Козак А. В.

Лекции по математическому анализу

Третий семестр

2021

Данный документ представляет собой лекции третьего семестра по математическому анализу, прочитанные доцентом кафедры алгебры и дискретной математики Козаком Анатолией Всеволодовичем студентам мехмата ЮФУ, обучавшимся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Рассмотрены главы «Функции многих переменных (продолжение)», «Кратные интегралы», «Несобственные кратные интегралы», «Функциональные последовательности», «Функциональные ряды», «Семейства функций», «Собственные интегралы, зависящие от параметра», «Несобственные интегралы, зависящие от параметра». В данном документе не разобрана присутствующая в экзаменационной программе глава «Интеграл Лебега». Эту главу рекомендуется изучать по книге У. Рудина «Основы математического анализа».

Набор и верстка в системе LaTeX— студент 2 курса 4 группы Абрамов Олег.

Оглавление

Глава 1

Функции многих переменных. Продолжение

Материал этого семестра — это продолжение функций многих переменных. Мы уже многое про дифференцируемость этих функций изучили во втором семестре. На этот материал мы будем опираться, поэтому, чтобы понимать дальнейшее, нужно хорошо им владеть и при необходимости повторить.

1.1 Неявные функции

Что такое неявные функции, мы скажем чуть позже, а начнем мы с одной замечательной теоремы. Сначала введем обозначения.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ (обращаем ваше внимание: X и Y одной раземерности — n) и $F\colon X \to Y$.

Теорема 1 (теорема о локальном обращении)**.** *Пусть* $x_0 \in \operatorname{Int} X$[1]*.*

Пусть F дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть $dF(x_0)$[2] обратим (или, что то же самое, $F'(x_0)$[3] — обратимая матрица, или $\det F'(x_0) \neq 0$).

Пусть $dF(x)$ непрерывен в точке x_0[4]; обозначим $y_0 = F(x_0)$. Тогда существуют окрестности $U(x_0)$ и $V(y_0)$, такие что сужение $F\colon U \to$

[1]То есть x_0 — внутренняя точка множества X.

[2]Напомним, что дифференциал — это линейный оператор.

[3]Это матрица этого оператора.

[4]То есть если мы в окрестности точки x_0 будем немножко двигать x, то дифференциал будет «плавно» (непрерывно) меняться.

V обратимо, F^{-1} дифференцируемо в окретсности точки y_0 и $dF^{-1}(y)$ непрерывен в точке y_0.

Эта теорема утверждает: если есть произвольное отображение (оно может быть не биективным, не обратимым), если оно дифференцируемо и дифференциал в точке обратим, то можно взять маленькие окрестности точек x_0 и y_0, такие что отображение в этих окрестностях будет обратимым.

Это очень важная теорема и ее доказательство очень непростое, но нет возможности его подробно рассказать, поэтому эта теорема без доказательства. В этом семестре будет несколько таких теорем без доказательства, но они очень серьезные. Эта теорема во многих книгах доказывается, но доказательства сложные, разные. Наиболее простое и понятное доказательство в книге Д. А. Райкова «Многомерный математически анализ». На экзамене доказательства спрашивать не будут, но те, кто интересуются, могут посмотреть в этой книге. Но там дополнительно еще много чего нужно изучить, прежде чем добраться до этой теоремы. Она, в свою очередь, опирается на другие, которые нужно будет доказать. Полное доказательство этой теоремы занимает несколько лекций.

Доказательство мы приводить не будем, а покажем на примере, чтобы вы поняли, как работает эта теорема. Чтобы понять что-то многомерное, лучше сначала поссмотреть, как оно выглядит в одномерном случае.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Это прекрасная функция, дифференцируемая, но если рассматривать $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обратной у нее нет, потому что всем $y > 0$ будут соответствовать два x (рис. 1.1), а чтобы она была обратима, нужно, чтобы был ровно один x. Если мы рассмотрим эту функцию только для положительных x, y (рис. 1.2), то каждому y будет соответствовать ровно один x — эта функция будет обратима, и обратная к ней — это $\sqrt{x}$.

Возьмем производную этой функции:

$$f'(x) = 2x.$$

Производная здесь — это просто число. Условие, что дифференциал обратим, в нашем случае превращается в то, что $x \neq 0$. Если взять $x \neq 0$ (не важно, x слева от нуля или справа), всегда можно выделить такую окрестность точки x, что в этой окрестности функция f будет иметь обратную. Если мы возьмем $x > 0$ (рис. 1.3), у точки x есть окрестность, в этой окрестности функция f имеет обратную — это $\sqrt{x}$. Если взять любую точку $x < 0$ (рис. 1.4), то тоже можно выделить окрестность, и в этой окрестности функция f тоже будет иметь обратную, и обратная — это $-\sqrt{x}$. А если мы возьмем $x = 0$ (рис. 1.5), то, какую бы окрестность

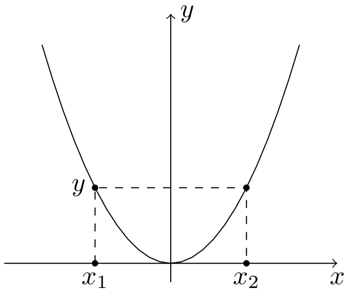


Рис. 1.1:

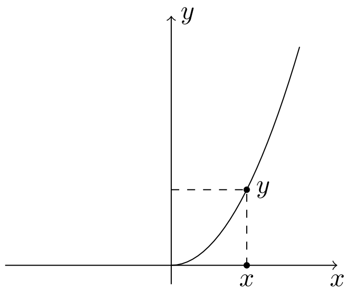


Рис. 1.2:

мы ни брали, обратной у f не будет. Любая сколько угодно маленькая окрестность не исправит ситуацию. 0 — «плохая точка» для этой функции: в окрестности нуля она необратима. А если мы уйдем от нуля влево или вправо, там она уже обратима.

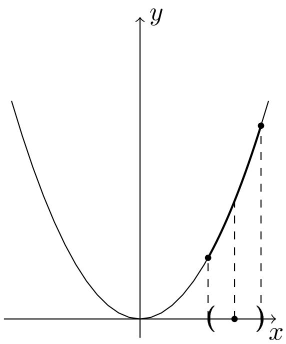


Рис. 1.3:

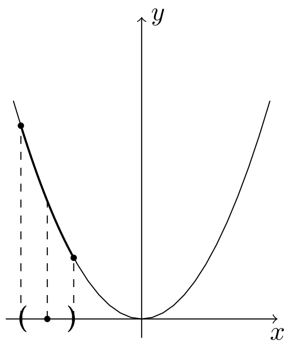


Рис. 1.4:

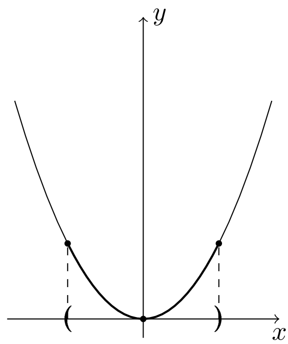


Рис. 1.5:

В многомерном случае все становится намного сложнее, но условие из теоремы — достаточное условие, оно работает всегда, для любой разерности.

А теперь перейдем к неявным функциям.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$[5]. Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$. Оно будет подмножеством пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ (так как $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$, подумайте над этим фактом).

[5] m и n могут быть как разными, так и одинаковыми.

Пусть $F\colon X \times Y \to \mathbb{R}^n$ (можно было взять не все $\mathbb{R}^n$, а $Z \subset \mathbb{R}^n$, это не принципиально, от этого ничего не меняется). Это отображение будем записывать так: $F(x, y)$, как от двух переменных, но x и y — векторы: $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$. Мы хотим выяснить, когда из этого уравнения можно выразить одну неизвестную через вторую неизвестную и получить функцию.

Зададим отображение F более подробно, через координатные функции:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dotfill \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, ..., y_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ запишется в более развернутом виде:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \dotfill \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно получившейся системе уравнений. В этой системе $m + n$ неизвестных и n уравнений, то есть неизвестных больше, чем уравнений. В алгебре мы сталкивались с линейными уравнениями. В системе линейных уравнений можно было написать матрицу, привести ее и получить общее решение системы, выразив главные неизвестные через свободные. Это общее решение и будет явной функцией, которая задается этими уравнениями. Здесь задача точно такая же: мы хотим сформулировать условие, при котором можно часть неизвестных выразить через остальные в явном виде. Для этого нам понадобятся еще некоторые обозначения.

Найдем производную функции $F(x, y)$. Чтобы ее вычислить, нам нужно брать первую координатную функцию и дифференцировать по всем переменным (а переменные у нас — x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n), то есть брать частные производные по всем переменным. Выпишем их:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_n}.$$

Это первая строка матрицы. Точно так же получаем вторую, третью и так далее. Тогда производная отображения F —

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

матрица размера $n \times (m+n)$. Эту матрицу мы можем разделить на две (которые обведем в рамку):

$$F'(x,y) = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{matrix}}}_{n\times m} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{matrix}}}_{n\times n} \right)$$

Обозначим получившееся матрицы. Хотелось бы их связать с отображением F. Если мы на y будем смотреть как на константу, то есть считать F только отображением от x, а y «заморозим», то тогда нужно будет дифференцировать по x, воспринимая y как константу, и мы получим первую матрицу из нами выделенных. Если мы «заморозим» x, а будем по y дифференцировать, то получим вторую матрицу. По аналогии с частными производными первую матрицу обозначим $\frac{\partial F}{\partial x}$, а вторую обозначим $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Только это частная производная не по простой переменной, а по вектору. Это обозначение естественное: если мы одну переменную считаем константой, а по второй дифференцируем, это частная производная.

Мы уже ввели все обозначения и можем сформулировать теорему о неявной функции.

Теорема 2 (теорема о неявной функции). *Пусть* $x_0 \in \operatorname{Int} X$, $y_0 \in \operatorname{Int} Y$ *и* $F(x_0, y_0) = 0$[6].

Пусть F *дифференцируема в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0).

Пусть $dF(x, y)$ *непрерывен в точке* (x_0, y_0).

Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ *— обратимая матрица. Тогда существует окрестность* $U(x_0)$, *существует окрестность* $V(x_0, y_0)$, *существует отображение* $G\colon U \to \mathbb{R}^n$, *дифференцируемое на* U, *такие что* $dG(x)$ *непрерывно в точке* x_0 *и следующие утверждения равносильны:*

1. $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ (x, y) \in V. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = G(x), \\ x \in U. \end{cases}$

Эта теорема утверждает: если выполнены перечисленные в ней условия, то из уравнения $F(x, y) = 0$ можно выразить y через x и получить так же дифференцируемую функцию.

Она доказывается из теоремы о локальном обращении, но доказательство достаточно длинное, поэтому она так же без доказательства (его так же можно прочитать в книге «Многомерный математически анализ» Д. А. Райков).

Как она работает, мы рассмотрим на примере.

Пример 2. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Эта функция дифференцируема.

Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет единичную окружность на плоскости. Эта окружность не является графиком никакой функции, потому что одному x может соответствовать два y (и таких точек много), а в графике каждому x соответствует ровно один y. Множество решений уравнения не определяет какую-то функцию.

Рассмотрим частную производную, фигурирующую в теореме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

В данном, одномерном случае частная производная — это число. Чтобы она была обратима, необходимо $y \neq 0$. На этой окружности $y = 0$ только в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. В этих точках условие теоремы нарушается —

[6]То есть (x_0, y_0) — это какое-то решение уравнения $F(x, y) = 0$.

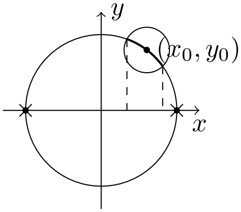


Рис. 1.6:

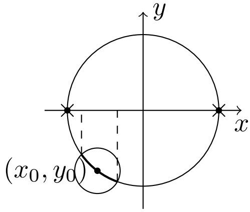


Рис. 1.7:

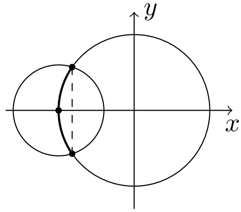


Рис. 1.8:

это «плохие» точки. Если мы возьмем любую точку (x_0, y_0), отличную от «плохих», то мы всегда можем выделить такую окрестность $U(x_0, y_0)$ этой точки, что попавшая в нее часть окружности будет графиком функции G (рис. 1.6, рис. 1.7). Но какую бы окрестность «плохих» мы ни взяли, попавшая в нее часть окружности графиком не будет, потому что вертикальная прямая будет пересекать ее в двух точках: одному x будут соответствовать два y (рис. 1.8). То есть ни в какой окрестности «плохих» точек y через x однозначно не выразится.

1.2 Частные производные старших порядков

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, f\colon X \to \mathbb{R}$.

Мы уже определили частные производные функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Чтобы найти частную производную по x_1, нужно зафиксировать, считая константами, все переменные, кроме первой, и дифференцировать по первой. Аналогично по остальным переменным. Но мы получим функцию такую же, как исходная, которую можно еще раз продифференцировать и по x_1, и по x_2, …, и по x_n. Тогда мы получим вторую частную производную.

Определение 1. *Вторая частная производная —*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

То есть чтобы найти вторую производную $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, нужно взять сначала производную по переменной x_j, а потом то, что получилось, продифференцировать по в переменной x_i (i и j могут совпадать).

Аналогично можно определить *третью частную производную*:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right).$$

Можно вводить частные производные любых порядков, дифференцируя предыдущую производную.

Используется также другое обозначение второй частной производной:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Отметим, что раньше мы рассматривали в качестве окрестностей открытые шары. На самом деле, это частный случай и можно рассматривать, например, открытый прямоугольник — это тоже будет окрестность. Какой формы окрестность, не играет роли.

Определение 2. *Окрестностью точки* называется любое открытое множество, которому принадлежит эта точка.

Напомним теорему Лагранжа.

Теорема (теорема Лагранжа)**.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Любую точку $c \in (a, b)$ можно записать в виде $a + \theta h$, где $0 < \theta < 1$, $h = b - a$. Тогда соотношение из теоремы Лагрнжа примет вид

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta h)h.$$

Такая запись более громоздкая, но изначальная запись предполагает, что $b > a$, а в полученной нами неважно, какие a и b.

Тогда теорему Лагранда можно записать в виде

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h,$$

h может быть как больше нуля, так и меньше, $0 < \theta < 1$.

Далее теоремой Лагранжа воспользуемся в полученном виде.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).*

Если эти частные производные непрервны в точке (x_0, y_0), то они равны:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Имеется некоторая окрестность точки (x_0, y_0). Возьмем два числа δ и h настолько маленькими, чтобы прямоугольник с вершинами в точках $(x_0, y_0), (x_0, y_0 + h), (x_0 + \delta, y_0 + h), (x_0 + \delta, y_0)$ целиком лежал в этой окрестности (δ и h можно брать и отрицаельными, то есть можно поворачивать прямоугольник в любую сторону).

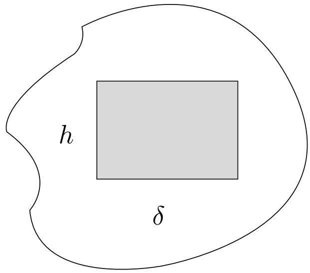


Рис. 1.9:

Рассмотрим число

$$A = \frac{f(x_0 + \delta, y_0 + h) - f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)}{\delta h}.$$

Введем функцию

$$\varphi(y) = \frac{f(x_0 + \delta, y) - f(x_0, y)}{\delta}.$$

Тогда

$$A = \frac{f(x_0 + \delta, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h)}{\delta}\frac{1}{h} - \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta}\frac{1}{h} =$$

$$= \varphi(y_0 + h)\frac{1}{h} - \varphi(y_0)\frac{1}{h} = \frac{\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)}{h} =$$

(применим теорему Лагранжа)

$$= \varphi'(y_0 + \theta_1 h) = \frac{f'_y(x_0 + \delta, y_0 + \theta_1 h) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 h)}{\delta} =$$

(второй аргумент у f'_y одинаковый — $y_0 + \theta_1 h$,

а по первой переменной приращение: $x_0 + \delta, x_0$,

и мы опять можем применить

теорему Лагранжа (по первой переменной))

$$= f''_{xy}(x_0 + \theta_2 \delta, y_0 + \theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1.$$

Введем функцию

$$\psi(x) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}.$$

Тогда аналогично

$$A = f''_{yx}(x_0 + \theta_3\delta, y_0 + \theta_4 h), \quad 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1.$$

Отсюда следует:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_2\delta, y_0 + \theta_1 h) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3\delta, y_0 + \theta_4 h).$$

Пусть $\delta \to 0, h \to 0$, тогда

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_2\delta, y_0 + \theta_1 h) \to f''_{xy}(x_0, y_0),$$
$$f''_{yx}(x_0 + \theta_3\delta, y_0 + \theta_4 h) \to f''_{yx}(x_0, y_0),$$

откуда

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

□

Теорема доказана для функций двух переменных. Если функция зависит от трех переменных ($f(x, y, z)$), то мы можем зафиксировать третью переменную, тогда мы получаем функцию двух переменных и можем применить доказанную теорему. При любом фиксированном z получаем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Также можно было зафиксировать первую переменную и получить аналогичную формулу для y, z. То есть эта формула справедлива для любого числа переменных.

Более того, эта формула переносится и на старшие производные:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \ldots$$

(на месте многоточия — частные производные с остальными вариантами перестановок $\partial x, \partial y, \partial z$). Это верно так же и для четвертых производных, пятых и так далее. То есть смешанные производные, если они непрерывны, не зависят от порядка дифференцирования.

Этот факт можно доказать по индукции.

Следующая теорема будет иметь громоздкую запись, но ее важно понять: мы сформулируем и докажем формулу Тейлора для многих переменных — очень важный инструмент для дальнейшей работы.

Несмотря на громоздкость формулы, доказывается она несложно — из одномерной формулы Тейлора.

Теорема 4. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n, f\colon X \to \mathbb{R}, x_o \in \operatorname{Int} X$.

Пусть f имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности $U(x_0)$ до порядка $m+1$ включительно.

Пусть $x \in X, [x_0, x] \subset U$.

Пусть $h = x - x_0$. Тогда справедлива формула (формула Тейлора):

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) h_k + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) h_k h_l + \ldots + \\ + \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_m}}(x_0) h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_m} + \\ + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_{m+1}}}(c) h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_{m+1}}}_{\text{остаточый член в форме Лагранжа}},$$

где $c \in (x_0, x)$.

Доказательство. Введем функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + th), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда

$$\varphi(0) = f(x_0), \\ \varphi(1) = f(x_0 + h) = f(x).$$

Напомним одномерную формулу Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0) h^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) h^m + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c) h^{m+1},$$

где $c \in (x_0, x)$.

Пусть $x_0 = 0, x = 1, h = 1, f = \varphi$, тогда получим:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot \varphi''(0) \cdot 1 + \ldots + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \cdot 1 + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta) \cdot 1,$$

где $0 < \theta < 1$.

Теперь посчитаем, чему равно получившееся выражение. $\varphi(0), \varphi(1)$ уже найдены. Найдем $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th) \cdot h,$$
$$\varphi'(0) = f'(x_0) \cdot h =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) h_k.$$

Мы получили второе слагаемое доказываемой формулы.

Если вычислять $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$ и так далее (то есть последовательно дифференцировать уже полученные производные и искать значение в точке 0), каждый раз будет добавляться одно слагаемое доказываемой формулы. $\square$

Рассмотрим слагаемые доказанной формулы Тейлора.

Первое слагаемое: $f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0.

Второе слагаемое (первая сумма):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) h_k = f'(x_0) \cdot h \stackrel{\text{опр}}{=} df(x_0)(h)$$

— первый дифференциал функции f в точке x_0.

На основании этого факта обозначим вторую сумму как второй дифференциал, третью — как третий дифференциал и так далее.

Определение 3. *Второй дифференциал —*

$$d^2 f(x_0)(h) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) h_k h_l.$$

Выражение в правой части — квадратичная форма, то есть, в то время как первый дифференциал представляет собой линейную форму, второй дифференциал является квадратичной формой.

Аналогично определяется третий дифференциал, четвертый и так далее.

Если использовать обозначение дифференциала, то формулу Тейлора можно записать в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0)(h) + \ldots + \\ + \frac{1}{m!}d^m f(x_0)(h) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1} f(c)(h),$$

где $c \in (x_0, x)$.

В таком виде она очень напоминает одномерную, вместо производных стоят дифференциалы, структура ее понятна.

В сжатой записи, с помощью дифференциалов, она выглядит не так громоздко.

1.3 Экстремум функций многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Int} X$ (это важное условие).

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой локального максимума*, если

$$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in U \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Определение 5. Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума*, если

$$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U} \quad f(x) < f(x_0).$$

Отметим, что в определении строгого локального максимума фигурирует именно проколатая окрестность, т. к. иначе мы бы рассматривали в том числе $x = x_0$, для которого не может выполняться неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение 6. Точка x_0 называется *точкой локального минимума*, если

$$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in U \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 7. Точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума*, если

$$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U} \quad f(x) > f(x_0).$$

Максимум и минимум легко сводятся друг к другу заменой f на $-f$: если поменять знак перед функцией, то максимум и минимум поменяются ролями. Теоремы можно доказывать для чего-то одного, для второго они тогда будут следовать.

Теорема 5. *Пусть x_0 — точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$.*

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, \quad \ldots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

(или, что то же самое, $f'(x_0) = 0$).

Доказательство. Пусть $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — точка локального максимума.

В функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зафиксируем все переменной, кроме первой, и рассмотрим функцию

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Эта функция имеет локальный максимум в точке x_1^0. Тогда по теореме Ферма

$$\varphi'(x_1^0) = 0,$$

что значит

$$f'_{x_1}(x_0) = 0.$$

То есть если в точке экстремума зафиксировать все переменные, кроме одной, то по этой переменной в этой точке так же будет экстремум, значит, по этой переменной производная должна равняться нулю. □

Эта теорема — многомерный аналог теоремы Ферма.

Если мы рассмотрим вектор (x, y), зафиксируем вторую координату $(y = y_0)$, а менять будем только первую, то точка (x, y_0) будет сдвигаться в горизонтальном направлении. Если же зафиксировать первую $(x = x_0)$, а менять вторую, то точка (x_0, y) будет сдвигаться в вертикальном направлении.

Поясним теорему. Если мы имеем точку локального максимума, то в какую бы сторону мы ни сдвинулась, значение функции уменьшится по определению точки максимума. Но тогда, если мы сдвигаемся горизонатально (в любом из двух направлений), значение функции так же уменьшиться. Значит, производная по этому направлению равна нулю. Но точка движется горизонтально, если первая координата меняется, а вторая фиксированная. Значит, производная по этому направлению — это производная по первой переменной, и она равна нулю. Аналогично производная по вертикальному направлению равна производной по второй координате и так же равна нулю. Отсюда, к слову, следует, что производные по любому другому направлению тоже равны нулю (они выражаются через эти две производные).

Дальше мы дадим достаточное условие эктремума. Достаточные условия экстремума в одновмерном случае мы уже изучили: если производная меняет в точке знак с плюса на минус, то это точка максимума, если с минуса на плюс — минимума. Также мы формулировали достаточное условие эксремума через вторую производную: если первая производная равна нулю, а вторая производная больше нуля, то имеем точку минимума, а если меньше нуля, то максимума. Получим теперь аналогичные теоремы для многомерного случая. Чтобы это сделать, нужно обратиться к алгебре. Далее будет небольшое отсутпление в алгебру, в которое добавим немного матанализа.

Вспомним, что такое квадратичная форма (переменную будем писать буквой h, так обазначаем приращение к аргументу).

Определение 8. *Квадратичная форма —*

$$\varphi(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$

В правой части сумма двойная — и по i, и по j.

Допустим, что коэффициенты a_{ij} квадратичной формы зависят от какого-то параметра x, то есть имеем квадратичные формы (не одну, а много), зависящие от параметра x:

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) h_i h_j.$$

Допустим, что $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, а функции $a_{ij}(x)$ непрерывны.

Определение 9. Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определённой, если $\varphi(h) > 0$ ($\varphi(h) < 0$) для любого $h \neq 0$.

Определение 10. Квадратичная форма называется знакопеременной , если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 11. Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) полуопределённой, если $\varphi(h) \geqslant 0$ ($\varphi(h) \leqslant 0$) для любого h.

Лемма 1.
1. *Если $\varphi_{x_0}(h)$ — положительно определенная квадратичная форма, то существует такая окрестность $U(x_0)$, что для любого $x \in U$ $\varphi_x(h)$ — положительно определенная квадратичная форма.*
2. *Если $\varphi_{x_0}(h)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то существует такая окрестность $U(x_0)$, что для любого $x \in U$ $\varphi_x(h)$ — отрицательно определенная квадратичная форма.*

3. *Если $\varphi_{x_0}(h)$ — знакопеременная квадратичная форма, то существует такая окрестность $U(x_0)$, что для любого $x \in U$ $\varphi_x(h)$ — знакопеременная квадратичная форма.*

Доказательство. 1. Пусть $\varphi_{x_0}(h)$ — положительно определенная квадратичная форма. Тогда, по критерию Сильвестра, главные угловые миноры будут строго положительными:

$$\Delta_1(x_0) > 0, \quad \Delta_2(x_0) > 0, \quad \dots \quad, \Delta_n(x_0) > 0.$$

Напомним, что главные угловые миноры — это определители угловых матриц с непрерывными элементами. Если мы возьмем определитель матрицы с непрерывными элементами, мы получим непрерывную функцию, потому что определитель — это сумма произведений элементов, а сумма произведений непрерывных функций является непрерывной функцией. Тогда очевидно, что $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$, …, $\Delta_n(x)$ — непрерывные функциии. Но если непрерывная функция в какой-то точке положительная, то и в некоторой окрестности она положительная, тогда

$$\begin{array}{l}
\exists U_1(x_0) \;\; \Delta_1(x) > 0 \;\; \forall x \in U_1, \\
\exists U_2(x_0) \;\; \Delta_2(x) > 0 \;\; \forall x \in U_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\exists U_n(x_0) \;\; \Delta_n(x) > 0 \;\; \forall x \in U_n.
\end{array}$$

Пусть $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$, это окрестность точки x_0. В этой окрестности

$$\forall x \in U \;\; \Delta_1(x) > 0, \;\; \Delta_2(x) > 0, \;\; \dots, \quad \Delta_n(x) > 0,$$

следоватльено, $\varphi_x(h)$ — положительно определенная квадратичная форма по критерию Сильвестра.

2. Этот случай сводится к предыдущему.

   Пусть $\varphi_{x_0}(h)$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Тогда $-\varphi_{x_0}(h)$ — положительно определенная квадратичная форма и можно применить уже доказанный предыдущий пункт.

3. Пусть $\varphi_{x_0}(h)$ — знакопеременная квадратичная форма, тогда

$$\begin{array}{l}
\exists h^{(1)} \;\; \varphi_{x_0}(h^{(1)}) > 0, \\
\exists h^{(2)} \;\; \varphi_{x_0}(h^{(2)}) < 0.
\end{array}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) h_i^{(1)} h_j^{(1)}.$$

$h_i^{(1)}, h_j^{(1)}$ — константы, функции a_{ij} непрерывные, если непрерывную функцию умножить на число, получим непрерывную, если непрерывные функции сложить, получим непрерывную, следовательно, $f_1(x)$ — непрерывная функция.

$$f_1(x_0) > 0,$$

следовательно,

$$\exists U_1(x_0) \;\; \forall x \in U_1 \;\;\; f_1(x) > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) h_i^{(2)} h_j^{(2)}.$$

Для нее

$$\exists U_2(x_0) \;\; \forall x \in U_2 \;\;\; f_2(x) < 0.$$

Пусть $U = U_1 \cap U_2$. Тогда

$$\forall x \in U \;\;\; \varphi_x(h^{(1)}) > 0, \varphi_x(h^{(2)}) < 0,$$

значит, $\varphi_x(h)$ — знакопеременная квадратичная форма.

$\square$

Лемма утверждает: если коэффициенты квадратичной формы непрерывны и если в какой-то точке она определенного вида (положительно определенная, отрицательно определенная, знакопеременная), то существует такая окрестность этой точки, что для всех точек из нее она будет того же вида.

Теорема 6 (достаточное условие экстремума)**.** *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема*[7]*.*

Пусть $x_0 \in \operatorname{Int} X$, $df(x_0) = 0$.[8] *Тогда:*

[7]То есть у этой функции существуют все частные производные первого порядка, все частные производные второго порядка и все они непрерывны.

[8]Написанное — необходимое условие экстремума.

1. *если $d^2 f(x_0)$ — положительно определенная квадратичная форма, то x_0 — точка строгого минимума;*

2. *если $d^2 f(x_0)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то x_0 — точка строгого максимума;*

3. *если $d^2 f(x_0)$ — знакопеременная квадратичная форма, то x_0 не является точкой экстремума.*

Доказательство. 1. Пусть $d^2 f(x_0)$ — положительно определенная квадратичная форма. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \underbrace{\frac{1}{2}d^2 f(c)(h)}_{\text{остаточный член}},$$

где $c \in (x_0, x)$.

По условию $df(x_0)(h) = 0$, откуда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2 f(c)(h).$$

По лемме 1, так как $d^2 f(x_0)(h)$ — положительно определенная квадратичная форма, существует окрестноть $U(x_0)$, такая что для любого $x \in U$ $d^2 f(c)(h)$ — положительно определенная квадратичная форма.

Отметим одну тонкость. У нас будет точка x_0 и точка x, принадлежащая окрестности $U(x_0)$. Окрестность — это любое открытое множество, то есть она может быть любой формы. Тогда точка c, лежащая на отрезке от x_0 до x, может не попасть в U (рис. 1.10). А мы хотим, чтобы такого не могло случиться. Окрестность U всегда можно считать шаром, тогда такого не будет, так как c лежит на радиусе, то есть всегда лежит внутри шара (рис. 1.11). Если окрестность не шар, то найдем шар, который лежит в этой окрестности и возьмем его в качестве окрестности — уменьшим ее до шара (рис. 1.12).

Не нарушая общности, будем считать, что U — шар. Получаем: для любого $x \in U$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2 f(c)(h)$$

— положительно определенная квадратичная форма. То есть если $x \neq x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, значит, x_0 — точка строгого минимума.

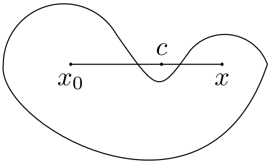
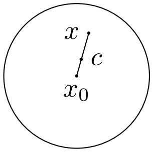


Рис. 1.10:



;

Рис. 1.11:

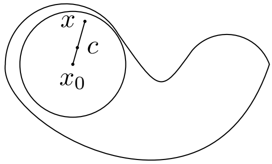


Рис. 1.12:

2. Пусть $\varphi_{x_0}(h)$ — отрицательно определенная квадратичная форма.

   Заменим $f(x)$ на $-f(x)$, тогда минимум и максимум поменяются ролями и этот случай сведется к предыдущему.

3. Пусть $d^2f(x_0)$ — знакопеременная квадратичная форма. Тогда существует окрестность $U_0(x_0)$ (шар), такая что для любого $x \in U_0$ $d^2f(x)$ — знакопеременна. В точке x_0 нет экстремума означает, что

$$\forall U(x_0) \;\; \exists x_1, x_2 \in U \;\; f(x_1) > f(x_0) \;\; f(x_2) < f(x_0).$$

Нам нужно взять любую окрестность и показать, что для нее такие точки x_1, x_2 найдутся.

Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. $d^2f(x_0)$ — знакопеременная квадратичная форма, значит,

$$\exists h_1 \;\; d^2f(x_0)(h_1) > 0,$$
$$\exists h_2 \;\; d^2f(x_0)(h_2) < 0.$$

По лемме 1, если мы начнем двигать x_0, неравенства выше сохранятся, отсюда

$$d^2f(c)(h_1) > 0,$$
$$d^2f(c)(h_2) < 0.$$

$$x - x_0 = h,$$

отсюда

$$x = x_0 + h.$$

Возьмем

$$x_0 + h_1,$$
$$x_0 + h_2.$$

Мы не знаем, какие ветора h_1, h_2, они могут быть слишком большими и данные суммы могут окрестности U не принадлежать. Подберем α, β такими, что

$$x_1 = x_0 + \alpha h_1 \in U,$$
$$x_1 = x_0 + \beta h_2 \in U.$$

Если $\varphi(h)$ — квадратичная форма, то $\varphi(\alpha h) = \alpha^2\varphi(h)$ (так как квадратичная форма — это сумма произведений двух координат, каждая из которых умножится на α, значит, за сумму вынесется α^2). Значит, если $\varphi(h)$ положительна (отрицательна), то и $\varphi(\alpha h)$ положительна (отрицательна). Отсюда получаем:

$$f(x_1) - f(x_0) = \frac{1}{2}\alpha^2 d^2 f(c)(h) > 0,$$

значит,

$$f(x_1) > f(x_0).$$

Точно так же

$$f(x_2) < f(x_0).$$

Значит, в точке x_0 экстремума нет.

□

Этой теоремой не исчерпыываются все варианты, так как не обязательно выполняется один из трех описанных случаев: квадратичная форма может быть положительно (отрицательно) полуопределенной. Тогда требуются дополнительные исследования.

На практике будет часто встречаться один частный случай, когда переменных всего две.

Напомним, что матрица второго дифференциала состоит из частных производных второго порядка:

$$(d^2 f(x,y))_e = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\Delta_1 = f''_{xx},$$
$$\Delta_2 = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

Частный случай. *Пусть f зависит от двух переменных — x и y. Пусть $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$*[9]*.*

Тогда:

[9] То есть необходимое условие экстремума выполнено.

1. *если*
$$\Delta_1 > 0,$$
$$\Delta_2 > 0,$$
то (x_0, y_0) — точка строгого минимума;

2. *если*
$$\Delta_1 < 0,$$
$$\Delta_2 > 0,$$
то (x_0, y_0) — точка строгого максимума;

3. *если*
$$\Delta_2 < 0,$$
(то есть квадратичная форма знакопеременная), то экстремума нет.

Это не исчерпывает все случаи, может случиться, что ни одно из этих условий не выполнено. Тогда нужно что-то придумывать: приспосабливаться к задаче и как-то доказывать. На практике такие случаи будут разобраны.

1.4 Условный экстремум

Условный экстремум — это задача следующего вида. Имеется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и нужно искать экстремум этой функции, но не для произвольных x, а для x, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

которая называется *условием связи.*

Строгий и нестргий максимум, строгий и нестрогий минимум и «нет экстремума» здесь точно такие же, как когда мы изучали обычный экстремум (говорят *безусловный экстремум*), только x должен удовлетворять условию связи.

Разберем простейший пример такой задачи.

Пример 3. Пусть $f(x,y) = x + y$, условие связи — $x^2 + y^2 = 1$. Нужно найти максимум функции.

Решение. Условие связи — это окружность. И на этой окружности нужно найти точку, в которой сумма координат наибольшая.

Обозначим $x+y=c$ и рассмотрим все точки (x,y) с фиксированным c. Эти точки будут лежать на прямой, проходящей через точки $(c,0)$ и $(0,c)$ (рис. 1.13). Наибольшее c достигается, когда $x+y=c$ — касательная к окружности $x^2+y^2=1$ (рис. 1.14). В этом случае $x+y=\sqrt{2}$.

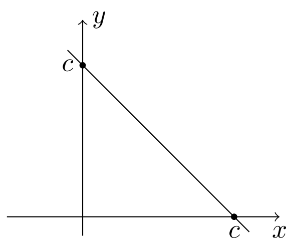


Рис. 1.13:

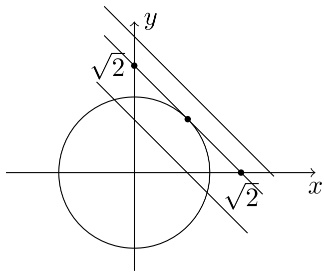


Рис. 1.14:

Ответ. $\sqrt{2}$.

На практике очень часто переменные связаны какими-то соотношениями и нужно решать такую задачу, это очень распространенная задача в приложениях.

С простейшими задачи такого вида вы уже сталкивались.

Пример 4. Пусть периметр P прямоугольника равен 1. Какая самая большая площадь S может быть у этого прямоугольника?

Решение. Рассмотрим прямогульник со сторонами, длины которых x, y.

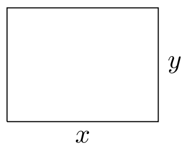


Рис. 1.15:

$$2(x+y)=1$$

— условие связи. Нужно найти максимум функции

$$S = x \cdot y.$$

Такого типа задачи мы решали. Можно из условия связи выразить одну неизвестную через другую, подставить в функцию и все найдется. Выразим y через x:

$$y = \frac{1}{2} - x,$$

подставляем в функцию, получаем:

$$S = x\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2}x - x^2.$$

Нужно искать максимум этой функции. Берем проиводную:

$$S' = \frac{1}{2} - 2x.$$

Приравниваем производную к нулю:

$$\frac{1}{2} - 2x = 0,$$

получаем

$$x = \frac{1}{4},$$

тогда

$$y = \frac{1}{4},$$

тогда

$$S = x \cdot y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

То есть самая большая площадь, которая может быть — $\frac{1}{16}$, и будет она у квадрата.

Ответ. 16.

Эта задача легко решилась, потому что мы здесь легко выразили одну неизвестную через другую, подставили в функцию, и все легко решилось. Но далеко не всегда это можно сделать. В примере 3 уже было бы хуже выражать, а можно еще побольше накрутить чего-нибудь, так что уже вообще не выразить напрямую, явно. Тогда такой способ не проходит. А мы научимся решать такие задачи в самом общем виде, когда системы, выражающие условие связи, могут быть большими, неприятными, но все равно до ответа добраться можно.

Для начала мы рассмотрим случай, когда из условия связи одни неизвестные выражаются через другие. В этом случае задача легко решается.

Допустим, что условие связи

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, то есть в этой системе можно выделить главные неизвестные, свободные неизвестные и выразить главные через свободные.

Эту систему мы запишем в векторной форме:

$$G(x, y) = 0,$$

здесь x — свободные неизвестные, y — главные. Из этой системы явно выражается y через x:

$$y = H(x).$$

Пусть требуется найти экстремум функции

$$f(x, y)$$

при условии

$$G(x, y) = 0.$$

Это задача на условный экстремум (равенство выше — условие связи). Если нам удается выразить из условия связи y через x:

$$y = H(x),$$

то эта задача равносильна следующей: требуется найти безусловный экстремум функции

$$f(x, H(x)).$$

Мы сделали то же самое, что в примере 3, с прямоугольником: выразили одну неизвестную через вторую, подставили в функцию, и получили функцию от одной переменной, и уже искали для нее максимум.

То есть если из условия связи можно выразить часть неизвестных через другие, то задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум и здесь ничего нового у нас не возникает. Но процедура выражения может быть крайне тяжелой, а иногда и непроходимой. И поэтому мы разберем методы, когда можно эту проблему обойти.

Для условия связи мы будем использовать уже введенное обозначение $G(x, y)$, то есть разделять главные неизвестные и свободные — в реальных задачах нам никто их так не дает, там нужно еще их отсортировать, какие главные, какие неизвестные. В некоторых случаях нет необходимости в этом, нам будет безразлично, но в теории мы будем считать, что мы уже знаем, какие главные, а какие свободные.

Итак, расмотрим задачу на условный экстремум. Пусть необходимо найти экстремум функции

$$f(x, y)$$

при условии связи

$$G(x, y) = 0$$

(G — это не одна функция, а целый набор: $g_1, g_2, \ldots, g_m$).

Определение 12. Функция

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda_1(g_1(x, y)) + \lambda_2(g_2(x, y)) + \ldots + \lambda_m(g_m(x, y))$$

называется *функцией Лагранжа.*

Если мы введем вектор-столбец

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix},$$

то мы функцию Лагранжа можем записать в векторной форме:

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda^T \cdot (G(x, y))^{10}$$

Такая запись короче, поэтому мы будем использовать ее.

Теорема 7 (необходимое условие условного экстремума)**.** *Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) для функции $G(x, y)$ выполняются условия теоремы о неявной функции.*

Пусть точка (x_0, y_0) — точка условного экстремума для функции $f(x, y)$ при условии связи $G(x, y) = 0$ и функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема.

Тогда существует такое λ_0, что

$$df_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$$

[10] Так как G — вектор-столбец, вектор λ транспонированный, чтобы можно было их перемножить.

(то есть для некоторого λ_0 дифференциал функции Лагранжа равен 0[11]).

Доказательство будет чуть позже, а сейчас осмыслим, что мы хотим доказать и что нам это дает.

Определимся с обозначениями.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

— функция, экстремум которой мы будем искать. Условие связи —

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Тогда функция Лагранжа —

$$f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^T.$$

Посчитаем количество неизвестных: m «иксов», n «игреков», n «лямбда» (они нам тоже неизвестны) — всего $m + 2n$ неизвестных.

Условие

$$df_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$$

дает нам систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} = 0, \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_n} = 0. \end{cases}$$

[11] То есть, решая уравнение $df_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$, мы можем найти несколько точек, которые подозрительны на экстремум, а дальше их нужно исследовать и отобрать нужные.

В этой системе $m+n$ уравнений — неизвестных больше. Но точка (x, y) должна удовлетворять условиям связи — системе с n уравнениями. Получаем, что всего уравнений $m+n+n=m+2n$, то есть количество уравнений равно количеству неизвестных. В общем случае такая система имеет конечное число решений. Решив такую систему, мы найдем конечное число точек, подозрительных на экстремум. В общем случае это дает некоторый метод нахождения точек экстремума.

Доказательство. Требуется доказать, что существет λ_0, для которого

$$df_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0,$$

это означает

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

($\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x}, \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y}$ — частные векторные производные). Нам нужно это показать, что система верна.

Начнем со второго уравнения системы. Напомним, что

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Тогда условие

$$\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda_0^T \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Мы предполагаем, что условие теоремы о неявной функции выполнено, то есть $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$ — обратимая матрица, тогда λ_0^T находится так:

$$\lambda_0^T = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1}.$$

Это λ_0^T подставим в первое уравнение системы и покажем, что оно превратится в тождество. Для этого выпишем, чему равняется $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Нам необходимо доказать, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Напомним, что условие связи

$$G(x, y) = 0$$

определяет явную функцию

$$y = H(x).$$

Если подставим функцию в условие связи, получим тождество:

$$G(x, H(x)) \equiv 0.$$

Мы можем это тождество продифференцировать и записать следующее:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, H(x)) + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot H'(x) \equiv 0.$$

Вместо x подставим x_0 (здесь $H(x_0) = y_0$):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot H'(x_0) \equiv 0.$$

Матрица $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$ обратимая. Найдем $H'(x_0)$:

$$H'(x_0) = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Если в функцию $f(x, y)$ вместо y подставить $H(x)$, получим задачу на безусловный экстремум для функции $f(x, H(x))$, и x_0 — точка экстремума для этой функции, значит, по теореме 5 (теореме Ферма), производная в этой точке у этой функции равна нулю, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot H'(x_0) = 0.$$

Подставим в левую часть полученное ранее $H'(x_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Мы получили равенство (**??**), которое требовалось доказать. □

Доказательство сложное: оно громоздкое, непонятное, но если не в матричной форме писать, а расписывать по функциям, то будет еще хуже. Это материал действительно сложный — в нем важно разобраться. Мы выразили из одного уравнения системы и подставили во вторую.

Как это работает практически, будет разобрано на семинарских занятиях.

Хотелось бы иметь достаточное условие. Пользуясь доказанной теоремой, мы можем найти кучу точек, подозрительных на экстремум, а что в этих точках: максимум, минимум, ничего нет — вопрос будет открытый.

Теорема 8 (достаточное условие условного экстремума)**.** *Пусть функции $f(x, y)$, $G(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы.*

Пусть $G(x_0, y_0) = 0$ и пусть выполнено необходимое условие экстремума $df_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$.

Тогда рассмотрим квадратичную форму $\varphi = d^2 f_{\lambda_0}(x_0, y_0)$.

Рассмотрим $dG(x_0, y_0)$. Пусть $\operatorname{Ker}(dG(x_0, y_0)) = L$[12]*.*

Пусть $\psi = \varphi\big|_L$[13]*. ψ — тоже квадратичная форма.*

1. *Если ψ — положительно определенная квадратичная форма, то (x_0, y_0) — точка строгого минимума.*
2. *Если ψ — отрицательно определенная квадратичная форма, то (x_0, y_0) — точка строгого максимумма.*
3. *Если ψ — знакопеременная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0) условного экстремума нет.*

То есть задача на условный экстремум решается примерно похоже на безусловный, но только здесь нужно работать не с исходной функцией, а с функцией Лагранжа. Но когда взяли второй дифференциал от функции Лагранжа, нужно найти еще сужение этого дифференциала на ядро. Получим квадратичную форму, эта квадратичная форма отвечает за тип экстремума.

Опять же эти три условия не исчерпывают все, то есть вполне может случиться, что в конкретной задаче ни одно из этих трех условий не выполнено. Значит, что-то нужно придумывать с этой задачей, как-то ее решать по-своему. Это всего лишь достаточное условие.

Это большая и трудная теорема. Она будет тоже без доказательства. Она нам нужна на практике, на практике мы ее будем регулярно использовать, доказательство у нее длинное, в книгах можно найти, прочитать.

---

[12] Напомним, что первый дифференциал функции — это линейный оператор, матрица этого линейного оператора — производная функции. Ядро линейного оператора A — множество таких x, что $Ax = 0$. Ядро обозначается $\operatorname{Ker} A$.

[13] $\varphi\big|_L$ — сужение φ на L

На этом глава 1 завершена и дальше мы займемся кратными интегралами. Там материал для восприятия будет попроще. Так что самое трудное позади. Дальше материал тоже будет громоздкий, но все-таки для понимания он легче. Здесь мы три теоремы дали без доказательства, и все они трудные, там же почти все будет доказано.

Глава 2

Кратные интегралы

2.1 Определение кратного интеграла

Определение 13. Множество $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым параллелепипедом.*

Определение 14. Множество $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым параллелепипедом.*

Определение 15. Число

$$d(I) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

называется *диаметром параллелепипеда* I.

Определение 16. Число

$$V(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

называется *объемом параллелепипеда* I.

Свойства объема параллелепипеда

1. $V(I) \geqslant 0$.

2. Пусть

   $$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m,$$

   где параллелепипеды $I_1, I_2, \ldots, I_m$ не имеют общих внутренних точек, тогда

   $$V(I) = V(I_1) + V(I_2) + \ldots + V(I_m).$$

3. Если $I_1 \subset I_2$, то $V(I_1) \leqslant V(I_2)$.

Введем разбиение параллелепипеда. Пусть

$$
\begin{aligned}
P_1 &: a_1 = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_1^{(m_1)} = b_1 \\
P_2 &: a_2 = x_2^{(0)} < x_2^{(1)} < \ldots < x_2^{(m_2)} = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n &: a_n = x_n^{(0)} < x_n^{(1)} < \ldots < x_n^{(m_n)} = b_n
\end{aligned}
$$

Определение 17. Упорядоченный набор $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ называется *разбиением параллелепипеда.*

Определение 18. Множество $[x_1^{(k_1)}, x_1^{(k_1+1)}] \times [x_2^{(k_2)}, x_2^{(k_2+2)}] \times \ldots \times [x_n^{(k_n)}, x_n^{(k_n+1)}]$ называется *частичным параллелепипедом разбиения.*

Занумеруем все частичные параллелепипеды в некотором порядке: I_1, I_2, ..., I_N.

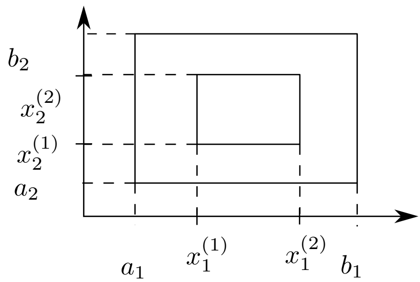


Рис. 2.1:

Определение 19. Число

$$d(P) = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} d(I_k)$$

называется *диаметром разбиения.*

Если к разбиению добавить точку, то получим измельчения исходного разбиения.

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$.

В каждом частичном параллелепипеде I_k выберем точку ξ_k.

Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$.

Определение 20. *Интегральной суммой* называется число

$$S(f, P, \overline{\xi}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) v(I_k).$$

Определение 21. Число $J \in \mathbb{R}$ называется *интегралом Римана от функции f по параллелепипеду I*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \quad d(P) < \delta \quad \forall \overline{\xi} \quad |S(f, P, \overline{\xi}) - J| < \varepsilon.$$

Это определение также можно записать так:

$$J = \lim_{d(P) \to 0} S(f, P, \overline{\xi}).$$

Если интеграл существует, то он определен однозначно и функция f ограничена.

Обозначения интеграла:

$$J = \int\limits_I f(x) dx = \int \int\limits_I \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2}^{b_2} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Класс интегрируемых на I функций обозначим $R(I)$.

Пусть f ограничена на I.

Обозначим

$$M_k = \sup_{x \in I_k} f(x), m_k = \inf_{x \in I_k} f(x).$$

Определение 22. Сумма

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{N} M_k V(I_k)$$

называется *верхней суммой Дарбу.*

Определение 23. Сумма

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{N} m_k V(I_k)$$

называется *нижней суммой Дарбу.*

Свойства сумм Дарбу

1. *Для любой* $\overline{\xi}$
$$\underline{S}(f,P) \leqslant S(f,P,\overline{\xi}) \leqslant \overline{S}(f,P).$$

2. *Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то*
$$\overline{S}(f,P') \leqslant \overline{S}(f,P),$$
$$\underline{S}(f,P') \geqslant \underline{S}(f,P),$$
(то есть при добавлении новых точек верхнии суммы Дарбу уменьшаются, а нижнии суммы Дарбу увеличиваются).

Доказывается так же, как в одномерном случае.

В двухмерном случае добавление точек происходит так. Пусть мы имеем прямоугольник и его разбиение (рис. 2.2). Добавим на горизонтальной оси новую точку. Вертикальная линия, проходящая через эту точку, делит каждый прямоугольничек, через который проходит, на два. В разбиении появляется новый элемент (рис. 2.3). Добавим на вертикальной оси новую точку. Горизонтальная линия, проходящая через эту точку, делит каждый прямоугольничек, через который проходит, на два. В разбиении появляется новый элемент (рис. 2.4).

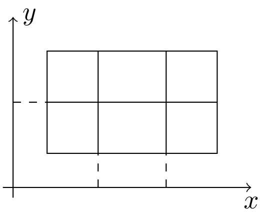


Рис. 2.2:

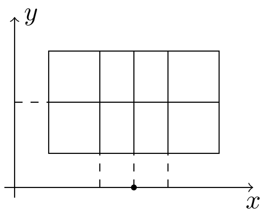


Рис. 2.3:

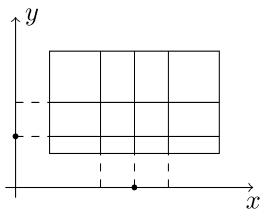


Рис. 2.4:

Нет нужды доказывать для общего случая, можно по одной точке добавлять: сначала на горизонтольную ось одну точку добавить, потом на вертикальную ось одну точку добавить. Если для этих случаев все верно, то тогда и любое число точек на любой оси добавляем, и будет получаться это неравенство. Так что доказательство полностью аналогично тому, что было раньше.

3. *Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то*
$$\overline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P') \leqslant 2MV,$$

где $|f(x)| \leqslant M$, V — *суммарный объем частичных параллелепипедов, которые измельчались.*

Вернемся к рисункам 2.2, 2.3, 2.4. Закрасим частичные параллелепипеды, которые измельчались при добавлении точек на оси (рис. 2.5). Нужно взять сумму их площадей — это и будет V.

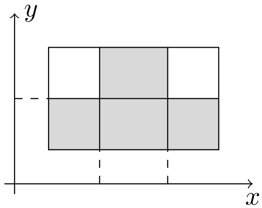


Рис. 2.5:

Точно так же для нижних сумм Дарбу:

$$\underline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P) \leqslant 2MV.$$

Доказывается это свойство так же, как в одномерном случае. Посмотрите то доказательство и докажите самостоятельно.

4. *Для любых двух разбиений* P, P'

$$\underline{S}(f, P) \leqslant \overline{S}(f, P').$$

Это доказывается легко.

Определение 24. Число

$$\overline{I} = \inf_P \overline{S}(f, P)$$

называется *верхним интегралом.*

Определение 25. Число

$$\underline{I} = \sup_P \underline{S}(f, P)$$

называется *нижним интегралом.*

Верхний и нижний интегралы всегда существуют.
Для них справедливы такие же теоремы, как в одномерном случае.

Теорема 9 (Теорема Дарбу)**.**

$$\overline{I} = \lim_{d(P)\to 0} \overline{S}(f, P),$$
$$\underline{I} = \lim_{d(P)\to 0} \underline{S}(f, P).$$

Доказывается точно так же, как в одномерно случае (доказательство смотрите сами).

Если функция f интегрируема по параллелепипеду I,то будем писать $f \in R(I)$, то есть $R(I)$ — класс функций, интегрируемых по Риману по параллелепипеду I.

Теорема 10 (критерий Дарбу)**.** *$f \in R(I)$ тогда и только тогда, когда $\overline{I} = \underline{I}$.*

Доказательство такое же, как в одномерном случае.

Обозначим $\omega_k = M_k - m_k$ — *изменение функции на* I_k.

Сформулируем следствия из критерия Дарбу.

Следствие 10.1. *$f \in R(I)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} \omega_k V(I_k) = 0.$$

Следствие 10.2. *$f \in R(I)$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \quad \sum_{k=1}^{N} \omega_k V(I_k) < \varepsilon.$$

Напоминаем, что везде здесь по умолчанию функция f ограничена. Для неограниченных функций интеграл Римана просто не существует — там говорить не о чем.

На этом одинаковое с одномерным интегралом заканчивается. Все, что будет в дальнейшем, будет новое и достаточно трудное. Но прежде чем это излагать, нам понадобится некоторый дополнительный материал из теории множеств, то есть сейчас будет небольшой экскурс в теорию множеств.

2.2 Мощность множества

Материал данного параграфа никак не связан с интегралами, в нем рассматриваются общие математические понятия, которые понадобятся во многих других разделах математики.

Определение 26. Два произвольных множества A, B называются *равномощными*, если существует биективное отображение $\varphi\colon A \to B$.

То есть два множества A и B равномощны, если между их точками можно установить взаимно-однозначное соответствие, то есть если все их точки можно разобрать по парам.

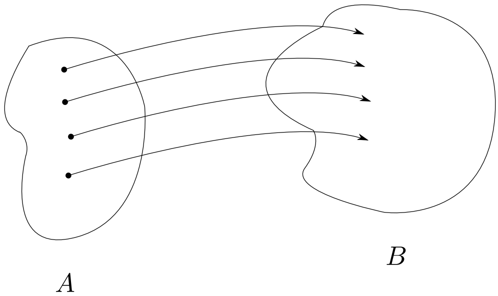


Рис. 2.6:

Этот факт будем писать так:

$$|A| = |B|.$$

Упражнение. Докажите, что два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда у них равное число элементов.

Отсюда получается, что собственное подмножество конечного множества не может быть равномощно всему множеству. Никакая собственная часть не равномощна множеству, если множество конечно. А если бесконечно, то это запросто может быть. Такие примеры мы сейчас рассмотрим.

Определение 27. Множество A, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *счетным.*

Это означает, что можно задать отображение $\varphi\colon \mathbb{N} \to A$, которое биективно, то есть множество A можно представить в виде

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

То есть если элементы множества можно пронумеровать натуральными числами, то оно называется счетным.

Пример 5. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

Доказательство. Пронумеровать целые числа можно в следующем порядке: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 и так далее.

число	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
номер	...	9	7	5	3	1	2	4	6	8	...

В результате каждое целое число получит свой индивидуальный номер, и это соответствие будет биективным. Значит, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то есть $\mathbb{Z}$ счетно. $\square$

Этот пример уже показывает, что для бесконечных множеств часть множества может оказаться равномощным всему множеству.

Пример 6. Множество $\mathbb{Q}$ счетно, то есть все дроби можно перенумеровать.

Доказательство. Составим таблицу рациональных чисел. Сначала выпишем все рациональные числа со знаменателем 1 — это просто целые числа.

$$\ldots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Далее выпишем числа со знаменателем 2.

$$\ldots \quad -\frac{4}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{2}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \ldots$$

Некоторые из них повторяют те, которые были в верхнем ряду, например 0 и 0, 1 и $\frac{2}{2}$, 2 и $\frac{4}{2}$. Далее выпишем дроби со знаменателем 3.

$$\ldots \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{3}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \ldots$$

Далее выпишем дроби со знаменателем 4.

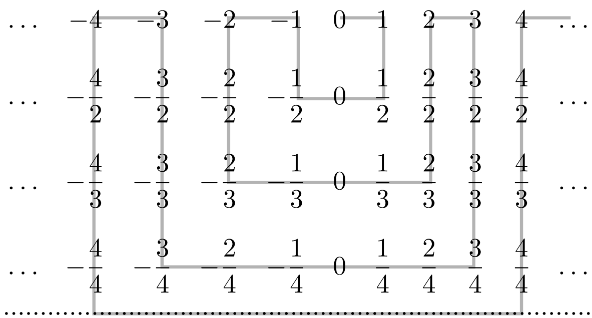
$$\ldots \quad -\frac{4}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{2}{4} \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \ldots$$

И дальше со знаменателем 5, со знаменателем 6, и эту таблицу неограниченно вниз будем продолжать.

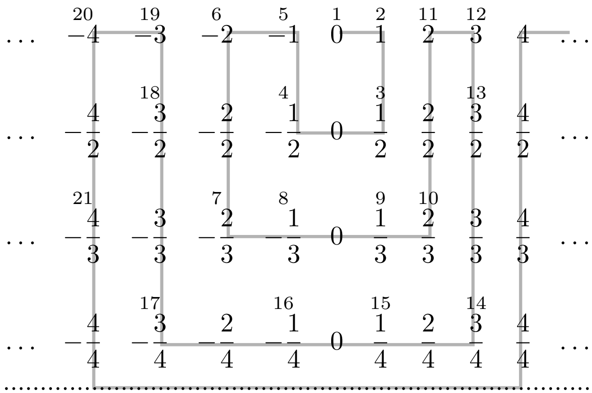
$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\[2ex]
\ldots & -\dfrac{4}{2} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{2}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{2}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{4}{2} & \ldots \\[2ex]
\ldots & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{3}{3} & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{3}{3} & \dfrac{4}{3} & \ldots \\[2ex]
\ldots & -\dfrac{4}{4} & -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{2}{4} & -\dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{2}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{4}{4} & \ldots \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

В результате в этой таблице будут выписаны все рациональные числа: любая дробь вида $\dfrac{m}{n}$ попадет в эту таблицу. Теперь все эти числа нужно линейно занумеровать.

Нарисуем начинающуюся с нуля траекторию в виде «змейки», как показано ниже.



Эта «змейка» пройдет через каждую дробь. Двигаясь по «змейке», будем нумеровать числа. Если очередное число уже получило номер, пропускаем его.



В результате каждая дробь $\dfrac{m}{n}$ получит свой индивидуальный номер. Таким образом, множество рациональных чисел счетно. $\square$

Это не единственный вариант. Таких «змеек», проходящих через каждое число, можно придумать очень много. Неважно, какую мы выберем, важно, что такая нумерация существует.

Бывают *несчетные множества* — такие, что их нельзя занумеровать. Например, множество вещественных чисел: их еще больше чем рациональных и оказывается, что их занумеровать нельзя. Это мы докажем в виде теоремы. Даже нет необходимости брать все вещественные числа, достаточно рассмотреть сегмент $[0, 1]$.

Теорема 11. *Сегмент* $[0, 1]$ *— несчетное множество (то есть нельзя занумеровать все числа сегмента* $[0, 1]$*).*

Доказательство. Допустим противное. Пусть нам удалось каждому числу из $[0, 1]$ присвоить свой номер:

$$[0, 1] = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}.$$

Рассмотрим число α_1. Найдется сегмент $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$, такой что $\alpha_1 \notin [a_1, b_1]$

Рассмотрим число α_2. Неважно, лежит оно в $[a_1, b_1]$ или в $[0, 1]\setminus[a_1, b_1]$. Всегда сущетвует сегмент $[a_2, b_2] \subset [0, 1]$, такой что $\alpha_2 \notin [a_2, b_2]$.

Точно так же для чисел α_3, α_4, α_5, $\ldots$ найдутся сегменты $[a_3, b_3]$, $[a_4, b_4]$, $[a_5, b_5]$, $\ldots$, которым эти числа не принадлежат. Мы получили последовательность вложенных сегментов

$$[0, 1] \supset [a_1, b1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots,$$

таких что

$$\alpha_k \notin [a_k, b_k].$$

По теореме Кантора, в пересечении этих сегментов найдется хотя бы одна точка x. Число x принадлежит и $[0, 1]$. Значит, x должно совпасть с каким-то из α_k:

$$x = \alpha_{k_0}.$$

Но x принадлежит пересечению всех $[a_k, b_k]$, значит,

$$x \in [a_{k_0}, b_{k_0}],$$

но по построению

$$x = \alpha_{k_0} \notin [a_{k_0}, b_{k_0}].$$

Мы получили противоречие. □

Мы показали, что есть множества более мощные, чем множество натуральных чисел. Также это, например, множество вещественных чисел. Нетрудно доказать, что множество вещественных чисел равномощно сегменту $[0, 1]$.

Определение 28. Если множество равномощно сегменту $[0, 1]$, то говорят, что оно имеет *мощность континуума* (или *континуально*).

Если мощность множества A меньше мощности множества B (то есть B более мощно, чем A), пишут $A \prec B$. Если $A \prec B$, между A и B ними нельзя установить взаимнооднозначное соответствие.

Легко доказать, что $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = |\mathbb{R}^4| = |\mathbb{R}^5| = \ldots = |\mathbb{R}|$, откуда, в частности, $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

Но есть множества, которые более мощные, чем континуум.

Если X — множество, то множество всех его подмножеств обозначается $\mathcal{P}(X)$ (также используется уже встречавшееся вам в дискретной математике обозначение 2^X, так как этому множеству соответствует множество всех отображений $\varphi\colon X \to \{0, 1\}$).

В теории множеств доказывается нетрудная теорема.

Теорема. *Пусть X — непустое множество. Тогда*

$$X \prec \mathcal{P}(X).$$

То есть, если рассмотреть множество $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ всех подмножеств $\mathbb{R}$, оно будет более мощно, чем $\mathbb{R}$. Если взять множество всех подмножеств $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, оно будет еще более мощно. Таким образом, мощность может неограниченно возрастать.

Пример 7. Множество подмножеств натуральных чисел континуально.

Доказательство. Если X — непустое множество, множеству $\mathcal{P}(X)$ всех его подмножеств соответствует множество всех отображений $\varphi\colon X \to \{0,1\}$.

Значит, множеству $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ соответствует множество всех отображений $\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Но каждое отображение $\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ — это последовательность нулей и единиц, которая однозначно задает бесконечную двоичную дробь

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots,\quad s\alpha_k \in \{0,1\}.$$

Любое вещественное число из сегмента $[0,1]$ можно представить в виде бесконечной двоичной дроби. Таким образом, каждому подмножеству $\mathbb{N}$ можно сопоставить некоторое вещественное число из $[0,1]$, причем взаимнооднозначно, то есть $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ — континуальное множество. $\square$

Расположим множества по мощностям:

$$\varnothing \prec {}^{\text{1—элементное}}_{\text{множество}} \prec {}^{\text{2—элементное}}_{\text{множество}} \prec {}^{\text{3—элементное}}_{\text{множество}} \prec \ldots \prec \mathbb{N} \prec \mathbb{R} \prec \ldots$$

(на месте первого многоточия — последовательно все конечные множества; на месте второго многоточия — множества, более мощные, чем $\mathbb{R}$, их рассматривать мы не будем).

Когда в математике ввели понятие мощности, в части $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ сразу же возник вопрос, есть ли промежуточные мощности между счетным множеством и континуумом (есть ли какое-то множество, которое более мощное, чем $\mathbb{N}$ и менее мощное, чем $\mathbb{R}$). Интуиция нам подсказывает, что не должно быть промежуточных мощностей. Появилась континуум-гипотеза.

Континуум-гипотеза. *Между счетным множеством и континуумом промежуточных мощностей нет.*

Ее долгое время пыталсь доказать, опровергнуть, но ничего не получалось. Эта проблема была решение в 1963 году Коэном[1]. Ответ здесь оказался совершненно неожиданным: континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть, это утверждение недоказуемое. Можно считать, что между счетным множеством и континуумом промежуточных мощностей нет, и это не будет противоречить аксиомам теории множеств. А можно считать, что промежуточные мощности есть, и тоже противоречий не будет.

Мы будем работать либо с конечными, либо со счетными множествами, остальные мощности нам не очень нужны (разве что изредка континуум).

Свойства счетных множеств

[1] Пол Джóзеф Кóэн — американский математик.

1. *Любое подмножество счетного множества либо счетное, либо конечное.*

2. *Если множества A, B счетные, то $A \cup B$ — также счетное.*

   То есть объединение двух счетных множеств является счетным множеством.

   Доказательство. Множество A и B счетные, значит, их элементы можно занумеровать:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}.$$

   Совместим все элементы этих множеств. Нужно присвоить им новую нумерацию. Это можно сделать, двигаясь «змейкой».

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}.$$

   Множества A и B могут пересекаться, поэтому в случае, если очередному элементу уже присвоен номер, мы его пропускаем и двигаемся дальше. В результате все элементы будут занумерованы. □

3. *Если A_1, A_2, A_3, A_4, … (их счетное количество) — счетные множества, то множетсво $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ счетно.*

   То есть объединение счетного числа счетных множеств счетно[2].

   Доказательство. Множества A_1, A_2, A_3, A_4, … счетны, значит, их элементы мы можем перенумеровать:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}, \ldots\},$$
$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_4^{(2)}, \ldots\},$$
$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, a_4^{(3)}, \ldots\},$$
$$A_4 = \{a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}, a_4^{(4)}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[2] Если счетных множеств несчетное количество, объединение может быть несчетным. Если все множества равны одному и тому же счетному множеству, то объединением будет само это множество, то есть объединение счетно. Если же каждое из множеств содержит хотя бы один «новый» элемент, объединение будет несчетным.

А теперь элементы всех этих множеств нужно заново перенумеровать. Это можно сделать, двигаясь по «змейке» (их можно придумать много).

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}, \ldots\},\\
A_2 &= \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_4^{(2)}, \ldots\},\\
A_3 &= \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, a_4^{(3)}, \ldots\},\\
A_4 &= \{a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}, a_4^{(4)}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Такая «змейка» пройдет через каждый элемент. Двигаясь по этой траектории, нумеруем каждый элемент, и опять же, если очередной элемент уже получил номер, ему мы номер не присваиваем. В результате все элементы получат свой индивидуальный номер. □

Экскурс в теорию множеств мы на этом завершаем и возвращаемся к матанализу. Но пока это так же материал не по интегралам. Мы рассмотрим некоторые вспомогательные понятия теории меры.

2.3 Множества меры 0

Определение 29. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет *меру 0 по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытые параллелепипеды I_1, I_2, I_3, … (их счетное число), такие что:

1. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ (то есть они покрывают множество A);
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \varepsilon$.

То есть множество A имеет меру 0 по Лебегу, если для любого ε существует покрытие этого множества открытыми параллелепипедами, суммарный объем которых меньше ε.

Этот факт будем писать так:

$$\mu(A) = 0.$$

Есть вообще мера Лебега, не только нулевая, но об этом мы говорить не будем.

Множества меры 0 будут играть очень важную роль во многих вопросах, в том числе и в интегралах тоже, поэтому нужно хорошо понять, что это такое.

То, что в определении параллелепипеды открытые, не принципиально. В определении можно брать любые параллелепипеды, не обязательно открытые. В этом случае определение будет равносильно исходному. Открытые берутся для удобства, для определенности.

Предположим, выполняется второй пункт определения, и мы можем покрыть множество A открытыми параллелепипедами. Замкнем каждый из них. Тогда пункт один определения также будет выполнятся. Так как объем от замыкания не меняется, второй пункт определения так же выполняется. Значит, если определение верно для открытых параллелепипедов, верно и для замкнутых.

Наоборот уже не так хорошо. Если мы уберем границы параллелепипеда, второй пункт так же будет выполняться, а первый может нарушиться: если границы уберем, вложения уже может не быть. Но если имеется замкнутый параллелепипед, мы можем его немного расширить и сделать открытым, так чтобы объем открытого отличался от объема замкнутого на любое число δ (рис. 2.7). То есть любой замкнутый параллелепипед

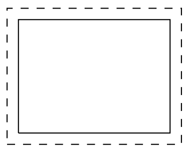


Рис. 2.7:

можно сверху приблизить открытым, объем которого будет сколь угодно близок к объему исходного замкнутого. Тогда, если мы покрыли множество A замкнутыми параллелепипедами I_k, каждый из них расширим до открытого параллелепипеда $\tilde{I}_k$ так, чтобы

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{I}_k,$$
$$V(\tilde{I}_k) - V(I_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда первый пункт определения выполняется. Также

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(\tilde{I}_k) < \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \dots\right) = 2\varepsilon.$$

Сумма объемов оказалась 2ε вместо ε, но, так как мы выбираем любое ε, неважно ε, 2ε или 3ε. Мы могли взять сразу $\dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда сумма была бы ε. То есть второй пункт определения также выполняется.

Пример 8. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$. На этой плоскости рассмотрим горизонтальную прямую A. Эта прямая имеет меру 0.

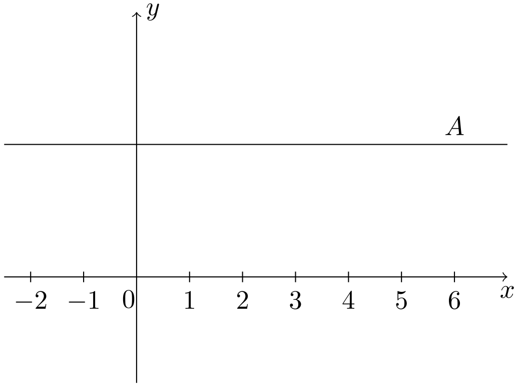


Рис. 2.8:

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Возьмем отрезок прямой A, граничные точки которого имеют абсциссы 0, 1. Мы можем поместить этот отрезок внутрь открытого прямоугольника, площадь которого меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Возьмем отрезки, граничные точки которых имеют абсциссы 1, 2 и 0, -1. Мы можем поместить их внутрь прямоугольников, суммарная площадь которых меньше $\dfrac{\varepsilon}{4}$. Возьмем отрезки, граничные точки которых имеют абсциссы 2, 3 и -1, -2. Мы можем поместить их внутрь прямоугольников, суммарная площадь которых меньше $\dfrac{\varepsilon}{8}$. Будем продолжать эту процедуру до бесконечности. В результате вся прямая A будет покрыта открытыми многоугольниками, каждый следующий меньше, чем предыдущий. То есть

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon.$$

$\square$

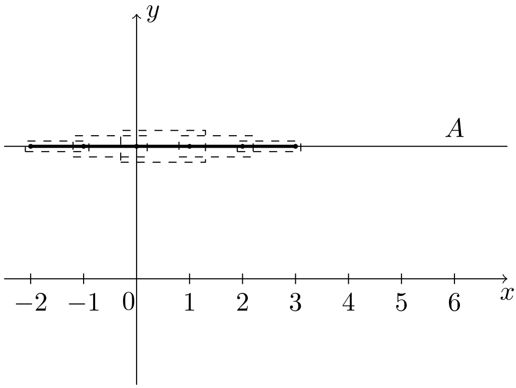


Рис. 2.9:

Значит, мера горизонтальной прямой на плоскости равна нулю. Потом мы докажем, что горизонтальную прямую можно поворачивать и мера тоже будет равна нулю, то есть мера любой прямой на плоскости равна нулю.

Это воспринимается ествественно. Прямая — это одномерный объект на двумерный объект на плоскости, его площадь должна быть нулевой.

Пример 9. Любое счетное множество имеет меру 0.

Доказательство. Пусть A — счетное множество (будем воспринимать его как набор точек на плоскости (рис. 2.10)):

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Мы можем точку a_1 покрыть открытым прямоугольником I_1, площадь которого меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Точку a_2 мы можем поместить внутрь прямоугольника I_2, площадь которого меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$. Точку a_3 мы можем покрыть прямоугольником I_3, площадь которого меньше, чем $\frac{\varepsilon}{8}$. И так далее. Каждую следующую точку a_k покрываем прямоугольником I_k, площадь которого меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2^k}$ (рис. 2.11). Тогда

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon.$$

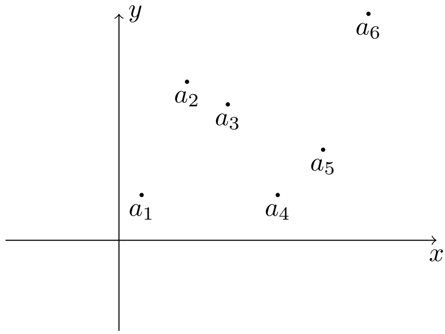


Рис. 2.10:

То есть мера любого счетного множества равна 0. □

Свойства множеств меры 0

1. *Если* $B \subset A$ *и* $\mu(A) = 0$, *то* $\mu(B) = 0$.

   То есть любое подмножество множества меры 0 имеет меру 0.

   Свойство очевидно (случай, когда A счетно, легко видеть в примере 9. Если A удалось покрыть открытыми параллелепипедами, такими что определение выполняется, $B \subset A$, так же удастся покрыть ими: достаточно покрыть только те точки a_k, которые принадлежат B).

2. *Если* $\mu(A_k) = 0$ *(*$k = 1, 2, 3, \ldots$*) и* $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, *то* $\mu(A) = 0$.

   То есть счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.

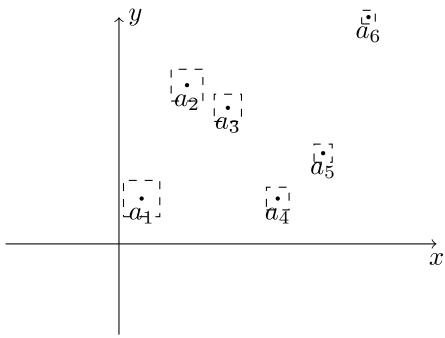


Рис. 2.11:

Доказательство. По условию, $\mu(A_1) = 0$. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Возьмем $\frac{\varepsilon}{2}$.Тогда по определению существуют открытые параллелепипеды

$$I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, \ldots,$$

такие что

$$A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(множество A_1 покроем параллелепипедами, суммарный объем которых меньше $\frac{\varepsilon}{2}$).

Рассмотрим множество A_2. $\mu(A_2) = 0$. Возьмем $\frac{\varepsilon}{4}$. Для него существуют

$$I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, I_3^{(2)}, \ldots,$$

такие что

$$A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(2)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Для множества A_3 возьмем $\frac{\varepsilon}{8}$, для A_4 возьмем $\frac{\varepsilon}{16}$ и так далее, для каждого следующего множество будем уменьшать ε в два раза.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(l)}.$$

Но параллелепипедов $A_k^{(l)}$ счетное количетсво и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V(A_k^{(l)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon.$$

То есть мы объединение A счетного количества мноежств меры 0 покрыли счетным число открытых параллелепипедов, суммарный объем которых меньше ε. Значит, $\mu(A) = 0$. $\square$

3. Если $\mu(A) = 0$ *и множетсво* A' *получено из множества* A *параллельным переносом, поворотом либо отражением, то* $\mu(A') = 0$.

   То есть при движении фигуры меры 0 мы получим фигуру меры 0.

   Доказывать будем для плоскости, в трехмерном пространстве и выше все то же самое.

Доказательство. (a) Параллельный перенос.

Пусть имеется множество точек плоскости A, $\mu(A) = 0$ (рис. 2.12). Тогда для любого ε множество A мы можем покрыть та-

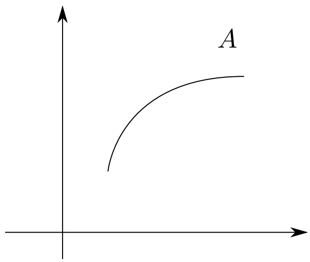


Рис. 2.12:

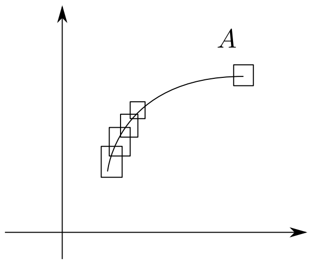


Рис. 2.13:

кими открытыми прямоугольниками, что их суммарный объем меньше ε (рис. 2.13).

Произведем параллельный перенос фигуры A — получим фигуру A'. Вместе с этим множеством параллельно перенесем прямоугольники, покрывающие множество (рис. 2.14). При параллельном переносе прямоугольник переходит в пряимоугольник, и площадь прямоугольника от этого не измениться. Тогда множество A' так же будет покрыто прямоугольниками, суммарный объем которых меньше ε.

(b) Поворот.

Пусть имеется множество точек плоскости A, $\mu(A) = 0$ (рис. 2.15). Тогда для любого ε множество A мы можем покрыть такими открытыми прямоугольниками, что их суммарный объем меньше ε. Изобразим один из этих прямоугольников (рис. 2.16).

Повернем множество A вместе с этим прямоугольником на некоторый угол.

Напомним, что по определению прямоугольника, его стороны параллельны осям координат, то есть мы рассматриваем именно правильно ориентированные прямоугольники (2.18). Если

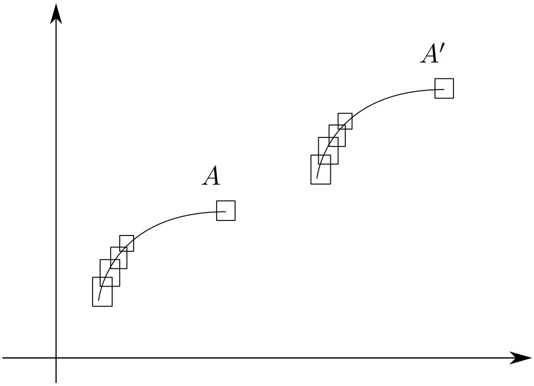


Рис. 2.14:

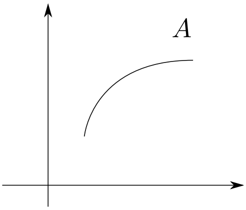


Рис. 2.15:

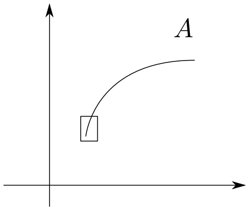


Рис. 2.16:

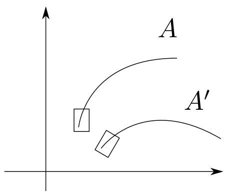


Рис. 2.17:

же стороны не параллельны осям координат, мы имеем «неправильный» прямоугольник, или, лучше сказать, неправильно ориентированный (рис. 2.19). Мы должна покрывать множество только правильно ориентированными прямоугольниками, неправильно ориентированными по определению нельзя. В этом проблема. Но на самом деле она легко решается. Если взять неправильно ориентированный прямоугольник, мы всегда можем его покрыть большим числом маленьких правильно ориентированных прямоугольников, так чтобы суммарный объем правильно ориентированных отличался от объема исходного не больше чем, на ε, причем ε может быть любым (рис. 2.20). То есть любой неправильно ориентированный прямоугольник мы можем приблизить объединением правильно ориентированных с любой точностью. Это очевидное утверждение (для доказательства нужно, чтобы та часть объединения, которая выходит за

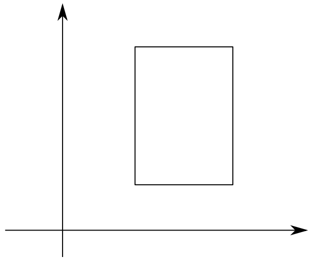


Рис. 2.18:

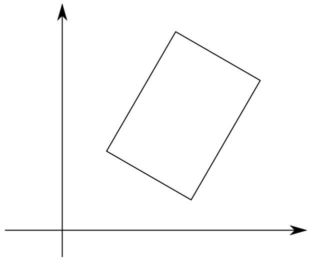


Рис. 2.19:

границы исходного прямоугольника, была маленького объема, а этого всегда можно добиться, взяв очень мелкую «сетку»).

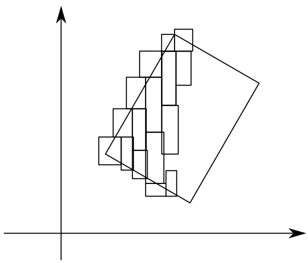


Рис. 2.20:

Тогда первый неправильно ориентированный прямоугольник, «покрывающий» множество A', мы приблизим с точностью до ε правильно ориентированными. Второй неправильно ориентированый прямоугольник, «покрывающий» множество A', мы приблизим с точностью до $\dfrac{\varepsilon}{2}$ правильно ориентированными. Третий — до $\dfrac{\varepsilon}{4}$. И так далее каждый следующий приближаем в 2 раза точнее, чем предыдущий. В результате все неправильные прямоугольники, «покрывающие» множество A', будут приближены с нужной точностью, поэтому множество A' будет покрыто правильно ориентированными прямоугольниками.

(c) Отражение.

В этом случае те же самые проблемы, что и с поворотом: правильно ориентированный параллелепипед перейдет в неправильно ориентированный параллелепипед. Но его мы можем приблизить правильными с любой точностью. Значит, и всю фигуру, можем покрыть правильными с любой точностью. Доказательство в этом пункте такое же, как и в предыдущем.

□

Следующую теорему сформулируем в самом простом, одномерном случае. Она переносится и на многомерный случай.

Теорема 12. *Пусть* $f \in C[a,b]$[3]*. Тогда* $\mu(\Gamma_f) = 0$[4]*.*

То есть график непрерывной на $[a,b]$ функции имеет меру 0.

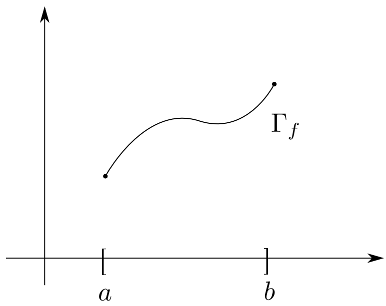


Рис. 2.21:

Доказательство. Функция f непрерывна на сегменте $[a,b]$, следовательно, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на $[a,b]$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x', x'' \in [a,b] \ \ |x' - x''| < \delta \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольное разбиение P, диаметр которого меньше δ (рис. 2.22). На каждом частичном сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ найдем наименьшее значение функции m_k и наибольшее значение M_k. Рассмотрим прямоугольники

$$I_k = [x_k, x_{k+1}] \times [m_k, M_k].$$

[3]То есть f — непрерывная на открезке $[a,b]$.
[4]$\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ — график функции f.

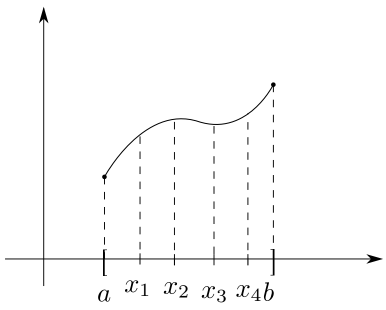


Рис. 2.22:

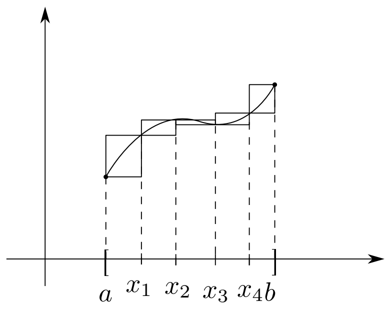


Рис. 2.23:

Их конечное количество и

$$\Gamma_f \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k.$$

Так как $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ и $M_k - m_k = \omega_k$,

$$(x_{k+1} - x_k)(M_k - m_k) = \Delta x_k \cdot \omega_k = S(I_k).$$

Так как $\omega_k < \varepsilon$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(I_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

$b-a$ фиксировано, ε мы можем брать какое хотим, поэтому суммарная площадь $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} I_k$ может быть сколь угодно мала. Но прямоугольники I_k, которыми мы покрыли график функции f, замкнутые, а в определении 29 множеств меры 0 прямоугольники открытые[5]. Если мы уберем границы у прямоугольников, некоторые точки графика могут оказаться не покрытыми, то есть мы не получим покрытыие. Но мы можем любой замкнутый параллелепипед расширить до открытого, так чтобы площадь открытого была больше в 2 раза. Каждый замкнутый прямоугольник I_k расширим до открытого прямоугольника $\tilde{I}_k$, так чтобы

$$2S(I_k) = S(\tilde{I}_k).$$

[5]Мы отмечали, что непринципиально, замкнутые прямоугольники или открытые, но все-таки лучше подогнать под определение.

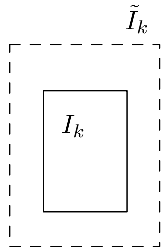


Рис. 2.24:

Тогда мы получим новое покрытие $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} I_k$ и

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(\tilde{I}_k) < 2\varepsilon(b-a).$$

Но так как ε любое, число $2\varepsilon(b-a)$ может быть сколько угодном маленьким. □

Следствие 12.1. *Пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Тогда $\mu(\Gamma_f) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим отрезки $[0,1]$, $[0,-1]$, $[1,2]$, $[-1,-2]$, $[2,3]$, $[-2,-3]$, …. На каждом сегменте $[k-1,k]$ рассмотрим функцию f и ее график Γ_k на этом сегменте (рис. 2.25).

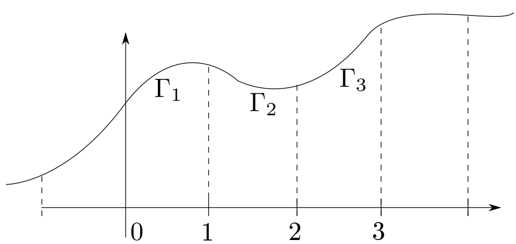


Рис. 2.25:

$$\mu(\Gamma_k) = 0,$$

$$\Gamma_f = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k.$$

Но объединение счетного количества множеств меры 0 имеет меру 0, значит, $\mu(\Gamma_f) = 0$. □

Так же обстоит дело и с неограниченными функциями. Рассмотрим гиперболу. Она не попадает под доказанное следствие, так как она опредделена не на всей числово оси. Но мы можем аналогично взять сегменты $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, …, называя соответствующие графики Γ_1, Γ_2, Γ_3, … а сегмент $[0, 1]$ последовательно делить на 2, называя каждый новый получившийся график Γ_0, Γ_{-1}, Γ_{-2}, … (рис. 2.26.) Точно так же каждый Γ_k имеет меру 0, а вся кривая — это их объединение.

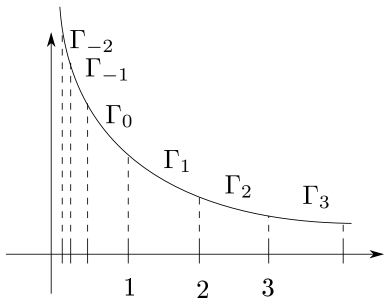


Рис. 2.26:

С понятием меры 0 связано понятие объема 0. Оно хоть и не сильно распространено, но бывает полезно. Мера и объем — близкие понятия, отличие мы сейчас рассмотрим.

Определение 30. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет *объем 0*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют параллелепипеды I_1, I_2, I_3, …, I_N (их конечное число), такие что:

1. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ (то есть они покрывают множество A);
2. $\sum\limits_{k=1}^{N} V(I_k) < \varepsilon$.

Какие параллелепипеды — открытые, замкнутые, полуоткрытые, полузамкнутые — здесь совершенно неважно. В определении могут быть любые параллелепипеды.

Этот факт будем писать так:

$$V(A) = 0.$$

Определения меры 0 и объема 0 очень похожи, но есть одно важное отличие, и заключается оно в следующем. В определении меры 0 берется счетное число параллелепипедов, а в определении объма 0 — конечное число. В этом принципиально отличие. Например, рассмотрим прямую на плоскости. Конечным числом параллелепипедов вообще не удастся покрыть: конечное число параллелепипедов — всегда ограниченное множество, а прямая — неограниченное. А счетным числом параллелепипедов прямую покрыть мы можем.

Очевидно, что если $V(A) = 0$, то $\mu(A) = 0$. Обратное неверно.

Но есть важный случай, когда эти два понятия совпадают.

Теорема 13. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $\mu(K) = 0$. Тогда $V(K) = 0$.*

То есть для компактов понятия мера 0 и объем 0 — это одно и то же.

Доказательство. Пусть $\mu(K) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытые параллелепипеды I_l, такие что

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} V(I_l) < \varepsilon.$$

Но так как K — компакт, из бесконечного покрытия $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_l$ можно выделить конечное подпокрытие, то есть существует такое N, что

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{N} I_l.$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{N} V(I_l) < \varepsilon,$$

отсюда

$$V(K) = 0.$$

□

В данном параграфе шла речь о мере 0 по Лебегу. Вообще говоря, мера может быть равна любому вещественному числу. Понятие меры — это обобщение понятия объема. В школе объем определялся только для ограниченных множеств, причем для «нормальных фигур», например если речь шла о площади, то определялась площадь многоугольников, кругов. Введенные определения не применимы для совсем «дырявых множеств», например, для фигуры, состоящей только из рациональных точек. А понятие меры применимо к любым множествам. Это понятие обобщает понятие объема, то есть для «хорошей» фигуры мера равна объему, в то время как для «плохой» фигуры объем не определен. Фигуры, у которых мера 0 — это «маленькие» фигуры, например прямая, или, более общо, кривая на плоскости, плоскость и поверхность в трехмерном пространстве, график функции.

Порядок обобщений следующий: просто объем, мера Жордана, мера Лебега. Самое общее понятие здесь — мера Лебега. Дальше не обобщают.

2.4 Изменение функции

Мы уже сталкивались с изменением функции на частичном сегменте: это наибольшее значение минус наименьшее — супремум минус инфинум. Сейчас мы перенесем это на более общий случай.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$.

Пусть функция $f\colon X \to Y$ ограничена.

Пусть $A \subset X$.

Определение 31. *Изменением функции f на множестве A* называется число

$$\omega_f(A) = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x).$$

Упражнение. Докажите, что

$$\omega_f(A) = \sup_{x',x''\in A} |f(x') - f(x'')|.$$

Аналогичное утверждение было для частичного сегмента, здесь то же самое. Дальаше мы будем пользоваться как определением 31, так и его аналогом из упражнения выше.

Свойства изменения функции

1. $\omega_f(A) \geqslant 0$.

   $\omega_f(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ — тождественная константа на A.

2. Если $A \subset B$, то $\omega_f(A) \leqslant \omega_f(B)$.

Свойства сразу же следуют из определения (также из упражнения выше).

Понятие изменения функции на множестве вам знакомо, здесь нет для вас ничего нового, а следующее понятие будет новым для вас, и оно довольно важное, оно часто будет использоваться.

Определение 32. *Изменением функции f в точке* $x_0 \in X$ называется число

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \to 0} \omega_f(B_r(x_0) \cap X).$$

То есть чтобы найти изменение функции в точке, нужно взять некоторую шаровую окрестность этой точки, найти изменение в этой окрестности и перейти к пределу при стремлении радиуса окретсности к нулю. Так как с изменением радиуса изменение функции на множестве будет монотонно меняться, (по свойству 2), то

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \to 0} \omega_f(B_r(x_0) \cap X) = \inf_{r > 0} \omega_f(B_r(x_0) \cap X).$$

Пример 10. Пусть график функции имеет разрыв первого рода в точке x_0 (рис. 2.27). Возьмем некоторую шаровую окрестность точки x_0. Изме-

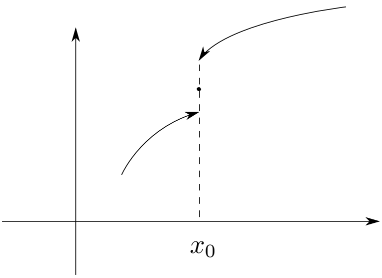


Рис. 2.27:

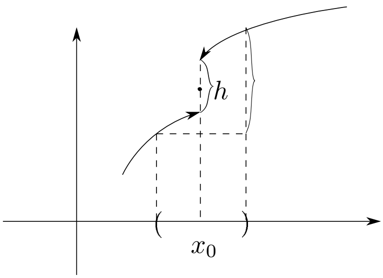


Рис. 2.28:

нение на этой окретсности — это разность между некоторыми значениями в части графика слева от разрыва и части графика справа от разрыва. Когда будем сужать окрестность, в пределе получим «высоту скачка между левой и правой частью графика» (рис. 2.28). Обозначим ее h. Тогда

$$\omega_f(x_0) = h,$$

то есть изменение функции в точке — это величина разрыва в этой точке.

Если функция непрерывна, то изменение функции в точке равно 0. А если у функции есть скачок, то изменение равно «высоте скачка». Это важное утверждение, его мы запишем в виде теоремы.

Теорема 14. *Функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\omega_f(x_0) = 0$.*

Доказательство. 1. Достаточность.

Функция f непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|x\| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда для любых точек $x', x'' \in B_\delta(x_0) \cap X$

$$|f(x') - f(x'')| < 2\varepsilon$$

(так как $f(x')$ отстоит от $f(x_0)$ меньше, чем на ε, и $f(x'')$ отстоит от $f(x_0)$ меньше, чем на ε, то есть между собой они отличаются меньше, чем на 2ε, потому что они могут отстоять от $f(x_0)$ в разные стороны) и значит,

$$\omega_f(B_\delta \cap X) \leqslant 2\varepsilon.$$

Но

$$\omega_f(x_0) \leqslant \omega_f(B_\delta \cap X),$$

значит,

$$0 \leqslant \omega_f(x_0) \leqslant 2\varepsilon$$

и ε можно брать любым, значит,

$$\omega_f(x_0) = 0.$$

2. Необходимость.

Пусть $\omega_f(x_0) = 0$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \omega_f(B_\delta(x_0) \cap X) < \varepsilon.$$

Значит, для любых двух точек $x', x'' \in B_\delta(x_0) \cap X$

$$f(x') - f(x'') < \varepsilon.$$

Возьмем $x'' = x_0$, $x' = x$, тогда

$$\forall x \in B_\delta(x_0) \cap X \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

значит, по определению f непрерывна в точке x_0.

$\square$

Следствие 14.1. *Множество*

$$F = \{x \in X \mid \omega_f(x_0) > 0\}$$

— множество точек разрыва.

Теорема 15. *Для любого $\varepsilon > 0$ множество*

$$F_\varepsilon = \{x \in X \mid \omega_f(x) < \varepsilon\}$$

открыто относительно X.

А множество

$$H_\varepsilon = \{x \in X \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$$

замкнуто относительно X.

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in F_\varepsilon$. Это означает, что $\omega_f(x_0) < \varepsilon$. Отсюда следует

$$\exists \delta > 0 \ \ \omega_f(B_\delta(x_0) \cap X) < \varepsilon.$$

Пусть точка $x_1 \in B_\delta(x_0) \cap X$. Для точки x_1 найдется маленький шар, лежащий внутри большого шара $B_\delta(x_0)$ (рис. 2.29). То есть

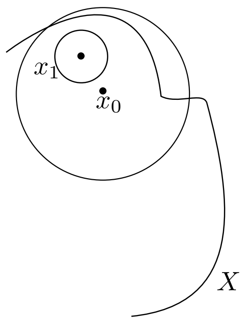


Рис. 2.29:

$$\exists \delta_1 > 0 \ \ B_{\delta_1}(x_1) \subset B_\delta(x_0).$$

Но тогда

$$\omega_f(B_{\delta_1}(x_1) \cap X) \leqslant \omega_f(B_\delta(x_0) \cap X),$$

но

$$\omega_f(x_1) \leqslant \omega_f(B_{\delta_1}(x_1) \cap X) \leqslant \omega_f(B_\delta(x_0) \cap X) < \varepsilon.$$

Мы получили

$$\omega_f(x_1) < \varepsilon,$$

то есть $x_1 \in F_\varepsilon$. Значит,

$$B_\delta(x_0) \cap X \subset F_\varepsilon,$$

что означает, что F_ε открыто относительно X.

2. Вторая часть сводится к первой.

$$H_\varepsilon = X \setminus F_\varepsilon \ (H_\varepsilon - \text{дополнение } F_\varepsilon),$$

значчит, H_ε замкнуто относительно X.

$\square$

Это все была подготовка к критерию Лебега интегрируемости функций.

2.5 Критерий Лебега интегрируемости функции

Прежде чем формулировать и доказывать критерий Лебега, сформулируем и докажем лемму, которая относится к компактным множествам. Раньше она нам была не нужна, но сейчас она нам понадобится.

Лемма 2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт.*

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_N$ — открытое покрытие K конечным числом множеств, то есть $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{N} G_l$. Тогда существует δ, такое что для любой точки $x \in K$ и люого радиуса $r < \delta$ шар $B_r(x)$ целиком содержится по крайнем мере в одном из множеств $G_1, G_2, \ldots, G_N$.

Проиллюстрируем лемму в одномерном случае. Пусть в качестве компакта будет отрезок $[a, b]$ и пусть этот отрезок покрыт тремя интервалами G_1, G_2, G_3. Тогда у этих интервалов неизбежны перекрытия (рис. 2.30). Возьмем интервал (α, β), длина которого меньше, чем наименьшая из длин перекрытий. Если мы будем двигать инетрвал (α, β), вдоль отезка $[a, b]$, он целиком попадет в одно из следующих множеств: G_1, $G_1 \cap G_2$, G_2, $G_2 \cap G_3$, G_3.

Доказательство. Допустим противное. Пусть для любого δ существует такая точка $x \in K$ и существует $r < \delta$, такое что шар $B_r(x)$ не лежит целиком ни в одном из множеств G_l.

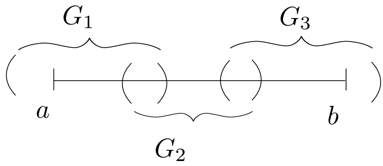


Рис. 2.30:

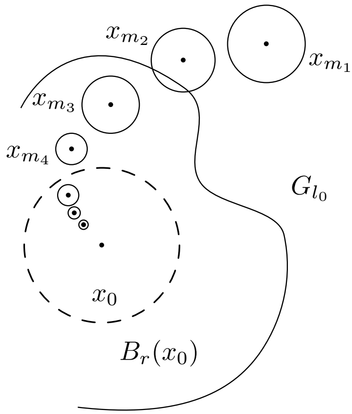


Рис. 2.31:

Возьмем $m \in \mathbb{N}$, $\delta = \dfrac{1}{m}$. Тогда существует $x_m \in K$, существует $r_m < \dfrac{1}{m}$, такие что шар $B_{r_m}(x_m)$ не лежит целиком ни в одном из множеств G_l.

Точки x_m принадлежат компакту K, значит, из этой последовательности можно выделить подпоследовательность x_{m_s}, сходящуюся к некоторой точке x_0. Но $x_0 \in K$, а K покрыто открытыми множествами. значит, существует такое l_0, что $x_0 \in G_{l_0}$. Множество G_{l_0} открыто, значит, существует такое r, что шар $B_r(x_0)$ целиком лежит в G_{l_0}.

$$r_{m_s} < \frac{1}{m} \to 0,$$

значит,

$$\exists s_0 \quad B_{r_{m_{s_0}}}(x_{m_{s_0}}) \subset B_r(x_0).$$

Но

$$B_r(x_0) \subset G_{l_0},$$

значит, $B_{r_{m_{s_0}}}(x_{m_{s_0}})$ целиком лежит в G_{l_0}. Но мы выбирали x_m и r_m так, чтобы шар $B_{r_m}(x_m)$ не лежал целиком ни в одном из множеств G_l. Мы получили противоречие. □

Теперь мы можем сформулировать критерий Лебега. Это самая трудная теорема этого семестра. Вы наверняка уже заметили, сколько подготовительного материала было изложено, чтобы ее доказать. Несмотря на сложность доказательства, формулируется она очень просто.

Теорема 16 (критерий Лебега)**.** *Ограниченная функция интегрируема по Риману на замкнутом параллелепипеде I тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру 0.*

Точек разрыва может быть бесконечно много, но мера их множества должна быть нулевой. Это необходимо, и достаточно. Это очень непростая теорема, но очень сильная. В этой теореме связывается два таких разных на первый взгляд понятия, как точки разрыва и интегрируемость.

Доказательство. 1. Достаточность.

Пусть функция f интегрируема на параллелепипеде I. Пусть F — множество точек разрыва функции f. Нужно доказать, что $\mu(F) = 0$.

$$F = \{x \in I \mid \omega_f(x) > 0\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Введем множество

$$F_m = \left\{ x \in I \mid \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Тогда

$$F_m \subset F,$$
$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Если мы докажем, что любого m $\mu(F_m) = 0$, отсюда будет следовать m $\mu(F) = 0$. Пусть m фиксировано. Докажем, что $\mu(F_m) = 0$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R(I)$, то существует разбиение P, такое что

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_k V(I_k) < \varepsilon.$$

Рассмотрим частичные параллелепипеды I_k разбиения P. Обозначим

$$L = \{k \mid F_m \cap \operatorname{Int} I_k \neq \varnothing\}$$

(то есть если даны множество F_m, параллелепипед I и его разбиение P, то в множество L попадут индексы всех тех частичных параллелепипедов, которые пересекаются лишь по внутренней части с F_m, но не по границе (рис. 2.32, 2.33)). Тогда

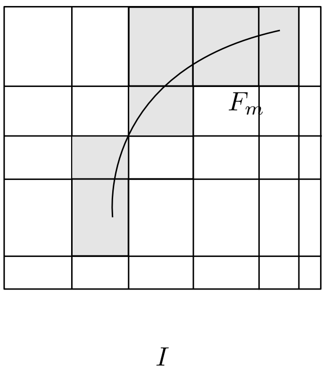


Рис. 2.32:

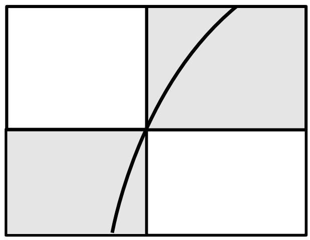


Рис. 2.33:

$$F_m \subset \left(\bigcup_{k \in L} \operatorname{Int} I_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} \operatorname{Fr}(I_k) \right)$$

(мера границ равна нулю, поэтому, если мы добавили «лишнюю» границу, в объединении мера все равно нулевая и это ни на что не повлияет).

Множество

$$H = \bigcup_{k=1}^{N} \operatorname{Fr}(I_k)$$

— компакт,

$$\mu(H) = V(H) = 0.$$

Значит, существуют открытые пралаллелепипеды I_1, I_2, I_3, $\ldots$, I_M, такие что

$$H \subset \bigcup_{l=1}^{M} I_l,$$

$$\sum_{l=1}^{M} V(I_l) < \varepsilon.$$

Тогда

$$F_m \subset \left(\bigcup_{k \in L} \operatorname{Int} I_k \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{M} I_l \right)$$

(в $\bigcup\limits_{l=1}^{M} I_l$ конечное число открытых параллелепипедов, сумарный объем которых меньше ε, в $\bigcup\limits_{k \in L} \operatorname{Int} I_k$ конечное число открытых параллелепипедов, суммарный объем которых мы хотим найти).

Рассмотрим

$$\sum_{k \in L} (V(\operatorname{Int} I_k)) = m \sum_{k \in L} \frac{1}{m} V(I_k).$$

Здесь мы прервемся, рассмотрим вспомогательные неравенства, а затем продолжим.

Т. к. для $k \in L$, $\operatorname{Int} I_k \cap F_m \neq \varnothing$, то

$$\exists x_0 \in \operatorname{Int} I_k \quad \omega_F(x_0) \geqslant \frac{1}{m}.$$

Но так как $x_0 \in X$,

$$\exists B_r(x_0) \quad \subset \operatorname{Int} I_k$$

Но тогда

$$\frac{1}{m} \leqslant \omega_f(x_0) \leqslant \omega_f\left(B_r(x_0)\right) \leqslant \omega_f(I_k) = \omega_k.$$

Итак,

$$\omega_k \geqslant \frac{1}{m}.$$

Вернемся к сумме объемов:

$$m \sum_{k \in L} \frac{1}{m} V(I_k) \leqslant m \sum_{k \in L} \omega_k V(I_k) \leqslant m \sum_{k=1}^{N} \omega_k V(I_k) < m\varepsilon.$$

Итак,

$$F_m \subset \left(\bigcup_{k\in L} \operatorname{Int} I_k\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{M} I_l\right),$$

$$\sum_{k\in L} \operatorname{Int} I_k + \sum_{l=1}^{M} I_l < m\varepsilon + \varepsilon = (m+1)\varepsilon.$$

m фиксировано, а ε мы можем брать любым, значит, суммарный объем может быть сколько угодно малым. Значит,

$$V(F_m) = 0,$$

откуда

$$\mu(F_m) = 0.$$

2. Необходимость.

Нам дано $\mu(F) = 0$, нужно доказать $f \in R(I)$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Введем множество

$$F_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Оно является компактом (так как оно замкнуто и ограничено, так как является частью параллелепипеда).

$$F_\varepsilon \subset F,$$

значит,

$$\mu(F_\varepsilon) = 0.$$

значит,

$$V(F_\varepsilon) = 0.$$

Тогда по определению множества объема 0 существуют открытые параллелепипеды J_1', J_2', J_3', $\ldots$, J_M', такие что

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{l=1}^{M} J_l',$$

$$\sum_{l=1}^{M} V(J_l') < \varepsilon.$$

Обозначим
$$K = I \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{M} J_l' \right).$$

$\bigcup\limits_{l=1}^{M} J_l'$ открыто. Разность замкнутого параллелепипеда и открытого множества — замкнутое множество. Значит, K — компакт.
$$\forall x \in K \ \ \omega_f(x) < \varepsilon.$$

Значит,
$$\forall x \in K \ \ \exists B_{r(x)}(x) \ \ \omega_f \left(B_{r(x)}(x) \cap I \right) < \varepsilon.$$

Тогда
$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r(x)}(x).$$

Но K — компакт, значит, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. То есть найдутся такие шары $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2)$, $B_{r_3}(x_3)$, ..., $B_{r_L}(x_L)$, что
$$K \subset \bigcup_{l=1}^{L} B_{r_L}(x_L).$$

Мы получили
$$I \subset \left(\bigcup_{l=1}^{L} B_{r_l}(x_l) \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{M} J_l' \right).$$

Компакт I покрыт конечным числом открытых множеств. По лемме 2, существует такое δ, что для любого $x \in I$ и любого $r < \delta$ шар $B_r(x)$ целиком лежит в одном из этих множеств.

Возьмем разбиение P, такое что $d(P) < 2\delta$. Рассмотрим частичные параллелепипеды этого разбиения I_1, I_2, I_3,...,I_N. Так как $d(P) < 2\delta$, любой частичный параллелепипед I_l содержится в шаре радиуса r с центром x, таком что $r < \delta$:
$$I_l \subset B_r(x), \quad r < \delta.$$

Обозначим через L' множество частичных индексов l, таких что частичный параллелепипед I_l содержится в одном из J_i'.[6] Множество остальных индексов l обозначим L''.

[6]Частичный параллелепипед I_l содержится либо в одном из множеств объедине-

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{N}\omega_k V(I_k) = \sum_{k\in L'}\omega_k V(I_k) + \sum_{k\in L''}\omega_k V(I_k) <$$

(так как функция f ограничена, то существует M, такое что $|f(x) \leqslant M|$, откуда $\omega_k \leqslant 2M$ Эту оценку применим к первой сумме. Для $k \in L''$ I_k содержится в одном из шаров $B_{r_l}(x_l)$, для которых $\omega_f\left(B_{r_l}(x_l)\cap I\right) < \varepsilon$, следовательно, $\omega_k = \omega_f(I_k) \leqslant \varepsilon$)

$$< \sum_{k\in L'} 2MV(I_k) + \sum_{k\in L''}\varepsilon V(I_k) \leqslant$$

(т. к. для $k \in L'$ I_k содержится в одном из параллелепипедов I'_l,

$$\text{то } \bigcup_{k\in L'} I_k \subset \bigcup_{l=1}^{M} J'_l, \text{ и, следовательно,}$$

$$\sum_{k\in L'} V(I_k) \leqslant V\left(\bigcup_{l=1}^{M} J'_l\right) \leqslant \sum_{l=1}^{M} V(I'_l) < \varepsilon)$$

$$\leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon\sum_{k\in L''} V(I_k) \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon BV(I) = (2M + V(I))\varepsilon.$$

$2M$ и $V(I)$ — константы, а ε любое. Значит, рассматриваемую сумму мы можем сделать сколько угодной малой. Значит, $f \in R(I)$.

□

Эта теорема доказана в начале двадцатого века, то есть эти результаты сравнительно свежие.

Чтобы понять эту теорему и ее доказательство, ее нужно разбирать раз 5.

Далее из нее мы будем получать массу полезных утверждений.

Следствие 16.1. *Любая непрерывная функция интегрируема.*

Доказательство. Множество точек разрыва непрерывной функции пусто, значит, непрерывная функция интегрируема. □

ния $\bigcup\limits_{l=1}^{L} B_{r_l}(x_l)$, либо в одном из множеств объединения $\bigcup\limits_{l=1}^{M} J'_l$. В множество L' попадут индексы тех I_l, которые попадут в одно из множеств объединения $\bigcup\limits_{l=1}^{M} J'_l$. Тогда оставшиеся частичные параллелепипеды I_l целиком в одном из множеств объединения $\bigcup\limits_{l=1}^{L} B_{r_l}(x_l)$.

Свойства интегрируемых функций

1. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Если*

$$f \in R(I),$$

то $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha f \in R(I).$$

То есть если интегрируемую функцию умножить на число, получим интегрируемую функцию.

Доказательство. Если умножить функцию на константу, количество точек разрыва не увеличиться (если константа — 0, все точки разрыва исчезнут, иначе количество точек разрыва не изменится). □

2. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Если*

$$f, g \in R(I),$$

то

$$f + g \in R(I).$$

То есть сумма интегрируемых функций интегрируема.

Доказательство. Пусть F_h — множество точек разрыва функции h. Тогда

$$F_{f+g} \subset (F_f \cup F_g)\,.$$

Докажем это. Пусть точка $x_0 \notin F_f \cup F_g$. Это означает, что обе функции в этой точке непрерывны. Тогда их суммы также непрерывны в точке x_0, значит, $x_0 \notin F_{f+g}$ (фактически это вывернутое наизнанку утверждение «Если две функции непрерывны в точке, то их сумма непрерывна в этой точке»).[7] Мера F_f нулевая, мера F_g нулевая, тогда мера $F_f \cup F_g$ нулевая, значит, мера F_{f+g} нулевая. □

[7]Напомним, что, чтобы доказать вложение $A \subset B$, есть два способа: доказать, что любая точка множества A принадлежит множеству B, либо доказать, что, если точка не принадлежит множеству B, она не принадлежит множеству A. Здесь мы воспользовались вторым способом.

3. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Если*

$$f, g \in R(I),$$

то

$$f - g \in R(I).$$

Это следствие предыдущих двух свойств.

4. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Если*

$$f, g \in R(I),$$

то

$$f \cdot g \in R(I).$$

То есть произведение интегрируемых функций интегрируемо.

Доказательство. Пусть F_h — множество точек разрыва функции h. Тогда

$$F_{f \cdot g} \subset (F_f \cup F_g)\,.$$

Докажем это. Пусть точка $x_0 \notin F_f \cup F_g$. Это означает, что обе функции в этой точке непрерывны. Тогда их произведения также непрерывны в точке x_0, значит, $x_0 \notin F_{f \cdot g}$ Мера F_f нулевая, мера F_g нулевая, тогда мера $F_f \cup F_g$, значит, мера $F_{f \cdot g}$ нулевая. □

5. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Если*

$$f \in R(I),$$

и функция g непрерывна на $\operatorname{Im} f$,то

$$g \circ f \in R(I).$$

Доказательство. Пусть F_h — множество точек разрыва функции h. Тогда

$$F_{f \circ g} \subset F_f.$$

Докажем это. Функция g точек разрыва не имеет, в точках, в которых f непрерывна, композиция $g \circ f$ тоже непрерывна. Некоторые точки разрыва могут исчезнуть при композиции, поэтому имеет место не равенство множеств точек разрыва, а вложение. □

Рассмотрим некоторые частные случаи этого свойства (таких частных случаев можно сколько угодно придумать, достаточно брать любую непрерывную функцию в качестве g).

(a) *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Пусть*

$$g(x) = |x|.$$

Если

$$f \in R(I),$$

то

$$|f| \in R(I),$$

(b) *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Пусть*

$$g(x) = e^x.$$

Если

$$f \in R(I),$$

то

$$e^f \in R(I),$$

(c) *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Пусть*

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Если

$$f \in R(I),$$
$$\forall x \in I \quad f(x) \neq 0$$

и $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена, то

$$\frac{1}{f(x)} \in R(I).$$

6. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Пусть $I' \subset I$. Пусть $f \in R(I)$. Тогда $f \in R(I')$.*

Свойство очевидно: если на параллепипеде разрывов «мало», то на его части разрывов будет еще «меньше».

7. *Пусть $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots I_N$ (I_K — замкнутые параллелепипеды). Если*
$$f \in R(I_K) \quad (K = 1..N),$$
то
$$f \in R(I).$$
Если функция интегрируема на замкнутых параллелепипедах, она интегрируема и на их объединении.

Свойство сразу же следует из критерия Лебега.

Свойства интеграла Римана

1. $$\int\limits_I \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_I f(x)dx.$$
То есть константу можно выносить за знак интеграла.

Доказывается через интегральные суммы точно так же, как в одномерном случае.

2. $$\int\limits_I (f(x) + g(x))\, dx = \int\limits_I f(x)dx + \int\limits_I g(x)dx.$$
Доказывается точно так же, как в одномерном случае.

3. *Если $f(x) \geqslant 0$ и $f \in R(I)$, то*
$$\int\limits_I f(x)dx \geqslant 0.$$

4. *Если*
$$\begin{gathered} f(x) \leqslant g(x), \\ f, g \in R(I), \end{gathered}$$
то
$$\int\limits_I f(x)dx \leqslant \int\limits_I g(x)dx.$$
Это следствие из предыдущего свойства.

5.
$$\int\limits_I dx = V(I).$$

Доказательство.

$$\int\limits_I dx = \lim_{d(P)\to 0} S(1, P, \overline{\xi}) = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} 1 \cdot V(I_k) = \lim_{d(P)\to 0} V(I) = V(I).$$

□

6. *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *и* $f \in R(I)$, *то*

$$mV(I) \leqslant \int\limits_I f(x)dx \leqslant MV(I).$$

7. *Если* $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots \cup I_N$ *и замкнутые параллелепипеды* I_k *не пересекаются внутренними частями, то есть*

$$\operatorname{Int} I_k \cap \operatorname{Int} I_l = \varnothing \qquad (k \neq l),$$

и $f \in R(I_k)$, $f \in R(I)$ *и*

$$\int\limits_I f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{I_k} f(x)dx.$$

До сих пор мы рассматривали интегралы по параллелепипедам. Практически же часто нужно интегрировать по более сложному множеству, например, по кругу, полукругу, эллипсу. Для этого вводится понятие измеримого по Жордану множества.

2.6 Измеримые по Жордану множества

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 33. Функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

называется *характеристической функцией множества* A.

Функция χ_A определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\chi_A \colon \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}.$$

Теорема 17. *Множество точек разрыва характеристической функции χ_A равно границе множества A:*

$$F_{\chi_A} = \mathrm{Fr}(A).$$

Проиллюстрируем это утверждение для двумерного случая. Пусть множество A лежит в плоскости xy трехмерного пространства xyz (рис. 2.34). Чтобы изобразить график характеристической функции, нужно «поднять» множество A на 1 вверх и «закрасить», а также «закрасить» все точки плоскости xy, не лежащие в нем (рис. 2.35). При переходе через границу множества A происходит скачок: до границы значение 0, а внутри значение 1.

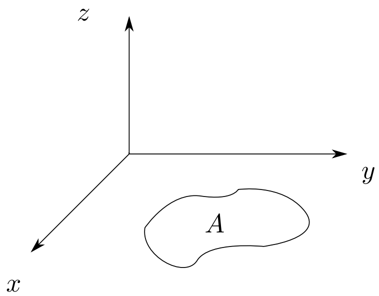


Рис. 2.34:

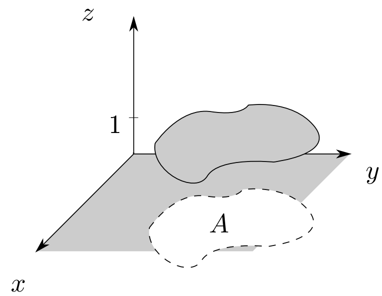


Рис. 2.35:

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in \mathrm{Int}\, A$. Тогда

$$\exists U(x_0) \ \ U \subset A.$$

Тогда

$$\forall x \in U \ \ \chi_A(x) = 1,$$
$$\chi_A(x_0) = 0$$

и тогда

$$\forall \varepsilon \quad |\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Значит, в точке x_0 функция χ_A непрерывна:

$$x_0 \notin F_{\chi_A}.$$

2. Путь $x_0 \in \operatorname{Ext} A$. Тогда

$$\exists U(x_0) \;\; U \cap A = \varnothing.$$

Тогда

$$\forall x \in U \;\; \chi_A(x) = 0.$$

Значит, в точке x_0 функция χ_A непрерывна:

$$x_0 \notin F_{\chi_A}.$$

3. Пусть $x_0 \in \operatorname{Fr}(A)$. Докажем, что $x_0 \in F_{\chi_A}$. Допустим противное, что в точке x_0 функция χ_A непрерывна. Тогда для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ существует окрестость $U(x_0)$, такая что для любого $x \in U(x_0)$

$$|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| < \frac{1}{2}.$$

Так как $x_0 \in \operatorname{Fr}(A)$, то существуют точки $x_1, x_2 \in U$ такие, что $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$. Для этих точек

$$|\chi_A(x_1) - \chi_A(x_2)| = |1 - 0| = 1.$$

С другой стороны,

$$|\chi_A(x_1) - \chi_A(x_2)| = |\chi_A(x_1) - \chi_A(x_0) + \chi_A(x_0) - \chi_A(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |\chi_A(x_1) - \chi_A(x_0)| + |\chi_A(x_0) - \chi_A(x_2)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Мы получили противоречие. Следовательно,

$$x_0 \in F_{x_A}.$$

□

Определение 34. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если существует замкнутый параллелепипед I, такой что

$$I \supset A,$$
$$\chi_A \in R(I).$$

Число

$$m(A) = \int\limits_I \chi_A dx$$

называется *мерой Жордана множества A*.

Измеримым по Жордану может быть только ограниченное множество, не ограниченное множество не может быть измеримо по Жордану, так как нет параллелепипеда, который его содержит.

Очевидно, что параллелепипедов I из определения может быть много (рис. 2.36). Понятно, что, если характеристическая функция интегрируема по одному параллелепипеду, содержащему множество A, она будет интегрируема и по любому другому параллелепипеду, содержащему множество A и интеграл не изменится. То есть мера Жордана не зависит от выбора параллелепипеда I.

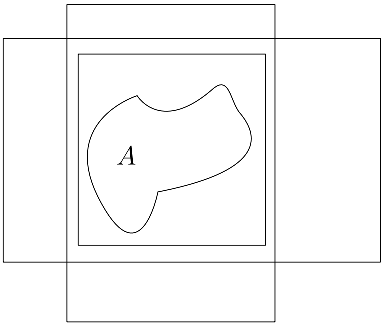


Рис. 2.36:

Узнать, измеримо ли множество по Жордану, очень просто: нужно посмотреть на характеристическую функцию. Она интегрируема, если множество точек разрыва имеет меру 0 по Лебегу, а точки разрыва совпадают с границей множества A. Получаем теорему.

Теорема 18. *Ограниченное множество A измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда $\mu\,(\mathrm{Fr}(A)) = 0$.*

Доказательство. Множество A измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда

$$\chi_A \in R(I),$$

что выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu(F_{\chi_A}) = 0,$$

что верно тогда и только тогда, когда

$$\mu\,(\mathrm{Fr}(A)) = 0.$$

$\square$

Теперь мы легко можем изучить свойства множеств, измеримых по Жордану, и для каждого множества определеить, измеримо оно или нет. Чтобы найти меру Жордана, нужно находить интеграл. Пока у нас нет практических способов это делать, это будут позже.

Свойства измеримых по Жордану множеств

1. *Замкнутый параллелепипед измерим по Жордану.*

   Доказательство. Граница параллелепипеда состоит из конечного числа подмножеств многообразий меньшей размерности, а их мера нулевая. Значит, мера параллелепипеда нулевая. □

2. Если множества A, B измеримы по Жордану, то множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ измеримы по Жордану.

   Доказательство.

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$
$$\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$
$$\mathrm{Fr}(A \setminus B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$

   Если A и B измеримы по Жордану, то

$$\mu\left(\mathrm{Fr}(A)\right) = 0,$$
$$\mu\left(\mathrm{Fr}(B)\right) = 0,$$
$$\mu\left(\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)\right) = 0,$$

   значит,

$$\mu\left(\mathrm{Fr}(A \cup B)\right) = 0,$$
$$\mu\left(\mathrm{Fr}(A \cap B)\right) = 0,$$
$$\mu\left(\mathrm{Fr}(A \setminus B)\right) = 0.$$

□

Свойства меры Жордана

1. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то

$$m(A) \geqslant 0.$$

2. *Пусть I — замкнутый параллелепипед. Тогда*

$$m(I) = V(I).$$

Мера Жордана обобщает понятие объема.

3. *Если A, B измеримы по Жордану, то*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Это уже менее очевидный факт, его мы докажем.

Доказательство. Множества A, B измеримы по Жордану, значит, существует параллелепипед I, содержащий A и B, тогда[8]

$$m(A \cup B) = \int\limits_I \chi_{A\cup B}(x)dx = \int\limits_I \left(\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)\right) dx =$$

$$= \int\limits_I \chi_A(x)dx + \int\limits_I \chi_B(x)dx - \int\limits_I \chi_{A\cap B}(x)dx = m(A) + m(B) - m(A\cap B).$$

□

4. *Если $A \subset B$, то*

$$m(A) \leqslant m(B).$$

Далее мы рассмотрим еще один критерий измеримости по Жордану.

Теорема. *Ограниченное множество A измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют параллелепипеды I_1, I_2, I_3, …, $I_M \subset A$, причем $\operatorname{Int} I_k \cap \operatorname{Int} I_l = \varnothing$ $(k \neq l)$[9], и существуют параллелепипеды I'_1, I'_2, I'_3, …, I'_N, такие что*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} I'_k$$

и

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{N} V(I'_k) - \sum_{k=1}^{M} V(I_k) < \varepsilon.$$

[8] Здесь используется тривиальный факт $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

[9] То есть эти параллелепипеды могут пересекаться только границами.

Смысл этого утверждения простой, и это близко к тому, как определялись площадь и объем в школе. Пусть имеется множество A. Оно измеримо по Жордану, если внутрь него мы можем вложить объединение параллелепипедов $\bigcup\limits_{k=1}^{M} I_k$, а само множество A можно вложить в объединение параллелепипедов $\bigcup\limits_{k=1}^{N} I'_k$ и при этом объем тех, которые снаружи, минус объем тех, которые внутри, должен быть меньше ε (рис. 2.37).

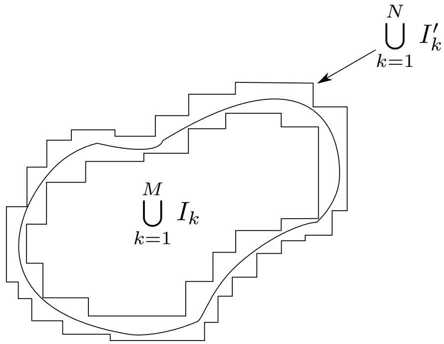


Рис. 2.37:

Доказательство. 1. Пусть A измеримо по Жордану, тогда существует параллелепипед $I \supset A$, такой что

$$\chi_A \in R(I).$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P, такое что

$$\overline{S}(\chi_A, P) - \underline{S}(\chi_A, P) < \varepsilon.$$

Пусть

$$I_1, I_2, I_3, \dots, I_N$$

— частичные параллелепипеды разбиения P.

Пусть

$$I'_1, I'_2, I'_3, \dots, I'_{N_1}$$

— те из них, которые целиком содержатся в A.

Пусть

$$I''_1, I''_2, I''_3, \dots, I''_{N_2}$$

— те из них, которые хотя бы одной точкой пересекаются с A:

$$I_k'' \cap A \neq \varnothing,$$

тогда

$$\bigcup_{k=1}^{N_2} I_k'' \supset A.$$

Нам нужно лишь проверить, что разница объемов меньше ε.

Так как любой из параллелепипедов I_k' попадает в I_1'', I_2'', I_3'', …, I_{N_2}'', то параллелепипедов I_k' больше, чем параллелепипедов I_k''. Тогда

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{N_2} V(I_k'') - \sum_{k=1}^{N_1} V(I_k').$$

Если $I_k \cap A = \varnothing$, то $M_k = 0$, значит,

$$\overline{S}(\chi_A, P) = \sum_{k=1}^{N} M_k V(I_k) = \sum_{k=1}^{N_2} V(I_k'').$$

Если $I_k \not\subset A$, то $m_k = 0$, значит,

$$\underline{S}(\chi_A, P) = \sum_{k=1}^{N} m_k V(I_k) = \sum_{k=1}^{N_1} V(I_k'').$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{N_2} V(I_k'') - \sum_{k=1}^{N_1} V(I_k') = \overline{S}(\chi_A, P) - \underline{S}(\chi_A, P) < \varepsilon.$$

2. Пусть выполнено условие критерия. Нужно доказать, что множество A измеримо по Жордану.

   Не нарушая общности, будем считать, что параллелепипеды I_1, I_2, I_3, …, $I_M \subset A$ открытые (если были не открытые, можно убрать у всех у них границы, при этом ничего не изменится), а параллелепипеды I_1', I_2', I_3', …, I_N' из второго набора замкнутые (если были не замкнутые, добавим к ним границы, и тогда все останется в силе).

   Тогда

$$\operatorname{Fr}(A) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k'\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{M} I_k\right)$$

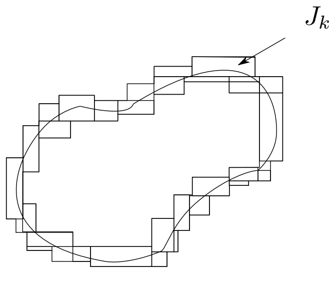


Рис. 2.38:

(рис. 2.37). Разность множеств выше можно представить в виде объединения некоторых параллелепипедов J_k (рис. 2.38)

$$\bigcup_{k=1}^{L} J_k,$$

такого что

$$\sum_{k=1}^{L} V(J_k) = \sum_{k=1}^{N_2} V(I''_k) - \sum_{k=1}^{N_1} V(I'_k) < \varepsilon,$$

что означает

$$V(\mathrm{Fr}(A)) = 0,$$

следовательно,

$$\mu\,(\mathrm{Fr}(A)) = 0.$$

□

Множество измеримо по Жордану, если мера Лебега его границы равна 0. Но если множество A ограниченное, то $\mathrm{Fr}(A)$ — ограниченное и замкнутое множество, то есть компакт. Поэтому

$$\mu\,(\mathrm{Fr}(A)) = 0$$

это то же самое, что

$$V\,(\mathrm{Fr}(A)) = 0.$$

То есть можно сформулировать такой критерий: *множество измеримо по Жордану тогда и только тогда когда объем его границы равен 0.*

Даллыше мы уйдем от параллелепипедов и будем интегрировать по произвольному измеримому по Жордану множеству.

2.7 Интегрирование по Жорданову множеству

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, A измеримо по Жордану. Пусть задана ограниченная функция $f\colon A \to \mathbb{R}$. Возьмем замкнутый параллелепипед I, который содержит множество A.

Введем функцию $f_A\colon I \to \mathbb{R}$, действующую по правилу

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in I \setminus A. \end{cases}$$

То есть функция f_A совпадает с f на A, а на остальной части параллелепипеда I равна 0.

Определение 35. *Интегралом по измеримому по Жордану множеству* A называется число

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_I f_A(x)dx.$$

Мы так же, как и раньше, будем писать $f \in R(A)$, если функция f интегрируема по произвольному множеству A.

Критерий интегрируемости здесь точно такой же, как и тот, что мы рассматривали раньше.

Теорема 19 (критерий интегрируемости функции)**.** $f \in R(I)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mu(F_f) = 0.$$

Доказательство. 1. Необходимость.

Пусть

$$f \in R(A),$$

это означает, что

$$f_A \in R(I),$$

это означает, что

$$\mu(F_{f_A}) = 0.$$

$$F_f \subset F_{f_A} \cup \mathrm{Fr}(A).$$

$\mu(F_{f_A}) = 0$, $\mu(\mathrm{Fr}(A)) = 0$, отсюда

$$\mu(F_f) = 0.$$

2. Достаточность.

   Пусть
$$\mu(F_f) = 0.$$

$$F_{f_A} \subset F_f \cup \mathrm{Fr}(A).$$

$\mu(F_f) = 0$, $\mu(\mathrm{Fr}(A)) = 0$, отсюда
$$\mu(F_{f_A}) = 0,$$
значит,
$$f_A \in R(I),$$
значит,
$$f \in R(A).$$

$\square$

Свойства интеграла по произвольному множеству

1.
$$\int\limits_A \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_A f(x)dx.$$

2.
$$\int\limits_A \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int\limits_A f(x)dx + \int\limits_A g(x)dx.$$

3. *Если* $f(x) \geqslant 0$, *то*
$$\int\limits_A f(x)dx \geqslant 0.$$

4. *Если*
$$f(x) \leqslant g(x),$$
то
$$\int\limits_A f(x)dx \leqslant \int\limits_A g(x)dx.$$

5.
$$\int\limits_A dx = m(A).$$

6. *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$, *то*

$$m \cdot m(A) \leqslant \int\limits_A f(x)dx \leqslant M \cdot m(A).$$

7. *Если функция* $f(x)$ *ограничена и* $m(A) = 0$, *то*

$$\int\limits_A f(x)dx = 0.$$

Доказательство. По свойству 5,

$$0 \leqslant \int\limits_A f(x)dx \leqslant 0.$$

□

8.
$$\int\limits_{A\cup B} f(x)dx = \int\limits_A f(x)dx + \int\limits_B f(x)dx - \int\limits_{A\cap B} f(x)dx.$$

9. *Если* $\mu(A \cap B) = 0$,

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)dx = \int\limits_A f(x)dx + \int\limits_B f(x)dx.$$

Определение 36. Если какое-то свойство выполняется для всех точек за исключением точек некоторого множества меры 0, то говорят, что это *свойство выполняется почти всюду.*

Это общепринятый термин.

Теорема 20. *Если* $f(x) \geqslant 0$ *и* $\int\limits_A f(x)dx = 0$, *то* $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. 1. Пусть A — замкнутый параллелепипед. Пусть $x_0 \in I$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Покажем, что $f(x_0) = 0$.

Допустим противное. Пусть $f(x_0) > 0$. Возьмем число δ, такое что $0 < \delta < f(x_0)$ Тогда по свойсвам непрерывности существует такой шар $B_r(x_0)$, что $f(x) > \delta$ для любого $x \in B_r \cap I$. Обозначим $I \backslash B_r = G$ (рис. 2.39).

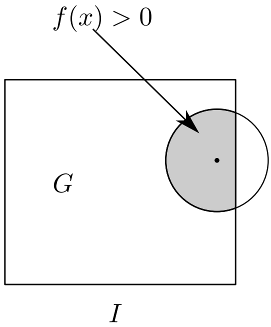


Рис. 2.39:

$$\int\limits_I f(x)dx = \int\limits_G f(x)dx + \int\limits_{B_r\cap I} f(x)dx \geqslant 0 + \delta m(B_r \cap I) > 0.$$

Мы получили противоречие.

Значит, $f(x_0) = 0$.

Обозначим,

$$H = \{x \in I \mid f(x) > 0\}.$$

Тогда

$$H \subset F_f,$$

но

$$\mu(F_f) = 0,$$

значит,

$$\mu(H) = 0.$$

Значит, функция равна нулю почти всюду.

Для замкнутых параллелепипедов утверждение доказано.

2. Пусть A — произвольное измеримое по Жордану множество. Тогда

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_I f_A(x)dx.$$

$\int\limits_A f(x)dx = 0$, $\int\limits_I f_A(x)dx \geqslant 0$, значит, по доказанному случаю для параллелепипедов $f_A(x) = 0$ почти всюду, откуда следует $f(x) =$

0 почти всюду (потому что там, где функции f и f_A отличаются, $f_A(x) = 0$, $f_A(x)$ может быть строго больше 0 только там, где $f(x)$ строго больше 0).

□

Мы вплотную подошли к практическим методам вычисления интегралов.

2.8 Сведенние кратных интегралов к повторным

Пусть X — замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$, Y — замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим их декартово произведение $X \times Y$. Это будет замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^{m+n}$.

Пусть функция $f\colon X \to Y$. Эту функцию будем писать так $f(x, y)$, где x и y — вектора: $x \in X$, $y \in Y$.

Традиционно интеграл по декартовому произведению обозначают следующим образом:

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy.$$

Теорема 21 (теорема Фубини). *Если $f \in R(X \times Y)$, то*

$$\int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy = \int\limits_X \left(\underline{\int\limits_Y} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_X \left(\overline{\int\limits_Y} f(x,y)dy \right) dx.$$

То есть нужно функцию $f(x, y)$ при фиксированом x проинтегрировать по y — в результате получится функция от x, а потом ее проинтегрировать по x.

Необходимость брать либо нижний, либо верхний интеграл объясняется тем, что они всегда существуют, в то время как интеграл $\int\limits_Y f(x,y)dy$ на каком-то из сечений может не существовать.

x и y входят в эту формулу равноправо и их можно поменять ролями, в результате интеграл в скобках и интеграл за скобками переставятся.

Отметим, что $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy$ — это $m+n$-кратный интеграл.

Доказательство. Пусть P_X — произвольное разбиение X.

Пусть P_Y — произвольное разбиение Y.

Пусть $P_X \times P_Y$ — разбиение $X \times Y$, порожденное P_X и P_Y.

Поясним, что значит «порожденное». Пусть $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$. Их декартово произведение — прямоугольник (рис. 2.40). Если мы возьмем какое-то разбиение X и какое-то разбиение Y, то эти два разбиения порождают разбиение прямоугольника — получаются «клеточки» (рис. 2.41). Каждая из этих «клеточек» — это декартово произведение одного частичного сегмента разбиения X и одного частичного разбиения Y (рис. 2.42). В многомерном случае точно так же.

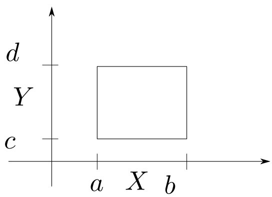


Рис. 2.40:

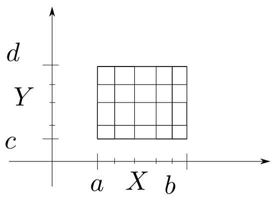


Рис. 2.41:

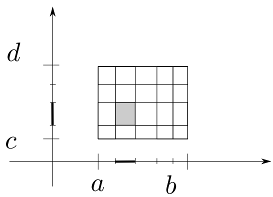


Рис. 2.42:

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_M$ — частичные параллелепипеды разбиения P_X (один из них отмечен жирной линией на горизонтольной оси на рис. 2.42), $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ — частичные параллелепипеды разбиения P_Y (один из них отмечен жирной линией на вертикальной оси на рис. 2.42), тогда $X_k \times Y_i$ — частичный параллелепипед разбиения $P_X \times P_Y$ (один из них — закрашенный прямоугольник на рис. 2.42).

Введем обозначения:

$$\underline{I}(x) = \underline{\int_Y} f(x, y)dy, \qquad \overline{I}(x) = \overline{\int_Y} f(x, y)dy$$

(если при фиксированном x взять нижний или верхний интеграл — а они всегда существуют, — то получим некоторое число, меняем x — получим функцию).

Рассмотрим нижнюю сумму Дарбу функции $f(x, y)$ и разбиения $P_X \times$

P_Y:

$$\underline{S}(f(x,y), P_X \times P_Y) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} \inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(X_k\times Y_l) =$$

заметим, что $V(X_k \times Y_l) = V(X_k)\cdot B(Y_l)$

$$= \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} \inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(X_k)\cdot V(Y_l) =$$

объем $V(X_k)$ не зависит от индекса l

$$= \sum_{k=1}^{M}\left(\sum_{l=1}^{N} \inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(Y_l)\right)V(X_k) \leqslant \ldots$$

Здесь мы прервемся, оценим выражение в скобках, потом продолжим текущую оценку.

Пусть $x \in X_k$ — произвольная точка, тогда

$$\inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y) \leqslant \inf_{y\in Y_l} f(x,y).$$

Домножим последнее неравенство на $V(Y_l)$:

$$\inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(Y_l) \leqslant \inf_{y\in Y_l} f(x,y)V(Y_l).$$

Такое неравенство справедливо для каждого l. Просуммируем все такие неравенства по l:

$$\sum_{l=1}^{N} \inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(Y_l) \leqslant \sum_{l=1}^{N} \inf_{y\in Y_l} f(x,y)V(Y_l).$$

Отметим важный момент. В левой части неравенства «свободных букв» не осталось, то есть она представляет собой некоторое число. А в правой части $x \in X_k$ — любое число. Если $c \leqslant g(x)$ для любого $x \in X_k$, то $c \leqslant \inf\limits_{x\in X_k} g(x)$. Применяя этот факт к неравенству выше, получаем:

$$\sum_{l=1}^{N} \inf_{\substack{x\in X_k\\ y\in Y_l}} f(x,y)V(Y_l) \leqslant \inf_{x\in X_k}\sum_{l=1}^{N} \inf_{y\in Y_l} f(x,y)V(Y_l).$$

Продолжим исходную цепочку неравенств:

$$\ldots \leqslant \sum_{k=1}^{M}\left(\inf_{x\in X_k}\sum_{l=1}^{N}\inf_{y\in Y_l} f(x,y)V(Y_l)\right)V(X_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\left(\inf_{x\in X_k}\underline{S}\,(f(x,y),P_Y)\right)V(X_k) \leqslant \sum_{k=1}^{M}\left(\inf_{x\in X_k}\underline{I}(x)\right)V(X_k) =$$
$$= \underline{S}\,(\underline{I}(x),P_X) \leqslant \begin{bmatrix}\overline{S}(\underline{I}(x),P_X)\\ \underline{S}(\overline{I}(x),P_X)\end{bmatrix} \leqslant \overline{S}(\overline{I}(x),P_X).$$

Итак, мы получили неравенство

$$\underline{S}\,(f(x,y),P_X\times P_Y) \leqslant \overline{S}(\overline{I}(x),P_X).$$

Такую же цепочку неравенств можно написать и для верхней суммы Дарбу, в итоге получим

$$\overline{S}(\overline{I}(x),P_X) \leqslant \overline{S}(f(x,y),P_X).$$

Объединим все эти неравенства:

$$\underline{S}\,(f(x,y),P_X\times P_Y) \leqslant \overline{S}(\overline{I}(x),P_X) \leqslant \ldots \leqslant \overline{S}(f(x,y),P_X)$$

(на месте многоточия — аналогичная цепочка неравенств для верхней суммы Дарбу, чтобы ее получить начало доказательства нужно повторить в обратном порядке, взяв не инфинум, а супремум, тогда все неравенства развернутся в другую сторону, либо, начиная с $\overline{S}(f(x,y),P_X)$, нужно дойти цепочкой неравенств к $\overline{S}(\overline{I}(x),P_X)$, а потом эти левое и правое неравенство состыковать).

Из полученной цепочки неравенств выделим следующие:

$$\underline{S}(f(x,y),P_X\times P_Y) \leqslant \underline{S}(\underline{I}(x),P_X) \leqslant \overline{S}(\underline{I}(x),P_X) \leqslant \overline{S}(f(x,y),P_X\times P_Y).$$

Если $d(P_X)\to 0$, $d(P_Y)\to 0$, то $d(P_X\times P_Y)\to 0$ и тогда

$$\underline{S}(f(x,y),P_X\times P_Y) \to \int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)dxdy,$$
$$\overline{S}(f(x,y),P_X\times P_Y) \to \int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)dxdy,$$

откуда с учетом последнего неравенства

$$\underline{S}(\underline{I}(x), P_X) \to \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy,$$
$$\overline{S}(\underline{I}(x), P_X) \to \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy,$$

значит,

$$\int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy = \int\limits_X \underline{I}(x)dx = \int\limits_X \left(\underline{\int\limits_Y} f(x,y)dy \right) dx.$$

Первое равенство теоремы доказано. Чтобы доказать второе, нужно взять цепочку

$$\underline{S}\left(f(x,y), P_X \times P_Y\right) \leqslant \underline{S}\left(\overline{I}(x), P_X\right) \leqslant \overline{S}(\overline{I}(x), P_X) \leqslant \overline{S}(f(x,y), P_X \times P_X).$$

Здесь точно так же, переходя к пределу, получим второе равенство. □

Так как в эту торему x и y входят симметрично, то есть их можно поменять ролями, справедлива также формула

$$\int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)dxdy = \int\limits_Y \left(\underline{\int\limits_X} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_Y \left(\overline{\int\limits_X} f(x,y)dx \right) dy.$$

Следствие 21.1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна, то она интегрируема, и по любому сечению интерируема*[10]*.Тогда формула Фубини примет вид:*

$$\iint\limits_{X \times Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)dx \right) dy.$$

Частный случай. *Пусть $I = [a,b] \times [c,d]$. Тогда*

$$\int\limits_I f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

[10]То есть верхний инеграл совпадет с нижним интегралом и с просто интегралом.

Теорема 22. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *измеримо по Жордану, функции* $\varphi, \psi\colon G \to \mathbb{R}$ *непрерывны и* $m \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant M$.

Пусть

$$\tilde{G} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in G, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\}$$

Пусть функция f *определена и непрерывна на* $\tilde{G}$. *Тогда множетсво* $\tilde{G}$ *измеримо по Жордану и*

$$\int\limits_{\tilde{G}} f(x)dx = \int\limits_{G} \left(\int\limits_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

То есть в общем случае мы можем заменить интеграл по любому множеству повторными.

Докажем эту теорему для самого простого и самого важного случая.

Доказательство. Пусть $G \subset \mathbb{R}$, $G = [a, b]$. Граница множества $\tilde{G}$ состоит из графика функции $x_2 = \psi(x_1)$, мера которого равна 0, графика функции $x_2 = \varphi(x_1)$, мера которого равна 0, и двух отрезков (2.43), меры которых равны 0, то есть мера границы равна нулю, значит $\tilde{G}$ измеримо по Жордану.

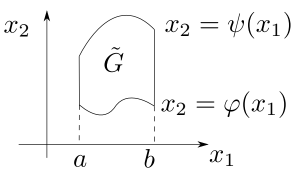


Рис. 2.43:

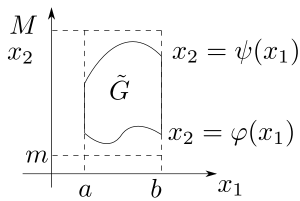


Рис. 2.44:

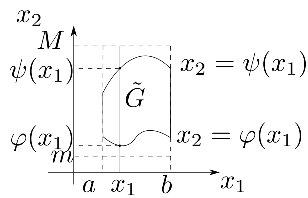


Рис. 2.45:

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\tilde{G}} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2.$$

Возьмем прямоугольник, который содержит внутри себя область интегрирования $\tilde{G}$. Пусть это будет прямоугольник $[a, b] \times [m, M]$. Функцию

f, которая определена только в G, доопределим на весь прямоугольник $[a,b] \times [m,M]$ нулями. Тогда

$$\int\limits_{\tilde{G}} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{[a,b]\times[m,M]} f_{\tilde{G}}(x_1,x_2) \overset{\text{теорема}}{\underset{\text{Фубини}}{=}} \int_a^b \left(\int\limits_m^M f_{\tilde{G}}(x_1,x_2)dx_2 \right) dx_1 =$$

(когда мы берем интеграл в скобках при фиксированном x_1,
мы берем интеграл по отрезку, параллельному $[m,M]$,
но вне $\tilde{G}$ функция нулевая, значит, интеграл нулевой
поэтому не обязательно брать интеграл от одного конца отрезка до другого,
достаточно брать интеграл от $\varphi(x_1)$ до $\psi(x_1)$ (рис. 2.45).
На этом участке f и $f_{\tilde{G}}$совпадают)

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1,x_2)dx_2 \right) dx_1.$$

□

В общем случае все точно так же, только более громоздкая запись.

Следствие 22.1. *Пусть в трехмерном пространстве xyz имеется какое-то тело. При каждом фиксированном z пересечем это тело плоскостью, параллельной плоскости xy. Пусть площадь каждого такого сечения равна $S(z)$. Пусть $m \leqslant z \leqslant M$. Тогда объем тела*

$$V = \int\limits_m^M S(z)dz.$$

То есть объем — это интеграл из площадей сечений.

Следствие 22.2 (принцип Кавальери)**.** *Если в пространстве имеется два тела, такие что, если мы их пересечем любой горизнтальной плоскостью, площади их сечений будут одинаковыми. Тогда их объемы равны.*

Доказательство. Это вытекает из формулы выше: каждый из объемов — это интеграл от площадей сечений, если площади одинаковые, интегралы одинаковые и объемы одинаковые. □

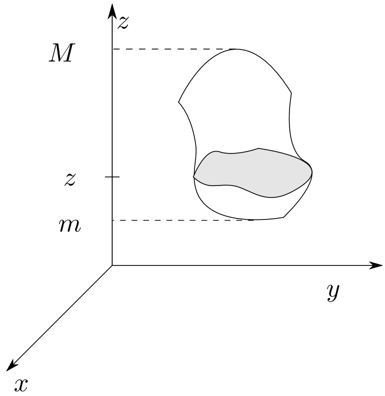


Рис. 2.46:

На самом деле, сечь можно не обязательно горизонтальными плоскостями, если мы, пересекая любыми параллельными плоскостями, будем получать одни и те же площади сечений, то объемы равны.

На этом материал, связанный с теоремой Фубини, завершается.

2.9 Замена переменной в кратном интеграле

Далее мы сформулируем теорему без доказательства, а ее частные случаи подробно распишем. Эти теоремы очень непростые, они доказаны в солидных учебниках. Доказательства длинные, сложные. Мы лишь дадим формулировку.

Определение 37. Пусть множества $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты.[11] Биективное отображение $\varphi\colon U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если отображение φ непрерывно дифференцируемо, существует обратное к нему отображение φ^{-1}, которое тоже непрерывно дифференцируемо.

Теорема 23. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану.*

Пусть $H \subset U$ и $\mu(H) = 0$.

Пусть $S \subset V$ и $\mu(S) = 0$.

Пусть множество $U \setminus H$ открыто, множество $V \setminus S$ открыто.

Пусть задано отображение $\varphi\colon U \to V$. Пусть его сужение $\varphi\colon U \setminus H \to V \setminus S$ — диффеоморфизм.

[11] Иначе мы не можем дифференцировать в любой точке, так как дифференцируемость определялась только во внутренней точке.

Пусть $f \in R(V)$.
Пусть $|\det \varphi'(t)|$ *— функция, ограниченная на* $U \setminus H$. *Тогда*

$$f\left(\varphi(t)\right)|\det \varphi'(t)| \in R(U \setminus H).$$

и справедлива формула замены переменной

$$\int\limits_V f(x)dx = \int\limits_{U\setminus H} f\left(\varphi(t)\right)|\det \varphi'(t)|dt.$$

Если $|\det \varphi'(t)|$ существует для любого $t \in U$ и ограничен, то

$$\int\limits_V f(x)dx = \int\limits_U f\left(\varphi(t)\right)|\det \varphi'(t)|dt.$$

Понятна замена $f(x)$: его нужно заменять на $f\left(\varphi(t)\right)$, то есть вместо x подставляем $\varphi(t)$. А dx нужно заменять на $|\det \varphi'(t)|dt$.

Эта теорема выглядит громоздкой, потому что здесь есть отображение не только из U в V, но и из исключения $U \setminus H$ в $V \setminus S$, где H и S — множества меры 0. Но в частном случае H и S может и не быть, они могут быть пустыми, тогда все здесь сильно упрощается. Но в наиболее важных примерах H и S присутствуют, поэтому теорема дается в такой формулировке.

Формула замены переменной выглядит существенно сложнее, чем в одномерном случае. В одномерном случае производная присутствует при замене, там нет определителя, но там матрица размера 1×1, так что определитель — это просто она же. Модуль здесь появляется, потому что здесь может нарушаться ориентиция: если функция возрастает, то определитель положительный и модуль уходит, а если убывает (то есть ab и cd меняются местами), то перед определителем будет минус и его нужно компенсировать. Одномерная формула — это польностью частный случай многомерной.

Далее мы рассмотрим важные примеры, когда эта теоремы работает.

2.10 Полярная система координат

Далее мы выпишем формулу перехода от декартовых координат к полярным координатам.

Пусть $U = [0, R] \times [0, 2\pi]$, $V = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ и отображение $\varphi\colon U \to V$ действует по правилу

$$\varphi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Изобразим графически рассматриваемое отображение. Пусть имеем две перпендикулярные оси: горизонтальная ось r радиусов и вертикальная ось α углов. Отметим точку R на оси радиусов и точку 2π на оси углов и построим прямоугольник $[0,R]\times[0,2\pi]$. Этот прямоугольник — множество U.

Пусть имеем две перпендикулярные оси: горизонтальная ось x и вертикальная ось y. Построим круг радиуса R с центром в начале координат. Этот круг — множество V.

Отображение из одного изображенного множества в другое обозначим стрелочкой (рис. 2.47).

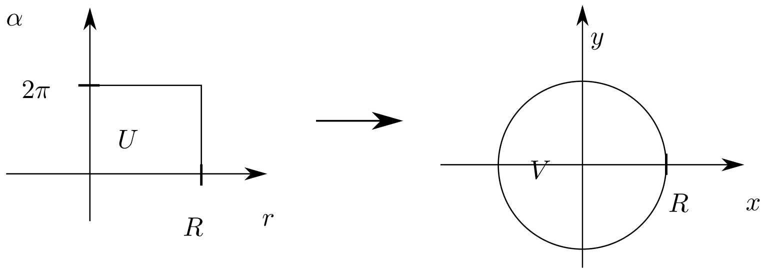


Рис. 2.47:

Формулы перехода от полярных координат к декартовыс координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку (x,y) в круге $B_r(0)$, то есть в множестве V. Проведем *полярный радиус* — отрезок, соединяющий начало координат с этой точкой. Пусть он имеет длину r. Найдем *полярный угол* — угол α между этим отрезком и положительным направлением горизонтальной оси. На чертеже, где иизображено множество отметим точку (r,α). Точке (x,y) соответствует точка (r,α) (рис. 2.48).

Это отображение не взаимно-однозначное: в начале координат на окружности полярный радиус равен нулю, а полярный угол не определен. То есть полярный радиус равен нулю на всем отрезке $[0,2\pi]$ на множестве U, весь этот отрезок отображается в одну точку — в начало координат. Более того, все точки вила $(r,0)$ и $(r,2\pi)$ будут отображатьсся в точку вида $(x,0)$. Введем множества, которые исправят ситуацию.

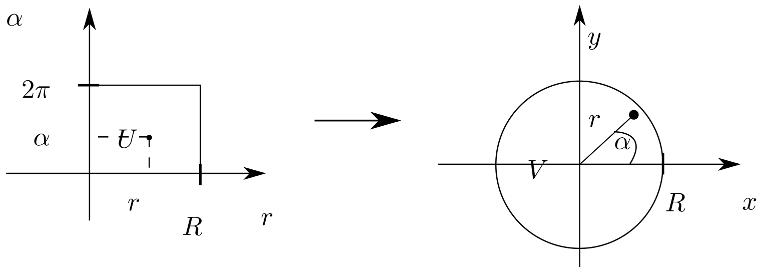


Рис. 2.48:

Пусть $H = \mathrm{Fr}(U)$ (то есть это граница прямоугольника). Тогда $\mu(H) = 0$.

Пусть $S = \mathrm{Fr}(\overline{B}_r(0)) \cup [0, R]$.[12] $\mu(S) = 0$. (Множество S изображено на рис. 2.49)

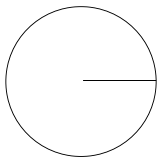


Рис. 2.49:

Рассмотрим отображение $\varphi\colon U \setminus H \to V \setminus S$. Оно уже будет биективным. Множества $U \setminus H$, $V \setminus S$ открыты, φ непрерывно дифференцируемо (так как синус и косинус непрерывно дифференцируемы) и по теореме об обратном отображении, φ^{-1} тоже непрерывно дифференцируемо. То есть отображение φ — диффеоморфизм.

Найдем производную φ:

$$\varphi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha. \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det\varphi'(r, \alpha) = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r,$$

тогда

$$|\det\varphi'(r, \alpha)| = r.$$

[12] $\mathrm{Fr}(\overline{B}_r(0)) = \mathrm{Fr}(B_r(0))$.

Эта функция определена и ограничена на всем U.

Тогда формула замены переменной примет вид

$$\iint\limits_{B_R(0)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\left(r\cos\alpha, r\sin\alpha\right) r dr d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^R r dr \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^R f\left(r\cos\alpha, r\sin\alpha\right) r dr.$$

2.11 Сферические координаты

Рассмотрим трехмерное пространство xyz с началом координат O. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ этого пространства. Соединим точку M с началом координат. Длину отрезка OM обозначим r.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

— *сферический радиус*. Рассмотрим проекцию M' точки M на плоскость xy. Для точки M в плоскости xy введем полярные координаты. Длину отрезка OM' обозначим r', это полярный радиус. Определим полярный угол xOM', обозначим его φ. Также введем угол $M'OM$ между вектором $\overline{OM}$ и его проекцией на плоскость xy, обозначим его ψ. Числа

$$r, \varphi, \psi$$

называются *сферическими координатами токи* M. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} r' &= r\cos\psi, \\ x &= r'\cos\varphi, \\ y &= r'\sin\varphi, \\ z &= r\sin\psi. \end{aligned}$$

Тогда декартовые координаты x, y, z выражаются через сферические r, φ, ψ следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

где $r \in [0, +\infty]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (r и φ меняются, как в полярных координатах. Если точка «выше» плоскости xy ($z > 0$), то $\psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

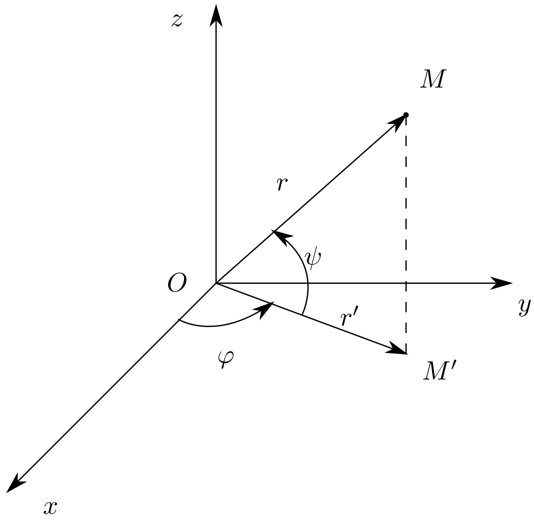


Рис. 2.50:

«ниже» плоскости xy $(z < 0)$, то $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, если же точка лежит в плоскости xy $(z = 0)$, то $\psi = 0$.).

Для любой точки (x, y, z) определены числа r, φ, ψ и наоборот по точке, заданной (r, φ, ψ), можно определить x, y, z. Но так же, как и в случае с полярной системой координат, это соответствие не взамно-однозначное. Если $r = 0$, углы φ, ψ не определены. Если точка лежит на оси z, ее проекция на плоскость xy совпадает с началом координат, тогда угол φ не определен, а $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$..

В некоторых книгах угол ψ вводится иначе — как угол между осью z и вектором OM. Обозначим этот угол $\tilde{\psi}$, тогда

$$\psi + \tilde{\psi} = \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае формулы получатся немного другими, поэтому важно обращать внимание на то, как определен этот угол.

Далее мы выведем формулы замены переменных в трехкратном интеграле при переходе от декартовых координат к сферическим.

Введем множество

$$U = [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}^3$$

(декартового произведение пределов изменения r, φ, ψ). Это параллелепипед.

Пусть
$$V = \overline{B}_R(0).$$
Это замкнутый шар радиуса R с центром в начале координат.

Введем множество
$$H = \mathrm{Fr}(U),$$
тогда $\mu(H) = 0$ и множество $U \setminus H$ открыто.

Проведем через оси x и z замкнутый полукруг с центром в начале координат радиуса R. Назовем его P (рис. 2.51).

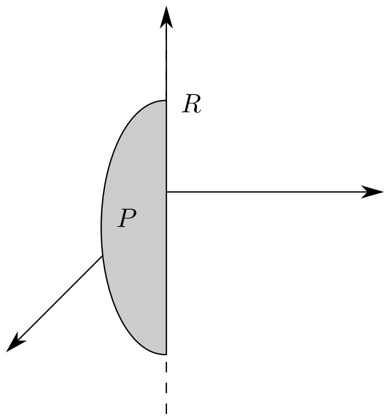


Рис. 2.51:

Введем множество
$$S = \mathrm{Fr}(V) \cup P,$$
тогда $\mu(S) = 0$ и множество $V \setminus S$ открыто (мы из шара «выбросили» границу и полукруг P, то, что осталось, будет открытым множеством).

Рассмотрим отображение $\alpha\colon U \to V$, действующее по правилу
$$\alpha : \begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$
Тогда сужение $\alpha\colon U \setminus H \to V \setminus S$ — диффеоморфизм: так как синус и косинус дифференцируемы, α непрерывно дифференцируемо, биективность

легко проверяется, тогда обратное тоже непрерывно дифференцируемо по теореме о дифференцируемости обратного отображения.

Вычислим определитель α'. Нужно брать первую координатную функцию и дифференцировать ее сначала по r, потом по φ, потом по ψ (такой порядок переменных — это условность, можно писать в любом порядке, от этого ничего не изменится). Потом нужно взять вторую координатную функцию и точно так же дифференцировать и третью так же дифференцировать.

$$\det\alpha' = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\psi \begin{vmatrix} -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \end{vmatrix} + r\cos\psi \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin^2\psi\cos\psi \begin{vmatrix} -sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} + r^2\cos^3\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin^2\psi\cos\psi\cdot 1 + r^3\cos^2\psi\cdot 1 = r^2\sin^2\psi\cos\psi + r^3\cos^2\psi =$$

$$= r^2\cos\psi(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = r^2\cos\psi.$$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

$$|\det\alpha'| = |r^2\cos\psi| = r^2\cos\psi.$$

Функция $|\det\alpha'|$ ограничена на U. Так что верна формула замены в трехмерном интеграле

$$\iiint\limits_{B_R(0)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R f(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi)\cdot r^2\cos\psi dr.$$

С пределами здесь все более-менее понятно, нужно только запомнить, что дифференциалы заменяются на $d\varphi dr d\psi$ и добавляется множитель $r^2\cos\psi$. Если бы мы мерили угол ψ по-другому, по оси игреков, множитель был бы $r^2\sin\psi$.

Множитель $\cos\psi$ можно вынести из последнего интеграла.

Мы указали лишь один повторный интеграл, но их всего $3! = 6$.

Эти формулы вам понадобятся на семинарских занятиях, чтобы переходить к сферическим координатам. Если круговой сегмент преобладает в области интегрирования, такая замена обычно сильно упращает задачу.

На этом глава «Кратные интегралы» исчерпана.

Глава 3

Несобственные кратные интегралы

Несобственные интегралы будут так же, как в одномерном случае, пониматься как предел обычных интегралов, и мы должны несобственный интеграл как-то приближать собственными и дальше переходить к пределу. Как это делается, мы расскажем далее.

3.1 Исчерпание множества

Определение 38. Последовательность множеств $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется исчерпанием множества $A \subset \mathbb{R}^m$, если

1. множества G_n измеримы по Жордану;
2. $G_{n+1} \supset G_n$[1];
3. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = A$.

Пример 11. Рассмотрим $G_n = [-n, n]^m$. Это кубы со стороной $2n$. На плоскости (то есть при $m = 2$) это квадраты (рис. 3.1).

Множества G_n измеримы по Жордану, так как это параллелепипеды, каждый следующий куб содержит предыдущий, и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}^m$, значит, последовательность множеств $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — исчерпание всего пространства $\mathbb{R}^m$.

[1] То есть эта последовательность расширяется.

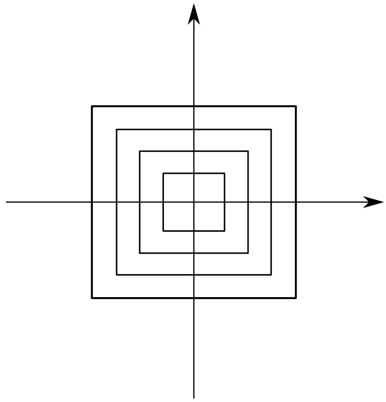


Рис. 3.1:

Пример 12. Рассмотрим $G_n = B_n(0)$. Множества B_n измеримы по Жордану, расширяются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$, значит, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — исчерпание всего пространства $\mathbb{R}^m$.

Мы рассмотрели два исчерпания пространства $\mathbb{R}^m$. Таких разных исчерпаний можно придумать сколько угодно.

Пример 13. Рассмотрим $G_n = \left\{x \in \mathbb{R}_m \mid \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\right\}$. На плоскости это кольцо.

Множества G_n измеримы по Жордану, расширяются, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = B_1(0) \setminus \{0\}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — исчерпание значит, шара радиуса 1 с центром в начале координат без центра.

Сформулируем и докажем теорему, которая оправдает следующее за ней определение.

Теорема 24. *Пусть множество G измеримо по Жордану и пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — его исчерпание. Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} m(G_n) = m(G)$*;*

2. *для любой функции $f \in R(G)$*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f(x)dx = \int\limits_{G} f(x)dx.$$

Доказательство. 1. Имеем
$$G_n \subset G,$$
значит
$$m(G_n) \leqslant m(G).$$
Так как последовательность расширяется,
$$m(G_{n+1}) \geqslant m(G_n).$$
Значит, последовательность $\{m(G_n)\}$ монотонна возрастает и ограничена. Значит, она имеет конечный предел. Пусть
$$\lim_{n\to\infty} = A,$$
тогда
$$A \leqslant m(G).$$
Нам нужно доказать, что $A = m(G)$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Множество G измеримо по Жордану, поэтому
$$\mu(\mathrm{Fr}(G)) = 0.$$
$\mathrm{Fr}(G)$ — замкнутое ограниченное множество, значит, компакт. Следовательно,
$$V(\mathrm{Fr}(G)) = 0.$$
Это означает, что существуют открытые параллелепипеды Δ_1, Δ_2, …, Δ_M, такие что
$$\mathrm{Fr}(G) \subset \bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k$$
и
$$\sum_{k=1}^{M} V(\Delta_k) < \varepsilon.$$
Обозначим
$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{M}$$
(тогда $m(\Delta) < \varepsilon$), откуда
$$\mathrm{Fr}(G) \subset \Delta,$$
поэтому
$$G \cup \Delta = \mathrm{Int}\, G \cup \Delta.$$

Но $\operatorname{Int} G$ открыто, Δ открыто, значит множество выше открыто.[2]

$$\overline{G} \subset G \cup \Delta.$$

Такую же процедуру проделаем для каждого из множеств G_k. Возьмем множество G_k. Для него существует открытое множество Δ_k, такие что множетсво $G_k \cup \Delta_k$ открыто, содержит $\overline{G}_k$ и такое что $m(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k,$$

тогда

$$\overline{G} \subset G \cup \Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \Delta_k) \cup \Delta.$$

Множества $G_k \Delta_k$ открыты и множество Δ открыто, а множество $\overline{G}$ — компакт. Мы получили открытое покрытие компакта. Тогда из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. То есть существует такое число M, что

$$\overline{G} \subset \bigcup_{k=1}^{M} (G_k \Delta_k) \cup \Delta = \left(\bigcup_{k=1}^{M} G_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k\right) \cup \Delta =$$

объединение расширяющтхся множеств

равно последнему из них, а G_k расширяются

$$= G_M \cup \left(\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k\right) \cup \Delta.$$

$$G \subset \overline{G} \subset G_M \cup \left(\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k\right) \cup \Delta,$$

отсюда

$$m(G) \leqslant m(G_M) + \sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon < m(G_M) + \varepsilon + \varepsilon = m(G_M) + 2\varepsilon,$$

что значит

$$m(G_M) > m(G) - 2\varepsilon,$$

отсюда

$$\lim_{n\to\infty} m(G_M) = m(G).$$

[2]Напомним, что $\overline{G}$ — замыкание множества G.

2. Пусть $f \in R(G)$, тогда $|f(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\left| \int\limits_G f(x)dx - \int\limits_{G_n} f(x)dx \right| = \left| \int\limits_{G \setminus G_n} f(x)dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant Mm(G \setminus G_n) = M\left(m(G) - m(G_n)\right).$$

В силу пункта 1,
$$m(G) - m(G_n) \to 0,$$
откуда следует
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f(x)dx = \int\limits_G f(x)dx.$$

□

3.2 Определение несобственного интеграла

Теперь мы почти готовы дать определение несобственного интнграла. Но нам понадобится еще одно вспомогательное определение.

Определение 39. Пусть функция f определена на множестве A. Исчерпание $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ множества A называется *допустимым для функции* f, если для любого n $f \in R(G_n)$.

То есть исчерпание называется допустимым для функции, если на каждом множестве исчерпания функция интегрируема.

Определение 40. Если для любого допустимого исчерпания $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ множества A существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

и этот предел не зависит выбора исчерпания[3], то говорят, что *несобственный интеграл*

$$\int\limits_A f(x)dx$$

сходится и

$$\int\limits_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f(x)dx.$$

[3]То есть какое бы мы исчерпание не взяли, предел будет один и тот же.

Формула выше являетстя определением несобственного интеграла.

Множество A может быть и не ограниченным, в частности, может быть всем пространством $\mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ может быть неограничена на множестве A. Мы подбираем исчерпание так, чтобы на каждом его множества функция была ограничена и чтобы предел существовал.

Чтобы узнать, сходится интеграл или нет, по этому определению нужно перебрать все допустимые исчерпания, а их очень много, немыслимо их все перебрать. Немножко поработав, мы поймем, что все не так плохо и есть реальные более-менее простые способы выяснить, сходится интеграл или расходится.

Теорема 25. *Пусть для любого $x \in A$ функция $f(x) \geqslant 0$.*

Пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — одно из допустимых исчерпаний множества A.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f(x)dx = I.$$

Тогда по любому другому допустимому исчерпанию предел будет такой же.

То есть если функция нестрого больше нуля, перебирать все исчерпания нет нужды, достаточно взять одно, посмотреть, есть ли предел для него, если предел есть, интеграл сходится, остальные исчерпания брать не надо, для них все будет точно так же.

Доказательство. Пусть $\{G'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — другое допустимое исчерпание множества A. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G'_n} f(x)dx \leqslant I$$

(мы можем G_n и G'_n поменять ролями и тогда получим противоположное неравенство, то есть из этого нестрого неравенства следует равенство).

Возьмем какое-то n и зафиксируем G'_n. Введем множество

$$E_k^{(n)} = G'_n \cap G_k.$$

Тогда $\left\{E_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание множества G'_n. Действительно, $E_{k+1}^{(n)} \subset E_k^{(n)}$ (G'_n фиксировано, а G_k расширяется, так что пересечение будет расширяться).

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G'_n \cap G_k) = G'_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = G'_n \cap A = A.$$

Мы доказали, что это исчерпание. Тогда по теореме 24

$$\int\limits_{G'_n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k^{(n)}} f(x)dx,$$

но

$$E_k^{(n)} \subset G_k$$

и

$$f(x) \geqslant 0,$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k^{(n)}} f(x)dx \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(x)dx = I.$$

Значит, каждый интеграл

$$\int\limits_{G'_n} f(x)dx$$

нестрого меньше I. Предел этих интегралов существует, потому что множества расширяются, функция положительная, значит последовательность монотонно возрастает. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G'_n} f(x)dx \leqslant I.$$

□

3.3 Интеграл Пуассона

Рассмотрим очень важный пример, который носит теоретический характер.

Теорема 26.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(этот интеграл называется интегралом Пуассона).

Этот интеграл одномерный — такие интегралы мы изучали во втором семестре. Но старыми методами мы его найти не могли, так как неопределенный интеграл

$$\int e^{-x^2}dx$$

не выражается через элементарные функции.

Доказательство. Рассмотрим двумерный несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Покажем, что он сходится и найдем его.

Возьмем

$$G_n = B_n(0).$$

Тогда

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{B_n(0)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

перейдем к полярным координатам

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_o^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n e^{-r^2} r dr = \lim_{n\to\infty} \int\limits_o^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_o^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi\left(1 - e^{-n^2}\right) = \pi.$$

Значит, рассматриваемый несобственный интеграл сходится и его значение равно π.

Теперь возьмем другое исчерпание. Пусть $G'_n = [-n, n]\times[-n, n]$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}dy\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

(последнее равенство числу π следует из того, что значение несобственного интеграла не зависит от выбора исчерпания). Отсюда получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

Так как функция e^{-x^2} четная, можно брать интеграл от 0 до $+\infty$:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Интеграл Пуассона играет очень важную роль в механике и в теории вероятности и математической статистике, он там на каждом шагу будет использоваться.

3.4 Свойства несобственного интеграла

Алгебраические свойства кратных несобственных интегралов точно такие же, как и для обычных интегралов, которые мы рассматривали. То есть константу можно выносить за интеграл, интеграл суммы равен сумме интегралов и так далее. Перечислят их все мы не будет, а только отметим отличия, которые возникают.

Следующая теорема пока не отличная, такая же была для обычных интегралов. Сначала рассмотрим эту довольно естественную теорему, а затем будет очень необычная теорема.

Теорема 27. *Пусть интегреал $\int\limits_A |f(x)|dx$ сходится*[4]*. Тогда $\int\limits_A f(x)dx$ тоже сходится и*

$$\left|\int\limits_A f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_A |f(x)|dx.$$

Доказательство такое же, как то, что было для обычных интегралов.

Доказательство. Обозначим

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$
$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

[4] Значит, существует исчерпание, для которого есть конечный предел.

тогда
$$0 \leqslant f_{\pm}(x) \leqslant |f(x)|,$$
значит, оба интеграла
$$\int\limits_A f_{\pm}(x)dx$$
сходятся. Тогда интеграл
$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_A f_{+}(x)dx - \int\limits_A f_{-}(x)dx$$
тоже сходится.

Дальше докажите самостоятельно. □

Это очевидная и вполне ожидаемая теорема. Следующая же теорема абсолютно неожиданная.

Теорема 28. *Если* $\int\limits_A f(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_A |f(x)|dx$ *тоже сходится.*

То есть интеграл от f и от $|f|$ сходятся одновременно, по отдельности они не могут сходится. То есть для кратных несобственных интегралов нет понятий условная и абсолютная сходимость. В этом принципиальное отличие кратных интегралов от одномерных: в одномерных были условная и абсолютная сходимость и вы знаете множество примеров, когда по модулю функция расходится, а по модулю сходится, например интеграл Дирихле[5]. Для кратных интегралов такого быть не может.

Возникает вопрос, почему такая разница между кратными и одномерными интегралами. Казалось бы, данные для кратных интеграллов определения годятся и одномерном случае: берем $n = 1$, берем такие же исчерпания и так далее. Дело в следующем. Напомним определение несобственного интеграла в одномерном случае:
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$
Здесь $[a, b]$ — одно из исчерпаний: при увеличении b сегмент $[a, b]$ исчерпывает множество $[a, +\infty]$ (можно сказать, для b мы берем некоторую последовательность b_n). Но это только одно из возможных исчерпаний. Нет никакой гарантии, что по другим исчерпаниям предел будет существовать

[5]Интеграл Дирихле — $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

и будет точно таким же. В определении кратного несобственного интеграла сказано «по любому допустимому исчерпанию должен существовать предел, который не зависит от исчерпания». В одномерном случае берется исчерпание одного, вполне определенного вида, то есть само определение привязано к одному исчерпанию, а в определении в многомерном случае исчерпание любое. Поэтому одномерное определение отличается от многомерного и свойства его другие.

Докажем теорему.

Доказательство. Дано: $\int\limits_A f(x)dx$ сходится. Нужно доказать, что $\int\limits_A |f(x)|dx$ тоже сходится.

Допустим противное. Пусть $\int\limits_A |f(x)|dx$ расходится, то есть, так как функция $|f(x)|$ неотрицательная

$$\int\limits_A |f(x)|dx = +\infty.$$

Тогда существует такое исчерпание $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ множества A, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{G_n} |f(x)|dx = +\infty.$$

Мы хотим из последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ выделить подпоследовательность, такую что

$$\int\limits_{G_{n_{k+1}}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{G_{n_k}} |f(x)|dx + 2k.$$

Возьмем

$$G_{n_1} = G_1, \quad n_1 = 1.$$

Нам нужно выбрать G_{n_2} таким, чтобы

$$\int\limits_{G_{n_2}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{G_{n_1}} |f(x)|dx + 2.$$

Как только мы определили G_{n_1}, $\int\limits_{G_{n_1}} |f(x)|dx$ — уже число, значит, в правой части неравенства число. А $\int\limits_{G_{n_2}} |f(x)|dx$ стремится к бесконечности, значит, найдется такой номер n_2, при котором левая часть больше правой.

Нам нужно выбрать G_{n_3} таким, чтобы

$$\int\limits_{G_{n_3}} |f(x)|dx > 3 \int\limits_{G_{n_3}} |f(x)|dx + 4.$$

Аналогично правая часть — какое-то фиксированное число, а левая стремится к бесконечности, значит, существует такое n_3, что неравенство выше выполнено. Дальше n_4, n_5, n_6 и так далее. То есть мы можем построить искомую подпоследовательность.

Обозначим

$$G_{n_k} = E_k.$$

Тогда $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание множества A и для этого исчерпания выполняется рекурентная формула

$$\int\limits_{E_{k+1}} |f(x)|dx > 3 \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + 2k.$$

Обозначим

$$\Delta_k = E_{k+1} \setminus E_k.$$

(рис. 3.2). Тогда

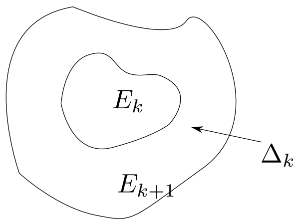


Рис. 3.2:

$$\int\limits_{E_k} |f(x)|dx + \int\limits_{\Delta_k} |f(x)|dx > 3 \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + 2k, \int\limits_{\Delta_k} |f(x)|dx \quad > 2 \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + 2k$$

Рассмотрим функции f_+ и f_-, тогда

$$\int\limits_{\Delta_k} |f(x)|dx = \int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx + \int\limits_{\Delta_k} f_-(x)dx.$$

Одно из двух неотрицательных чисел $\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx$, $\int\limits_{\Delta_k} f_-(x)dx$ больше либо равно другого. Рассмотрим оба случая.

1. Пусть
$$\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx \geqslant \int\limits_{\Delta_k} f_-(x)dx.$$
Так как
$$2\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx \geqslant \int\limits_{\Delta_k} f(x)dx,$$
имеем неравенство:
$$2\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx > 2\int\limits_{E_k} |f(x)|dx + 2k,$$
$$\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx > \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + k.$$

Рассмотим интеграл в левой части. По определению, нужно найти параллелепипед $I \subset \Delta_k$, расширить область определения функции f_+ до этого параллелепипеда, доопределить функцию нулями и взять интеграл по I от новой функции $f^+_{\Delta_k}$. Тогда
$$\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx = \int\limits_{I} f^+_{\Delta_k}(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \underline{S}(f^+_{\Delta_k}, P) > \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + k.$$
Так как последний предел больше последнего числа, найдется разбиение, такое что последняя нижняя сумма будет больше этого числа. То есть существует такое разбиение P, что
$$\underline{S}(f^+_{\Delta_k}, P) > \int\limits_{E_k} |f(x)|dx + k.$$
$$\underline{S}(f^+_{\Delta_k}, P) = \sum_{k=1}^{N} m_n V(I_n).$$
Здесь m_n — это инфимум функции $f^+_{\Delta_k}$. Если частичный параллелепипед I_n целиком не попадает в Δ_k, то есть хотя бы одна точка есть

снаружи, то в этой точке функция $f^+_{\Delta_k}$ равна нулю и тогда инифмум равен нулю. То есть если $m_n > 0$, то $I_n \subset \Delta_k$. Обозначим

$$\Delta'_k = \bigcup_{m_n > 0} I_n \subset \Delta_k.$$

Если $x \in \Delta'_k$, то $x \in \Delta_k$, а внутри Δ_k функции $f^+_{\Delta_k}$ и f^+ совпадают, поэтому для любого $x \in \Delta'_k$

$$f^+_{\Delta_k}(x) = f_+(x).$$

На множестве Δ'_k инфимум m_n больше нуля, значит, функция $f^+(x)$ строго положительна, но $f^+(x)$ совпадает с $f(x)$, если $f(x)$ положительна, и равна 0, если $f(x)$ отрицательна, а функция f^+ нулю равняться не может в силу $m_n > 0$, так что для любого $x \in \Delta'_k$

$$f^+(x) = f(x).$$

Тогда

$$\underline{S}(f^+_{\Delta_k}, P) = \sum_{k=1}^{N} m_n V(I_n). \leqslant \sum_{m_n > 0} \int_{I_n} f(x)dx = \int_{\Delta'_k} f(x)dx.$$

Мы получили:

$$\int_{\Delta'_k} f(x)dx > \int_{E_k} |f(x)|dx + k.$$

Очевидно, что

$$\int_{E_k} f(x)dx \geqslant -\int_{E_k} |f(x)|dx.$$

Сложим последние два неравенства:

$$\int_{E_k + \Delta'_k} f(x)dx > k.$$

Обозначим

$$E_k + \Delta'_k = E'_k,$$

тогда

$$\int_{E'_k} f(x)dx > k.$$

2. Пусть
$$\int\limits_{\Delta_k} f_+(x)dx \leqslant \int\limits_{\Delta_k} f_-(x)dx.$$

   Заменим $f(x)$ на $-f(x)$[6] и воспользуемся доказательством предыдущего пункта, тогда получим:
$$\int\limits_{E'_k} (-f(x))dx > k,$$
   или
$$\int\limits_{E'_k} f(x)dx < -k.$$

В любом из двух случаев мы получили:
$$\left|\int\limits_{E'_k} f(x)dx\right| > k,$$
(если подмодульное выражение положительное, оно больше k, а если отрицательное, меньше $-k$), то есть модуль интеграла растет. Но $\{E'_k\}_{k=1}^{\infty}$ — допустимое исчерпание множества A, а предел
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E'_k} f(x)dx = \infty.$$
Это противоречит тому, что
$$\int\limits_{A} f(x)fx$$
сходится. □

Эта теорема позволяет не перебирать все исчерпания, чтобы доказать сходимость интеграла. Мы вместо интеграла функции $f(x)$ можем рассматреть интеграл функции $|f(x)|$. Для этого берем одно любое, самое удобное для нас исчерпание и смотрим, существует ли по этому исчерпанию предел. Если да, то интеграл модуля сходится, а тогда и интеграл

[6] Мы это сделали, чтобы поменять местами $f_+(x)$ и $f_-(x)$. Как вариант, можно было по аналогии со всем предыдущем провести рассуждения для этого случая и получить аналогичное неравенство, но мы поступили проще.

исходной функции тоже сходится. В противном случае они оба расходятся.

На этой важной теореме эту главу мы закончим. Одна из полезных вещей, которые в ней получились, — это то, что мы вычислили интеграл Пуассона с помощью кратных интегралов.

Глава 4

Функциональные последовательности

4.1 Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности

Функциональные последовательности — это последовательности функций.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и задана последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n \colon X \to \mathbb{R}$.

Далее мы дадим определение сходимости последовательности функций. Будет несколько разновидностей сходимости, и важно понять их отличие.

Определение 41. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно к функции* $g(x)$, если для любого $x_0 \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $g(x_0)$. На «языке эпсилон-дельта»:

$$\forall x_0 \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Этот факт будет писать так:

$$f_n(x) \to g(x).$$

Пример 14. Пусть $X = [0, 1]$ и $f_n(x) = x^n$. Тогда $\{f_n(x)\}$ сходится поточечно к

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(символически $f(x) \to g(x)$).

Действительно, число, меньшее единицы, возведенное в степень, стремится к нулю, а если $x = 1$, то ряд будет иметь вид $1, 1, 1, \ldots$ и предел — 1.

Сами функции $f_n(x)$ непрерывные, а предельная функция разрывная.

Поточечная сходимость играет важную роль, но более полезна равномерная сходимость.

Определение 42. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно к функции* $g(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

В этом случае будем писать

$$f_n(x) \underset{(n\to\infty)}{\overset{(x\in X)}{\rightrightarrows}} g(x).$$

(указанное в скобках будем писать при необходимости. $n \to \infty$ обычно пишут, если было много разных индексом и нужно указать, по какому из них предел. $x \in X$ пишут часто. Написанное в скобках может быть, может не быть, если нет, то имеются в виду какое-то конкретные n, X).

В определении 41 поточечной сходимости для каждой точки x_0 для каждого ε свой номер N. А в определении 42 равномерной сходимости для каждого ε номер N один сразу для всех точек x. Если у нас есть одно N сразу для всех x, то понятно, что для каждого x есть свое N, тогда очевдино поточечная сходимость слабее равномерной: если последовательность функций сходится равномерно, то она сходится и поточечно. В общем случае обратное неверно. На примерах мы увидим, что может быть такое, что функциональная последовательность сходится поточечно, но не сходится равномерно.

4.2 Теоремы, связанные с равномерной сходимостью функциональной последовательности

Теорема 29 (первый критерий равномерной сходимости)**.** *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно к функции* $g(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$a_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \to 0.$$

Обращаем внимание, что a_n — это числовая последовательность.

Доказательство. 1. Пусть

$$f_n(x) \rightrightarrows g(x),$$

тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

тогда

$$a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Мы получили

$$0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует

$$a_n \to 0.$$

2. Пусть

$$a_n \to 0,$$

тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Значит,

$$\left| \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \right| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Значит, по определению

$$f_n(x) \rightrightarrows g(x).$$

□

Вернемся к примеру 14 и рассмотрим равномерную сходимость.

Пример 15. Пусть $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n(x) \to g(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Найдем

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g(x)| =$$

если $x = 1$, то выражение под модулем равно 0, то есть, чтобы найти супремум, единицу брать не нужно: в ней самое маленькое значение

$$= \sup_{x\in[0,1]} |x^n - 0| = \sup_{0\leqslant x<1} |x^n - 0| = \sup_{0\leqslant x<1} |x^n| = \sup_{0\leqslant x<1} x^n = 1.$$

$$a_n \not\to 0,$$

значит,

$$f_n(x) \not\rightrightarrows g(x).$$

Для равномерной сходимости справедливы многие теоремы, которые были для обычной сходимости, в том числе и критерий Коши.

Теорема 30 (критерий Коши)**.** *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно тогда и только тогда, когда*

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Нам нужно доказать, что выполняется условие фундаментальности[1].

По определению равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $m > N$, для него так же верно

$$|f_m(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

тогда

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |(f_m(x) - g(x)) + (g(x) - f_n(x))| \leqslant$$
$$\leqslant |f_m(x) - g(x)| + |g(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

То, что получилось 2ε — это не проблема: мы могли взять не ε, а $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. Пусть

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

[1] То есть условие $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Возьмем $x_0 \in X$, тогда числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, следовательно, по критерию Коши, сходится к некоторому числу A. Если в качестве x_0 зафиксировать другую точку $x_0 \in X$, то и A получится другим, то есть A зависить от точки x_0: $A = A(x_0)$, то есть

$$f_n(x_0) \to A(x_0),$$

тогда $A(x_0)$ — предельная функция. Мы получили

$$f_n(x) \to A(x).$$

Рассмотрим неравенство

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть x фиксировано, m фиксировано, $n \to \infty$, тогда

$$|f_m(x) - A(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - A(x)| \leqslant \varepsilon.$$

От высказывания из определения 42 равномерной сходимости высказывание выше отличается лишь нестрогостью неравенства. Но это не проблема, его легко можно сделать строгим, взяв сначала $\frac{\varepsilon}{2}$, а потом заменив на ε. То есть отсюда следует, что

$$f_m(x) \rightrightarrows A(x).$$

□

Свойства равномерной сходимости

1. *Если $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, то $\alpha f_n(x) \rightrightarrows \alpha g(x)$.*

   Свойство очевидно, по определению легко доказывается.

2. *Если $f_n(x) \rightrightarrows p(x)$ и $g_n(x) \rightrightarrows q(x)$, то $(f_n(x) + g(x)) \rightrightarrows (p(x) + q(x))$.*

   Так же доказывается легко.

Упражнение. Если $f_n(x) \rightrightarrows p(x)$ и $g_n(x) \rightrightarrows q(x)$, верно ли $(f_n(x) \cdot g(x)) \rightrightarrows (p(x) \cdot q(x))$?

Если да, доказать, если нет, привести пример и подумать, при каких дополнительных ограниченниях будет да.

Далее мы изложим специфическую теорему для равномерной сходимости. Она важная и много где будет в дальнейшем использоваться.

Теорема 31. *Пусть* $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$.

Пусть a *— предельная точка* X.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$. *Тогда:*

1. *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$;
2. *существует предел* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Эту теорему принято рисовать в виде следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "x \to a"'] & g(x) \arrow[d, "x \to a"] \\
A_n \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

Такие диаграммы называют *коммутативными*, если разными путями приходим к одному и тому же. Например, в этой диаграмме от $f_n(x)$ к A можно прийти разными путями по стрелочкам: $f_n(x) \rightrightarrows g(x) \to A$ и $f_n(x) \to A_n \to A$. Значит, эта диаграмма является коммутативной.

Можно сказать, что рассматриваемая теорема утверждает, что диаграмма выше коммутативна.

Но это всего лишь иллюстрация. С ее помощью теорема легче запоминается.

Доказательство. 1. Так как $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, тогда по критерию Коши

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть в последнем неравенстве $x \to A$, тогда

$$|A_m - A_n| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. По критерию Коши для числовых последовательностей, существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что $A_n \to A$.

2. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
|g(x) - A| &= |(g(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - A_n) + (A_n - A)| \\
&\leqslant |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|\,.
\end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению равномерной сходимости $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к $g(x)$

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad \forall x \in X \quad |g(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $A_n \to A$,

$$\exists N_2 \quad n > N_2 \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем фиксированное $n_0 > N_1, N_2$. Тогда

$$|g(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_0} - A_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $f_{n_0}(x) \to A_{n_0}$, то

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит,

$$|g(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Мы получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |g(x) - A| \leqslant \varepsilon,$$

что означает

$$\lim_{x \to a} g(x) = A.$$

□

Следующая теорема является следствием из нами доказанной.

Теорема 32. *Пусть $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда $g(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. 1. Если x_0 — изолированная точка, то утверждение очевидно.[2]

2. Пусть x_0 — предельная точка.

   Пусть $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$. В силу непрерывности функции $f_n(x)$,

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0).$$

[2] В изолированной точке любая функция непрерывна.

По предыдущей теореме,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A,$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

Но $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, значит,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0),$$

тогда $A = g(x_0)$. Получаем:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0),$$

значит, $g(x)$ непрерывна.

Наши рассуждения мы можем изобразить в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, "x \to x_0"'] & g(x) \arrow[d] \\
f_n(x_0) \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

□

Следствие 32.1. *Если $f_n \in C(X)$*[3] *и $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, то $g \in C(X)$.*

То есть если последовательность непрерывных функций сходится равномерно, то ее предел — непрерывная функция.

Доказательство. Функции f_n непрерывны в каждой точке мноества X, значит, по доказанной теореме g непрерывна в каждой точке множества X. □

Напомним пример 14. В нем последовательность непрерывных функций сходилась поточечно к разрывной функции. Значит, по доказанному следствию не может быть равномерной сходимости. То есть отсутствие равномерной сходимости можно доказывать, используя это следствие.

Следующая теорема представляет собой достаточное условие равномерной сходимости.

[3] То есть функции f_n непрерывны на множестве X

Теорема 33 (теорема Дини)**.** *Пусть X — компакт.*

Пусть $f_n \in C(X)$, $g \in C(X)$, последовательность f_n возрастающая[4] *и $f_n(x) \to g(x)$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$*

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in X$. $f_n(x_0) \to g(x_0)$, что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad |f_n(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $n_0 > N$. Функции $f_n(x_0)$, $g(x_0)$ непрерывны, значит, функция $|f_n(x_0) - g(x_0)|$ тоже непрерывна, то есть выше неравенство выполняется для непрерывной функции, тогда оно выполнено и в некоторой окретсности точки x_0,

$$\exists B_{r_0}(x_0) \quad \forall x \in B_{r_0}(x_0) \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Если $n > n_0$, неравенство выше будет верно в силу возрастания $f_n(x)$. То есть для любого $x \in B_{r_0}(x_0)$ и любого $n > n_0$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим множество

$$\bigcup_{x_0 \in X} B_{r_0}(x_0).$$

Это покрытие компакта X, но из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие, тогда существует множество

$$B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2) \cup \ldots \cup B_{r_N}(x_N) \cup,$$

которое так же содержит X. Для каждого из шаров выше существует свой номер n: для $B_{r_1}(x_1)$ — n_1, $B_{r_2}(x_2)$ — n_2, …, $B_{r_N}(x_N)$ — n_N. Пусть

$$M = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_N\},$$

тогда

$$\forall x \in X \quad \forall n > M \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

(для любого $x \in X$, потому что любой $x \in X$ попадает в какой-то шар $B_{r_k}(x_k)$, а для шара это неравенство верно). Значит,

$$f_n(x) \rightrightarrows g(x).$$

□

[4] Это можно записать так: $f_{n+1} \geqslant f_n$

4.3 Интегрируемость и дифференцируемость предела функциональной последовательности

Теорема 34. *Пусть X — измеримое по Жордану множество, $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $f_n \in R(X)$. Тогда*

1. $g \in R(X)$;

2.
$$\int\limits_X g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dx.$$

Последнее равенство можно также записать следующим образом:
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dx = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

То есть на самом деле это теорема о том, что предел и интеграл можно при определенных условиях менять местами.

Доказательство. 1. Докажем вложение
$$F_g \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{f_n}.$$

Если $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{f_n}$, то все функции f_n непрерывны в точке x. Так как функции f_n равномерно сходятся к g, функция g также непрерывна в точке x, значит, $x \notin F_g$. Вложение доказано.

Так как
$$\mu(F_{f_n}) = 0,$$
то
$$\mu(F_g) = 0,$$
следовательно $g \in R(X)$.

2.
$$\left|\int\limits_X f_n(x)dx - \int\limits_X g(x)dx\right| = \left|\int\limits_X (f_n(x) - g(x))\, dx\right| \leqslant$$
$$\int\limits_X |f_n(x) - g(x)|\, dx \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \cdot m(X).$$

Так как $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$, то $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \to 0$, $m(X)$ — число, значит,

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \cdot m(X) \to 0,$$

откуда

$$\left| \int\limits_X f_n(x)dx - \int\limits_X g(x)dx \right| \to 0.$$

□

Требование $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$ существенно. Рассмотрим пример, где равномерной сходимости нет и интегралы не стремятся к тому, что надо.

Пример 16. Пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим функцию $f_n(x)$, которая задается графиком на рис. 4.1.

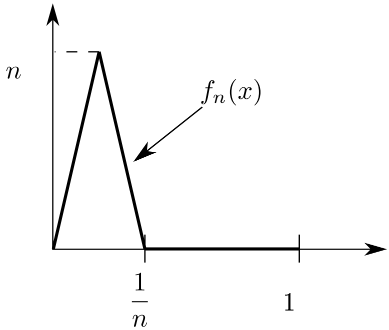


Рис. 4.1:

Она интегрируема: при любом n

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = S_\triangle = \frac{\frac{1}{n}\cdot n}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$f_n(x) \to g(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

То есть

$$f_n(x) \to 0,$$

то есть при стремлении к бесконечности «бугор» исчезает и на ответе не сказывается.

Но

$$\int 0 \neq \frac{1}{2},$$

то есть доказанная в теореме формула нарушается. Это связано с тем, что присутствует поточечная сходимость, но нет равномерной.

Больше этот пример интересен тем, что показывает, что поточечная сходимость — это «плохая» сходимость. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ даже не ограничена, функции $f_n(x)$ растут (рис. 4.2), но тем не менее поточечно стремятся к нулю, то есть при каждом фиксированном x функция $f_n(x)$, начиная с какого-то n чисто нулевая. Для равномерной сходимости такое невозможно.

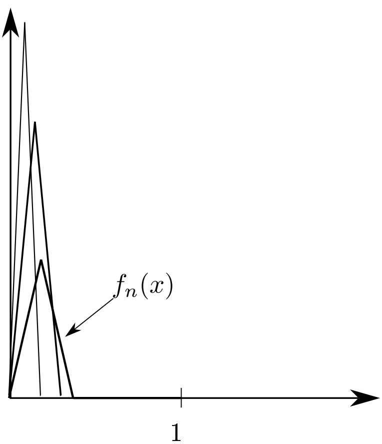


Рис. 4.2:

Так что поточечная сходимость — самая слабая и мало полезная сходимость.

Следующую теорему мы рассмотрм для частного случая, когда функция от одного переменного, когда одна производная. Потом можно ее переносить на частные производные, но нужно понять эту теорему в самом простом случае. Обобщения потом можно делать разные.

Теорема 35. *Пусть* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f_n \in C^1[a,b]$.

Пусть $f_n(a) \to A$ *и* $f_n'(x) \rightrightarrows h(x)$. *Тогда:*

1. $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$;
2. $g \in C^1[a,b]$;
3. $g'(x) = h(x)$.

При выполнении условий теоремы последнее равенство можно записать так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

То есть это теорема о том, что можно вносить производную внутрь предела. То есть операции взятия производной и взятия предела коммутируют при определенных ограничениях.

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \int\limits_a^x f_n'(t)dt.$$

Нетрудно вычислить интеграл

$$\int\limits_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Но $f_n'(x) \rightrightarrows h(x)$, значит по теореме 34,

$$\int\limits_a^x f_n'(t)dt \to \int\limits_a^x h(t)dt.$$

Так как

$$f_n(a) \to A,$$

значит,

$$f_n(x) \to \int\limits_a^x h(t)dt + A.$$

Обозначим

$$\int\limits_a^x h(t)dt + A = g(x).$$

Докажем, что

$$F_n(x) \rightrightarrows \int\limits_a^x h(t)dt,$$

откуда будет следовать

$$f_n(x) \rightrightarrows g(x).$$

Имеем:

$$\left|F_n(x) - \int\limits_a^x h(t)dt\right| = \left|\int\limits_a^x f_n'(t)dt - \int\limits_a^x h(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^x \left(f_n'(t) - h(t)\right)dt\right| \leqslant \int\limits_a^x |f_n'(t) - h(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant x} |f_n'(t) - h(t)|(x-a) \leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f_n'(t) - h(t)|(b-a).$$

Так как $f_n' \rightrightarrows h(t)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f_n'(t) - h(t)| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \left|F_n(x) - \int\limits_a^x h(t)dt\right| < \varepsilon(b-a),$$

значит,

$$F_n(x) \rightrightarrows \int\limits_a^x h(t)dt,$$

2.

$$g(x) = \int\limits_a^x h(t)dt + A.$$

$f_n'(x) \rightrightarrows h(x)$, функции f_n' непрерывны, значит, $h(x)$ непрерывна, значит, $g(x)$ дифференцируема и

$$g'(x) = h(x) \in C[a, b].$$

$\square$

Глава 5

Функциональные ряды

5.1 Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и задана последовательность функций $a_n \colon X \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим ряд из этих функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x).$$

Этот ряд называется *функциональным рядом*. Можно сказать, что это числовой ряд, зависящий от параметра x.

Так же, как для последовательности, мы можем определить сходимость этого ряда.

Определение 43. Будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится в точке* $x_0 \in X$, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ сходится.

Определение 44. Будем говорить, что функциональный ряд *сходится поточечно на множестве* X, если он сходится в каждой точке этого множества (другими словами, если частичные суммы этого ряда $S_n(x)$ сходятся поточечно, то есть в каждой точке множества X).

Определение 45. Будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ *сходится равномерно на* X, если его частичные суммы $S_n(x)$ сходятся равномерно.

Все теоремы, которые были для последовательностей, можно «перенести» на функциональные ряды. Мы их сформулируем, но доказывать будем только самые необходимые.

Следующая теорема важна для семинарских занятий.

Теорема 36 (необходимое условие равномерной сходимости)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно, то* $a_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.
$$a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x).$$
$S_n(x)$ равномерно стремится к некоторой функции $S(x)$ и $S_{n-1}(x)$ равномерно стремится к той же самой функции $S(x)$, значит $a_n(x)$ равномерно стремится к нулю. □

Теорема 37 (критерий Коши)**.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно тогда и только тогда, когда*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \quad \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Докажите самостоятельно.

Теперь «перенесем» теоремы, которые были для последовательностей.

Теорема 38. *Пусть* a *— предельная точка* X*, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* X*,* $\lim\limits_{x\to a} a_n(x) = b_n$ *(каждый член ряда имеет предел), тогда:*

1. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *сходится;*
2. $\lim\limits_{x\to a} S(x) = S$*, где* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x), S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Имеем: $S_n(x)$ равномерно сходится к некоторой функции $S(x)$, но $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k(x)$, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно к $S(x)$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ сходится поточечно к $\sum\limits_{k=1}^{n}$ при $x \to a$.

Применим теорему для последовательностей, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to S, S(x) \to S$.

Изобразим наши рассуждения в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
S_n(x) \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, equal] & S(x) \arrow[dd] \\
\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) \arrow[d, "x \to a"'] & \\
\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

$\square$

Мы свели доказательство к доказанной ранее теореме для последовательностей. Остальные теоремы так же можно доказать, опираясь на теоремы для последовательностей.

Теорема 39. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно и все функции $a_n(x)$ непрерывны в точке x_0, то $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Следствие 39.1. *Если все $a_n \in C(X)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно, то $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывна.*

Теорема 40. *Пусть X измеримо по Жордану.*

Пусть все функции $a_n(x) \in R(X)$.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$ сходится равномерно, тогда:

1. *$S(x) \in R(X)$;*

2. *$\int\limits_X S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X a_n(x)dx$.*

Это сразу же следует из доказанной раннее теоремы для последовательностей.

Теорема 41. *Пусть* $a_n(x) \in C^{-1}[a,b]$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ *сходится.*

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = H(x)$ *сходится равномерно. Тогда:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно;*

2. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \in C^{-1}[a,b]$;

3. $S'(x) = H(x)$.

Так же сразу же вытекает из теоремы для последовательностей.

Теорема 42 (теорема Дини)**.** *Пусть* X *— компакт.*

Пусть $a_n(x) \in C(X)$.

Пусть $a_n(x) \geqslant 0$.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x) \in C(X)$, *тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно.*

Эта теорема вытекает из теоремы Дини для последовательностей.

Отметим, ограничение $a_n(x) \geqslant 0$. При доказательстве мы должны будем применить доказанную теорему Дини для последовательностей к последовательности частичных сумм. Эта последовательность должна монотонно возрастать. Если $a_n(x) \geqslant 0$, она монотонно возрастает.

5.2 Признаки равномерной сходимости

На семинарских занятиях будут задачи на исследование равномерной сходимости. Также они встретятся на экзамене.

Следующая теорема — это самый простой признак.

Теорема 43 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $|a_n(x)| \leqslant c_n$ *для любого* $x \in X$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится, тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно.*

То есть если мы можем члены ряда оценить константами и и ряд из этих констант сходится, то исходный ряд сходится равномерно.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда, по критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon.$$

Так как $c_k \geqslant 0$, модуль можно опустить.

Для любого $x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon,$$

то есть для любого $x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon,$$

значит, по критерию Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно. □

Напомним Лемму Абеля.

Лемма (лемма Абеля)**.**

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n b_n = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n,$$

где

$$B_k = \sum_{i=n_0}^{k} b_i,$$

(n_0 — фиксированный номер, $n_0 \leqslant n$).

Теорема 44 (признак Дирихле)**.** *Пусть:*

1. *$a_n(x)$ монотонна*[1] *по n для любого x,*

[1] То есть $a_n(x)$ либо возрастает, либо убывает. Может случиться, что при одних x последовательность $a_n(x)$ возрастае, а при других x убывает. Не запрещается, чтобы при разных x монотонность была разного типа. То есть существенно сказать «монотонна», а не «возрастает» или «убывает». В признаке Дирихле для числовой последовательности последовательность либо возрастает, либо убывает, и одно к другому сводится умножением на -1.

2. $a_n(x) \rightrightarrows 0$,

3. для любых n, для любых $x \in X$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)\right| \leqslant M$,[2]

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно.*

Формулировка очень похожа на ту, что была для числовых рядов.

Доказательство. Обозначим

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x),$$

тогда по условию

$$|B_n(x)| \leqslant M.$$

$$a_n(x) \rightrightarrows 0,$$

значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |a_n(x)| < \varepsilon.$$

Воспользуемся критерием Коши и преобразованием Абеля. Рассмотрим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x),$$

[2]То есть частичные суммы ограничены и по n, и по x

где $n > N$. Возьмем модуль этого выражения.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(a_k(x) - a_{k+1}(x)\right) B_k(x) + a_{n+p}(x)B_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)B_n(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)||B_k(x)| + |a_{n+p}(x)||B_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)||B_n(x)| \leqslant$$

для любых n, для любых x $|B_n(x)| \leqslant M$.

Заменим все $B_n(x)$на M и M вынесем перед суммой.

Также для любых $n > N$ $|a_n(x)| < \varepsilon$

$$\leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + \varepsilon M + \varepsilon M =$$

так как последовательность $a_n(x)$ монотонна, то есть все слагаемые под модулем одного знака, то мы можем модуль вынести за знак суммы

$$= M \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k(x) - a_{k+1}(x)\right| + 2\varepsilon M =$$

внутри суммы каждое следующее слагаемое $-a_{k+1}(x)$ с предыдущим слагаемым a_k взамоуничтожаются и остаются только самое маленькое $a_n(x)$ и самое большое $a_n(x)$

$$= M|a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)| + 2\varepsilon M \leqslant M\left(|a_{n+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|\right) + 2\varepsilon M <$$
$$< M(\varepsilon + \varepsilon) + 2\varepsilon M = M2\varepsilon + 2\varepsilon M = 4\varepsilon M.$$

Мы получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| < 4M\varepsilon.$$

$4M$ — это константа, а ε можно брать сколько угодно маленьким. Знчит, по критерию Коши, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно. □

Теорема 45 (признак Абеля). *Пусть:*

1. *$a_n(x)$ монотонна*[3] *по n для любого x,*

[3]Здесь так же при одних x может возрастать, при других x убывать.

2. $|a_n(x)| \leqslant M$,[4]

3. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *схоится равномерно,*

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно.*

При доказательства признака Абеля для числовых последовательностей мы сводили признак Абеля к признаку Дирихле. В данном случае, если мы попробуем так сделать, у нас не получится (попробуйте и найдите то место, через которое пройти не выйдет). То есть старый вариант доказательства здесь не сработает.

Доказательство. По условию, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ схоится равномерно, тогда по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $n > N$. Рассмотрим сумму

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| =$$

применим преобразование Абеля

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x) + a_{n+p}(x) B_{n+p}(x) - a_{n+1}(x) B_n(x) \right| \leqslant$$

обратите внимание! здесь $B_k(x) = \sum\limits_{i=n+1}^{k} b_i(x)$

для любого $k \geqslant n+1$, так что $B_k(x) < \varepsilon$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| |B_k(x)| + |a_{n+p}(x)| |B_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)| |B_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \varepsilon + |a_{n+p}(x)| \varepsilon + |a_{n+1}(x)| \varepsilon =$$

[4]То есть последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена.

$$= \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|\varepsilon + |a_{n+1}(x)|\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + M\varepsilon + M\varepsilon =$$

так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна,
модуль можно вынести за знак суммы

$$= \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \right| + M\varepsilon + M\varepsilon =$$

внутри суммы каждое следующее слагаемое $-a_{k+1}(x)$
с предыдущим слагаемым a_k взамоуничтожаются и остаются
только самое маленькое $a_n(x)$ и самое большое $a_n(x)$

$$= \varepsilon |a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)| + 2M\varepsilon \leqslant \varepsilon 2M + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon.$$

По критерию Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно. □

Пример 17 (ряд Дирихле)**.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}.$$

при $x \in \mathbb{R}$.[5] При фиксированном x мы уже рассматривали, когда такой ряд сходится условно, а когда абсолютно, то есть поточечная сходимость этого ряда мы знаем. Теперь исследует этот радя на равномерную сходимость.

1. Пусть $\alpha > 1$.Тогда

$$\left| \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} \right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}},$$

   но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем степени, большим единицы. Тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

   сходится равномерно.

[5] Так как синус — периодическая функция, можно рассматривать на всей числовой оси, а можно на промежутке $[0, 2\pi]$, это не принципиально.

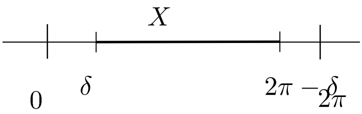


Рис. 5.1:

2. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$.

   Пусть
   $$a_n(x) = \frac{1}{n^\alpha},$$
   тогда послеовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна по n и $a_n(x) \rightrightarrows 0$ (равномерно, потому что она вообще не зависит от x, это по сути числовая последовательность, поэтому можно считать, что она равномерно сходится).

   Пусть
   $$b_n(x) = \sin nx.$$
   Рассмотрим частичные суммы последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}.$$
   Здесь возникает неприятность. Синус в знаменателе может обратиться в 0, и тогда проводимая нами оценка будет бесконечной. Значит, нужно не подпускать синус к 0. Он обращается в 0, когда
   $$\frac{x}{2} = \pi k,$$
   то есть когда
   $$x = 2\pi k.$$
   Это «плохие точки»: в этих точках оценка «портится». Отступим от этих точек (рис. 5.1). Пусть
   $$x \in [\delta, 2\pi - \delta].$$
   Тогда
   $$\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{\delta}{2}}.$$

Последнюю дробь обозначим M. Тогда по признаку Дирихле, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

сходится равномерно по $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ (δ — любое положительное число)[6].

На этом материал по признакам сходимости функциональных рядов заканчивается. Дальше мы займемся одним очень важным частным случаем функциональных рядов — степенными рядами.

5.3 Степенные ряды

Определение 46. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_n \in \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*

Нумеровать можно с любого числа, 0 взят чисто ради удобства. Можно считать, что любой ряд начинается с k_0, перенумеровав все его члены, считая первый член k_0-ым, второй — $k_0 + 1$-ым, третий $k_0 + 2$-ым и так далее.

Пример 18. Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$$

является степенным рядом.

Этот ряд моно записать так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2},$$

тогда нумерация будет начинаться с нуля.

Выписывая члены ряда, можно убедиться, что эти ряды совпадают.

[6]Важно хоть немного отойти от нуля вправо от 2π влево, тогда сходимость будет равномерная. Если не делать эти отступы, можно доказать, что ряд будет сходится, но не равномерно. Этого доказывать мы не будем.

Обозначим $x - x_0 = y$. Тогда любой степенной ряд можно записать в виде
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$
В каком виде исследовать ряд, не имеет значения. Вид выше выглядит проще, поэтому мы будет в таком виде исследовать степенные ряды, то есть будем рассматривать ряды вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Общности это не нарушает.

Первая наша задача — найти, при каких x степенной ряд сходится поточечно, то есть исследовать его на поточечную сходимость.

Рассмотрим степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Для этого ряда определим
$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$
Верхний предел всегда существует: он либо 0, либо бесконечность, либо какое-то число, то есть
$$0 \leqslant R \leqslant +\infty.$$
Число R однозначно определяется числами a_n.

Для чего мы определили R, сейчас станет понятно.

Теорема 46. *Если $|x| < R$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится.*

Если $|x| > R$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится.

О случае $|x| = R$ (то есть $x = \pm R$) теорема ничего не говорит.

Доказательство. 1. Пусть $|x| < R$.

Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|.$$

Его члены больше либо равны нуля. Исследуем этот ряд с помощью признака Коши.

Определим константу Коши

$$K = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{R} < 1.$$

Значит, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|.$$

сходится, значит, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

сходится абсолютно.

2. Пусть $|x| > R$. Тогда

$$|x| > \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

что значит

$$|x| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x|} > 1,$$

Это означает, что существует подпоследовательность $\{a_{n_k} x^{n_k}\}$, все члены которой больше единицы. Значит, $a_n x^n \not\to 0$. Значит, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

расходится.

□

Определение 47. Число

$$R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

называется *радиусом сходимости степенного ряда.*

На интервале $(-R, R)$ ряд сходится, на $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд расходится, а в точках $-R$ и R неизвестно.

Рис. 5.2:

Пример 19. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots .$$

Также его можно рассматривать так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots ,$$

где $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Значит, если $|x| < 1$, то ряд сходится, если $|x| > 1$, то ряд расходится. Рассмотрим случай $|x| = 1$.

1. Пусть $x = 1$. Тогда исходный ряд примет вид

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Этот ряд сходится.

2. Пусть $x = -1$. Тогда исходный ряд примет вид

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

   Этот ряд сходится.

На обоих концах ряд сходится.

Пример 20. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Нетрудно посчитать его радиус сходимости:

$$R = 1.$$

Значит, если $|x| < 1$, то ряд сходится, если $|x| > 1$, то ряд расходится. Рассмотрим случай $|x| = 1$.

1. Пусть $x = 1$. Тогда исходный ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

   Этот ряд расходится как гармонический.

2. Пусть $x = -1$. Тогда исходный ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

   Этот ряд сходится по признаку Лейбница.

На левом конце ряд расходится, а на правом сходится.

Пример 21 (геометрический ряд)**.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Найдем его радиус сходимости:

$$R = 1.$$

Значит, если $|x| < 1$, то ряд сходится, если $|x| > 1$, то ряд расходится. Рассмотрим случай $|x| = 1$.

1. Пусть $x = 1$. Тогда исходный ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

   Этот ряд расходится.

2. Пусть $x = -1$. Тогда исходный ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Этот ряд расходится.

На обоих концах ряд расходится.

Радиус сходимости может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример 22. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Найдем его радиус сходимости:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Значит, при $x \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ряд сходится, то есть ряд сходится на всей числовой оси.

Можно придумать множетсов примеров степенных рядов с бесконечным радиусом сходимости.

Пример 23. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Найдем его радиус сходимости:

$$R = 0.$$

Значит, ряд сходится только при $x = 0$. Тогда это нулевой ряд. При $x \neq 0$ расходится.

Поточечную сходимость мы разобрали. Теперь изучим равномерную сходимость.

Теорема 47. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится равномерно на любом сегменте, лежашем внутри интервала сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $[a, b] \subset (-R, R)$. Тогда существует такое $x_0 \in (-R, R)$,

$$|a| \leqslant |x_0|,$$
$$|b| \leqslant |x_0|.$$

Тогда для любого $x \in [a, b]$ $|x| \leqslant |x_0|$. Тогда $|a_n x^n| \leqslant |a_n x_0^n|$. Числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

сходится. Тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится равномерно на $[a, b]$. $\square$

То есть если мы отступим от концов интервала сходимости, уже сходимость будет равномерная.

Теорема 48. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $x = R$, *то он сходится равномерно на* $[0, R]$.

То есть если степенной ряд сходится на правом конце R интервала сходимости, то он равеомерно сходится на сегменте $[0, R]$.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n (a_n R^n).$$

Применим признак Абеля. Пусть

$$a_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n, \quad x \in [0, R].$$

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна по n и

$$|a_n(x)| \leqslant 1.$$

По условию, исходный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $x = R$, то есть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Этот ряд не зависит от x, это числовой ряд, значит, он сходится равномерно по x. Тогда, по признаку Абеля, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится равномерно на $[0, R]$. □

Следствие 48.1. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $x = -R$, то он сходится равномерно на $[-R, 0]$.

То есть если ряд сходится на левом конце $-R$ интервала сходимости, то он сходится равномерно на $[-R, 0]$. То ест правый конец интервала сходимости здесь ничем не примечателен.

Следствие доказывается заменой x на $-x$. Эта замена левый и правый концы меняет местами и переводит этот случай в случай из предыдущей теоремы. Здесь не возникает никаких проблем и заново доказывать не надо.

Теперь мы можем доказать множество полезных свойств.

Теорема 49. *Пусть*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

пусть $x \in (-R, R)$. *Тогда функция* $S(x)$ *бесконечно дифференцируема*[7]*, данный степенной ряд можно почленно дифференцировать, то есть*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1},$$

причем радиус сходимости R' *нового ряда совпадет с радиусом* R *старого. Новый ряд* $S'(x)$ *также можно продифференцировать. Исходный ряд можно любое число раз интегрировать.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

с радиусом сходимости R и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

с радиусом сходимость R'. Нужно доказать, что $R = R'$.

Вычислим радиус сходимости R' второго ряда. Чтобы применять нужную нам формулу, запишем его в стандартном виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = (\text{обозначим } m = n-1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1)x^m.$$

---

[7]То есть производную $S(x)$ можно брать любое число раз.

Тогда

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{m+1}(m+1)|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{m+1}|}\sqrt[m]{(m+1)}} =$$

$$(\sqrt[m]{(m+1)} \to 1 \text{ при } m \to \infty)$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |a_{m+1}|^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \left(|a_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}} =$$

$$(\frac{m+1}{m} \to 1 \text{ при } m \to \infty)$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |a_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}}} = R,$$

то есть $R' = R$.

Возьмем точку $x_0 \in (-R, R)$. Тогда существует сегмент $[a, b] \subset (-R, R)$, такой что $x_0 \in [a, b]$. Тогда, по теореме о дифференцируемости функционального ряда, $S(x)$ дифференцируема и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

и, как мы уже доказали, радиус сходимости не изменился. Значит, к сумме выше мы можем еще раз доказанный факт применить, то есть еще раз продифференцировать, и тогда радиус сходимости не изменится. Это можно делать сколько угодно большое число раз. Так что сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема. А применяя теорему об интегрируемости функционального ряда, получаем, что его можно почленно интегрировать. $\square$

Это простое свойство позволяет эффективно вычислять суммы степенных рядов.

Пример 24. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Радиус сходимости этого ряда мы уже искали: $R = 1$ (20). Тогда, по теореме 49, эта функция дифференцируема. Найдем ее производную:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} =$$

(ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Так как $|x| < 1$, воспользуемся известным фактом:

$$\text{если } |q| < 1, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q})$$

$$= \frac{1}{1-x}.$$

Тогда

$$S(x) = -\ln|1-x| + C.$$

Мы получили:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| + C.$$

Неизвестна константа C. Чтобы ее найти, возьмем какое-то конкретное x, так как константа C одна для всех x. Возьмем $x = 0$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = -\ln|1-0| + C,$$

$$0 = -\ln|1| + C,$$

$$C = 0.$$

Мы получили:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|.$$

Так как $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Пример 25. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Нетрудно посчитать его радиус сходимости: $R = 1$.

Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Тогда

$$S(x) = \tilde{S}(x) \cdot x.$$

Рассмотрим интеграл ряда $\tilde{S}(x)$:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n =$$

(мы получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый элемент которой — x)

$$= \frac{x}{1-x}.$$

То есть интеграл $\tilde{S}(x)$ равен получившейся дроби, значит, сама функция $\tilde{S}(x)$ равна производной этой дроби:

$$\left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Тогда

$$S(x) = \tilde{S}(x) \cdot x = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot x = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Мы получили:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

5.4 Ряд Тейлора

Теорема 50. *Если имеется степенной ряд*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

и

$$R > 0,$$

то

$$a_0 = S(0), \quad a_1 = \frac{S'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{S''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{S'''(0)}{3!}, \quad \ldots$$

$$a_n = \frac{S^{(n)}}{n!}.$$

То есть коэффициенты степенного ряда выражаются через проиводные его суммы в нуле, если радиус сходимости положительный.

Похожие выражения встречались в формуле Тейлора.

Доказательство. Запишем ряд в виде

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots.$$

Вычислим ряд в нуле:

$$S(0) = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots = a_0.$$

Продифферинцируем ряд $S(x)$:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

Тогда

$$S'(0) = a_1 + 0 + 0 + 0 + \dots = a_1.$$

Еще раз продифференцируем исходный ряд:

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

Тогда

$$S''(0) = 2a_2 + 0 + 0 + 0 + \dots = a_2.$$

И так далее. Действуя аналогично, получим доказываемые формулы. □

Степенной ряд будет полезен, если мы сможем нужные нам функции представлять в виде степенных рядов, так как с ними проще работать.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки 0. Тогда мы можем определить коэффициенты a_n:

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

называетя *рядом Тейлора для функции* $f(x)$.

По функции, если она бесконечно дифференцируема, всегда можно построить ее ряд Тейлора. Возникает вопрос, будет ли сумма ряда Тейлора совпадать с функцией $f(x)$. Оказывается, не всегда, но чаще всего будет совпадать, и мы получим достаточные условия совпадения. Но есть исключения, когда ряд Тейлора не равен функции. Такой пример мы рассмотрим далее.

Пример 26. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что эта функция бесконечно дифференцируема и найдем ее

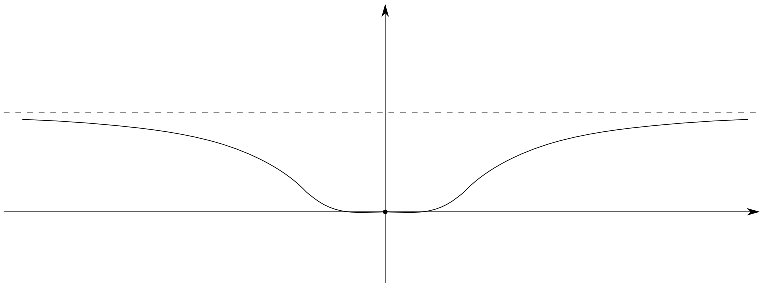


Рис. 5.3:

производные в точке 0. То, что она бесконечно дифференцируема в точках, отличных от нуля, очевидно: это экспонента (вернее, ее композиция с элементарными функциями). А в 0 ее нужно считать.

Найдем производную $f(x)$ в точке 0:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = (\text{сделаем замену } \frac{1}{x} = t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

Точно так же можно показать, что

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= 0, \\ \text{и так далее}&, \end{aligned}$$

то есть все производные этой функции в нуле равны нулю.

Найдем ряд Тейлора этой функции:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0.$$

Понятно, что

$$S(x) \not\equiv f(x).$$

К слову, радиус сходимости этого ряда

$$R = +\infty,$$

то есть ряд сходится на всей числовой оси.

То есть функция великолепная: бесконечно дифференцируема на всей оси, а со своим рядом Тейлора не совпадает.

К счастью, это, скорее, исключение из правила.

Далее мы докажем теорему, дающую широкий класс функций, для которых ряд Тейлора совпадает с самой функцией.

Теорема 51. *Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-R, R)$ и существует такое число M, что для любого x и для любого n*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (x \in (-R, R)).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{R_N(x)}_{\text{остаточный член}}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = S_N(x)$$

— частичная сумма. Значит,

$$|f(x) - S_N(x)| = |R_N(x)| =$$

(остаточный член возьмем в форме Лагранжа)

$$= \left| \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \leqslant \frac{M^{N+1} R^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{(MR)^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Значит, частичные суммы степенного ряда сходятся к $f(x)$, то есть $f(x)$ — сумма этого ряда. □

То есть, если функция отвечает перечисленным условиям, то она совпадает со своими рядом Тейлора.

5.5 Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Теперь мы можем получить много полезных формул. Эти формулы нужно знать.

Пример 27. Пусть
$$f(x) = \sin x.$$

В качестве интервала можно взять любой интервал. Возьмем $(-R, R)$, где $R > 0$ — произвольное число. Тогда, так как n-ая производная — это либо синус, либо косинус, то
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant 1.$$

Значит, условие теоремы 51 выполнено и функция $\sin x$ будет представляться рядом Тейлора:
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

У нас была эта же формула, но n изменялось до конечного числа и в конце прибавлялся остаточный член. А теперь мы можем сказать, что синус представляется таким рядом, без остаточного члена. Эта формула справдлева для любого $x \in (-R, R)$, а R можно брать любым, значит, эта формула верна для любого $x \in \mathbb{R}$.

Пример 28. Пусть
$$f(x) = \cos x.$$

Здесь все абсолютно точно так же. Получаем, что косинус так же представляется своим рядом Тейлора:
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Эта формула так же справедлива для всех $x \in \mathbb{R}$.

Формулы Тейлора для синуса и косинуса мы выводили в прошлом семестре. Они взяты оттуда. Формула Тейлора — это сумма от 0 до какого-то N, а ряд Тейлора — это сумма от 0 до $+\infty$ с теми же самыми коэфициентами, что и в формуле Тейлора. Эти формулы не очевидны и их нужно доказывать, но они были доказаны во втором семестре.

Пример 29. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^x.$$

Пусть $x \in (-R, R)$, $R > 0$ — произвольное число. Тогда

$$|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leqslant e^R = \left(e^{\frac{R}{n}}\right)^n \leqslant M^n.$$

Применяя теорему 51 к экспоненте, получим

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Эта формула верна для любых x из промежутка $(-R, R)$, а R можно взять любым, значит, она верна для любого $x \in \mathbb{R}$.

Эта формула тоже была доказана, только от 0 до какого-то N с прибавлением остаточного члена, а теперь от 0 до $+\infty$ и без остаточного члена.

Пример 30. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sh} x.$$

Напомним, что, по определению,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Воспользуемся разложением экспоненты из примера 29 и подставим в формулу выше. Получим:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!},$$

где x — любое вещественное число.

Пример 31. Пусть

$$f(x) = \operatorname{ch} x.$$

Точно так же получим:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!},$$

где x — любое вещественное число.

Пример 32. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Рассмотрим $R = 1$, интервал $(-1, 1)$. Воспользовавшись ранее полученной формулой Тейлора, получим разложение:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Эта формула вытекает из формулы Тейлора для $x \in (-1, 1)$. Но эту формулу можно расширить.

Возьмем $x = 1$, получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Это ряд Лейбница, он сходится. Значит, сумма ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

сходится равномерно на сегменте $[0, 1]$. Значит, сумма этого ряда $S(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, так как члены ряда — непрерывные функции и ряд сходится равномерно. Функция $\ln(1+x)$ тоже непрерывна на $[0, 1]$. Сумма ряда

$$S(x) = \ln(1+x)$$

при $x \in (0, 1)$. Но тогда они равны и на правом конце. Переходя к пределу при $x \to 1$, мы получим:

$$S(1) = \ln 2$$

Значит, формула

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

верна при $-1 < x \leqslant 1$.

Как следствие, возьмем $x = 1$, получим:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

То есть ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

сходится к $\ln 2$.

Пример 33. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Здесь много разных частных случаев, мы сформулируем только основной.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n,$$

где

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots (\alpha-n+2) \cdot (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Чему принадлежит x, завичит от α. Это может быть и вся вещественная ось, это может быть и интервал $(-1,1)$, могут и какие-то концы подключаться.

Мы получили разложение основных функций в ряд Тейлора.

5.6 Единственность степенных рядов

Теорема 52 (теорема единственности для степенных рядов)**.** *Пусть*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$R > 0.$$

Пусть

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n,$$
$$\tilde{R} > 0.$$

Пусть существует последовательность x_n, такая что

$$x_n \to 0,$$
$$x_n \neq 0$$

и пусть для этой последовательности

$$S(x_n) = \tilde{S}(x_n).$$

Тогда

1. $a_n = \tilde{a}_n$*;*

2. $R = \tilde{R}$*;*

3. $S(x) = \tilde{S}(x)$*.*

Если коэффициенты равны, то и радиусы равны, но тогда и функции равны. То есть второй и третий пункт будут следовать из первого. Первое нужно доказать, а второе и третье — простые следствия.

То есть если два степенных ряда совпадают в некотором специальном наборе точек, то они совпадают вообще везде.

Доказательство. 1. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = (\text{суммы степенного ряда непрерывна, } x_n \to 0) = S(0) = a_0.$$

Но этот же самый предел равен

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(x_n) = \tilde{S}(0) = \tilde{a}_0.$$

Мы получили, что нулевые члены, то есть нулевые коэффициенты совпали:

$$a_0 = \tilde{a}_0.$$

2. Рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{S(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots$$

и

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{S}(x) - \tilde{a}_0}{x} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2x + \tilde{a}_3x^2 + \tilde{a}_4x^3 + \dots$$

Числа a_0 и $\tilde{a}_0$ равны, функции S и $\tilde{S}$ равны в точках x_n, знаменатели одинаковые. Получаем:

$$f(x_n) = \tilde{f}(x_n),$$

то есть два ряда f и $\tilde{f}$ совпадают в точках x_n, но тогда так же, как в первом случае переходя к пределу, мы получаем:

$$a_1 = \tilde{a}_1.$$

И так далее. Эту процедуру можно продолжать. Получим

$$a_2 = \tilde{a}_2,$$

$$a_3 = \tilde{a}_3,$$

$$\dots$$

и получим, что все коэффиициенты степенного ряда равны. А если коэффициенты равны, то все остальное у них тоже совпадает. Радиусы считаются через коэффициенты, поэтому если коэффициенты равны, то и радиусы равны. Коэффициенты равны, значит, это два одинаковых ряда, значит, функции равны. Фактически это один и тот же ряд. □

На этом степенные ряды заканчиваются. А дальше начинается новая тема.

Глава 6

Семейства функций

6.1 Поточечная и равномерная сходимость семейства функций

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$ определена функция $f_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда мы можем рассмотреть *семейство этих функций* $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$. Здесь α — *индекс семейства*, x — *переменная функции*.

Если $A = \mathbb{N}$, то семейство функций превращается в последовательность, то есть последовательность функций — это частный случай семейства функций.

Пусть дана функция двух переменных $f(x, y)$. Если мы зафиксируем y, то получим функцию от x, если y будем менять, функция от x будет меняться, то есть функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как семейство функций $\{f(x, y)\}_{y \in Y}$, где y — индекс семейства, x — переменная функции. А можно наоборот, считать, что y — это переменная функции, а x — индекс семейства, тогда получим семейство функций $\{f(x, y)\}_{x \in X}$. То есть фунцию двух можно переменных рассматривать как семейство функций. Стандартная запись семейства функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ — это не что иное, как функция двух переменнных $f(x, \alpha)$. Это просто форма записи. Так же, как можно писать последовательность a_n, а можно писать функция $a(n)$. Это условность. Форма записи $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ подчеркивает, что рассматриваются функции от x, а α — как бы параметр, а когда пишут $f(x, \alpha)$, x и α воспринимаются равноправно. Но это условность, все зависит от того, как мы сами хотим рассматривать.

Теперь дадим определение сходимости семейств, но устремлять к чему-то мы будем α.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ и a — предельная точка A.

Определение 48. Будем говорить, что семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ *сходится поточечно к функции $g(x)$ при $\alpha \to a$*, если

$$\forall x_0 \in X \quad f_\alpha(x_0) \to g(x_0),$$

то есть

$$\forall x_0 \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \alpha \in A \ \ 0 < \|\alpha - a\| < \delta \ \ |f_\alpha(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом определении сходимость $f_\alpha(x_0) \to g(x_0)$ в смысле сходимости функции.

Этот факт будем писать так:

$$f_\alpha(x) \to g(x).$$

Определение 49. Будем говорить, что семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ *сходится равномерно к функции $g(x)$ при $\alpha \to a$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \alpha \in A \ \ 0 < \|\alpha - a\| < \delta \ \ \forall x \in X \ \ |f_\alpha(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Этот факт будем писать так:

$$f_\alpha(x) \rightrightarrows g(x).$$

То есть при поточечной сходимости для каждой точки x_0 свое δ, а при равномерной сходимости одно и то же δ сразу для всех x. Так требование равномерной сходимости более жесткое. Из равномерной сходимости вытекает поточечная сходимость.

Теорема 53. *Семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ сходится равномерно к функции $g(x)$ при $\alpha \to a$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{x \in X} |f_\alpha(x) - g(x)| \to 0$$

при $\alpha \to a$.

Аналогичная теорема была для последовательностей (теорема 29). Эта доказывается точно так же. Докажите самостоятельно.

Если проводить аналогию, то последовательности функций являются аналогами просто числовых последовательностей, а семейства функций являются аналогами просто функций. Теоремам, которые были для числовых последовательностей и функций, аналогичные есть для функциональных последовательностей и семейств функций соответственно.

$a_n(x)$	$f_\alpha(x)$
a_n	$g(\alpha)$

В частности, для функции у нас было два определения предела — определение по Коши и определение по Гейне, так что для семейства функций точно так же можно дать определение Гейне.

Определение 50 (определение Гейне равномерной сходимости)**.** Семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ сходится равномерно к функции $g(x)$ при $\alpha \to a$, если

$$\forall \alpha_n \to a \ \alpha_n \neq a \quad f_{\alpha_n}(x) \rightrightarrows g(x).$$

То есть семейство сходится равномерно тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\alpha_n \to a$ ($\alpha_n \neq a$) функциональная последовательность $f_{\alpha_n}(x)$ сходится равномерно к $g(x)$.

Теорема 54. *Определение Гейне (определение 50) равносильно определению Коши (определение 49).*

Здесь все обстоит точно так же, как и для функций.

Доказательство.

1. Докажем, что из определения Коши следует определение Гейне. Пусть выполняется определение Коши, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \alpha \in A \ \ 0 < \|\alpha - a\| < \delta \ \ \forall x \in X \ \ |f_\alpha(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\alpha_n \to a$, $\alpha_n \neq a$. Тогда для δ существует номер N, такой что для любого $n > N$

$$0 < \|\alpha_n - a\| < \delta$$

в силу того, что $a_n \neq 0$. Значит, для любого $x \in X$

$$|f_{\alpha_n}(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$f_{\alpha_n}(x) \rightrightarrows g(x).$$

2. Покажем, что из определения Гейне следует определение Коши.

Допустим противное, что определение Гейне выполняется, а определение Коши не выполняется, то есть[1]

$$\exists \varepsilon \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists \alpha \ \ 0 < \|\alpha - a\| < \delta \ \ \exists x \in X \ \ |f_\alpha(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon.$$

[1] Нужно взять отрицание от определения Коши.

Возьмем в качестве δ натуральное число $\dfrac{1}{n}$. Тогда существует α_n, такое что
$$0 < \|\alpha_n - a\| < \frac{1}{n},$$
существует $x_n \in X$, такой что
$$|f_{\alpha_n}(x_n) - g(x_n)| \geqslant \varepsilon$$
В силу $\|\alpha_n - a\| < \dfrac{1}{n}$, $\alpha_n \to a$, в силу $0 < \|\alpha_n - a\|$, $\alpha_n \neq a$. Тогда, по определению Гейне, $f_{\alpha_n}(x) \rightrightarrows g(x)$. Но это противоречит тому, что $|f_{\alpha_n}(x_n) - g(x_n)| \geqslant \varepsilon$.

□

6.2 Теоремы, связанные с равномерной сходимостью предельной функции

Теперь докажем ряд теорем о равномерном пределе семейства функций. Эти теоремы аналогичны тем, что были для функциональных последовательностей. Они доказываются либо так же, как теоремы для функциональных последовательностей, либо сводятся к ним.

Теорема 55. *Пусть семейство функций $\{f_\alpha(x)\}$ сходится равномерно к $g(x)$ при $\alpha \to A$ и $x \in X$.*

Пусть для каждого фиксированного α $f_\alpha(x)$ сходится к некотормоу числу A_α при $x \to x_0$ (x_0 — предельная точка X). Тогда A_α сходится к некоторому числу A при $\alpha \to A$ и $g(x)$ сходится к этому же числу A при $x \to x_0$.

Изобразим формулировку теоремы в виде коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
f_\alpha(x) \arrow[r, Rightarrow, "\substack{\alpha\to a \\ x\in X}"'] \arrow[d, "x \to x_0"'] & g(x) \arrow[d, "x \to x_0"] \\
A_\alpha \arrow[r, "\alpha \to a"'] & A
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_n \to a$, $\alpha_n \neq a$. Тогда, по определению Гейне (определение 50), $f_{\alpha_n}(x) \rightrightarrows g(x)$. По условию, $f_{\alpha_n}(x) \to A_{\alpha_n}$ при $x \to x_0$. По теореме 31, A_{α_n} стремится к некоторому числу A при $n \to \infty$ и $g(x)$ стремится к этому же числу при $x \to x_0$. Стремление $g(x)$ к A

обеспечивает единственность A ($g(x)$ не может иметь два предела).[2] Но тогда A_{α_n} сходится к A при любой α_n и предел A один и тот же, из этого следует, что, по определению Гейне[3], $A_\alpha \to A$ при $\alpha \to a$.

Изобразим наши рассуждения в виде коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
f_{\alpha_n}(x) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "x \to x_0"'] & g(x) \arrow[d, "x \to x_0"] \\
A_{\alpha_n} \arrow[r, "n \to \infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

$\square$

Отсюда мы сразу же можем получить много полезных свойств.

Теорема 56. *Пусть* $f_\alpha(x) \underset{\binom{\alpha \to a,}{x \in X}}{\rightrightarrows} g(x)$.

Пусть функции $f_\alpha(x)$ *непрерывны в точке* x_0 *при любом* α. *Тогда функция* $g(x)$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \neq \alpha$. Тогда, по определению Гейне, $f_{\alpha_n}(x) \rightrightarrows g(x)$. Все функции $f_{\alpha_n}(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда, по теореме 32, функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

Следствие 56.1. *Пусть* $f_\alpha(x) \underset{\binom{\alpha \to a,}{x \in X}}{\rightrightarrows} g(x)$.

Пусть $f_\alpha(x) \in C(X)$. *Тогда* $g(x) \in C(X)$.

Это прямо следует из предыдущей теоремы.

6.3 Интегрируемость и дифференцируемость предела семейства функций

Дальше рассмотрим интегрируемость и диффернцируемость предела семейства функций.

---

[2] Могло показаться, что, если взять другую последовательность α_n, получим другое A. Так вот, другое A получиться не может, потому что предел у $g(x)$, если существует, единственный. То есть A не зависит от выбора последовательности α_n, что требуется в определении Гейне.

[3] Здесь имеется в виду определение Гейне для функций. В A_α α играет роль переменной функции.

Теорема 57. *Пусть* $f_\alpha(x) \underset{\left(\substack{\alpha\to a,\\ x\in X}\right)}{\rightrightarrows} g(x)$.

Пусть множество X *измеримо по Жордану.*

Пусть при каждом α $f_\alpha \in R(X)$. *Тогда*

1. $g \in R(X)$;

2. $\int\limits_X g(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to a} \int\limits_X f_\alpha(x)dx$.

Эта теорема получается сразу же из теоремы 34. С помощью определения Гейне семейства функций сводятся к функциональным последовательностям, и сразу же получается утверждение теоремы.

Теорема 58. *Пусть* $f_\alpha(c) \to C$ $(c, C \in \mathbb{R})$[4].

Пусть при любом α $f_\alpha \in C^1[c,d]$.[5]

Пусть $f'_\alpha(x) \underset{\left(\substack{\alpha\to a,\\ x\in[c,d]}\right)}{\rightrightarrows} h(x)$. *Тогда:*

1. $f_\alpha(x) \rightrightarrows g(x)$;

2. $g \in C^1[c,d]$;

3. $g'(x) = h(x)$.

Точно такая же теорема была для полседовательностей (теорема 35). Все эти теоремы перенеслись на семейства.

На этом глава «Семейства функицй» завершена. Теперь мы получим некоторые приложения из этого материала.

[4]То есть семейство f_α сходится в одной точке, c.

[5]$[c,d]$ — это отрезок вещественной оси.

Глава 7

Собственные интегралы, зависящие от параметра

7.1 Интегралы с постоянными пределами интегрирования

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, X измеримо по Жордану.

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int\limits_X f(x,t)dx.$$

Допустим, что при любом фикисрованном t $f(x,t) \in R(X)$. Тогда при каждом t интеграл выше — это некоторое число. При изменении t меняется и это число, значит, мы получили функцию $F(t)$. Наша ближайшая задача — изучить свойства этой функции. Эта функция представляет собой интеграл от функции f, интегрируем мы по x, а t играет роль параметра. В результате получаем *интеграл, зависящий от параметра.* Этот интеграл понимается в смысле Римана, то есть как собственный интеграл, поэтому глава называется «Собственные интегралы, зависящие от параметра». В зависимости от функции f мы будем получать свойства функции F.

Теорема 59. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, X измеримо по Жордану, X — компакт.*

Рассмотрим множество T всех индексов t. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$, T — компакт.

Пусть $f(x,t) \subset C(X \times T)$.[1] *Тогда $F \in C(T)$.*[2]

Доказательство. Декартово произведение двух компактов — это компакт, поэтому $X \times T$ — компакт. По условию, функция f непрерывна на $X \times T$, следовательно, по теореме Кантора, функция f равномерно непрерывна. Это означает

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x', x'' \in X \;\; \forall t', t'' \in T \;\; \|x' - x''\| < \delta \;\; \|t' - t''\| < \delta$$
$$|f(x', t') - f(x'', t'')| < \varepsilon.$$

Докажем непрерывность функции $F(t)$. Для этого возьмем t', t'' такие, как в утверждении выше и рассмотрим разность

$$|F(t') - F(t'')| = \left| \int\limits_X f(x, t')dx - \int\limits_X f(x, t'')dx \right| \leqslant \int\limits_X |f(x, t') - f(x, t'')|dx.$$

Вернемся к определению равномерной непрерывности. Возьмем $x' = x'' = x$. Тогда нервенство

$$\|x' - x''\| < \delta.$$

превратиться в

$$0 < \delta,$$

в этом частном случае будет выполнено неравенство

$$|f(x, t') - f(x, t'')| < \varepsilon.$$

Значит,

$$\int\limits_X |f(x, t') - f(x, t'')|dx \leqslant \varepsilon \cdot m(X).$$

Значит, мы получили

$$\forall t', t'' \quad \|t' - t''\| < \delta \quad |F(t') - F(t'')| < \varepsilon m(X).$$

Но $m(X)$ — это константа, мы можем уменьшать ε сколько угодно, отсюда следует, что $F(t)$ равномерно непрерывна.

Нужно было доказать просто непрерывность, а мы доказали равномерную непрерывность. Кажется, что мы здесь что-то лишнее доказали, ведь нужно было более слабое утверждение. Но $F(t)$ определена на компакте T, а на компакте непрерывность и равномерная непрерывность — это одно и то же. Так что мы доказали не больше а ровно только, сколько требовалось. □

---

[1] То есть функция $f(x,t)$ непрерывна по двум переменным: и по x, и по t.

[2] То есть функция F непрерывна по t.

То есть если подинтегральная функция непрерывна по двум переменным x и t и эти переменные принадлежат компакту, то сам интеграл будет непрерывно зависеть от параметра t.

Теорема 60. *Пусть X — компакт, X измеримо по Жордану и $f \in C(X \times [a,b])$.*[3]

Пусть $t \in [a,b]$ и $f'_t \in C(X \times [a,b])$.[4] *Тогда:*

1. $F(t) = \int\limits_X f(x,t)dx \in C^1[a,b]$;

2. $F'(t) = \int\limits_X f'_t(x,t)dx$.

Другими словами, мы утверждаем, что при выполнении условий теороемы

$$\left(\int_X f(x,t)dx\right)' = \int_X f'_t(x,t)dx$$

(производная может браться только по t, так как функция зависит только от t), то есть производную можно вносить внутрь интеграла.

Доказательство. 1. Зафиксируем некоторую точку $t_0 \in [a,b]$. Докажем, что в этой точке функция F дифференцируема. И сразу докажем, что производная в этой точке будет равна именно интегралу от производной в точке t_0.

Оценим разность

$$\left|\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_X f'_t(x,t_0)dx\right|.$$

Нам нужно показать, что эта разность мала, то есть при $t \to t_0$ дробь выше будет стремиться к интегралу выше, который является числом. Если мы это покажем, то предел дроби будет равен этому числу, а предел этой дроби — это производная в точке t_0, то есть

[3] $[a,b]$ — это отрезок вещественной прямой.

[4] То есть исходная функция f непрерывно дифференцируема по переменной t, и f'_t непрерывна по совокупности переменных.

мы получим равенство из пункта 2.

$$\left|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{t-t_0}\left(\int\limits_X f(x,t)dx-\int\limits_X f(x,t_0)dx\right)-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_X (f(x,t)-f(x,t_0))dx-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| =$$

(к разности $f(x,t)-f(x,t_0)$ применим
теорему Лагранжа по переменной t,
воспринимая x фиксированным,
получим $f'_t(x,\xi)(t-t_0)$)

$$= \left|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_X f'_t(x,\xi)(t-t_0)dx-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{t-t_0}(t-t_0)\int\limits_X f'_t(x,\xi)dx-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| =$$
$$= \left|\int\limits_X f'_t(x,\xi)dx-\int\limits_X f'_t(x,t_0)dx\right| = \left|\int\limits_X (f'_t(x,\xi)-f'_t(x,t_0))dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X |f'_t(x,\xi)-f'_t(x,t_0)|dx <$$

(по условию, f'_t — непрерывная функция, значит, она
равномерно напрерывна, значит, так же, как в теореме 59,
мы можем показать, что
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t,t_0\ |t-t_0|<\delta\ \forall x\in X\ |f'_t(x,\xi)-f'_t(x,t_0)|<\varepsilon$)

$$< \varepsilon m(X).$$

Это означает, что функция F дифференцируема и ее производная равна интегралу из пункта 2. То есть мы доказали, что

$$F'(t)=\int\limits_X f'_t(x,t)dx.$$

А нам нужно было доказать, что эта функция еще и непрерывно дифференцируемая, то есть что ее производная непрерывна.

2. Мы доказали, что
$$F'(t) = \int\limits_X f'_t(x,t)dx.$$
Но по условию, функция $f'_t(x,t)$ непрерывна, тогда, по теореме 59, и функция $F'(t)$ непрерывна, значит, $F(t)$ непрерывно дифференцируема, то есть $F(t) \in C^1[a,b]$.

□

Рассмотрим пример, как работает эта теорема.

Пример 34. Пусть
$$F(t) = \int\limits_0^1 \sin(x^2 t)dx.$$
Интеграл $\sin(x^2)$ через элементарные функции не выражается, то есть этот интеграл нельзя вычислить стандарными методами, но производную $F(t)$ найти мы можем, для этого нужно взять интеграл от производной подинтегральной функции по t:
$$F'(t) = \int\limits_0^1 \cos(x^2 t)x^2 dx.$$

Так что дифференцировать по параметру, если функция хорошая, очень просто.

7.2 Интегралы с пределами интегрирования, зависящими от параметра

Далее мы хотим рассмотреть чуть более общую ситуацию. От интеграла, как в примере 34, брать производную нетрудно, и ответ простой. Но трудности возникли бы, если бы нам нужно было продифференцировать функцию, представляющую собой интеграл, где нижний и верхний предел зависят от t.

Пример 35. Пусть
$$F(t) = \int\limits_t^{t^2} \sin(x^2 t)dx.$$

Это функция от t, но и пределеы интегрирования зависят от t, и подинтегральная функция зависит от t. Чему равна производная этой функции по t, пока совсем не понятно.

Мы хотим разобраться в вопросе, как дифференцировать по параметру, если он входит и в подинтегральную функцию, и в верхний и нижний пределы. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 61. *Пусть* $f(x,t) \in C([a,b] \times [c,d])$.[5]

Пусть у функции $f(x,t)$ *существует производная* $f'_t(x,t)$ *и* $f'_t(x,t) \in C([a,b] \times [c,d])$.

Пусть $\alpha, \beta \colon [c,d] \to [a,b]$ *и* $\alpha, \beta \in C^1[c,d]$.[6]

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx.$$

Тогда

1. $F(t) \in C^1[c,d]$;

2. $$F'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(x,t)dx.$$

То есть если функция представляет собой интеграл, у которой и верхний предел, и нижний предел, и подитегральная фунция зависят от параметра, то ее производная вычисляется по формуле выше.

Прежде чем доказывать теорему, покажем, как она работает на примере 35.

$$\left(\int\limits_{t}^{t^2} \sin(x^2 \cdot t)dx\right)' = \sin((t^2)^2 \cdot t) \cdot (t^2)' - \sin(t^2 \cdot t) \cdot (t)' + \int\limits_{t}^{t^2} (\sin(x^2 \cdot t))'_t dx =$$

$$= \sin(t^5) \cdot 2t - \sin(t^3) + \int\limits_{t}^{t^2} \cos(x^2 \cdot t) \cdot x^2 dx.$$

---

[5] Здесь уже и x, y — просто вещественные числа. x меняется на сегменте $[a,b]$, t меняется на сегменте $[c,d]$. И на декартовом произведении $[a,b] \times [c,d]$ эта функция непрерывна.

[6] То есть функции α, β непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$G(u,v,t)=\int\limits_u^v f(x,t)dx$$

(здесь u и v — независимые пределы, ни с x, ни с t они никак не связаны), это функция трех переменных. Найдем частные производные этой функции по каждой переменной отдельно. Проще всего начать с переменной v, то есть по верхнему пределу:

$$G'_v(u,v,t)=\left(\int\limits_u^v f(x,t)dx\right)'_v=$$

(в прошлом семестре мы рассматривали интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(t)dt$ и доказывали, что если функция f непрерывная, то этот интеграл дифференцируемый и $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$, то есть, чтобы найти производную по верхнему пределу такого интеграла, нужно в подинтегральную фунцию подставить верхний предел. Эта теорема была доказана во втором семестре. Применим ее в этом случае. Здесь t — параметр, интегрируем по x и берем производную по v, значит, нужно в подинтегральную функцию вместо x подставить v)

$$=f(v,t).$$

Теперь найдем производную по переменной u, то есть по нижнему пределу:

$$G'_u(u,v,t)=\left(\int\limits_u^v f(x,t)dx\right)'_u$$

(чтобы перенести u в верхний предел, нужно перед интегралом поставить минус и поменять u и v местами. Опять применим формулу для интеграла с переменным верхним пределом)

$$=-\left(\int\limits_v^u f(x,t)dx\right)'_u=-f(u,t).$$

Найдем производную по t. Здесь u и v фиксированные, а производную берем по t, тогда, по теореме 60,

$$G'_t(u,v,t)=\int\limits_u^v f'_t(x,t)dx.$$

Все три частные производные существуют и непрерывны. Тогда функция $G(u,v,t)$ дифференцируема по всем переменным, то есть существует ее общая производная: из непрерывности частных производны следует существование и непрерывность общей производной. А тогда

$$F(t)=\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx=G(\alpha(t),\beta(t),t).$$

То есть исходная функция — это функция $G(u,v,t)$, в которую вместо u и v подставили пределы интегрирования, то есть это композиция функций. Теперь мы можем написать, чему равняется производная функции $F(t)$ (воспользовавшись формулой производной сложной функции — правилом цепочки):

$$\begin{gathered}
F'(t)= \\
=G'_u(\alpha(t),\beta(t),t)\cdot\alpha'(t)+G'_v(\alpha(t),\beta(t),t)\cdot\beta'(t)+G'_t(\alpha(t),\beta(t),t)\cdot t'_t= \\
=G'_u(\alpha(t),\beta(t),t)\cdot\alpha'(t)+G'_v(\alpha(t),\beta(t),t)\cdot\beta'(t)+G'_t(\alpha(t),\beta(t),t)= \\
\text{(все частные производные функции } G \text{ найдены, так что подставим} \\
\text{найденные значения производных, а вместо } u \text{ и } v \\
\text{подставим } \alpha(t) \text{ и } \beta(t) \text{ соответственно)} \\
=-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+f(\beta(t),t)\beta'(t)+\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(x,t)dx
\end{gathered}$$

(в доказывемой формуле первые два слагаемых переставлены местами). □

Если вдуматься, формула совсем не сложная и доказательство здесь вполне понятное: просто правило цепочки применено к сложной функции. Дифференцировать по верхнему пределу мы умеем, по нижнему пределу — это тоже самое со знаком минус, интегрировать по внутренней, подынтегральной переменной мы тоже умеем, а все остальное — дело техники.

«Собственные интегралы, зависящие от параметра» — это маленькая простая глава. На практике нужно уметь брать такие производные, как в примере 35. Нужно лишь подставить в формулу и посчитать.

Следующая глава — «Несобственные интегралы, зависящие от параметра». Здесь все намного сложнее и интереснее, чем в собственных интегралах.

Глава 8

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

8.1 Поточечная и равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Мы рассматривали несобственные интегралы двух типов: первого — интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

и второго — интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

где функция $f(x)$ неограничена на сегменте $[a, b]$ (тогда интеграл Римана не существует). Но эти интегралы абсолютно одинаковые: теоремы одни и те же. Более того, один сводится к другому заменой x на $\dfrac{1}{x}$ (тогда в пределе интигрирования уже будет не $+\infty$, а 0 и наоборот). Поэтому мы будем изучать только интегралы первого типа, а на интегралы второго типа все утверждения автоматически переносятся.

Итак, в этой главе мы будем изучать интегралы следующего вида:

$$F(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx,$$

здесь t — параметр, а интеграл берется по x. Это *несобственный интеграл, зависящий от параметра* t.

Рассмотрим интеграл

$$F_b(t) = \int\limits_a^{b} f(x,t)dx.$$

Здесь a — константа, а b будем менять. Такой интеграл называется *частичным интегралом.* Частичные интегралы $F_b(t)$ — это семейство функций, где b — это индекс семейства, а t — переменная функции.

Определение 51. Будем говорить, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится поточечно при $t \in T$, если он сходится в каждой точке t (или, что то же самое, семейство функций

$$F_b(t) = \int\limits_a^{b} f(x,t)dx$$

сходится поточечно при $b \to +\infty$).

То есть если в каждой точке $t \in T$ такой интеграл сходится в самом обычном смысле как числовой, говорят, что интеграл сходится поточечно. Фиксируем $t_0 \in T$, получаем обычный числовой интеграл, он должен сходиться. Меняем t — опять сходится. И так для всех точек. Разъясним, что написано в скобках. Интеграл сходится поточечно, если частичный интеграл (множество которых образует семейство функций) сходится потоечно.

Определение 52. Будем говорить, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно при $t \in T$, если частичные интегралы

$$F_b(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

сходятся равномерно.

То еть несобственный интеграл сходится равномерно, если его частичные интегралы сходятся равномерно.

Поточечная сходимость слабая, и она практически ничего нам не дает, никаких полезных свойств. Равномерная сходимость — условие гораздо более жесткое и гораздо более полезное, она дает много чего хорошего.

Далее мы будем доказывать разные теоремы о равномерной сходимости таких интегралов.

Как и раньше, первая теорема — критерий Коши.

Теорема 62 (критерий Коши). *Интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно тогда и только тогда, когда[1]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall t \in T \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx \right| < \varepsilon.$$

Он сразу же вытекает из критерия Коши для семейств функций. Это частный случай критерия Коши для семейств функций.

Доказательство. По определению 52, интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно тогда и только тогда, когда семейство функций

$$F_b(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

[1] В теореме пишут не δ, а D, потому что это число большое, но сущностно это ничего не меняет.

сходятся равномерно. Но по критерию Коши для семейств, семейство функций F_b сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall t \in T \quad |F_{b_2}(t) - F_{b_1}(t)| < \varepsilon.$$

Так как

$$|F_{b_2}^{(t)} - F_{b_1}^{(t)}| = \left| \int\limits_a^{b_2} f(x,t)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x,t)dx \right| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx \right|,$$

последнее неравенство превращается в

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx \right| < \varepsilon.$$

□

8.2 Теоремы, связанные с равномерной сходимостью несобственного интеграла, зависящего от параметра

Равномерная сходимость гораздо более сильная, чем поточечная, и она полезна во многих вопросах. Поэтому мы докажем несколько теорем о равномерной сходимости.

Следующеая теорема — единственная теорема, дающая условия неравеномерной сходимости. Остальные теоремы будут о равномерной сходимости.

Теорема 63. *Пусть* $f(x,t) \in C([a,+\infty) \times [c,d])$.[2] *Если хотя бы один из числовых интегралов*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x,d)dx$$

расходится, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

не сходится равномерно на интервале (c,d).

[2] То есть функция $f(x,t)$ непрерывна по x на $[a,+\infty)$, по t на $[c,d]$.

То есть если хотя бы на одном конце сегмента интеграл расходится, то его сходимость на интервале с теми же концами не может быть равномерной (при этом сходимости на этом же сегменте быть не может вообще никакой, так как хотя бы в одной точке он расходится).

Доказательство. Допустим противное. Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно на интервале (c,d). Тогда, по критерию Коши (теорема 62),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall t \in (c,d) \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что[3]

$$f(x,t) \underset{\left(\substack{t \to c,\\ x \in [b_1, b_2]}\right)}{\rightrightarrows} f(x,c)$$

Тогда при $t \to c$, переходя к пределу, получаем:

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

По критерию Коши (теорема 62), это означает, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx$$

сходится, то есть на левом конце сегмента $[c,d]$ интеграл сходится. Точно так же при $t \to d$ получаем, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,d)dx$$

сходится. То есть на обоих концах отрезка интеграл сходится, что противоречит условию. □

[3] Если взять разность этих функций по модулю и оценить, равномерная сходимость сразу получается.

То есть если интеграл сходится внутри интервала, то он обязательно сходится на обоих его концах. Значит, если на одном из концов интеграл расходится, то внутри сходиться равномерно он не может.

Теорема 64 (признак признак Вейерштрасса)**.** *Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна*[4] *по x при $x \in [a, +\infty)$ и при каждом фиксированном $t \in T$.*[5]

Пусть при любом $t \in T$ $|f(x,t)| \leqslant g(x)$.

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

сходится. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно.

Точно такая же теорема была для функциональных рядов, которая тоже называлась признаком Вейерштрасса (теорема 43): если члены ряда оцениваются константами и ряд из этих констант сходится, то ряд от функций сходится равномерно. Здесь только не суммы, а интегралы, а остальное все точно такое же. Доказывается этот признак очень просто.

Доказательство. Так как интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

сходится, то, по критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

---

[4] Непрерывность функции $f(x,t)$ здесь требуется для того, чтобы интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx$ существовали: это достаточное условие существования интеграла. Это условие можно ослаблять — потребовать, чтобы функция $f(x,t)$ на каждом конечном промежутке от a до b была интегрируема, но это не принципиально, мы в формулировке взяли более жесткое условие, для практики его достаточно.

[5] Она непрерывна только по x, то есть по t могут быть разрывы.

Всегда можно считать, что $b_2 \geqslant b_1$ (иначе их всегда можно переобозначить, тем самым поменять ролями, тогда поменяются местами верхний и нижний пределы интегрирования, но из-за модуля это роли не играет. Если же $b_1 = b_2$, то интеграл под модулем равен 0). Так как $|f(x,t)| \leqslant g(x)$, $g(x) \geqslant 0$, тогда интеграл положительный и модуль можно опустить:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Но тогда для любого $t \in T$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x,t)|dx \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

По критерию Коши, интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,t)dx$$

сходится равномерно. $\square$

Пример 36. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}dx.$$

Подинтегральная функция непрерывна.

Рассмотрим ее модуль:

$$\left|\frac{\sin(tx)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Числовой интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится, так как $2 > 1$. Значит, для любого $t \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}dx$$

сходится равномерно.

Пример 37. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^t} dx.$$

при $t \in (1, +\infty)$. Поточечная сходимость при $t > 1$ у него есть.

Возьмем $t = 1$, получим числовой интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x},$$

который расходится (он вычисляется: получаем логарифм, подставляем пределы, получаем бесконечность). На одном из концов интервала расходится, значит, внутри интервала сходимость неравномерная, по теореме 63.

Раньше мы писали $f(x, t)$, где t — параметр, но вместо t можно любую букву писать, далее мы будем писать $f(x, y)$, так как такая запись привычнее.

Теорема 65 (признак Дирихле)**.** *Пусть задана функция $f(x, y)$, где $x \in [a, +\infty)$, $y \in Y$.*

Пусть $f(x, y) \underset{\left(\substack{x \to +\infty, \\ y \in Y}\right)}{\rightrightarrows} 0.$[6]

Пусть функция $f(x, y)$ монотонна по x при любом y.[7]

Пусть при фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x.[8]

Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна по x при фиксированном y.

Пусть существует такое число M, что для любого $y \in Y$, для любого $b \geqslant a$

$$\left| \int_a^b g(x, y) dx \right| \leqslant M$$

(то есть частичные интегралы от функции $g(x, y)$ ограничены). Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

[6]Функция $f(x, y)$ равномерно стремится к 0 относительно y.

[7]Причем может оказаться, что при одних y она возрастает, а при других y убывает, это не исключено.

[8]То есть существует непрерывная частная производная f'_x.

сходится равномерно на Y по параметру y.

Доказательство. Доказательство проведем с помощью критерия Коши.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx.$$

Покажем, что при больших b_1, b_2 модуль этого интеграла будет равномерно мал по всем y. Изначально $b_1, b_2 \geqslant a$. Не нарушая общности, потребуем $b_2 \geqslant b_1$ (мы всегда можем поменять их ролями).

Введем вспомогательную функцию

$$G(x,y) = \int\limits_a^x g(t,y)dt$$

(это интеграл с переменным верхним пределом). Функция $g(t,y)$ непрерывна, значит, функция $G(x,y)$ дифференцируема и, по теореме производной интеграла с переменным верхним пределом,

$$G'_x(x,y) = g(x,y).$$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)G'_x(x,y)dx\right| =$$

(применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям для определенного интеграла)

$$= \left| f(x,y)G(x,y)\Big|_{x=b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} f'_x(x,y)G(x,y)dx \right| =$$

$$= \left| f(b_2,y)G(b_2,y) - f(b_1,y)G(b_1,y) - \int\limits_{b_1}^{b_2} f'_x(x,y)G(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(b_2,y)G(b_2,y)| + |f(b_1,y)G(b_1,y)| + \int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x,y)||G(x,y)|dx \leqslant$$

(по условию, $\left|\int\limits_a^b g(x,y)dx\right| \leqslant M$, откуда $|G(x,y)| \leqslant M$ при любых x,y)

$$\leqslant M|f(b_2,y)| + M|f(b_1,y)| + M\int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x,y)|dx =$$

(так как функция fмонотонна, при каждом фиксированном y ее производная одного знака, значит, модуль можно вынести за знак интеграла)

$$= M|f(b_2,y)| + M|f(b_1,y)| + M\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f'_x(x,y)dx\right| =$$

$$= M|f(b_2,y)| + M|f(b_1,y)| + M|f(b_2,y) - f(b_1,y)| \leqslant$$
$$\leqslant M|f(b_2,y)| + M|f(b_1,y)| + M|f(b_2,y)| + M|f(b_1,y)| =$$
$$= 2M|f(b_2,y)| + 2M|f(b_1,y)|.$$

На этом месте в нашей оценке прервемся.

Так как $f(x,y) \rightrightarrows 0$,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall x > D \quad \forall y \in Y \quad |f(x,y)| < \varepsilon.$$

Будем считать, что $b_1, b_2 > D$ (до этого момента они были любыми).

Продолжим оценку:

$$2M|f(b_2,y)| + 2M|f(b_1,y)| < 2M\varepsilon + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon.$$

Понятно, что выбором ε можно сделать величину $4M\varepsilon$ сколь угодно малой.

Итак, мы получили

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall y \in Y \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| < 4M\varepsilon.$$

По критерию Коши, интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно. $\square$

Доказательство точно такое же, как и для интегралов без параметра.

Теорема 66 (признак Абеля)**.** *Пусть задана функция $f(x, y)$, где $x \in [a, +\infty)$, $y \in Y$.*

Пусть функция $f(x, y)$ монотонна по x при фиксированном y.

Пусть существует такое число M, что для любых x, y $|f(x, y)| \leqslant M$.[9]*.*

Пусть при фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x.

Пусть при фиксированном y функция $g(x, y)$ непрерывна по x.

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x, y)dx$$

сходится равномерно. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

сходится равномерно.

Доказательство. Так как, по условию, интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x, y)dx$$

сходится равномерно, то, по критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall y \in Y \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x, y)dx\right| < \varepsilon.$$

Для этих же b_1, b_2 возьмем модуль интеграла

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)g(x, y)dx$$

[9]то есть функция $f(x, y)$ ограничена

и оценим. Как и в теореме 65 (признак Дирихле), введем вспомогательную функцию (но она будет немного другая)

$$G(x, y) = \int\limits_{b_1}^{x} g(t, y) dt,$$

(там был интеграл от a до x, а здесь от b_1 до x. Но это не принципиально, потому что $G'_x(x, y) = g(x, y)$ и, в силу условия Коши, при $x > D$ $|G(x, y)| < \varepsilon$) Аналогично тому, что получили в той теореме, получаем:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y) G'_x(x, y) dx\right| =$$

$$= \left| f(b_2, y) G(b_2, y) - f(b_1, y) G(b_1, y) - \int\limits_{b_1}^{b_2} f'_x(x, y) G(x, y) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(b_2, y) G(b_2, y)| + |f(b_1, y) G(b_1, y)| + \int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x, y)||G(x, y)| dx =$$

(так как $G(x, y)$ — это интеграл от b_1 до x, то $G(b_1, y)$ — это интеграл от b_1 до b_1, то есть 0. Число $G(b_2, y)$ меньше ε, а функция f ограничена числом M)

$$\leqslant |f(b_2, y) G(b_2, y)| + \int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x, y)||G(x, y)| dx \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \varepsilon + \int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x, y)| \varepsilon dx =$$

$$= M \cdot \varepsilon + \varepsilon \int\limits_{b_1}^{b_2} |f'_x(x, y)| dx =$$

(функция f монотонна, значит, производная одного знака, значит, модуль можно вынести за интеграл)

$$= M \cdot \varepsilon + \varepsilon \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f'_x(x,y)dx \right| = M \cdot \varepsilon + \varepsilon |f(b_2,y) - f(b_1,y)| \leqslant$$

$$\leqslant M{\cdot}\varepsilon{+}\varepsilon(|f(b_2,y)|{+}|f(b_1,y)|) \leqslant M{\cdot}\varepsilon{+}\varepsilon(M{+}M) = M{\cdot}\varepsilon{+}\varepsilon{\cdot}M{+}\varepsilon{\cdot}M = 3M\varepsilon.$$

Итак, мы получили

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \quad \forall b_1, b_2 > D \quad \forall y \in Y \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| \leqslant 3M\varepsilon.$$

По критерию Коши, интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно. □

8.3 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Свойства несобственных интегралов мы оформим в виде теорем. Аналогичные теоремы были и для семейств, и для последовательностей, они одна из другой получаются.

Следующая теорема о предельном переходе в несобственном интеграле.

Теорема 67. *Пусть y_0 — предельная точка множества Y.*

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно на Y.

Пусть для любого $b > a$ $f(x,y) \underset{\binom{y \to y_0,}{x \in [a,b]}}{\rightrightarrows} g(x)$.[10] *Тогда интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

[10]То есть на каждом конечном сегменте сходимость равномерная. На $[a,+\infty)$ равномерной сходимости может не быть, условие в теореме более слабое. Это важное ослабление условий.

сходится и

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

То есть это теорема о том, что при определенных условиях можно перейти к пределу под знаком интеграла.

Доказательство. Введем функцию[11]

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

По условию, несобственный интеграл

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно, значит, $F_b(y) \underset{\binom{b\to+\infty,}{y\in Y}}{\rightrightarrows} F(y)$.[12] Пусть $y \to y_0$. Тогда, по теореме о переходе к пределу в собственном интеграле,

$$F_b(y) \to \int_a^b g(x)dx.$$

Тогда, по теореме о предельном переходе для семейств

$$\int_a^b g(x)dx \underset{(b\to+\infty)}{\to} A$$

и

$$F(y) \underset{y\to y_0}{\to} A.$$

Это означает

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = A = \lim_{y\to y_0} F(y).$$

□

[11] Это собственный интеграл, зависящий от параметра.

[12] это определение сходимости несобственного интеграла: он сходится равномерно, если частичные интегралы сходятся равномерно.

Следующая теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

Теорема 68. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$.*[13]

Пусть интеграл

$$F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно для $y\in[c,d]$. Тогда функция $F_b(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Возьмем любую точку $y_0\in[c,d]$. Покажем, что в этой точке функция непрерывна. А так как точка любая, то в любой точке непрерывна.

Докажем вспомогательный факт, что $f(x,y) \underset{\left(\substack{y\to y_0,\\ x\in[a,b]}\right)}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$ (здесь $b>a$ — любое число).

$[a,b]\times[c,d]$ — компакт, функция $f(x,y)$ непрерывна на нем, значит, равномерно непрерывна. Значит,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x_1,x_2 \quad \forall y_1,y_2 \quad |x_1-x_2|<\delta \quad |y_1-y_2|<\delta$$
$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\varepsilon.$$

Возьмем $x_1=x_2=x$, тогда неравенство

$$|x_1-x_2|<\delta$$

превращается в верное неравенство

$$0<\delta$$

Возьмем $y_2=y$, $y_1=y_0$, тогда если $|y-y_0|<\delta$, то

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon,$$

что означает равномерную сходимость. Вспомогательный факт доказан. Тогда, по теореме 67,

$$\lim_{y\to y_0}F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx=F(y_0).$$

Это означает, что функция $F(y)$ непрерывна в точке y_0. □

[13] x принадлежит $[a,+\infty)$, а y принадлежит конечному сегменту $[c,d]$.

Следующая теорема — об интегировании несобственного интеграла.

Теорема 69. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, +\infty) \times [c, d]$.*

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

сходится раномерно $y \in [c, d]$. Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Это теорема об интегрируемости по параметру. Она утверждает, что при определенных условиях можно менять местами конечный интеграл и бесконечный.

Доказательство.

$$\int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx = (\text{по определению}) = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx =$$

(под знаком предела два обычных интеграла Римана, в них можно менять порядок интегрирования)

$$= \lim_{b \to +\infty} \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy =$$

(внешний интеграл конечный, и была доказана теорема о том, что предел можно вносить внутрь него, ее условия выполнены)

$$= \int\limits_c^d \left(\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy.$$

$\square$

Следующая теорема — об дифференцировании несобственного интеграла.

Теорема 70. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, +\infty) \times [c, d]$.*

Пусть у этой функции существует частная производная $f'_y(x, y)$, и она непрерывна на $[a, +\infty) \times [c, d]$.

Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,c)dx$$

сходится.[14]

Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$*. Тогда интеграл*

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$*, функция* $F(y)$ *непрерывно дифференцируема и*

$$F'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

Это теорема о дифференцируемости по параметру.

Доказательство. Введем семейство функций

$$F_b(y) = \int_a^{b} f(x,y)dx, \qquad y \in [c,d].$$

По условию, семейство $\{F_b(y)\}$ сходится при $y = c$.

Найдем производную функции $F(y)$ (то есть нужно продифференцировать по параметру собственный интеграл, у нас была теорема, что это можно делать и чему равна производная):

$$F'_b(y) = \left(\int_a^{b} f(x,y)dx\right)' = \int_a^{b} f'_y(x,y)dx.$$

По условию, последний интеграл сходится равномерно, значит, $F'_b(y)$ сходится равномерно. Применим теорему о дифференцируемости семейства,

[14] То есть этот числовой интеграл сходится на левом конце промежутка $[c,d]$.

получаем, что интеграл

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно, тогда функция $F(y)$ непрерывно дифференцируема и

$$F'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

$\square$

Эта теорема вытекает из ранее доказанной теоремы для семейств.

Следующая теорема о перестановке двух несобственных интегралов. Она немного особняком стоит.

Теорема 71. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$.*

Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится абсолютно и равномерно для $y\in[c,d]$, где $d>c$ — любое число.[15]

Пусть интеграл

$$\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

сходится абсолютно и равномерно для любого $x\in[a,b]$, для любого $b>a$.

Пусть сходится хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^{+\infty}|f(x,y)|dy\right)dx, \qquad \int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx\right)dy.$$

Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)dx\right)dy.$$

[15] То есть этот интеграл сходится на любом конечном сегменте.

Доказательство. Условия сходимости повторных интегралов из теоремы симметричны, допустим, что сходится второй из них, то есть интеграл

$$\int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx\right)dy$$

сходится. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}\left(\int\limits_c^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx=$$

(по теореме 69, внешний и внутренний интеграл можно поменять местами)

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{b}f(x,y)dx\right)dy=$$

(как и раньше, обозначим внутренний интеграл $F_b(y)$)

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^{+\infty}F_b(y)dy.$$

Мы хотим в последнем пределе внести предел внутрь интеграла. По теореме 67, для этого нужно, чтобы интеграл $\int\limits_c^{+\infty}F_b(y)dy$ сходился равномерно по b. Проверим это. Для этого оценим функцию $F_b(y)$:

$$|F_b(y)|=\left|\int\limits_a^{b}f(x,y)dx\right|\leqslant\int\limits_a^{b}|f(x,y)|dx\leqslant\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx.$$

Последний в цепочке интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx$ обозначим $g(y)$. Тогда интеграл от этой функции

$$\int\limits_c^{+\infty}g(y)dy=\int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx\right)dy$$

сходится по условию. Тогда, по признаку Вейерштрасса, интеграл от функции $F_b(y)$ сходится равномерно, то есть интеграл

$$\int\limits_c^{+\infty}F_b(y)dy$$

сходится равномерно. Теперь мы можем продолжить равенства для интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx$:

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^{+\infty} F_b(y)dy = \int\limits_c^{+\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_c^{+\infty}\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy.$$

□

Следующий пример интересен не просто как пример. При его разборе мы по ходу вычислим интеграл, который элементарными способами не берется так же, как интеграл Пуассона.

Пример 38.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$F(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x}dx \qquad (\alpha,\beta\geqslant 0).$$

Этот интграл для любых α, β из указанного промежутка сходится, все эти интегралы равномерно сходятся, все необходимые условия для применяемых свойств здесь выполнены. Мы только проведем вычисления, а этих условий много, их все нужно проверять.

Возьмем производную введенной функции по α (ранее мы доказали теоремы, что можно продифференцировать подинтегральную функцию):

$$F'_\alpha(\alpha,\beta) = \left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x}dx\right)'_a = \int\limits_0^{+\infty}\frac{(\sin\alpha x)'_\alpha}{x}e^{-\beta x}dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cdot x}{x}e^{-\beta x}dx = \int\limits_0^{+\infty}\cos(\alpha x)\cdot e^{-\beta x}dx.$$

Мы получили интеграл, который берется (в то время как исходный элементарным способом не вычислить). Такие интегралы мы уже считали довольно специфическим способом. Нужно этот интеграл дважды проинтегрировать по частям, и он сам через себя выразится, тогда из рекурентных формул мы его найдем. Проведем эти вычисления. Обозначим

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\cos(\alpha x)\cdot e^{-\beta x}dx.$$

Дважды проитегрируем его по частям:

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\sin\alpha x)'}{\alpha}e^{-\beta x}dx=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\left(e^{-\beta x}\right)'dx=$$

$$=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}(-\beta)dx=(0-0)-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}(-\beta)dx=$$

$$=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}(-\beta)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\beta dx=\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\cdot e^{-\beta x}dx=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\cos\alpha x)'}{\alpha}\cdot e^{-\beta x}dx=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}(-\beta)dx\right)=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}\left((0-\frac{1}{\alpha})-\frac{-\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\cdot e^{-\beta x}dx\right)=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\cdot e^{-\beta x}dx\right)=$$

$$=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\cdot e^{-\beta x}dx\right)=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\cdot e^{-\beta x}dx=\frac{\beta}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}I(\alpha,\beta).$$

Мы получили рекурентную формулу

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} I(\alpha,\beta).$$

Из этого уравнения легко находим искомый интеграл:

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) I(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2},$$

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Итак,

$$F'_\alpha(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Чтобы найти $F(\alpha,\beta)$, возьмем интеграл по α:

$$F(\alpha,\beta) = \int \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} d\alpha = (\text{это просто табличный интеграл}) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + C.$$

Мы получили:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + C$$

при любых α, β константа C одна и та же. Чтобы ее найти, нужно взять какое-либо α. Возьмем $\alpha = 0$, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 0x}{x} e^{-\beta x} dx = \operatorname{arctg}\frac{0}{\beta} + C,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} 0 dx = 0 + C,$$

$$0 = 0 + C,$$

$$C = 0.$$

Значит,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

В этой формуле возьмем $\alpha = 1$, тогда она примет вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta}.$$

Проверьте, что в несобственном интеграле в левой части можно перейти пределу, то есть выполнены условия для предельного перехода. Перейдем к пределу при $\beta \to +0$. Получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Значит,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Этот интеграл в математике широко используется. Так же, как интеграл Пуассона, он много где встречается и оказывается очень полезным.

На этом глава «Несобственные интегралы, зависящие от параметра» закончена. Эти интегралы войдут в практику.

Следующая по программе глава «Интеграл Лебега» отсутствует. Ее рекомендуется изучать по книге У. Рудина «Основы математического анализа».