty$,

2) $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \le M \quad (\forall b > a)$,

3) $g\ \ x \in C^1\ \ a,+\infty$,

4) $g\ \ x$ *– монотонна,*

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Введем функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Имеем $|F(x)| \le M$ и $F'(x) = f(x)$. Для доказательства сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ применим критерий Коши. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, то $\exists D \ge a\ \forall x > D\quad |g(x)| < \varepsilon$. Пусть $b_2 > b_1 > D$. Проведем оценку

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} F'(x)g(x)dx\right| = \left|F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx\right| \le$$

$$\le |F(b_2)g(b_2)| + |F(b_1)g(b_1)| + \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx\right| \le M\varepsilon + M\varepsilon + \int\limits_{b_1}^{b_2} |F(x)g'(x)|dx \le$$

$$\le 2M\varepsilon + M\int\limits_{b_1}^{b_2} |g'(x)|dx =$$

(так как функция $g(x)$ монотонна и, следовательно, $g'(x)$ знакопостоянна, то $\int\limits_{b_1}^{b_2} |g'(x)|dx = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)dx\right|$)

$$= 2M\varepsilon + M\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)dx\right| = 2M\varepsilon + M|g(b_2) - g(b_1)| \le 2M\varepsilon + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon.$$

Итак, мы получили, что для любых $b_2 > b_1 > D$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \le 4M\varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. Теорема доказана.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, при $\alpha > 0$ сходится.

Действительно:

$$\left| \int\limits_1^b \sin x dx \right| = \left| \cos 1 - \cos x \right| \le 2,$$

функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ монотонная и $\lim\limits_{x \to +\infty} g\ x\ = 0$. Таким образом при $\alpha > 1$ интеграл сходится абсолютно. докажем, что при $0 < \alpha \le 1$ интеграл сходится условно. Так как при $x \ge 1$

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}$$

и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^\alpha}$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ сходится по признаку Дирихле, то $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx$ расходится. Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ расходится. Мы доказали, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится условно при $0 < \alpha \le 1$.

Теорема (признак Абеля). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1) $f(x) -$ *непрерывна на* $[a, +\infty)$,
2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx -$ *сходится*,
3) $g(x) \in C^1[a, +\infty)$,
4) $g(x) -$ *ограничена и монотонна*.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ *сходится.*

Доказательство. Так как $g(x)$ ограниченная и монотонная функция, то $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = A \in \mathbb{R}$. Введем функцию $h(x) = g(x) - A$. Очевидно, что

$h(x) \in C^1[a,+\infty)$, $h(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и $h(x)$ – монотонная функция. По признаку Дирихле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)h(x)dx$ сходится. По условию интеграл $\int\limits_a^{+\infty} Af(x)dx$ сходится. Тогда их сумма

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)h(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} Af(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

также сходится. Теорема доказана.

Примеры.

1) Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\alpha} \cdot e^{-bx}dx$ $\alpha > 0$ $b \geq 0$. По признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\alpha}dx$ сходится. Функция e^{-bx} – монотонная и ограниченная. Следовательно, по признаку Абеля интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\alpha} \cdot e^{-bx}dx$ сходится.

2) Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x^\alpha} \cdot \operatorname{arctg} x \right) dx$ сходится при $\alpha > 1$. Действительно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\alpha}dx$ сходится, а функция $\operatorname{arctg} x$ монотонна и ограничена.

Перейдем к рассмотрению интегралов от неограниченных функций. Пусть $f(x) \in R[a,c]$ для $\forall c \in (a,b)$.

Определение. Положим $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{c \to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx$.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

1) При $\alpha > 0$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}(1-\alpha)}\right) = +\infty .$$

2) При $\alpha = 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+\infty}(0-\ln\varepsilon) = +\infty .$$

3) При $\alpha < 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} .$$

Таким образом, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

Все свойства интегралов от неограниченных функций аналогичны свойствам интегралов на бесконечном промежутке.

Рассмотрим теперь случай, когда функция имеет несколько особых точек. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a,b) \subset \overline{R}$ (конечном или бесконечном) и имеет на нем конечное число особых точек. Разобьем исходный промежуток на частичные промежутки так, чтобы на каждом из них функция имела ровно одну особую точку и эта точка являлась концом частичного промежутка.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся тогда и только тогда, когда сходится интеграл на каждом из частичных промежутков.

Примеры.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$

а) $x \to +0$

Так как $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то

$\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ сходится в нуле.

b) $x\to+\infty$

Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$ сходится, следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ сходится на бесконечности.

Так как других особых точек нет, то интеграл сходится.

2) Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится, так как он на бесконечности расходится при $\alpha\le 1$, а в нуле при $\alpha\ge 1$.

Теорема (замена переменной в несобственном интеграле). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на* $[a,b)$ *и имеет особенность в точке* b. *Пусть* $\forall b_1\in\ a,b\quad f\ x\ \in C\ a,b_1$. *Пусть далее* $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,b)$, $\varphi\in C^1[\alpha,\beta)$, φ*-монотонная,* $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Доказательство. По определению имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\lim_{\gamma\to\beta-0}\int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\overset{(\phi(t)=x)}{=}\lim_{\gamma\to\beta-0}\int\limits_a^{\varphi(\gamma)} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Теорема доказана.

Пример. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^{\alpha}}\overset{\left(\frac{1}{x}=t\right)}{=}-\int\limits_{+\infty}^1\dfrac{t^{\alpha}dt}{t^2}=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{2-\alpha}}$ сходится при $\alpha<1$.

6. Числовые ряды

6.1. Определение числового ряда.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - произвольная числовая последовательность.

Определение. Числовым рядом называется формальная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Определение. Число $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется частичной суммой ряда.

Очевидно, что $S_n - S_{n-1} = a_n$.

Определение. Будем говорить, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in R$.

В этом случае будем писать, что $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание. *Сходимость ряда равносильна сходимости последовательности частичных сумм, и, наоборот, сходимость произвольной числовой последовательности равносильно сходимости некоторого числового ряда.*

Действительно, пусть a_n - произвольная числовая последовательность и $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Пусть $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2 - a_1$, $u_3 = a_3 - a_2$ и так далее. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Очевидно, что $S_n = a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Формула $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ является аналогом формулы $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ для несобственных интегралов.

Теорема. *Если* $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

Доказательство. Пусть $S=\sum_{n-1}^{\infty}a_n$, тогда $S_n\to S$ и $a_n=\left(S_n-S_{n-1}\right)\to 0$.

Теорема доказана.

Свойства рядов.

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\cdot a_n\right)$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\cdot a_n\right)=\alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

2) Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится и* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *сходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n .$$

3) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ *сходятся одновременно и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n \quad .$$

4) Если в числовом ряде изменить конечное число членов, то на сходимость это не повлияет.

Теорема (Критерий Коши). *Числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n\geq N\quad\forall p\quad\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда - сходится числовая последовательность $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. По критерию Коши для последовательностей она сходится тогда и только тогда, когда

$\forall\varepsilon \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall p \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно следующему $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$. Его частичная сумма равна $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Отсюда при $|q| < 1$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Мы получили, что $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$.

При $q = -1$ мы получим расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} -1^{\ n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

6.2. Ряды с положительными членами.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$.

Теорема. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$ *сходится тогда и только тогда, когда частичные суммы* S_n *ограничены.*

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся частичные суммы S_n. Так как последовательность $\{S_n\}$ возрастает, то она сходится тогда и только тогда, когда ограничена. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены. Т. е. $\exists M \forall n \ \sum_{k=1}^{n} b_k \le M$. Но $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k$, следовательно $\sum_{k=1}^{n} a_k \le M$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $0 \le a_n \le b_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *также расходится.*

Теорема. *Пусть* $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *также сходится.*

Доказательство. Так как $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n} \le \ldots \le \frac{a_1}{b_1} = c$, то $a_n \le c \cdot b_n$. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n$. Но тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *также расходится.*

Теорема (признак Коши). *Пусть* $a_n \ge 0, \quad k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

Если $k < 1$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Если $k > 1$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1) Пусть $k<1$. Выберем и зафиксируем число q такое, что $k<q<1$. Тогда $k=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}<q$, следовательно, $\exists N \quad \forall n\geq N \quad \sqrt[n]{a_n}<q$. Отсюда $a_n<q^n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty}q^n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ сходится. Но тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходится.

2) Пусть $k>1$, тогда $k=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}>1$. Следовательно, $\forall N \quad \exists n>N \quad \sqrt[n]{a_n}>1$ т.е. $a_n>1$, но тогда $a_n\not\to 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot q^n$, $q\geq 0$. Найдем предел $k=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n\cdot q^n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot q=q$. Отсюда при $q<1$ ряд сходится, при $q\geq 1$ ряд расходится.

Теорема (признак Даламбера). *Пусть* $a_n>0$.

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится.*

Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1) Пусть $D=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Тогда $\exists q \quad D<q<1$ такое, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q$. Отсюда $\exists N \quad \forall n>N \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q=\dfrac{q^{n+1}}{q^n}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}q^n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a^n$ сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходится.

2) Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$. По свойству нижнего предела

$\exists N \quad \forall n > N \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_{n+1} > a_n$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$. Обозначим $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$ Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится.

Замечание. *В признаках Коши и Даламбера происходит сравнение исходного ряда с геометрическим, поэтому они почти равносильны. Можно доказать, что если применим признак Даламбера, то применим и признак Коши. Наоборот не верно.*

Теорема (интегральный признак). *Пусть функция $f(x)$ определена на $[1,+\infty)$, $f(x) \ge 0$ и $f(x)$ монотонно убывает.,Рряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство.

1) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Тогда его частичные суммы ограничены $\sum\limits_{n=1}^{N} f(n) \le M$. Отсюда $\int\limits_{1}^{b} f(x)dx = S \le \sum\limits_{n=1}^{N} f(n) \le M$, где $N > b$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Пусть интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда его частичные интегралы ограничены $\int\limits_{1}^{b} f(x)dx \le M$. Отсюда $\sum\limits_{n=2}^{N} f(n) \le \int\limits_{1}^{N} f(x)dx \le M$. Следовательно,

ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$ сходится, а значит и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ также сходится. Теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ $[1,+\infty)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Но мы уже доказали, что интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha>1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ называется гармоническим, он расходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется обобщенным гармоническим, он сходится тогда и только тогда, когда $\alpha>1$.

Теорема (признак Раабе). *Пусть* $a_n>0$, $R=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$.

Если $R>1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Если $R<1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1) Пусть $R>1$. Выберем два числа α,β так, чтобы $1<\alpha<\beta<R$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=R>\beta$, следовательно, $\exists N_1 \ \forall n>N_1$

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\beta$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{\frac{1}{n}}=\alpha<\beta$, следовательно,

$\exists N_2 \forall n>N_2 \quad n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)<\beta$. Пусть $N=\max\{N_1,N_2\}$. Если $n>N$, то выполняются неравенства:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right),$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=\frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}a_n$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ также сходится.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$. Тогда $\exists N\forall n>N \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$. Т.е. $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{n}+1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}a_n$ расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ также расходится. Теорема доказана.

Теорема. *Если $a_n\sim b_n$ и $a_n,b_n>0$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ сходятся одновременно.*

Доказательство. Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1<2$, следовательно, $\exists N \quad \forall n>N \quad \frac{a_n}{b_n}<2$ или $a_n<2b_n$. Отсюда, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}a_n$ сходится. В силу симметричность условия $a_n\sim b_n$ верно и обратное. Теорема доказана.

Замечание. *Предыдущая теорема в случае знакопеременных рядов не верна.*

Теорема. *Пусть* $a_n \ge 0$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *– биекция, тогда ряды* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ *сходятся одновременно и их суммы равны, то есть* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичная сумма этого ряда. Пусть $b_n = a_{\varphi(n)}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Для частичных сумм этого ряда имеем $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + ... + b_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + ... + a_{\varphi(n)}$. Пусть $m = \max\{\varphi(1),\ \varphi(2),...,\varphi(n)\}$. Тогда $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + ... + a_{\varphi(n)} \le a_1 + a_2 + ... + a_m = A_m \le A$. Мы получили, что $B_n \le A$. Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ограничены, следовательно, он сходится и его сумма $B \le A$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ получается из $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ обратной перестановкой членов, то $A \le B$, то есть $A = B$. Теорема доказана.

6.3. Сходимость произвольных рядов.

Теорема. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *сходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *также сходится и* $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Доказательство. Пусть $a_n^+ = \dfrac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & a_n \ge 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}$. Тогда $0 \le a_n^+ \le |a_n|$.

Аналогично, $a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, & a_n \le 0 \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}$, $0 \le a_n^- \le |a_n|$. Очевидно, что $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ и $a_n^+ - a_n^- = a_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\pm}$ также сходятся, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ сходится.

Переходя к пределу в неравенстве $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ при $n \to +\infty$, получим $\left| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Теорема доказана.

Определение. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Определение. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ расходится.

Замечание 1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\pm}$ *сходятся.*

Замечание 2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится условно, то оба ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\pm}$ *расходятся, то есть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\pm} = +\infty$.

Теорема (признак Лейбница). *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *монотонная* $a_n \ge 0$ *и* $a_n \to 0$ *при* $n \to +\infty$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Каждое из выражений, стоящих в скобках, больше либо равно нулю, так как из условия следует, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает. Отсюда $S_{2(n+1)}\ge S_{2n}$. С другой стороны $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-a_{2n}\le a_1$. Мы получили, что частичные суммы S_{2n} монотонно возрастают и ограничены, следовательно, $S_{2n}\to S$ при $n\to+\infty$. Рассмотрим частичные суммы с нечетными номерами. Имеем $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S$, так как $a_{2n+1}\to 0$. Отсюда $S_n\to S$ и ряд сходится. Теорема доказана.

Следствие. *При сделанных в теореме предположениях* $0\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n\le a_1$.

Пример. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится.

Лемма Абеля. *Справедлива формула*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n,$$

где $B_k=b_m+b_{m+1}+\ldots+b_k$, $m\left(m\le n\right)$ *– некоторое фиксированное число.*

Доказательство. По условию $b_k=B_k-B_{k-1}$. Отсюда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_{k-1}=$$

(положим $l=k-1$)

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{l=n}^{n+p-1}a_{l+1}B_l=\sum_{l=n+1}^{n+p}a_lB_l-\sum_{l=n}^{n+p-1}a_{l+1}B_l=\sum_{l=n+1}^{n+p-1}(a_l-a_{l+1})B_l+a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n$$

.

Теорема доказана.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_n\to 0$,

2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– монотонная последовательность*, *3)* $|B_n| \le M$*, где* $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

Тогда ряд сходится. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k - $ *сходится* .

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Проведем оценку

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| + |a_{n+p}| \cdot |B_{n+p}| + |a_{n+1}| \cdot |B_n| \le$$

$$\le M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right) =$$

(так как $\{a_n\}$ монотонная последовательность, то)

$$= M\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})\right| + |a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right) = M\left(|a_{n+1} - a_{n+p}| + |a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right) \le$$

$$\le 2M\left(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right).$$

Так как $a_n \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Отсюда

$2M\left(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right) < 2M \cdot \dfrac{2\varepsilon}{4M} = \varepsilon$. Мы получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n > N \, \forall p \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon .$$

По критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ сходится. Теорема доказана.

Замечание. *Признак Лейбница вытекает из признака Дирихле.*

Действительно, пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Тогда $a_n \to 0$ и монотонна, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$, $|B_n| \le 1$. По признаку Дирихле ряд сходится.

Справедливы формулы

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Пример. Рассмотрим ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$. Очевидно, что последовательность $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}\to 0$ и монотонная. Кроме того

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=M \text{ при } x\ne 2\pi k,\quad k\in Z.$$

По признаку Дирихле этот ряд сходится.

Теорема (признак Абеля). *Пусть последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям:*

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– монотонна и ограничена,*

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ – сходится.

Тогда ряд сходится. $\sum_{k=1}^{+\infty}a_kb_k$ *– сходится.*

Доказательство. Так как a_n монотонна и ограничена, то $\exists\lim_{n\to+\infty}a_n=A\in R$. Пусть $a_n'=a_n-A$, тогда a_n' монотонна и $a_n'\to 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ сходится, то частичные суммы $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ имеют предел, следовательно, ограничены. По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'b_n$ сходится. Но

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n' b_n + A \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

6.4. Преобразование рядов.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Введем новый ряд группируя члены этого ряда. Например, так $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + \dots$.

В общем случае введем последовательность

$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$

$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$

$b_3 = a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \dots + a_{n_3}$

и т. д.

Теорема. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Имеем $B_m = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n_m} a_k = A_{n_m}$. По условию $A_n \to A$, следовательно, $B_m = A_{n_m} \to A$.

Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Теорема доказана.

Замечание. *Из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *не следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Пример. Ряд (1-1)+(1-1)+(1-1)+… сходится, а ряд 1-1+1-1+1-1+… расходится.

Теорема. *Если члены ряда сгруппированы так, что в каждой скобке они имеют один и тот же знак, то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Доказательство. Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$. Тогда $B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k \to B$. Рассмотрим частичную сумму $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Пусть n_k – наибольшее число, такое что $n_k < n$. Тогда $A_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + (a_{n_k+1} + \ldots + a_n)$, при этом $n \le n_{k+1}$. Если в последней скобке все члены положительны, то $B_k \le A_n \le B_{k+1}$, если отрицательны, то $B_{k+1} \le A_n \le B_k$. Учитывая, что при $n \to \infty$ $k \to \infty$ и $B_k \to B$, получаем, что $A_n \to B$. Теорема доказана.

Теорема. *Если в сходящемся ряде отбросить любое число нулевых членов, то получим сходящийся ряд с той же самой суммой.*

Теорема. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно и* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *- биекция. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ *сходится абсолютно и* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{\varphi(n)}|$ сходится. Кроме того $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^{+} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^{-} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{+} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{-} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Теорема доказана.

Теорема Римана. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится условно, то* $\forall C \in \mathbb{R}$ *существует биекция* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)} = C$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится условно, то:

1) $a_n \to 0$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = +\infty$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$.

Пусть n_1 - наименьший номер, такой что $a_1^+ + a_2^+ + \ldots + a_{n_1}^+ > C$. Положим $b_1 = a_1^+ + a_2^+ + \ldots + a_{n_1}^+$. Тогда $C < b_1 \le C + a_{n_k+1}^+$. Пусть теперь m_1 - наименьший номер, такой что $b_1 - (a_1^- + a_2^- + \ldots + a_{m_1}^-) < C$. Положим $b_2 = -a_1^- - a_2^- - \ldots - a_{m_k}^-$. Тогда $C - a_{m_k+1}^- \le (b_1 + b_2) < C$. Далее находим наименьший номер n_2, такой что $n_2 > n_1$ и $b_1 + b_2 + (a_{n_1+1}^+ + a_{n_1+2}^+ + \ldots + a_{n_2}^+) > C$. Полагаем $b_3 = a_{n_1+1}^+ + a_{n_1+2}^+ + \ldots + a_{n_2}^+$. Тогда $C < (b_1 + b_2 + b_3) \le C + a_{n_2+1}^+$. Продолжая этот процесс мы получим последовательность чисел $b_n \,{}_{n=1}^{\infty}$, такую что $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \to C$. Т.е. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = C$. Каждое слагаемое этого ряда представляет сумму чисел одного знака. Если в нем раскрыть все скобки, то сумма ряда не изменится. Полученный ряд отличается от исходного только порядком слагаемых и наличием нулевых слагаемых, которые не влияют на сумму ряда. Теорема доказана.

Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Пусть $c_k = a_{m(k)} b_{n(k)}$ -произвольная нумерация всех парных произведений членов этих рядов.

Теорема. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ - сходятся абсолютно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится абсолютно и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \right) \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k \right)$.

Доказательство. Сначала докажем абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \overline{A}$, тогда $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \le \overline{A}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \overline{B}$, тогда $\sum_{n=1}^{N} |b_n| \le \overline{B}$. Оценим частичную сумму $S_M = \sum_{k=1}^{M} |c_k| = \sum_{k=1}^{M} \left| a_{m(k)} b_{n(k)} \right|$. Пусть $p = \max\limits_{1\le k\le M} \{m(k)\}$ и $q = \max\limits_{1\le k\le M} \{n(k)\}$. Тогда $S_M \le \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{q} |b_j| \right) \le \overline{A} \cdot \overline{B}$, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|$ сходится. Т.е. ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится абсолютно.

Найдем сумму этого ряда. Так как он сходится абсолютно, то его сумма не меняется при любых перестановках и группировках. Выполним эти операции так, что бы $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_n b_j + a_n b_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right).$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть ряды $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ сходятся абсолютно, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ сходится абсолютно и $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right)$.

Пример. Найдем произведение ряда $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots$ на себя при $|q| < 1$. Имеем $c_k = 1 \cdot q^k + q \cdot q^{k-1} + q^2 \cdot q^{k-2} + \ldots + q^k \cdot 1 = (k+1) q^k$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) q^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} q^i \right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

7. Функции многих переменных.

7.1. Пространство $\mathbb{R}^m$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$.

Определение. Пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество арифметических векторов столбцов

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для элементов этого пространства будем использовать еще и такое обозначение $x = (x_1, \dots, x_m)^\tau$. Из алгебры известно, что $\mathbb{R}^m$ - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \; e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис этого пространства, его мы будем называть стандартным базисом.

Определение. Нормой (длиной) вектора $x \in \mathbb{R}^m$ называется число $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

Свойства нормы.

1) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника

Определение. Расстоянием между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число

$$\rho(x,y)=\|y-x\|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...(y_n-x_n)^2}\ .$$

Свойства расстояния.

1) $\rho(x,y)\geq 0, \qquad \rho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3) $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

Доказательство.

$$\rho(x,z)=\|z-x\|=\|(z-y)+(y-x)\|\leq\|z-y\|+\|y-x\|=\rho(z,y)+\rho(y,x).$$

Определение. Открытым шаром с центром в точке $x_0\in\mathbb{R}^m$ и радиусом $r>0$ называется множество $B_r(x_0)=\left\{x\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, \|x-x_0\|<r\right\}$.

Определение. Эпсилон окрестностью точки x_0 называется шар $U_\varepsilon(x_0)=B_\varepsilon(x_0)$.

Пусть $A\subset\mathbb{R}^m$ произвольное множество.

Определение. Точка $a\in A$ называется внутренней точкой, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\subset A$.

Множество всех внутренних точек обозначим через $Int(A)$.

Определение. Точка $a\in\mathbb{R}^m$ называется внешней по отношению к множеству A, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\cap A=\varnothing$.

Множество всех внешних точек обозначим через $Ext(A)$.

Определение. Точка $a\in\mathbb{R}^m$ называется граничной точкой множества A, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x,y\in B_\varepsilon(a) \quad x\in A, y\notin A$.

Множество всех граничных точек множества A обозначим через $Fr(A)$.

Определение. Точка $a\in A$ называется изолированной точкой множества A, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\cap A=\{a\}$.

Определение. Точка $a\in\mathbb{R}^m$ называется предельной точкой множества A, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x\in B_\varepsilon(a)\cap A \quad x\neq a$.

Обозначим через $Lim(A)$ множество всех предельных точек множества A.

Отметим некоторые свойства введенных множеств.

1) $Ext(A) = Int(\mathbb{R}^m \setminus A)$

2) $Fr(\mathbb{R}^m \setminus A) = Fr(A)$

3) $\mathbb{R}^m = Int(A) \cup Fr(A) \cup Ext(A)$, причем в объединении множества попарно не пересекаются.

4) Любая изолированная точка является граничной.

5) Граничная точка является предельной, тогда и только тогда, когда она не является изолированной.

6) Внутренняя точка всегда предельная. Внешняя точка всегда не предельная.

7) Любая предельная точка либо внутренняя, либо граничная.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым, если каждая его точка внутренняя.

Теорема. *Объединение любого семейства открытых множеств - открыто.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ – семейство открытых множеств и $G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Докажем, что G – открыто. Пусть $a \in G$, тогда $\exists i_0 \quad a \in G_{i_0}$. Так как G_{i_0} открыто, то $\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(a) \subset G_{i_0}$. Но тогда $B_\varepsilon(a) \subset G$, то есть любая точка множества G является внутренней, следовательно, G – открыто. Теорема доказана.

Теорема. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, ..., G_n$ – открыты и $G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$. Пусть $x \in G$, тогда $\forall k \quad x \in G_k$. Так как G_k – открыто, то $\exists B_{r_k}(x) \subset G_k$. Пусть $r = \min\limits_{1\le k\le n} r_k$. Тогда $\forall k \quad B_r(x) \subset G_k$ и, следовательно, $B_r(x) \subset G$. Это означает, что G – открыто. Теорема доказана.

Примеры.

1) $\mathbb{R}^m$ – открыто.

2) $\varnothing$ – открыто.

3) $B_r(a)$ – открытое множество.

4) $\mathbb{R}^m \setminus \{a\}$ – открыто.

5) $G = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x,a) > r\}$ – открыто.

6) При $m=1$ множества $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ – открыты.

Следующий пример показывает, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть не открытым $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

Теорема. *Множество G – открыто тогда и только тогда, когда* $G = \operatorname{int}(G)$.

Теорема. *Множество G – открыто тогда и только тогда, когда* $G \cap Fr(G) = \varnothing$.

Теорема. *Множество $Int(A)$ – открыто.*

Доказательство. Пусть $x \in Int(A)$, тогда $\exists B_r(x) \subset A$. Докажем, что $B_r(x) \subset IntA$. Пусть $y \in B_r(x)$. Тогда $\exists B_\rho(y) \subset B_r(x) \subset A$, следовательно, $y \in Int(A)$. Теорема доказана.

Следствие. *Множество $Ext(A)$ – открыто.*

Доказательство следует из того, что $Ext(A) = Int(\mathbb{R}^m \setminus A)$.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым, если множество $(\mathbb{R}^m \setminus A)$ – открыто.

Примеры.

1) $\mathbb{R}^m$ – замкнуто.
2) $\varnothing$ – замкнуто.
3) $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x,a) \le r\}$ – замкнуто.
4) $\{a\}$ – замкнуто.
5) При $m=1$ множества $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$ – замкнуты.

Теорема. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть множества F_i – замкнуты и $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Тогда $\mathbb{R}^m \setminus F = \mathbb{R}^m \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}\left(\mathbb{R}^m \setminus F_i\right)$ – открыто, следовательно, F – замкнуто. Теорема доказана.

Теорема. *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Теорема. *Множество F – замкнуто тогда и только тогда, когда* $F \supset Fr(F)$.

Теорема. *Множество F – замкнуто тогда и только тогда, когда* $F \supset Lim(F)$.

Доказательство.

1) Пусть $F \supset Lim(F)$. Тогда

$$a \in Fr(F) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - \text{изолированная} \\ a \in Lim(F) \end{array}\right. \Rightarrow a \in F \quad .$$

Следовательно, $F \supset Fr(F)$ и F - замкнуто.

2) Пусть множество F - замкнуто. Тогда

$$a \in Lim(F) \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in Int(F) \\ a \in Fr(F) \end{array}\right. \quad \Rightarrow a \in F .$$

То есть $Lim(F) \subset F$.

Теорема доказана.

Теорема. *Множество $Fr(A)$ – замкнуто.*

Доказательство. Имеем $Fr(A) = \mathbb{R}^m \setminus \left(Int(A) \cup Ext(A)\right)$. Следовательно, $Fr(A)$ – замкнуто. Теорема доказана.

Определение. Замыканием множества A называется множество $\overline{A} = A \cup Fr(A)$.

Легко доказать, что замыкание множества является замкнутым множеством.

Дадим определение сходимости в $\mathbb{R}^m$. Пусть $x_n \in \mathbb{R}^m$ и $a \in \mathbb{R}^m$.

Определение. Будем говорить, что $x_n \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|x_n - a\| < \varepsilon$.

Пусть $x_n = \left(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}\right)^\tau$, $\qquad a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^\tau$.

Теорема. $x_n \to a \Leftrightarrow \alpha_k^{(n)} \to \alpha_k \quad k = 1, 2, ..., m$.

Доказательство.

1) Пусть $x_n \to a$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|x_n - a\| < \varepsilon$. Для произвольного вектора $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)^\tau$ выполняется неравенство

$$\|b\| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_m^2} \geq \sqrt{\beta_k^2} = |\beta_k|.$$

Отсюда $\left|\alpha_k^{(n)} - \alpha_k\right| \leq \|x_n - a\| < \varepsilon$ и $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$.

2) Пусть $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k \quad \forall k$, тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k \quad \forall n > N_k \quad \left|\alpha_k^{(n)} - \alpha_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Пусть $N = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \{N_k\}$ и $n > N$, тогда

$$\|x_n - a\| = \sqrt{\left(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1\right)^2 + ... + \left(\alpha_m^{(n)} - \alpha_m\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + ... + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Т.е. $x_n \to a$. Теорема доказана.

Теорема (критерий замкнутости). Множество A – замкнуто тогда и только тогда, когда $(x_n \in A) \wedge (x_n \to x) \to (x \in A)$.

Доказательство.

1) Пусть A – замкнуто, $x_n \in A,\ x_n \to x$. Докажем, что $x \in A$. Возможны два случая:

a) $\exists n_0 \quad x_{n_0} = x$, тогда $x \in A$,

b) $\forall n \quad x_n \neq x$, тогда $x \in Lim(A) \subset A$.

2) Пусть $(x_n \in A) \wedge (x_n \to x) \to (x \in A)$. Докажем, что A – замкнуто. Пусть $x \in Lim(A)$, тогда $\exists x_n \in A,\ x_n \neq x,\ x_n \to x$. Тогда по условию $x \in A$. Мы доказали, что $A \supset Lim(A)$, следовательно, A – замкнуто. Теорема доказана.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется ограниченным, если $\exists M \quad \forall a \in A \quad \|a\| \le M$.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $x_n = \left(x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right)^\tau$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| \le M$. Тогда $\left|x_k^{(n)}\right| \le M$.

Так как последовательность $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_1^{(n_k)} \to \alpha_1$.

Так как последовательность $\left\{x_2^{(n_k)}\right\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_2^{(n_{k_l})} \to \alpha_2$. При этом $x_1^{(n_{k_l})} \to \alpha_1$.

Проделав такую процедуру последовательно для каждой координаты, получим подпоследовательность $x_{N_k} \to a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^\tau$. Теорема доказана.

Свойства предела последовательности векторов аналогичны свойствам предела числовой последовательности.

7.2. Компактные множества.

Определение. Семейство множеств $\{\mathrm{G_i}\}_{i \in I}$ называется покрытием множества А если $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} G_i$.

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным, если из любого покрытия этого множества открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Пример. Множество $K = (0,1)$ не является компактом. Действительно, пусть $\mathrm{G_n} = (\frac{1}{\mathrm{n}},1)$, тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = (0,1)$. Но никакое конечное число этих множеств $(0,1)$ не покрывает.

Теорема. *Любое компактное множество ограничено.*

Доказательство. Пусть K – компакт. Тогда $K \subset \mathbb{R}^m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(0)$, где $B_n(0)$ – открытые шары радиуса n с центром в нуле. Следовательно, это покрытие K. Так как K – компакт, то $\exists \mathrm{N} \quad \mathrm{K} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(0) = \mathrm{B_N}(0)$. Следовательно, K ограничено. Теорема доказана.

Теорема. *Любое компактное множество замкнуто.*

Доказательство. Пусть K – компакт. Докажем, что $\mathbb{R}^m \setminus K$ – открыто. Возьмем $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus K \quad (x_0 \notin K)$. Пусть $G_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|x - x_0\| > \frac{1}{n} \right\}$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} \supset K$. Так как K - компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Т.е. $\exists N \quad K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} G_n = G_N$. Отсюда $B_{\frac{1}{N}}(x_0) \subset \mathbb{R}^m \setminus K$, следовательно, $\mathbb{R}^m \setminus K$ – открыто. Теорема доказана.

Теорема Кантора. Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ *последовательность вложенных непустых компактов. Тогда* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Допустим противное, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \varnothing$. Множества $G_i = \mathbb{R}^m \setminus K_i$ открыты и

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^m \setminus K_i \right) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \mathbb{R}^m \setminus \varnothing = \mathbb{R}^m .$$

Следовательно, $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Так как K_1 компакт, то $\exists N \quad K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_i = G_N$. Но $G_N = \mathbb{R}^m \setminus K_N$. Отсюда $K_1 \cap K_N = \varnothing$. Так как $K_1 \supset K_N$, то $K_N = \varnothing$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Определение. Замкнутым параллелепипедом в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется множество

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m].$$

Определение. Диаметром параллелепипеда называют число $d(I) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_m - a_m)^2}$.

Очевидно, что замкнутый параллелепипед является компктом.

Следствие. *Если последовательность замкнутых параллелепипедов такова, что* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, *то* $\exists\, x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. *Если* $d(I_k) \to 0$, *то такая точка ровно одна.*

Теорема Бореля. *Множество* $K \subset R^n$ *компактно, тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость условий уже доказана. Докажем достаточность. Доказательство проведем от противного. Допустим, что множество K замкнуто и ограничено, но не компакт. Тогда существует покрытие $\{G_i\}_{i \in I}$ $\bigcup_{i \in I} G_i \supset K$ такое, что G_i открыты и множество K не может быть покрыто ни каким конечным числом этих множеств. Так как K ограничено, то существует замкнутый параллелепипед I_1, содержащий K. Разобьем параллелепипед I_1 на 2^n равных параллелепипедов $j_1, j_2, \ldots, j_{2^n}$ и рассмотрим части K, которые в них попали. Хотя бы одна из них не может быть покрыта конечным числом множеств G_i. Пусть это будет $j_l \cap K$. Обозначим параллелепипед j_l через I_2. То есть $I_2 \cap K$ нельзя покрыть конечным числом множеств G_i. Применим к параллелепипеду I_2 аналогичную процедуру, получим параллелепипед I_3. Продолжая эту процедуру мы получим последовательность замкнутых параллелепипедов $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ такую, что $d(I_k) \to 0$. По теореме Кантора $\exists\, a^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Покажем что $a^* \in K$. По построению $I_n \cap K$ не может быть покрыто конечным числом множеств G_i следовательно, $I_n \cap K \neq \varnothing$. Тогда $\exists\, a_n \in I_n \cap K$. Так как точки $a_n, a^* \in I_n$, то $\left\| a_n - a^* \right\| \leq d\left(I_n\right) \to 0$, следовательно, $a_n \to a^*$. Так как K замкнуто, то $a^* \in K$. В силу того, что $K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ $\exists i_0 \quad a^* \in G_{i_0}$. Так как G_{i_0} открытое множество, то $\exists B_\varepsilon(a^*) \subset G_{i_0}$. Но $a^* \in I_n$ $d(I_n) \to 0$, следовательно, $\exists n_0\ I_{n_0} \subset B_\varepsilon(a^*) \subset G_{i_0}$. Мы получили, что $I_{n_0} \cap K \subset G_{i_0}$. Т.е. множество $I_{n_0} \cap K$ покрыто одним множеством G_{i_0}, что противоречит построению. Теорема доказана.

Примеры.

1) $[a,b]$ – компакт.

2) Замкнутый шар – компакт.

3) Замкнутый параллелепипед – компакт.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ - фиксированное множество.

Определение. Множество $G \subset X$ называется открытым относительно X (открытым в X), если $\forall x \in G \quad \exists B_\varepsilon(x) \quad B_\varepsilon(x) \cap X \subset G$.

Теорема. *Множество G – открыто относительно X тогда и только тогда, когда $\exists \tilde{G}$ открытое в $\mathbb{R}^m$, такое что $\tilde{G} \cap X = G$.*

Доказательство.

1) Пусть G - открыто относительно X, тогда $\forall x \in G \quad \exists B_{\varepsilon(x)}(x) \quad B_{\varepsilon(x)}(x) \cap X \subset G$. Обозначим через $\tilde{G} = \bigcup_{x \in G} B_{\varepsilon(x)}\left(x\right)$. Это множество открыто в $\mathbb{R}^m$ и $\tilde{G} \cap X = G$.

2) Пусть $G=\tilde{G}\cap X$, где $\tilde{G}$ открыто в $\mathbb{R}^m$. Докажем, что G открыто относительно X. Пусть $x\in G$, тогда $x\in\tilde{G}$ и, следовательно, $\exists B_\varepsilon(x)\subset\tilde{G}$. Тогда $B_\varepsilon(x)\cap X\subset\tilde{G}\cap X=G$. Мы доказали, что G – открыто относительно X. Теорема доказана.

Определение. Множество $F\subset X$ называется замкнутым относительно X (замкнутым в X), если множество $X\setminus F$ – открыто относительно X.

Теорема. *Множество F-замкнуто в X тогда и только тогда, когда $\exists\tilde{F}$ замкнутое в $\mathbb{R}^m$, такое что $F=\tilde{F}\cap X$.*

Доказательство очевидно.

Примеры.

1) Пусть $X=[0,1]$. Тогда $G=\left[0,\frac{1}{2}\right)$ – открыто в X, $F=\left[\frac{1}{2},1\right)$ – замкнуто в X.

2) Пусть $X=(0,1)\cup(1,2)$. Тогда $(0,1)$ – открыто в X, $(1,2)$ – открыто в X, $(0,1)$ – замкнуто в X и $(1,2)$ – замкнуто в X.

Определение. Множество $K\subset X$ называется компактным относительно X, если из любого покрытия этого множества открытыми относительно X множествами, можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема. *Множество $K\subset X$ – компактно относительно X тогда и только тогда, когда K компактно относительно $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство.

1) Пусть K– компактно относительно X, докажем, что K– компактно относительно $\mathbb{R}^m$. Пусть $\left\{\tilde{G}_i\right\}_{i\in I}$ - произвольное покрытие K открытыми множествами. Пусть $G_i=\tilde{G}_i\cap X$, тогда $\{G_i\}_{i\in I}$ покрытие K открытыми относительно X множествами. По условию $\exists\left\{G_{i_n}\right\}_{n=1}^N$ – подпокрытие K. Тогда $\left\{\tilde{G}_{i_n}\right\}_{n=1}^N$ и подавно подпокрытие. Следовательно, K – компактно относительно $\mathbb{R}^m$.

2) Пусть K – компактно относительно $\mathbb{R}^m$, докажем компактность относительно X. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ – покрытие K открытыми в X множествами.

Тогда $\exists \tilde{G}_i$ – открытое, такое что $\tilde{G}_i \cap X = G_i$, отсюда $\left\{\tilde{G}_i\right\}_{i\in I}$ – покрытие K открытыми множествами. В силу компактности множества K $\exists\left\{\tilde{G}_{i_n}\right\}_{n=1}^{N}$ – подпокрытие. Отсюда $\left\{\tilde{G}_{i_n} \cap X\right\}_{n=1}^{N}$ – подпокрытие K. Следовательно, K компактно относительно множества X. Теорема доказана.

7.3. Линейные отображения.

Определение. Отображение $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если:
1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$,
2) $A(\alpha\cdot x)=\alpha A(x)$.

Обозначим через $L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ множество всех линейных отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Линейные отображения принято называть линейными операторами.

Теорема. *Для любого линейного оператора* $A\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ *существует единственная матрица* $A_e \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *такая, что* $A(x)=A_e x$.

Доказательство. Пусть $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^{\tau}$, тогда
$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$
Отсюда
$$A(x)=A\left(x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\right)=A\left(x_1e_1\right)+A\left(x_2e_2\right)+...+A\left(x_ne_n\right)=$$
$$=x_1A\left(e_1\right)+x_2A\left(e_2\right)+...+x_nA\left(e_n\right).$$
Пусть $A_e=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\left(e_1\right) & A\left(e_2\right) & \cdots & A\left(e_n\right) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. Тогда $A_e \in M_{m\times n}$ и
$$A_e^1 = A\left(e_1\right),\quad A_e^2 = A\left(e_2\right),\quad \dots\quad, A_e^n = A\left(e_n\right).$$
Используя введенную матрицу можем написать
$$x_1A\left(e_1\right)+x_2A\left(e_2\right)+...+x_nA\left(e_n\right)=x_1A_e^1+x_2A_e^2+...+x_nA_e^n=$$
$$=x_1A_ee_1+x_2A_ee_2+...+x_nA_ee_n=A_e\left(x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\right)=A_ex.$$
Мы получили, что $A(x)=A_ex$.

Докажем, что такая матрица единственна. Пусть $\forall x \quad A(x) = M\,x$. Тогда $A_e^k = A(e_k) = M\,e_k = M^k$ и $A_e = M$. Теорема доказана.

Замечание. *Для любой матрицы* $M \in M_{m\times n}$ *оператор* $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *по правилу* $A(x) = M \cdot x$ *будет линейным и* $A_e = M$.

Таким образом, между линейными операторами и матрицами установлено взаимно однозначное соответствие.

Примеры.

1) Пусть $A:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – произвольный линейный оператор. Тогда $A_e = a$ – число и $A(x) = a \cdot x$.

2) Пусть $P_k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ отображение, действующее по правилу $P_k(x) = x_k$. Тогда $P_k(x) = x_k = \begin{pmatrix} 0\ldots\overset{k}{1}\ldots0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Следовательно, P_k – линейный оператор и $(P_k)_e = e_k^\tau$.

3) Пусть $Q_k:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ отображение, действующее по правилу $Q_k(x) = xe_k$. Тогда Q_k – линейный оператор и $(Q_k)_e = e_k$.

Справедливо равенство: $x = Q_1(x_1) + Q_2(x_2) + \ldots + Q_n(x_n)$.

Отметим свойства линейных операторов.

1) Если $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, то $\alpha A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $(\alpha A)_e = \alpha A_e$.

Доказательство. Имеем

$$(\alpha A)(x) = \alpha\big(A(x)\big) = \alpha\left(A_e x\right) = \left(\alpha A_e\right)x.$$

Следовательно, $\alpha A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $(\alpha A)_e = \alpha A_e$.

2) Если $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, то $(A+B) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $(A+B)_e = A_e + B_e$.

Доказательство. Имеем

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) = A_e x + B_e x = \left(A_e + B_e\right)x.$$

Следовательно, $(A+B) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $(A+B)_e = A_e + B_e$.

3) Если $A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ и $B \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right)$, то $B \circ A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$ и $\left(B \circ A\right)_e = B_e A_e$.

Доказательство. Имеем

$$\left(B \circ A\right)(x) = B\left(A(x)\right) = B_e\left(A(x)\right) = B_e\left(A_e x\right) = \left(B_e A_e\right)x.$$

Следовательно, $B \circ A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$ и $\left(B \circ A\right)_e = B_e A_e$.

Замечание. *Для линейных операторов принято композицию называть умножением и вместо* $A \circ B$ *писать* $A \cdot B$ *или* AB.

Теорема. *Если* A *– обратимое линейное отображение, то* A^{-1} *– линейное отображение и* $\left(A^{-1}\right)_e = A_e^{-1}$.

Доказательство.

1) Пусть $u = A(x), \quad v = A(y)$. Тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}\left(A(x) + A(y)\right) = A^{-1}\left(A(x+y)\right) = x + y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v).$$

2) Аналогично,

$$A^{-1}(\alpha u) = A^{-1}\left(\alpha\left(A(x)\right)\right) = A^{-1}\left(A(\alpha x)\right) = \alpha x = \alpha A^{-1}(u).$$

3) Так как $A^{-1}A = I$, то $\left(A^{-1}\right)_e A_e = I_e = E$. Точно так же $A_e\left(A^{-1}\right)_e = E$.

Следовательно, $\left(A^{-1}\right)_e = A_e^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как обратимыми могут быть только квадратные матрицы, то обратимыми могут быть только линейные операторы, действующие в пространствах одной размерности.*

Пусть $A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$.

Определение. Нормой линейного оператора называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Из определения следует, что для $\forall x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

и если $\forall x \quad \|Ax\| \le C\|x\|$, то $\|A\| \le C$.

Теорема. Пусть $A_e = (a_{ij})$, тогда $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \le \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

Доказательство.

1) Так как

$$\|A\| \ge \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} = \|Ae_j\| = \|A_e^j\| \ge |a_{ij}|,$$

то $\|A\| \ge \max |a_{ij}|$.

2) Докажем второе неравенство. Имеем

$$\|Ax\| = \|A_e x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^2}\, \|x\|$$

(мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \text{).}$$

Отсюда $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}^2}$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \le \sqrt{mn} \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Отметим свойства нормы оператора.

1) $\|A\| \ge 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|.$$

Отсюда $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$. Свойство доказано.

3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

Доказательство. Имеем

$$\|\alpha A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|(\alpha A) x\|}{\|x\|} = \sup_{x \ne 0} \frac{\|\alpha (Ax)\|}{\|x\|} = \sup_{x \ne 0} \frac{|\alpha| \|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \|A\|.$$

Свойство доказано.

4) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| \cdot \|B\|) \cdot \|x\|.$$

Отсюда $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. Свойство доказано.

7.4. Предел функции многих переменных.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $F : X \to Y$, $a \in LimX$.

Определение. Вектор $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом отображения F, при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \|F(x) - A\| < \varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \infty$, если

$\forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \|F(x)\| > E$.

Свойства предела функции многих переменных аналогичны свойствам предела функции одного переменного.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $F : X \to Y$, $x_0 \in X$.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$.

Очевидно, что в изолированной точке любое отображение непрерывно. Если же точка x_0 предельная, то непрерывность означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Определение. Окрестностью точки $x_0 \in X$ называется любое открытое относительно X множество, которому принадлежит точка x_0.

На языке окрестностей определение непрерывности отображения в точке можно переформулировать следующим образом.

Определение. Отображение F называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки $F(x_0)$ существует окрестность V точки x_0, такая что $F(V) \subset U$.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно на множестве $A \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Теорема. *Отображение* $F: X \to Y \quad (X \subset \mathbb{R}^n, \quad Y \subset \mathbb{R}^m)$ *непрерывно на* X *тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в* Y *множества открыт в* X *.*

Доказательство.

1) Пусть F непрерывно на X, G открыто относительно Y и $H = \overset{-1}{F}(G)$. Докажем, что H открыто относительно X. Возьмем $a \in H$, тогда $F(a) \in G$, G открыто, следовательно, G – окрестность точки $F(a)$, тогда существует окрестность V точки a, такая что $F(V) \subset G$. Т.е. $V \subset \overset{-1}{F}(G) = H$. Отсюда следует, что H открыто относительно X.

2) Пусть для любого открытого относительно Y множества B множество $A = \overset{-1}{F}(B)$ открыто относительно X. Докажем, что отображение F непрерывно в каждой точке множества X. Пусть $x_0 \in X, \quad F(x_0) = y_0, U$ – окрестность точки y_0. Пусть $V = \overset{-1}{F}(U)$. Тогда V открыто относительно X. Так как $x_0 \in V$, то V – окрестность точки x_0. Так как $F(V) \subset U$, то F непрерывно в точке x_0. Теорема доказана.

Следствие. *Отображение* $F: X \to Y$ *непрерывно на* X *тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого относительно* Y *множества замкнут относительно* X *.*

Доказательство.

1) Пусть F непрерывно на X и H замкнуто относительно Y. Тогда $Y \setminus H$ открыто относительно Y и по предыдущей теореме $\overset{-1}{F}(Y \setminus H)$ открыто относительно X. Но $\overset{-1}{F}(Y \setminus H) = X \setminus \overset{-1}{F}(H)$, следовательно $\overset{-1}{F}(H)$ замкнуто относительно X.

2) Достаточность доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема. *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть $F: X \to Y$ непрерывное отображение, $K \subset X$ компакт. Докажем, что множество $F(K)$ компактно. Для этого достаточно доказать, что оно компактно относительно Y. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – произвольное покрытие множества $F(K)$ открытыми относительно Y множествами. Пусть $H_i = F^{-1}(G_i)$. Тогда H_i открыто в X. Так как $F(K) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, то $K \subset \bigcup_{i \in I} H_i$. Так как K компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то есть $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} H_{i_n}$. Отсюда $F(K) \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_{i_n}$. Следовательно, $F(K)$ компакт. Теорема доказана.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых, не пересекающихся, открытых относительно A множеств.

Определение. Путем в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение $F: [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Определение. Образ пути называется кривой.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall a_1, a_2 \in A$ существует кривая $\mathit{\Gamma} \subset A$ с концами в этих точках.

Можно доказать, что любое линейно связное множество является связным. Наоборот неверно.

Теорема. *Образ любого связного множества при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Пусть $F: X \to Y$ непрерывно, $A \subset X$ и A связно. Докажем, что $B = F(A)$ связно. Допустим противное, то есть $B = G_1 \cup G_2,\quad G_1 \neq \varnothing,\quad G_2 \neq \varnothing,\quad G_1, G_2 - \text{открыты в } B,\quad G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Введем отображение $G: A \to B$ по правилу $G(x) = F(x)$. Отображение G непрерывно на A. Обозначим $H_1 = \overset{-1}{G}(G_1)$, $H_2 = \overset{-1}{G}(G_2)$. Эти множества открыты относительно A, $H_1 \cup H_2 = A$, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ и $H_1, H_2 \neq \varnothing$. Следовательно, множество A не связно. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема. *Любое линейное отображение* $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно на всем* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$-произвольное число

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}, \quad \|x - x_0\| < \delta$, тогда

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \le \|A\| \cdot \|x - x_0\| \le \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Замечание. *Любое линейное отображение равномерно непрерывно, так как* $\|A(x_1) - A(x_2)\| \le \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\|$.

Пусть $F : X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n, \quad Y \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$,

где $f_1, f_2, ..., f_m : X \to R$ – координатные функции отображения F.

Теорема. *Отображение* F *непрерывно в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда все его координатные функции* $f_1, f_2, ..., f_m$ *непрерывны в точке* x_0.

Доказательство.

1) Пусть отображение F непрерывно в точке x_0. Так как $f_k(x) = P_k(F(x)) = (P_k \circ F)(x)_1$ и отображение P_k непрерывно, то функция f_k непрерывна в точке x_0.

2) Пусть функции $f_1, f_2, ..., f_n$ непрерывны в точке x_0. Тогда отображение $F(x) = Q_1(f_1(x)) + Q_2(f_2(x)) + ... + Q_n(f_n(x))$ непрерывно в точке x_0. Теорема доказана.

7.5. Непрерывные функции на компакте.

Теорема (1-ая теорема Вейерштрасса). *Любое непрерывное на компакте отображение ограничено.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт, $Y \subset \mathbb{R}$ и $F : K \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда $F(K)$ – компакт. Следовательно, множество $F(K)$ ограничено. Теорема доказана.

Теорема (2-ая Теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная на компакте функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. Пусть $f : K \to Y$, $K \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$. Множество $f(K)$ ограничено, следовательно, $\sup\limits_{x\in K} f(x) = M \in R$, тогда $\exists x_n \in K \quad f(x_n) \to M$. Так как $f(K)$ замкнуто и $f(x_n) \in f(K)$, то $M \in f(K)$. Для наименьшего значения доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть отображение* $F : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывно, биективно и* X *компакт, тогда* Y *компакт и обратное отображение* $F^{-1} : Y \to X$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $H \subset X$ – произвольное замкнутое относительно X множество. Тогда $H = \tilde{H} \cap X$, где $\tilde{H}$ замкнутое множество. Отсюда H замкнуто, и так как оно ограничено, то компактно. Докажем, что его прообраз при отображении $G = F^{-1}$ замкнут. Имеем $\left(\overset{-1}{G}\right)(H) = F(H)$, но множество $F(H)$ компактно и, следовательно, замкнуто. Теорема доказана.

Теорема Кантора. *Любое непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и отображение $F : K \to Y$ непрерывно. Возьмем $x_0 \in K$ и $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta(x_0) \quad \forall x \in B_{\delta(x_0)}(x_0) \cap K \quad \left\| F(x) - F(x_0) \right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $\bigcup\limits_{x_0 \in K} B_{\frac{\delta(x_0)}{2}}(x_0) \supset K$ и K компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_{\frac{\delta(x_n)}{2}}(x_n) \supset K$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \le n \le N} \dfrac{\delta(x_n)}{2} > 0$. Пусть $x', x'' \in K \quad \left\| x' - x'' \right\| < \delta$. Так как $x' \in K$, то $\exists l \ x' \in B_{\frac{\delta(x_l)}{2}}(x_l)$. Но тогда $x', x'' \in B_{\delta(x_l)}(x_l)$ и

$\left\|F\left(x'\right)-F\left(x_l\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\left\|F\left(x''\right)-F\left(x_l\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$, следовательно $\left\|F\left(x'\right)-F\left(x''\right)\right\|<\varepsilon$. Теорема доказана.

Пусть $X \subset R^l$. Отображение $F: X \to L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ называется операторнозначным.

Определение. Будем говорить, что операторнозначное отображение F непрерывно в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in X \quad \left\|x-x_0\right\|<\delta \quad \left\|F(x)-F\left(x_0\right)\right\|<\varepsilon$.

7.6. Дифференцируемость функций многих переменных.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, \quad Y \subset \mathbb{R}^m, \quad x_0 \in IntX, \quad F: X \to Y$.

Определение. Отображение F называется дифференцируемым в точке x_0, если $\exists A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ такое, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\|F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-A(h)\right\|}{\|h\|}=0. \quad (*)$$

Если $m=n=1$, то $A(h)=kh$ и определение принимает вид

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left|F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-kh\right|}{|h|}=0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-kh}{h}=0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)}{h}=k.$$

Т.е. совпало с определением дифференцируемости в одномерном случае, кроме этого мы получили, что $k=F'\left(x_0\right)$.

Теорема. *Линейный оператор A определяется условием $(*)$ однозначно.*

Доказательство. Допустим, что $\exists B \in L\left(R^n, R^m\right)$ и

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-B\left(h\right)\right\|}{\|h\|}=0.$$

Докажем, что $A=B$. Введем функции

$$R(h)=F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-A(h),$$

$$S(h)=F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-B(h),$$

тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\|S(h)\|}{\|h\|}=0.$$

Пусть $C=B-A$. Тогда $R(h)-S(h)=B(h)-A(h)=C(h)$ и $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|C(h)\|}{\|h\|}=0$.

Возьмем произвольный вектор $a\in\mathbb{R}^n$ $(a\neq 0)$. Пусть $h=\alpha\cdot a$, где α – число. При $\alpha\to 0$ $h\to 0$. Отсюда

$$0=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\|C(\alpha\cdot a)\|}{\|\alpha\cdot a\|}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\|\alpha\cdot C(a)\|}{|\alpha|\cdot\|a\|}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{|\alpha|\cdot\|C(a)\|}{|\alpha|\cdot\|a\|}=\frac{\|C(a)\|}{\|a\|},$$

Т.е. $\|c(a)\|=0,\quad c(a)=0$. Следовательно, $C=0$ и $B=A$. Теорема доказана.

Определение. Оператор A, определяемый условием $(*)$, называется дифференциалом отображения F в точке x_0.

Для дифференциала используется обозначение $A=dF\left(x_0\right)$.

Определение. Производной отображения F в точке x_0 называется матрица его дифференциала. Т.е. $F'(x_0)=\left(dF\left(x_0\right)\right)_e$.

Свойства дифференциала и производной.

1) Если отображение F – дифференцируемо в точке x_0, то cF дифференцируема в точке x_0 и $d\left(cF\right)\left(x_0\right)=cdF\left(x_0\right),\quad \left(cF\right)'\left(x_0\right)=cF'\left(x_0\right)$.

Доказательство. Так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)-A\left(h\right)\right\|}{\|h\|}=0,$$

то

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|cF(x_0+h)-cF(x_0)-cA(h)\right\|}{\|h\|}=0.$$

Следовательно, $d(cF)(x_0)=cA=cdF(x_0)$ и

$$(cF)'(x_0)=\left(d(cF)(x_0)\right)_e=\left(cdF(x_0)\right)_e=c\left(dF(x_0)\right)_e=cF'(x_0).$$

Свойство доказано.

2) Если отображения F,G дифференцируемы в точке x_0, то отображение $(F+G)$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$d(F+G)(x_0)=dF(x_0)+dG(x_0),\quad (F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0).$$

Доказательство. По определению имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)\right\|}{\|h\|}=0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\left\|G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right\|}{\|h\|}=0.$$

Справедлива оценка

$$\frac{\left\|(F+G)(x_0+h)-(F+G)(x_0)-(A+B)(h)\right\|}{\|h\|}=$$

$$\frac{\left\|(F(x_0+h)-F(x_0)-A(h))+\left(G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right)\right\|}{\|h\|}\le$$

$$\le\frac{\left\|F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)\right\|}{\|h\|}+\frac{\left\|G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right\|}{\|h\|}\to 0.$$

Следовательно, сумма $(F+G)$ дифференцируема и

$$d(F+G)(x_0)=A+B=dF(x_0)+dG(x_0),\quad (F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0).$$

Свойство доказано.

Теорема. *Пусть отображение $F:X\to Y$, $x_0\in Int(X)$ и $y_0=F(x_0)\in Int(Y)$. Оотображение $G:Y\to Z$. Пусть F дифференцируемо в точке x_0, а G дифференцируемо в точке y_0. Тогда отображение $G\circ F:X\to Z$ дифференцируемо в точке x_0 и*

$$d(G\circ F)(x_0)=dG(y_0)\circ dF(x_0),$$

$$(G\circ F)'(x_0)=G'(y_0)\cdot F'(x_0)=G'(F(x_0))\cdot F'(x_0).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)=R(h),$$

где $A=dF(x_0)$. Тогда по определению дифференцируемости

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0.$$

Аналогично, пусть

$$G(y_0+H)-G(y_0)-B(H)=S(H),$$

где $B=dG(y_0)$ и

$$\lim_{H\to 0}\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}=0.$$

Пусть $F(x_0+h)-F(x_0)=H$. Тогда $F(x_0+h)=F(x_0)+H=y_0+H$ и мы можем написать

$$(G\circ F)(x_0+h)-(G\circ F)(x_0)-(B\circ A)(h)=$$

$$=G(F(x_0+h))-G(F(x_0))-B(A(h))=G(y_0+H)-G(y_0)-B(A(h))=$$

$$=B(H)+S(H)-B(A(h))=B(H-A(h))+S(H)=$$

$$=B(R(h))+S(H)=T(h).$$

Покажем, что $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|T(h)\|}{\|h\|}=0$. Имеем оценку

$$\frac{\|T(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|B(R(h))+S(H)\|}{\|h\|}\le\frac{\|B(R(h))\|}{\|h\|}+\frac{\|S(H)\|}{\|h\|}\le\frac{\|B\|\cdot\|R(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|S(H)\|}{\|h\|}.$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$, то первое слагаемое правой части неравенства стремится к нулю. Второе слагаемое при $H=0$ равно нулю. При $H\neq 0$ можем написать $\frac{\|S(H)\|}{\|h\|}=\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}\frac{\|H\|}{\|h\|}$. Так как $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}=0$, то нам достаточно доказать, что $\frac{\|H\|}{\|h\|}$ ограничено. Проведем оценку

$$\|H\|=\|A(h)+R(h)\|\le\|A(h)\|+\|R(h)\|\le\|A\|\cdot\|h\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\cdot\|h\|=$$

$$=\left(\|A\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\right)\cdot\|h\|.$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$, то $\exists\delta>0\quad 0<\|h\|<\delta\quad \frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\le\|A\|$. Следовательно,

$$\left(\|A\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\right)\cdot\|h\|\le 2\|A\|\cdot\|h\|.$$

Мы получили, что $\|H\|\le 2\|A\|\|h\|$. Отсюда $\frac{\|H\|}{\|h\|}\le 2\|A\|$ и $\frac{\|H\|}{\|h\|}$ ограничено. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^m$, $F:X\to Y$, $x_0\in Int(X)$ *и* $y_0=F(x_0)\in IntY$. *Если отображение* F *биективно, дифференцируемо в точке* x_0, *оператор* $dF(x_0)$ *обратим и отображение* F^{-1} *непрерывно в точке* y_0, *то* F^{-1} *дифференцируемо в точке* y_0 *и*

$$\left(dF^{-1}\right)(y_0)=\left(dF(x_0)\right)^{-1},\quad \left(F^{-1}\right)'(y_0)=\left(F'(x_0)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $F(x_0+h)-F(x_0)=A(h)+R(h)$, $A=dF(x_0)$. Тогда $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0$ при $h\to 0$. Пусть $h=F^{-1}(y_0+H)-F^{-1}(y_0)$. Так как отображение F^{-1} непрерывно в точке y_0, то при $H\to 0$ и $h\to 0$. Имеем

$$F^{-1}(y_0+H)=x_0+h,$$

$$y_0+H=F(x_0+h)=F(x_0)+A(h)+R(h)=y_0+A(h)+R(h),$$

Отсюда

$$H = A(h) + R(h),$$

$$A^{-1}H = h + A^{-1}R(h),$$

$$h = A^{-1}H - A^{-1}(R(h)),$$

$$F^{-1}(y_0 + H) - F^{-1}(y_0) = A^{-1}(H) - A^{-1}(R(h)).$$

Обозначим $-A^{-1}(R(h))$ через $S(H)$ и докажем, что $\dfrac{\|S(H)\|}{\|H\|} \to 0$ при $H \to 0$.

Справедлива оценка

$$\frac{\|S(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|-A^{-1}(R(h))\|}{\|H\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|R(h)\|}{\|H\|} = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|R(h)\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|H\|}.$$

Так как $\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$, то нам достаточно доказать, что $\dfrac{\|h\|}{\|H\|}$ ограничено. Имеем

$$\|h\| = \|A^{-1}H - A^{-1}(R(h))\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|H\| + \|A^{-1}\| \cdot \|R(h)\| =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|H\| + \|A^{-1}\| \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\|.$$

Так как $\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$, то

$$\exists \delta > 0 \, \forall h \quad 0 < \|h\| < \delta \quad \|A^{-1}\| \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\|h\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|H\| + \dfrac{1}{2} \cdot \|h\|$, следовательно, $\dfrac{1}{2}\|h\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|H\|$ и $\dfrac{\|h\|}{\|H\|} \le 2\|A^{-1}\|$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *– линейное отображение, тогда* A *дифференцируемо* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $dA(x_0) = A$, $A'(x_0) = A_e$.

Доказательство. Так как

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|A(x_0 + h) - A(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \to \infty} 0 = 0,$$

то отображение A дифференцируемо и $dA(x_0) = A$. Теорема доказана.

Пусть $F : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$,

где $f_1, f_2, ..., f_m : X \to \mathbb{R}$ - координатные функции отображения F.

Теорема. *Отображение F дифференцируемо в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall k \quad f_k(x)$ дифференцируема.*

Доказательство.

1) Пусть отображение F дифференцируемо. Так как $f_k = P_k(F(x)) = (P_k \circ F)(x)$, то по теореме о композиции координатная функция $f_k(x)$ дифференцируема в точке x_0.

2) Пусть функции $f_k(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$ дифференцируемы в точке x_0. Так как

$$F(x) = (Q_1 \circ f_1)(x) + (Q_2 \circ f_2)(x) + ... + (Q_m \circ f_m)(x),$$

то $F(x)$ дифференцируемо в точке x_0. Теорема доказана.

Так как $f_k : X \to R \quad X \subset R^n$, то $f_k'(x_0) \in M_{1\times n}$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* $F'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ ... \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f_1'(x_0) = (P_1 \circ F)'(x_0) = (1 \quad 0 \quad ... \quad 0) A_e = (A_e)_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}).$$

Аналогично доказывается и для остальных координатных функций, что $f_i'(x_0)=(A_e)_i$. Теорема доказана.

Пусть $F: X \to Y, \quad X \subset \mathbb{R}^n, \quad Y \subset \mathbb{R}^m, \quad x_0 \in Int(X), \quad u \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.

Определение. Производной отображения F в точке x_0 по направлению вектора u называется вектор $F_u'(x_0)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}$.

Теорема. *Если отображение F дифференцируемо в точке x_0, то в этой точке оно имеет производную по любому направлению u. При этом*

$$F_u'(x_0)=F'(x_0)\cdot u.$$

Доказательство. По определению производной по направлению имеем

$F_u'(x_0)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}$. Так как отображение F дифференцируемо в точке x_0, то $F(x_0+h)-F(x_0)=A(h)+R(h)$, где $A=dF(x_0)$ и $\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0$ при $h\to 0$. Отсюда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{A(\alpha\cdot u)+R(\alpha\cdot u)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(A(u)+\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}\right)=$$

$$=A(u)+\lim_{\alpha\to 0}\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}=0$. Действительно,

$\left\|\dfrac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}\right\|=\dfrac{\|R(\alpha\cdot u)\|}{|\alpha|\cdot\|u\|}=\dfrac{\|R(\alpha\cdot u)\|}{\|\alpha\cdot u\|}\to 0$ так как при $\alpha\to 0 \quad h=\alpha\cdot u\to 0$.

Осталось заметить, что $A(u)=dF(x_0)(u)=F'(x_0)\cdot u$. Теорема доказана.

Замечание. *Из существования производной по любому направлению не следует его дифференцируемость.*

Пусть $f: X \to Y, \quad X \subset \mathbb{R},^n \quad Y \subset \mathbb{R}, \quad f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Определение. Частной производной функции $f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ по переменной x_k в точке $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)^\tau$ называется число:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0\right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + \alpha, \dots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0\right)}{\alpha}.$$

Примеры.

1) Пусть $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 x_2 + \dfrac{x_1}{x_2}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 - \frac{x_1}{x_2^2}.$$

2) Пусть $f(x, y) = \sin\left(xy^2\right)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos\left(xy^2\right) y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos\left(xy^2\right) 2xy.$$

Теорема. *Частная производная связана с производной по направлению формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0\right) = f'_{e_k}\left(x_0\right).$$

Доказательство. По определению частной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0\right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + \alpha, \dots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0\right)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{f\left(x_0 + \alpha e_k\right) - f\left(x_0\right)}{\alpha} = f'_{e_k}\left(x_0\right).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то*

$$f'\left(x_0\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_0\right), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_0\right)\right).$$

Доказательство. Пусть $f'\left(x_0\right) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=f'_{e_k}(x_0)=f'(x_0)e_k=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_k .$$

Теорема доказана.

Замечание. *Из существования частных производных не вытекает дифференцируемость функции.*

Теорема. *Если в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ существуют и непрерывны в точке x_0, то функция f дифференцируема в точке x_0.*

Доказательство. Для простоты доказательство проведем для частного случая $n=2$. Общий случай рассматривается аналогично. Имеем

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0\right)=$$

$$=f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0+h_2\right)+f\left(x_1^0,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0\right)=$$

(применим формулу Лагранжа в следующем виде $f(x+h)-f(x)=f'(c)h$, где $c=x+\theta h,\quad 0<\theta<1$)

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+\theta_1 h_1,x_2^0+h_2\right)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0+\theta_2 h_2\right)h_2=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)h_2+R(h)=Mh+R(h),$$

где $0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1$, $M=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\right)$,

$$R(h)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+\theta_1 h_1,x_2+h_2\right)-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)\right)h_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0+\theta_2 h_2\right)-\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)\right)h_2.$$

Докажем, что $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0$. Так как функции $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ непрерывны в точке x_0, то $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall h_1,h_2 \quad |h_1|<\delta \quad |h_2|<\delta$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)\right|<\varepsilon.$$

Отсюда $|R(h)|<\varepsilon h_1+\varepsilon h_2$ и $\frac{|R(h)|}{\|h\|}<\varepsilon\left(\frac{h_1}{\|h\|}+\frac{h_2}{\|h\|}\right)\le 2\varepsilon$. То есть $\frac{|R(h)|}{\|h\|}\to 0$ при $h\to 0$. Следовательно, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Теорема доказана.

Из доказанных теорем как следствие получаем.

Теорема. *Если отображение* $F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \dots\\ f_m(x)\end{pmatrix}$ *дифференцируемо в точке* x_0, *то*

$$F'(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)\end{pmatrix}\in M_{m\times n}.$$

Определенная выше матрица называется матрицей Якоби, а ее определитель $\det F'(x_0)$ – якобианом.

Определение. Будем говорить, что отображение F – дифференцируемо на множестве X, если оно дифференцируемо в каждой точке множества X.

Дифференциал отображения $F \quad dF: X\to L\left(R^n,R^m\right)$ является операторнозначным отображением.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно дифференцируемо в точке x_0, если операторнозначное отображение dF непрерывно в точке x_0.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно дифференцируемо на множестве X, если dF непрерывно на множестве X.

Теорема. *Пусть* $F: X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, X *– открыто. Отображение* F *непрерывно дифференцируемо на* X *тогда и только тогда, когда существуют и непрерывны на* X *все частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\ (i=1,...,m,\quad j=1,...,n)$ *его координатных функций.*

Доказательство.

1) Пусть отображение F непрерывно дифференцируемо на X, тогда частные производные координатных функций существуют и

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+h)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le \left\|dF(x+h)-dF(x)\right\|.$$

Из непрерывности дифференциала следует непрерывность частных производных.

2) Пусть все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ существуют и непрерывны.

Тогда F дифференцируемо. Докажем непрерывность дифференциала. Из непрерывности частных производных следует, что

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall h \quad 0<\|h\|<\delta \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+h)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|<\varepsilon$$

для всех $(i=1,...,m,\quad j=1,...,n)$. Отсюда

$$\left\|dF(x+h)-dF(x)\right\| \le \sqrt{mn}\max_{i,j}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+h)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| < \sqrt{mn}\varepsilon.$$

Следовательно, отображение dF непрерывно. Теорема доказана.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Отрезком называется множество

$$[a,b]=\{a+t(b-a)\mid t\in[0,1]\}.$$

Интервалом называется множество

$$(a,b)=\{a+t(b-a)\mid t\in(0,1)\}.$$

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f:X\to Y,\quad X\subset\mathbb{R}^n,\quad Y\subset\mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a,b]\subset X$ *дифференцируема на* (a,b), *то* $\exists c\in(a,b)\quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)=a+t(b-a),\quad \varphi:[0,1]\to X$. Пусть $g(t)=(f\circ\varphi)(t)$. Функция $g(t)$ дифференцируема на $(0,1)$ и непрерывна на $[0,1]$. По теореме Лагранжа для одномерного случая

$$\exists\xi\in(0,1)\quad g(1)-g(0)=g'(\xi)(1-0).$$

Так как

$$g(1)=f(\xi(1))=f(b),\ g(0)=f(\xi(0))=f(a),$$

$$g'(\xi)=f'(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)=f'(c)(b-a),$$

где $c=\varphi(\xi)\in(a,b)$, то $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Теорема доказана.

Замечание. *Если* $F:X\to Y,\quad Y\subset\mathbb{R}^m,\quad m>1$, *то теорема не верна.*

Пример. Пусть $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ по формуле

$$F(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сегмент $[0,2\pi]$. Тогда $F(2\pi)-F(0)=0$,

$$F'(x)=\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix},$$

$F'(x)\neq 0\quad \forall x\in R$. Следовательно, $F(2\pi)-F(0)\neq F'(c)(2\pi-0)$.

Теорема. *Пусть отображение* $F:X\to Y,\quad X\subset\mathbb{R}^n,\quad Y\subset\mathbb{R}^m,\quad F$ *непрерывно на* $[a,b]\subset X$ *и дифференцируемо на* (a,b), *тогда* $\exists c\in(a,b)\quad \|F(b)-F(a)\|\le\|F'(c)(b-a)\|$.

Доказательство. Рассмотрим линейную функцию $\varphi(y)=\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}\cdot y$ $\varphi:Y\to R$. Пусть $g=\varphi\circ F$, $g:X\to\mathbb{R}$. Функция g непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). По доказанной теореме

$$\exists c\in(a,b)\quad g(b)-g(a)=g'(c)(b-a).$$

Вычислим левую часть равенства. Имеем

$$g(b)-g(a)=\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}F(b)-\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}F(a)=$$
$$=\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}\left(F(b)-F(a)\right)=\left\|F(b)-F(a)\right\|^{2}.$$

Теперь найдем правую часть

$$g'(c)(b-a)=\phi'\left(F(c)\right)\cdot F'(c)(b-a)=\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}F'(c)(b-a)=$$
$$=\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}\left(F'(c)(b-a)\right).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $a^{\tau}b=\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\le\|a\|\cdot\|b\|$ получаем

$$\left(F(b)-F(a)\right)^{\tau}\left(F'(c)(b-a)\right)\le\left\|F(b)-F(a)\right\|\cdot\left\|F'(c)(b-a)\right\|.$$

Мы доказали, что $\left\|F(b)-F(a)\right\|^{2}\le\left\|F(b)-F(a)\right\|\cdot\left\|F'(c)(b-a)\right\|$.

Если $\left\|F(b)-F(a)\right\|\ne 0$, то $\left\|F(b)-F(a)\right\|\le\left\|F'(c)(b-a)\right\|$.

Если $\left\|F(b)-F(a)\right\|=0$, то неравенство очевидно. Теорема доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы*

$$\left\|F(b)-F(a)\right\|\le\left\|dF(c)\right\|\cdot\|b-a\|.$$

Действительно,

$$\left\|F(b)-F(a)\right\|\le\left\|F'(c)(b-a)\right\|=\left\|dF(c)(b-a)\right\|\le\left\|dF(c)\right\|\cdot\|b-a\|.$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы*

$$\left\|F(b)-f(a)\right\|\le\sup_{x\in X}\left\|dF(x)\right\|\cdot\|b-a\|.$$

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – М.: Наука, 1981.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. – М.: Наука, 1982.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. – М.: Наука, 1969.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Райков Д.А. Одномерный математический анализ. – М.: Высшая школа, 1982.
8. Райков Д.А. Многомерный математический анализ. – М.: Высшая школа, 1989.
9. Демидович Б.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
10. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел, непрерывность, дифференцируемость. – Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы, ряды. – Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Учебное издание

А.В. КОЗАК

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(семестр 2)

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 25.11.2020 г.
Бумага офсетная. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 100.
Усл. печ. лист. 6,05. Уч. изд. л. 2,0. Заказ № 7774.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.