

Программа по математическому анализу

(2-й курс, 1-й семестр, 1-3 группы, 2025 г.)

Дифференцирование отображений. Дифференцируемость отображения в точке. Свойства дифференциала и производной. Дифференцируемость композиции отображений. Дифференцируемость обратного отображения. Теорема о дифференцируемости отображения и его координатных функций. Производная по направлению. Частные производные. Теоремы о связи дифференцируемости функции и существованием частных производных. Критерий непрерывной дифференцируемости отображения на множестве. Две теоремы о конечных приращениях. Теорема о локальном обращении (без доказательства). Теорема о неявном отображении (без доказательства). Частные производные старших порядков. Теорема о порядке дифференцирования. Формула Тейлора. Дифференциалы старших порядков. Локальный экстремум. Необходимое условие существования безусловного экстремума. Квадратичные формы. Достаточное условие существования безусловного экстремума. Условный экстремум. Связь условного экстремума с безусловным. Необходимое условие условного экстремума. Достаточное условие условного экстремума (без доказательства).

Функциональные последовательности. Определение поточечной и равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий равномерной сходимости. Критерий Коши. Теорема о повторном пределе. Непрерывность предельной функции. Теорема об интегрируемости предельной функции. Теорема о дифференцируемости предельной функции. Теорема Дини.

Функциональные ряды. Определение поточечной и равномерной сходимостей функционального ряда. Критерий Коши. Теоремы о функциональных рядах. Признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Ряд Дирихле. Признак Абеля. Степенные ряды. Радиус сходимости. Две теоремы о равномерной сходимости степенного ряда. Теорема о дифференцируемости степенного ряда. Теорема о коэффициентах степенного ряда. Ряд Тейлора. Пример. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Теорема единственности для степенных рядов.

Семейства функций. Определение поточечной сходимости семейства функций. Определение Коши равномерной сходимости семейства функций. Критерий равномерной сходимости семейства функций. Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций. Определение Гейне равномерной сходимости семейства функций. Равносильность определений Коши и Гейне. Теоремы о пределе семейства функций.

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. Две теоремы о дифференцируемости собственного интеграла по параметру.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса. Достаточное условие, когда интеграл не сходится равномерно. Признак Дирихле. Признак Абеля. Теорема о предельном переходе по параметру в несобственном интеграле. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Теорема об интегрируемости несобственного интеграла по параметру. Теорема о дифференцируемости несобственного интеграла по параметру. Теорема о перестановке несобственных интегралов. Интеграл Дирихле.

Ряды Фурье. Скалярное произведение функций. Ортогональность тригонометрических функций. Тригонометрические многочлены. Теорема о коэффициентах тригонометрического многочлена. Определение ряда Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства. Лемма Римана. Условие Дини. Теорема о сходимости ряда Фурье. Пример. Суммы Фейера. Ядро Фейера и его свойства. Теорема о сходимости сумм Фейера. Две теоремы Вейерштрасса.