ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. КОЗАК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(семестровый курс лекций, семестр 1)

Ростов-на-Дону
2008

Козак А.В.

Название: Математический анализ. Семестровый курс лекций, семестр 1. – Ростов-на-Дону, 2008. – 119 с.

Содержится краткое изложение курса математического анализа для студентов математических специальностей университетов. Изложение основано на курсе лекций, который автор читает на отделении прикладной математики факультета математики механики и компьютерных наук. Особое внимание уделено разъяснению основных понятий и примерам их использования. Данный курс окажет большую помощь при самостоятельном изучении математического анализа. Данная часть отражает материал первого семестра.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ является основой математической подготовки специалистов в любой области. Он читается студентам, как естественнонаучных специальностей, так и гуманитариям. На факультете математики, механики и компьютерных наук он читается на всех отделениях. В силу объективных причин он является наиболее трудным предметом на младших курсах. По математическому анализу имеется обширная учебная литература, ориентироваться в которой первокурснику затруднительно. Разнообразие подходов даже к основным понятиям математического анализа еще больше усугубляют ситуацию.

Данное пособие написано на основе курса лекций читаемого автором на протяжении многих лет студентам отделения прикладной математики. Он охватывает материал первого семестра обучения и соответствует стандарту по направлению «Прикладная математика и информатика» (бакалавриат). В конце каждого семестра по курсу предусмотрен зачет по практике и экзамен по теории. Курс состоит из трех модулей, содержащих лекционные и контрольные материалы.

Изложение опирается на школьный курс математики. Мы будем использовать следующие обозначения из математической логики и теории множеств:

$\Rightarrow$ - следует;

$\Leftrightarrow$ - равносильно;

$\forall$ - для всех;

$\exists$ - существует;

$\cup$ - объединение;

$\cap$ - пересечение.

Подробно эти понятия изучаются в курсе дискретной математики.

1. Предел числовой последовательности

1.1. Вещественные числа.

Существует несколько подходов к определению вещественных чисел. Мы будем придерживаться аксиоматического подхода. Подробное изложение всех свойств вещественных чисел занимает очень много времени, поэтому мы ограничимся только основными. Детальное изложение теории вещественных чисел содержится в [1].

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется полем вещественных чисел, если:

I. В $\mathbb{R}$ определена операция сложения, обладающая следующими свойствами:
   1) $x+y=y+x$ (коммутативность),
   2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность),
   3) $\exists 0 \quad \forall x \quad x+0=x$ (существование нуля),
   4) $\forall x \quad \exists y \quad x+y=0$ (существование противоположного числа).

II. В $\mathbb{R}$ определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:
   1) $x\cdot y=y\cdot x$ (коммутативность),
   2) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (ассоциативность),
   3) $\exists 1\neq 0 \quad \forall x \quad 1\cdot x=x$ (существование единицы),
   4) $\forall x\neq 0 \quad \exists y \quad x\cdot y=1$ (существование обратного числа).

III. Операции сложения и умножения связаны следующим свойством:
   1) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (дистрибутивность).

IV. На множестве $\mathbb{R}$ введено отношение линейного порядка $(\leq)$. Т.е. отношение обладает следующими свойствами:
   1) $x\leq x$ (рефлексивность),

2) $\left\{\begin{matrix} x \le y \\ y \le x \end{matrix}\right| \Rightarrow x = y$ (антисимметричность).

3) $\left\{\begin{matrix} x \le y \\ y \le z \end{matrix}\right| \Rightarrow x \le z$ (транзитивность),

4) $\forall x, y \quad (x \le y) \vee (y \le x)$.

V. Отношение порядка связано с операцией сложения следующей аксиомой:

1) $\forall z \quad (x \le y) \Rightarrow (x + z \le y + z)$

VI. Отношение порядка связано с операцией умножения следующей аксиомой:

1) $\left\{\begin{matrix} 0 \le x \\ 0 \le y \end{matrix}\right| \Rightarrow 0 \le x \cdot y$

VII. На множестве $\mathbb{R}$ выполняется следующая аксиома непрерывности (полноты):

1) Для любых непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x \le y)$ существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $x \le a \le y$ для всех $x \in X, \quad y \in Y$.

Введем понятие точной грани множества.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \quad \forall x \in X \quad x \le M$. Число M, удовлетворяющее последнему условию, называется верхней гранью множества X.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \quad \forall x \in X \quad x \ge m$. Число m, удовлетворяющее последнему условию, называется нижней гранью множества X.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу, то есть $\exists M \quad \exists m \quad \forall x \in X \quad m \le x \le M$.

Определение. Элемент $x_0 \in X$ называется наибольшим элементом множества X, если $\forall x \in X \quad x \le x_0$. Для этого элемента будем использовать обозначение $x_0 = \max X$.

Определение. Элемент $x_0 \in X$ называется наименьшим элементом множества X, если $\forall x \in X \quad x \ge x_0$; $x_0 = \min X$.

Определение. Наименьшая верхняя грань множества X называется его точной верхней гранью и обозначается как $\sup X$.

Теорема. *Любое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть $X \ne \varnothing$, X - ограниченно сверху. Обозначим через Y множество всех его верхних граней, $Y \ne \varnothing$. Очевидно, выполняется условие $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \le y$. Тогда по аксиоме непрерывности $\exists a \in \mathbb{R}$, обладающий свойством $x \le a \le y$ для всех $x \in X, y \in Y$. То есть a - точная верхняя грань. Теорема доказана.

Непосредственно из определения точной верхней грани вытекает утверждение.

Теорема. *Справедлива эквивалентность*

$$a = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \le a \\ \forall b < a \quad \exists x \in X \quad x > b \end{cases}.$$

Определение. Наибольшая из нижних граней множества X называется точной нижней гранью и обозначается через $\inf X$.

Для точной нижней грани справедливы теоремы, аналогичные приведенным выше.

Теорема. *Любое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.*

Теорема. *Справедлива эквивалентность*

$$a = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \ge a \\ \forall b > a \quad \exists x \in X \quad x < b \end{cases}.$$

При аксиоматическом определении вещественных чисел натуральные числа определяются как часть вещественных, обладающих некоторыми свойствами.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если:

1) $1 \in I$,

2) $\forall x \quad (x \in I) \Rightarrow ((x+1) \in I)$.

Определение. Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств.

Множеством натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$.

Следующая теорема формализует принцип математической индукции.

Теорема. *Пусть* $P(n)$ - *некоторое высказывание, определенное* $\forall n \in \mathbb{N}$ *. Пусть далее*

1) $P(1)$- *истина,*

2) $\forall n \quad (P(n) \to P(n+1))$.

Тогда $\forall n \quad P(n)$ - *истина.*

Доказательство. Пусть $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n) - \textit{истина}\}$. По определению $M \subset \mathbb{N}$. Кроме того, так как $P(1)$ - истина, то $1 \in M$. Если $n \in M$, то $P(n)$ - истина, следовательно, $P(n+1)$ - истина, а значит $(n+1) \in M$. Таким образом M - индуктивное множество. Но любое индуктивное множество содержит $\mathbb{N}$, следовательно, $M = \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Теорема. *Для любого* $x > -1$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

(неравенство Бернулли). Неравенство Бернулли превращается в равенство тогда и только тогда, когда $n = 1$ *или* $x = 0$.

Доказательство.

1) Если $n = 1$ $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ - верно.

2) Допустим, что неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ верно для некоторого n, тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Т.е. $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

По принципу математической индукции неравенство Бернулли справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Докажем вторую часть утверждения. Очевидно, что при $n=1$ и $x=0$ неравенство Бернулли превращается в равенство:

$$n=1, \quad (1+x)^1 = 1+1\cdot x,$$
$$x=0, \quad (1+0)^n = 1+n\cdot 0.$$

Пусть $(n>1)\wedge(x\neq 0)$, тогда $n=m+1$, где $m\in\mathbb{N}$ и, следовательно,

$$(1+x)^n = (1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx) = 1+x+mx+mx^2 >$$
$$> 1+(m+1)x = 1+nx.$$

Т.е. неравенство является строгим. Теорема доказана.

Определение. Пусть $n\in N$, тогда $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Определение. $0! = 1$.

Определение. Пусть $n\in N \quad k\in Z \quad k\geq 0$. Биномиальным коэффициентом называется число $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Лемма. *Справедливо равенство* $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Имеем

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} =$$
$$= C_{n+1}^{k+1}.$$

Что и требовалось доказать.

Запишем биномиальные коэффициенты в виде таблицы

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Такая таблица называется треугольником Паскаля. По лемме сумма любых двух соседних коэффициентов из одной строки равна элементу следующей строки, стоящему между ними. Это правило дает простой способ вычисления биномиальных коэффициентов. Имеем

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Теорема. *Справедлива формула*

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n .$$

Приведенная формула называется биномом Ньютона. Если ввести обозначение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n ,$$

то бином Ньютона можно записать в виде

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Доказательство.

1) Пусть $n=1$, тогда $\left(a+b\right)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$ - формула верна.

2) Допустим, что формула справедлива для некоторого n. Докажем её справедливость для $n+1$.

Имеем

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \\ &= (a+b)(C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n) = \\ &= C_n^0a^{n+1} + C_n^1a^nb + \cdots + C_n^{n-1}a^2b^{n-1} + C_n^nab^n + \\ &\quad + C_n^0a^nb + \cdots + C_n^{n-2}a^2b^{n-1} + C_n^{n-1}ab^n + C_n^nb^{n+1} = \\ &= C_{n+1}^0a^{n+1} + C_{n+1}^1a^nb + C_{n+1}^2a^{n-1}b^2 + \cdots + C_{n+1}^{n-1}a^2b^{n-1} + C_{n+1}^nab^n + C_{n+1}^{n+1}b^{n+1} = \\ &= (a+b)^{n+1}.\end{aligned}$$

В силу принципа математической индукции формула доказана.

Определение. Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется число $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Определение. Средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n \ge 0$ называется число $\varGamma_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Теорема. *Для любых вещественных чисел* $a_1, a_2, \cdots, a_n \ge 0$

$$A_n \ge \varGamma_n$$

или более подробно

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Это неравенство называется неравенством Коши для среднего арифметического и среднего геометрического. Неравенство Коши превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство.

1) Если хотя бы одно из исходных чисел $a_k = 0$, то $\varGamma_n = 0$ $A_n \ge 0$ и, следовательно, неравенство $A_n \ge \varGamma_n$ выполнено. Это неравенство превращается в равенство только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

2) Если $n=1$, тогда $\Gamma_1 = a_1$ $A_1 = a_1$ и $A_1 \ge \Gamma_1$.

3) Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ и $n > 1$. Тогда с помощью неравенства Бернулли получаем:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \left(1+\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)\right)^n = (1+x)^n \ge 1+nx = 1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right) = \frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}} =$$

$$= \frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Т.е. $\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \ge \frac{a_n}{A_{n-1}}$. Домножив это неравенство на $A_{n-1}^n > 0$, получим

$$A_n^n \ge a_n A_{n-1}^{n-1}.$$

Отсюда

$$A_n^n \ge a_n A_{n-1}^{n-1} \ge a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \ge \cdots \ge a_n a_{n-1} \cdots a_2 A_1^1 = a_1 a_2 \cdots a_n = \Gamma_n^n$$

Или $A_n \ge \Gamma_n$.

4) Допустим теперь, что $A_n = \Gamma_n$. Тогда справедлива цепочка равенств

$$A_n^n = a_n A_{n-1}^{n-1} = a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} = \cdots = a_n a_{n-1} \cdots a_2 A_1^1.$$

Так как в неравенстве Бернулли $(1+x)^n \ge 1+nx$ равенство будет тогда, и только тогда, когда $n=1$ или $x=0$ и в нашем случае $n>1$, то

$$x = \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = 0.$$

Отсюда

$$A_n = A_{n-1} = A_{n-2} = \cdots = A_1.$$

Из условия $A_n = A_{n-1}$ получаем

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

$$\left(n-1\right)\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)=n\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\right),$$
$$\left(n-1\right)a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1},$$
$$a_n=A_{n-1},$$
$$A_n=A_{n-1}\Leftrightarrow a_n=A_{n-1},$$
$$A_n=A_{n-1}=A_{n-2}=\cdots=A_2=A_1=a_1\Rightarrow$$
$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

Теорема доказана.

Теорема Кантора. *Для любой последовательности сегментов* $\left[a_n,b_n\right]$, *такой что* $\left[a_1,b_1\right]\supset\left[a_2,b_2\right]\supset\left[a_3,b_3\right]\cdots$, *существует элемент* $x\in\mathbb{R}$, *такой что* $\forall n\in\mathbb{N}\ x\in\left[a_n,b_n\right]$. *Если* $\forall\varepsilon>0\quad\exists n$, *такое что* $b_n-a_n<\varepsilon$, *то такой элемент* x *ровно один.*

Доказательство.

1). Обозначим через A множество левых концов сегментов, а через B множество правых концов: $A=\left\{a_1,a_2,\cdots\right\}$, $B=\left\{b_1,b_2,\cdots\right\}$. Докажем, что $a_k\le b_l\quad\forall k,l$. Допустим противное: существуют такие k и l, что $a_k>b_l$, тогда можно написать цепочку неравенств $a_l\le b_l<a_k\le b_k$, но тогда $\left[a_l;b_l\right]\cap\left[a_k;b_k\right]=\varnothing$, чего быть не может в силу вложения сегментов. По аксиоме непрерывности существует x, такое что $a_k\le x\le b_l$. Отсюда в частности $a_k\le x\le b_k$, то есть $x\in\left[a_k;b_k\right]\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

2). Пусть для $\forall\varepsilon>0\quad\exists n\quad b_n-a_n<\varepsilon$, Допустим, что существует две точки $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, такие что $x_1\ne x_2, x_1\in\left[a_k;b_k\right], x_2\in\left[a_k;b_k\right]$ для любых $k\in\mathbb{N}$. Возьмем $\varepsilon=\left|x_1-x_2\right|>0$. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}\qquad\varepsilon\le b_k-a_k$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

1.2. Предел числовой последовательности.

Дадим определение числовой последовательности.

Определение. Функция $f:\mathbb{N}\to Y$, где $Y\subset\mathbb{R}$ называется числовой последовательностью.

Пусть $a_n = f(n)$. Для последовательности используются следующие обозначения: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1, a_2, a_3, \cdots$.

Определение. Число $A\in\mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad |a_n - A|<\varepsilon$.

Теорема. *Если предел последовательности существует, то он ровно один.*

Доказательство. Допустим противное, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет два предела $A, \quad B, \quad A\neq B$. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{|A-B|}{2}>0$. По определению предела $\exists N_1 \quad \forall n>N_1 \quad |a_n - A|<\varepsilon$ и $\exists N_2 \quad \forall n>N_2 \quad |a_n - B|<\varepsilon$. Пусть $n_0 > N_1, N_2$, тогда

$$|a_{n_0} - A|<\varepsilon,$$
$$|a_{n_0} - B|<\varepsilon,$$
$$|A-B| = \left|\left(A-a_{n_0}\right)+\left(a_{n_0}-B\right)\right| \le \left|A-a_{n_0}\right|+\left|a_{n_0}-B\right| < 2\varepsilon = |A-B|.$$

Получили противоречие: $|A-B|<|A-B|$. Теорема доказана.

Для предела последовательности используется следующее обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной сверху, если $\exists M \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\le M$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной снизу, если $\exists m \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\ge m$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Теорема. *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < 1$, или, что то же самое

$$-1 < a_n - A < 1,$$
$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Пусть $M = \max\{a_1, \cdots, a_N, A+1\}$, $m = \min\{a_1, \cdots, a_N, A-1\}$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \ m \le a_n \le M.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \quad a_n \ne 0, \quad A \ne 0$, *то последовательность* $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ - *ограничена.*

Доказательство.

1). Пусть $A > 0, \quad \varepsilon = \dfrac{A}{2}$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$. Отсюда

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon, \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}, \quad \frac{2}{A} > \frac{1}{a_n} > \frac{2}{3A}.$$

Положив $M = \max\left\{\dfrac{1}{|a_1|}, \dfrac{1}{|a_2|}, \cdots, \dfrac{1}{|a_N|}, \dfrac{2}{A}\right\}$, получим $\forall n \in \mathbb{N} \left|\dfrac{1}{a_n}\right| \le M$.

2). Пусть $A < 0, \quad \varepsilon = -\dfrac{A}{2}$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$. Следовательно,

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon, \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \frac{3A}{2} < a_n < \frac{A}{2}, \quad \frac{2}{3A} > \frac{1}{a_n} > \frac{2}{A}.$$

Положив $M = \max\left\{\dfrac{1}{|a_1|}, \dfrac{1}{|a_2|}, \cdots, \dfrac{1}{|a_N|}, \dfrac{2}{-A}\right\}$, получим $\forall n \in \mathbb{N} \left|\dfrac{1}{a_n}\right| \le M$.

Теорема доказана.

1.3. Бесконечно малые последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно 16Алой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *тогда и только тогда, когда* $\{a_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая последовательность.*

Доказательство.

1). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.

2). $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A - 0| < \varepsilon$.

Очевидно, что условия в 1). И 2). Совпадают. Теорема доказана.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1) Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малые последовательности, то* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть ε - произвольное положительное число. По определению пределов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ для $\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

$$\forall n > N \quad |a_n - b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
$$\forall n > N \quad |a_n + b_n| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая. Свойство доказано.

2) Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая последовательность, то* $\{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая последовательность.*

Доказательство.

a) Если $\alpha = 0$, то свойство очевидно.

b) Если $\alpha \neq 0$, то для $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Отсюда

$$|\alpha a_n| = |\alpha||a_n| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon,$$

$$\forall n > N \quad |\alpha a_n| < \varepsilon.$$

Свойство доказано.

3) Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малые, то $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая.

Доказательство. Так как $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малые, то $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$ - бесконечно малая.

4) Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая, а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, то $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая.

Доказательство. По условию $\exists M > 0 \quad \forall n \in N \quad |b_n| \leq M$.

Возьмем $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Отсюда

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Значит $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая. Что и требовалось доказать.

Арифметические свойства предела.

1) $$\left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

Доказательство:

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B\end{cases}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix}\{a_n - A\} - б.м.\\ \{b_n - B\} - б.м.\end{matrix}\right| \Rightarrow \{(a_n - A) + (b_n - B)\} - б.м..$$

То есть $\{(a_n + b_n) - (A + B)\} - б.м.$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B.$$

Что и требовалось доказать.

2) $\left.\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha A$

Доказательство.

$$\left.\lim_{n\to\infty} a_n = A\right| \Rightarrow \left.\{a_n - A\}_{n=1}^{\infty} - б.м.\right| \Rightarrow \left.\{\alpha(a_n - A)\}_{n=1}^{\infty} - б.м.\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\{\alpha a_n - \alpha A\}_{n=1}^{\infty} - б.м.\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha A.$$

3) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B\end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

Доказать самостоятельно.

4) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B\end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = A \times B$

Доказательство. Запишем равенство

$$a_n b_n - AB = a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB = b_n(a_n - A) + A(b_n - B).$$

Так как

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B\end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix}\{a_n - A\} - б.м.\\ \{b_n - B\} - б.м.\end{matrix}\right..$$

И так как b_n - ограничена, то $b_n(a_n - A) + A(b_n - B)$ - бесконечно малая.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$. Свойство доказано.

5) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \\ \forall n \quad b_n \neq 0 \\ B \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство. Имеем равенства

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} = \frac{a_n B - AB + AB - b_n A}{b_n B} = \frac{(a_n - A)B - A(b_n - B)}{b_n B} =$$
$$= \frac{1}{B}\frac{1}{b_n}\big((a_n - A)B - A(b_n - B)\big).$$

Так как $\frac{1}{B}$ - константа, $\frac{1}{b_n}$ - ограничена, $(a_n - A)B - A(b_n - B)$ - бесконечно малая, то $\frac{1}{B}\frac{1}{b_n}\big((a_n - A)B - A(b_n - B)\big)$ - бесконечно малая.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$. Свойство доказано.

Свойства пределов, связанные с неравенствами.

1) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ A < B \end{array}\right| \Rightarrow \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B$.

Доказательство. Для

$$\varepsilon = B - A > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon,$$
$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon = A + (B - A) = B,$$
$$\forall n > N \quad a_n < B.$$

Свойство доказано.

2) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ A > B \end{array}\right| \Rightarrow \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > B$.

Доказательство. По условию

$$\lim_{n\to\infty}\left(-a_n\right)=-A$$

$-A<-B.$

Тогда из свойства 1: $\exists N \quad \forall n>N \quad -a_n<-B$. Т.е. $a_n>B$.

Свойство доказано.

3) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \forall n \quad a_n \le B\end{cases}\right| \Rightarrow A \le B$.

Доказательство. Допустим противное: $A>B$, тогда $\exists N \quad \forall n>N \quad a_n>B$, но по условию $\forall n \quad a_n \le B$, то есть предположение ошибочно.

Свойство доказано.

4) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \forall n \quad a_n \ge B\end{cases}\right| \Rightarrow A \ge B$

Доказать самостоятельно.

5) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \\ A<B\end{cases}\right| \Rightarrow \exists N \quad \forall n>N \quad a_n>b_n$

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=A-B<0$, значит $\exists N \quad \forall n>N \quad a_n-b_n<0$ по первому свойству. Что и требовалось доказать.

6) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \\ \forall n \quad a_n \le b_n\end{cases}\right| \Rightarrow A \le B$

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=A-B, \quad a_n-b_n\le 0$, следовательно, $A-B\le 0$ по третьему свойству. Что и требовалось доказать.

Теорема (Теорема о трёх последовательностях).

$$\left\{\begin{array}{l}\forall n \quad a_n \le b_n \le c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A.$$

Доказательство. По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \left| \begin{array}{lll}\exists N_1 & \forall n > N_1 & |a_n - A| < \varepsilon \\ \exists N_2 & \forall n > N_2 & |c_n - A| < \varepsilon\end{array}\right. .$$

Отсюда для $\forall n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon,$$

$$|b_n - A| < \varepsilon.$$

А это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Теорема доказана.

Следствие.

$$\left\{\begin{array}{l}\forall n \quad A \le b_n \le c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$$

Доказательство. Положим $a_n = A$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad a_n \le b_n \le c_n$$

И по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Следствие доказано.

1.4. Бесконечно большие последовательности.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > E$.

Такие последовательности будем называть бесконечно большими.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > E$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < -E$.

Теорема. *Пусть члены последовательности* $a_n \neq 0$. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно большая тогда и только тогда, когда* $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ *- бесконечно малая.*

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ положим $E = \dfrac{1}{\varepsilon}$. По определению бесконечно большой последовательности

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > E.$$

Отсюда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{E} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. Возьмем произвольное число $E > 0$.

Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{E}$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$.

Аналогично первому пункту получим, что $|a_n| > E$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся, если она имеет конечный предел.

1.5. Примеры вычисления пределов.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0 \quad (\alpha>0).$

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon \Leftrightarrow n^\alpha>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\exists N\ge\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall n>N \quad \left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0 \quad (|a|>1).$

$$|a|^n=\left(1+\left(|a|-1\right)\right)^n=(1+x)^n\ge 1+nx>nx,$$

$$0<\frac{1}{|a^n|}<\frac{1}{nx}\to 0,$$

$$\frac{1}{|a|^n}\to 0 \Rightarrow \frac{1}{a^n}\to 0.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=0 \quad (|a|>1).$

$$\exists k\in\mathbb{N} \quad k\ge\alpha+1 \quad k-1\ge\alpha,$$

$$|a|^{\frac{1}{k}}>1,$$

$$|a|^{\frac{n}{k}}=\left(1+\left(|a|^{\frac{1}{k}}-1\right)\right)^n=(1+x)^n\ge 1+nx>nx,$$

$$\frac{1}{|a|^{\frac{n}{k}}}<\frac{1}{nx}\Rightarrow\frac{n}{|a|^{\frac{n}{k}}}<\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{n^k}{|a|^n}<\frac{1}{x^k}\Rightarrow\frac{n^{k-1}}{|a|^n}<\frac{1}{nx^k}\Rightarrow\frac{n^\alpha}{|a|^n}\le\frac{n^{k-1}}{|a|^n}<\frac{1}{nx^k}.$$

Так как $\dfrac{1}{nx^k}\to 0$, то $\dfrac{n^{k-1}}{a^n}\to 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=0 \quad a>0$

а) $a\ge 1$.

$$\sqrt[n]{a} \ge 1,$$

$$1 \le \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \le \frac{a+n-1}{n} = \frac{(a-1)+n}{n} = \frac{a-1}{n} + 1 \to 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \le \sqrt[n]{a} \le b_n \\ b_n \to 1 \end{array}\right| \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1.$$

b) $0 < a \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

5) Если $-1 < m \le a_n \le M$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a_n} = 1.$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1+m} \le \sqrt[n]{1+a_n} \le \sqrt[n]{1+M} \to 1,$$

$$\sqrt[n]{1+a_n} \to 1.$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2}} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n},$$

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}\right) \to 1,$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

$$\exists k \quad k \le |a| < k+1$$

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a^n|}{n!} = \frac{|a||a|\cdots\cdots|a|}{1\cdot 2\cdots n} = \underbrace{\frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{1\cdot 2\cdots k}}_{const \quad c} \frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{(k+1)\cdots(n-1)} \frac{|a|}{n} \le c\frac{|a|}{n} \to 0,$$

$$\frac{a^n}{n!} \to 0$$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\le\frac{1}{n}\to 0$$
$$\frac{n!}{n^n}\to 0$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$

a) $0<a<1$ - очевидно.

b) $a>1$

$$\left|\frac{\log_a n}{n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\log_a n<n\varepsilon\Leftrightarrow n<a^{n\varepsilon}\Leftrightarrow\sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1<a^{\varepsilon}$, то $\exists N\quad\forall n>N\quad\sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}$. Но тогда $\forall n>N\quad\left|\dfrac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon$.

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^\alpha}=0\quad\left(a>0, a\ne 1,\alpha>0\right)$.

$$n^\alpha\to+\infty\Rightarrow$$
$$\exists m_n\left(m_n-1\le n^\alpha<m_n\right)$$
$$m_n\in N,\quad m_n\to+\infty.$$

Справедлива оценка

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha}=\frac{\frac{1}{\alpha}\log_a n^\alpha}{n^\alpha}\le\frac{\frac{1}{\alpha}\log_a m_n}{m_n-1}=\frac{\frac{1}{\alpha}m_n}{m_n-1}\frac{\log_a m_n}{m_n}\le\frac{2}{\alpha}\left(\frac{\log_a m_n}{m_n}\right).$$

Так как $\left(\dfrac{\log_a m}{m}\right)\to 0$ при $m\to+\infty$, то $\exists M\quad\forall m>M\quad\left|\dfrac{2}{\alpha}\dfrac{\log_a m}{m}\right|<\varepsilon$,

следовательно, $\exists N\quad\forall n>N\quad m_n>M\quad\dfrac{\log_a n}{n^\alpha}<\varepsilon$.

1.6. Монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется возрастающей, если $\forall n \quad a_{n+1} \geq a_n$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \quad a_{n+1} > a_n$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется убывающей, 26Сли $\forall n \quad a_{n+1} \leq a_n$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго убывающей, если $\forall n \quad a_{n+1} < a_n$.

Теорема. *Любая возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - возрастает, то есть $a_{n+1} \geq a_n$, и ограничена сверху, то есть $\exists M \quad \forall n \quad a_n \leq M$. Пусть $A = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. Так как $A = \sup\limits_{n \in N} a_n$, то $\forall n \quad a_n \leq A$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда число $A - \varepsilon$ не является верхней гранью для $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно,
$\exists n_0 \quad a_{n_0} > A - \varepsilon$, тогда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\forall n > n_0 \quad a_n > A - \varepsilon$. Таким образом т.е. $\forall n > n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$. Отсюда
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. Теорема доказана.

Теорема. *Любая убывающая ограниченная снизу последовательность имеет конечный предел.*

Доказать самостоятельно.

Лемма. *Последовательность* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *строго возрастает, а последовательность* $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *строго убывает.*

Доказательство.

1). Используем неравенство Коши

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}\times 1}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$a_n<a_{n+1}.$$

Значит, последовательность a_n строго возрастает.

2). Аналогично

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n}\times 1}<\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$b_{n-1}<b_n.$$

Значит, последовательность b_n строго возрастает.

Лемма доказана.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Доказательство. Для последовательностей

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\quad b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Справедливы неравенства

$$2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4\,.$$

Последовательности a_n и b_n монотонны и ограниченны, значит, обе имеют предел. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Теорема доказана.

Определение. Числом Непера называется число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Из доказанной теоремы вытекает, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Приведем приближенное значение числа e

$$e = 2{,}718281828459045\cdots.$$

По определению

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Этот предел называют вторым замечательным пределом.

1.7. Подпоследовательности.

Определение. Последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $b_k = a_{n_k}$.

Замечание. *Если последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *строго возрастает, то* $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Действительно,

$$\left.\begin{array}{l} n_1 \ge 1 \\ n_2 > n_1 \ge 2 \\ n_3 > n_2 \ge 3 \\ \ldots\ldots \end{array}\right| \Rightarrow n_k \ge k.$$

Теорема. *Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет точно такой же предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $b_k = a_{n_k}$. Рассмотрим несколько случаев.

1). $A \in \mathbb{R}$. Из определения предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon .$$

Так как $n_k \to +\infty$, то для числа $N \quad \exists K \quad \forall k > K \quad n_k > N$. Отсюда

$$\forall k > K \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon \Rightarrow \forall k > K \left|b_k - A\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = A .$$

2). $A = +\infty$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то

$$\forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > E .$$

По условию $n_k \to +\infty$, следовательно, $\exists K \quad \forall k > K \quad n_k > N$. Отсюда

$$\forall k > K \; a_{n_k} > E \Rightarrow \forall k > K \; b_k > E \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = +\infty .$$

3). $A = -\infty$. Доказывается аналогично.

4). $A = \infty$. Доказать самостоятельно.

Теорема доказана.

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая её подпоследовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A$.

Теорема. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *является частичным пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon .$$

Доказательство.

1). Пусть A- частичный предел, то есть существует подпоследовательность a_{n_k}, такая что $a_{n_k} \to A$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k > K \quad \left| a_{n_k} - A \right| < \varepsilon .$$

Так как $n_k \to +\infty$, то $\forall N \quad \exists K_1 \quad \forall k > K_1 \quad n_k > N$. Пусть $k_0 > K, K_1$, тогда для числа $n_0 = n_{k_0} \quad \left| a_{n_0} - A \right| < \varepsilon$. Мы получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n_0 > N \quad \left| a_{n_0} - A \right| < \varepsilon .$$

2). Пусть теперь $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad \left| a_n - A \right| < \varepsilon$. Докажем, что A - частичный предел. Построим подпоследовательность $\left\{ a_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему алгоритму

$\varepsilon = 1 \quad N = 1 \quad \exists n_1 > 1 \quad \left| a_{n_1} - A \right| < 1,$

$\varepsilon = \dfrac{1}{2} \quad N = n_1 \quad \exists n_2 > n_1 \quad \left| a_{n_2} - A \right| < \dfrac{1}{2},$

$\varepsilon = \dfrac{1}{3} \quad N = n_2 \quad \exists n_3 > n_2 \quad \left| a_{n_3} - A \right| < \dfrac{1}{3},$

$\ldots$

По построению $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

$0 \le \left| a_{n_k} - A \right| < \dfrac{1}{k},$

$a_{n_k} \to A.$

Следовательно, A - частичный предел.

Теорема доказана.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \; m \le x_n \le M$. Рассмотрим два случая.

1). Пусть $m = M$. В этом случае $x_n = M, \quad x_n \to M$. Следовательно, сходиться будет любая подпоследовательность.

2). Пусть $m < M$. Положим $m = a_0$, $M = b_0$. Рассмотрим сегмент $\left[a_0, b_0\right]$. Разделим $\left[a_0, b_0\right]$ на два сегмента. Обозначим через $\left[a_1, b_1\right]$ тот, который содержит бесконечно много членов последовательности $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Разделим его пополам и обозначим через $\left[a_2, b_2\right]$ тот, который содержит бесконечно много членов последовательности $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и так далее. В результате мы получили последовательность вложенных друг в друга сегментов

$$\left[a_0, b_0\right] \supset \left[a_1, b_1\right] \supset \left[a_2, b_2\right] \supset \cdots.$$

По теореме Кантора $\exists A \in \left[a_n, b_n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Построим подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}$ по следующему правилу

$\exists n_1 \quad x_{n_1} \in \left[a_1, b_1\right]$,

$\exists n_2 > n_1 \quad x_{n_2} \in \left[a_2, b_2\right]$,

$\exists n_3 > n_2 \quad x_{n_3} \in \left[a_3, b_3\right]$,

И так далее.

Мы получили подпоследовательность $x_{n_k} \in \left[a_k, b_k\right] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Так как $A, x_{n_k} \in \left[a_k, b_k\right]$, то $\left|x_{n_k} - A\right| \le b_k - a_k$. Для длин сегментов справедливы равенства $b_1 - a_1 = \dfrac{M - m}{2}$, $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{M - m}{2^2}$ и т. д. $b_k - a_k = \dfrac{M - m}{2^k}$. Отсюда $\left(b_k - a_k\right) \to 0$, следовательно, и $\left|x_{n_k} - A\right| \to 0$. Значит $x_{n_k} \to A$. То есть, мы получили подпоследовательность x_{n_k}, имеющую предел. Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$.

Лемма. *Любая фундаментальная последовательность ограниченна.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$**,** тогда по условию

$$\exists N \quad \forall m, n > N \quad \left|a_m - a_n\right| < 1.$$

Пусть $m_0 > N$ фиксированное число, тогда $\forall n > N \left|a_{m_0} - a_n\right| < 1$. Т.е. $\forall n > N\ a_{m_0} - 1 < a_n < a_{m_0} + 1$. Следовательно, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Лемма доказана.

Критерий Коши. *Последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство.

1). Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - имеет конечный предел, то есть $\exists A \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > N \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда для $m, n > N$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - A) + (A - a_n)| \le |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

2). Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m,n > N \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

По лемме последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists a_{n_k} \to A \in \mathbb{R}$. Докажем, что вся последовательность сходится к A. Имеем

$$\varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k > K \quad |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению фундаментальности $\exists N \quad \forall m,n > N \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $n_k \to +\infty$, то $\exists K_1 \quad \forall k > K_1 \quad n_k > N$. Пусть $k_0 > K, K_1$, тогда $\forall n > N$

$$|a_n - A| = \left|\left(a_n - a_{n_{k_0}}\right) + \left(a_{n_{k_0}} - A\right)\right| \le \left|a_n - a_{n_{k_0}}\right| + \left|a_{n_{k_0}} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

То есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Критерий доказан.

1.8. Верхний и нижний пределы.

В этом параграфе для простоты мы будем рассматривать только ограниченные последовательности. Все что мы докажем, с небольшими изменениями, переносится на произвольные последовательности.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность. Будем считать, что $\forall n \in \mathbb{N}\ m \le a_n \le M$. Введем новую последовательность

$$b_n = \sup_{k \ge n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $b_n \ge a_n, b_{n+1} \le b_n$. Т.е. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - монотонно убывает. Так как эта последовательность ограничена, то она имеет конечный предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Определение. Верхним пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется число $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Для верхнего предела используется обозначение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \ge n} a_k$. Так как b_n - монотонно убывают, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_n b_n$ и мы можем записать определение верхнего предела еще в одном виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \ge n} a_k.$$

Аналогично вводиться нижний предел.

$$c_n = \inf_{k \ge n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad c_n \in \mathbb{R},$$

$$c_n \le a_n, c_n \le c_{n+1}.$$

Определение. Нижним пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется число $C = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Из определения получаем:

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \inf\limits_n c_n$,

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} a_k = \sup\limits_n \inf\limits_{k\ge n} a_k$,

$c_n \le a_n \le b_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема. *Число* $B = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *тогда и только тогда, когда:*

1) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon$,

2) $\forall\varepsilon > 0 \quad \forall N' \quad \exists n > N' \quad a_n > B - \varepsilon$.

Доказательство.

1). Докажем необходимость. Пусть $B = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$, тогда $B = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Отсюда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon .$$

Так как $a_n \le b_n$, то $a_n < B + \varepsilon$. Мы получили, что выполняется первое условие

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon .$$

Докажем, что выполнено и второе условие. Имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall N' \quad \exists n > N, N' .$$

Так как $B - \varepsilon < b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k$, то $\exists k \ge n > N' \quad B - \varepsilon < a_k$. Получили второе условие

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall N' \quad \exists k > N' \quad a_k > B - \varepsilon .$$

2). Докажем достаточность. Пусть выполняются два условия теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу первого условия $\exists N \quad \forall n > N \quad a_n < B + \varepsilon$. Отсюда при $n > N$ $b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k \le B + \varepsilon$. Из второго условия для $n > N$ и

$$N' = n \quad \exists k > n \quad a_k > B - \varepsilon .$$

Отсюда $b_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k > B - \varepsilon$ для $n > N$. Таким образом

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad B - \varepsilon < b_n \le B + \varepsilon .$$

Т.е. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad |b_n-B|\le\varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n .$$

Теорема доказана.

Теорема. *Число* $C=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *тогда и только тогда, когда:*

1. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad a_n>C-\varepsilon$,

2. $\forall\varepsilon>0 \quad \forall N' \quad \exists n>N' \quad a_n<C+\varepsilon$.

Доказать самостоятельно.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - произвольная ограниченная последовательность, L - множество всех ее частичных пределов. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса $L\ne\varnothing$.

Теорема. $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \max L$.

Доказательство. Пусть $B=\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$. Докажем, что верхний предел является частичным. То есть, что $\forall\varepsilon>0 \quad \forall N \quad \exists n>N \quad B-\varepsilon<a_n<B+\varepsilon$. По доказанной теореме

$$\begin{cases}\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad a_n<B+\varepsilon \\ \forall\varepsilon>0 \quad \forall N' \quad \exists n>N' \quad a_n>B-\varepsilon\end{cases}.$$

Отсюда следует:

$$\varepsilon>0 \quad \forall N \quad \exists n>N,N' \quad a_n>B-\varepsilon \quad a_n<B+\varepsilon .$$

Теперь докажем, что B - наибольший частичный предел, то есть что $\forall A\in L \quad A\le B$. Пусть $a_{n_k}\to A$. Так как $a_{n_k}\le b_{n_k}$ и $a_{n_k}\to A$, $b_{n_k}\to B$, то $A\le B$. Что и требовалось доказать.

Теорема. $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min L$.

Доказать самостоятельно.

Теорема. *Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда её верхний предел совпадает с нижним, при этом все три предела совпадают.*

Доказательство.

1). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Тогда $L = \{A\}$ и

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \max\{A\} = A$$
$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \min\{A\} = A.$$

Все три предела совпали.

2). Пусть верхний предел равен нижнему $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A$, тогда

$$\left.\begin{array}{ccc} c_n \le & a_n & \le b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & A \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$$

Теорема доказана.

Упражнения

1) Доказать, что $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$.
2) Доказать, что предел последовательности не изменится, если в ней изменить конечное число элементов.
3) Доказать, что предел последовательности не меняется при любой перестановке ее членов.
4) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = B$, то множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ равно $\{A, B\}$.
5) Привести пример последовательности, для которой множество частичных пределов равно $[0,1]$.
6) Доказать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

2. Предел функции

2.1. Определение предел функции.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ - произвольное множество.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества X, если $\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad |x-a| < \delta \quad x \neq a$.

Теорема. *Число $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда $\exists x_n \in X \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a$.*

Доказательство.

1). Пусть a - предельная точка множества X, то есть

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad |x-a| < \delta \quad x \neq a.$$

Тогда для $\delta = \dfrac{1}{n} \quad \exists x_n \quad |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \quad x_n \neq a$, следовательно $x_n \to a$.

2). Пусть существует такая последовательность, докажем, что a - предельная точка. Имеем $\exists x_n \in X \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a$. Отсюда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \delta \quad x_n \neq a$. Теорема доказана.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}, \quad f : X \to Y$, a - предельная точка множества X.

Определение (Коши). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение (Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall x_n \in X \quad \left(\left. \begin{array}{c} x_n \to a \\ x_n \neq a \end{array} \right| \Rightarrow f(x_n) \to A \right)$.

Теорема. *Определения Коши и Гейне равносильны.*

Доказательство.

1). Покажем, что из определения Коши вытекает определение Гейне. Пусть $x_n \in X \quad x_n \to a \quad x_n \neq a$, докажем, что $f(x_n) \to A$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$. Так как

$x_n \to a$, то $\exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \delta$, учитывая, что $x_n \neq a$, получаем $0 < |x_n - a| < \delta$. Следовательно, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Т.е. $f(x_n) \to A$.

2). Докажем, что из определения Гейне вытекает определение Коши. Допустим, что условия Гейне выполнены, а условия Коши нет, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \quad \exists x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Отсюда для $\delta = \dfrac{1}{n} \quad \exists x_n \in X \quad 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Так как $x_n \neq a, x_n \to a$, то по определению Гейне $f(x_n) \to A$, что противоречит тому, что $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$.

Теорема доказана.

Из определения Гейне следует, что если предел существует, то он ровно один. Для предела функции используются обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Лемма. $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \sin x < x < tgx$

Доказательство. Напомним, что площадь сектора радиуса r с центральным углом α вычисляется по формуле $S_{сектора} = \dfrac{1}{2} r^2 \alpha$. Рассмотрим тригонометрическую окружность (см. Рис.1.). Рассмотрим треугольник OAB сектор OAB и треугольник OAC. Для их площадей справедливы неравенства $S_{\Delta OAB} < S_{СекторOAB} < S_{\Delta OAC}$. Площади этих фигур легко находятся:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{СекторOAB} = \frac{1}{2}x, \quad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Отсюда $\sin x < x < tgx$. Лемма доказана.

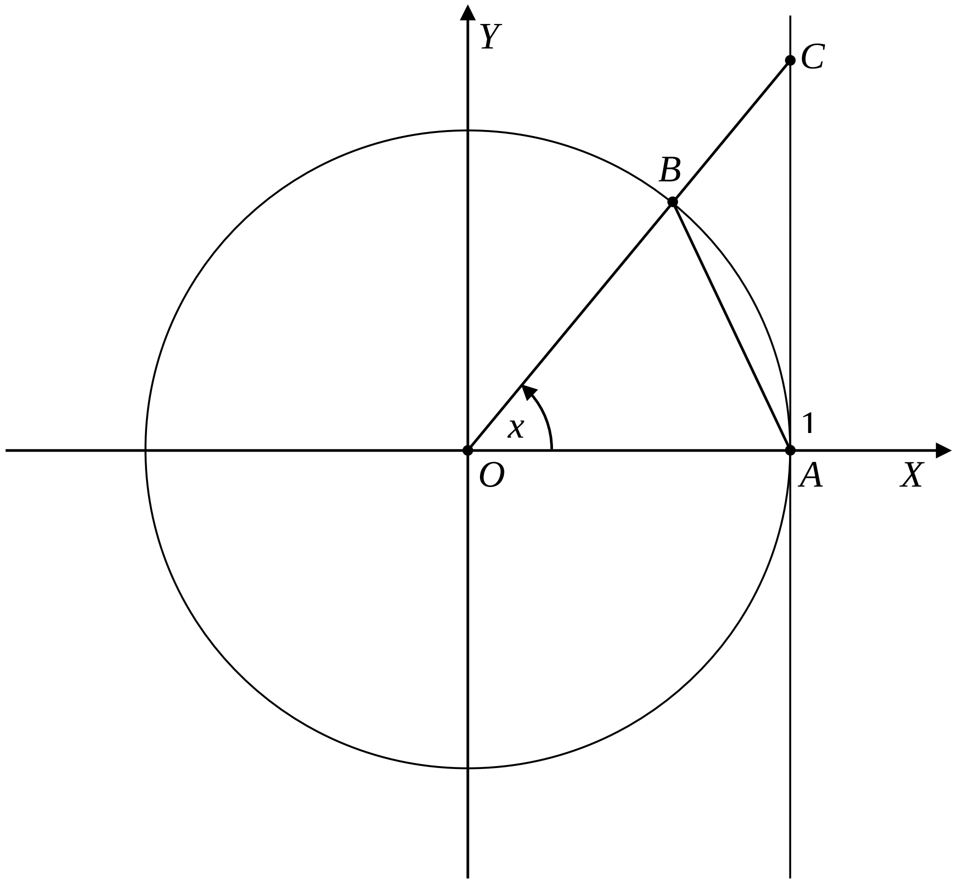

Рис. 1.

Теорема (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Доказательство.

1). Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$\sin x<x<tgx,\quad \frac{\sin x}{x}<1,\quad x<\frac{\sin x}{\cos x},\quad \frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|=1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^2}{2}.$$

Отсюда при $\delta=\min\left\{\dfrac{\pi}{2},\sqrt{2\varepsilon}\right\}$ и $0<x<\delta$ будет выполнено неравенство

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$.

2). Пусть $-\delta < x < 0$. Так как рассматриваемая функция четная, то при таких x неравенство тоже выполняется. Следовательно, если $0 < |x-0| < \delta$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad a \in \mathbb{R} \quad A \in \mathbb{R}$

Рассмотрим некоторые обобщения предела. Пусть a - предельная точка множества X.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad f(x) > E$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad f(x) < -E$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x)| > E$.

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если

$$\forall x_n \in X \quad \left(\begin{matrix} x_n \to a \\ x_n \neq a \end{matrix} \right| \Rightarrow f(x_n) \to +\infty \Bigg).$$

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если

$$\forall x_n \in X \quad \left(\begin{matrix} x_n \to a \\ x_n \neq a \end{matrix} \right| \Rightarrow f(x_n) \to -\infty \Bigg).$$

Определение (Гейне). Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall x_n \in X \quad \left(\begin{matrix} x_n \to a \\ x_n \neq a \end{matrix} \right| \Rightarrow f(x_n) \to \infty \Bigg).$$

Легко доказать, что определения Гейне равносильны определениям Коши.

Пусть теперь $x \to +\infty(-\infty, \infty)$.

Определение. Будем говорить, что $+\infty$ является предельной точкой множества X, если $\forall D>0 \quad \exists x\in X \quad x>D$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists D \quad \forall x\in X \quad x>D \quad |f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, если $\forall E>0 \quad \exists D \quad \forall x\in X \quad x>D \quad f(x)>E$.

Аналогично определяются и остальные пределы. Все эти определения можно объединить в одно с помощью понятия окрестности.

Определение. Окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$, называется интервал $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ произвольное число.

Определение. Окрестностью точки $+\infty\in\mathbb{R}$, называется произвольный интервал $U_D(+\infty)=(D;+\infty)$.

Определение. Окрестностью точки $-\infty\in\mathbb{R}$, называется произвольный интервал $U_D(-\infty)=(-\infty;D)$.

Определение. Окрестностью точки $\infty\in\mathbb{R}$, называется объединение интервалов $U_D(\infty)=(-\infty;D)\cup(D;+\infty)$.

Очевидно, что условие $|x-a|<\varepsilon$ равносильно тому, что $x\in U_\varepsilon(a)$.

Определение. Проколотой окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$, называется множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\setminus\{a\}$.

Для точек $-\infty,+\infty,\infty$ проколотая окрестность совпадает с окрестностью: $\overset{\circ}{U}_\infty=U_\infty$, $\overset{\circ}{U}_{\pm\infty}=U_{\pm\infty}$. Очевидно, что условия $x>D$ и $x\in U_D(+\infty)$ равносильны.

Пусть $f:X\to Y \quad a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$ - предельная точка X. Пусть $A\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x\in X\cap\overset{\circ}{V}(a) \quad f(x)\in U(A).$$

2.2. Свойства предела функции.

Арифметические свойства предела функции.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha A$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то по определению Гейне для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такой, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ выполняется $f(x_n) \to A$, но тогда и $\alpha f(x_n) \to \alpha A$. Последнее означает, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha A$. Свойство доказано.

2) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x) \big) = A \pm B$.

Это свойство и следующие доказываются аналогично первому.

3) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \big(f(x) g(x) \big) = AB$.

4) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \\ g(x) \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Свойства предела функции, выражаемые неравенствами.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A < B \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}(a) \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) < B$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = B - A > 0$. По определению предела для окрестности $U_\varepsilon(A)$ $\exists \overset{\circ}{V}(a) \forall x \in X \cap \overset{\circ}{V}(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Последнее условие означает, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon = A + B - A = B$.

Т.е. $\forall x \in X \cap \overset{\circ}{V}(a) \quad f(x) < B$. Свойство доказано.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > B \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}(a) \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) > B$.

Доказывается аналогично.

3) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \\ A < B \end{cases}\right| \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}(a) \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) < g(x)$.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B < 0$. По свойству 1) $\exists \overset{\circ}{U}(a) \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) - g(x) < 0$. Что и требовалось доказать.

4) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ f(x) \ge B \end{cases}\right| \Rightarrow A \ge B$.

Доказательство. Так как a предельная точка X, то $\exists x_n \in X$ такая, что $x_n \ne a$ и $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$. Но $f(x_n) \ge B$, следовательно, $A \ge B$. Свойство доказано.

5) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ f(x) \le B \end{cases}\right| \Rightarrow A \le B$.

Доказывается аналогично.

6) $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \\ f(x) \le g(x) \end{cases}\right| \Rightarrow A \le B$.

Доказательство. Так как $f(x) - g(x) \le 0$, то по свойству 5) $A - B = \lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) \le 0$. Что и требовалось доказать.

7) $\left.\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \end{cases}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая произвольная последовательность, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$ и $g(x_n) \to A$. Так как по условию $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$, то по теореме о трех последовательностях $g(x_n) \to A$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Свойство доказано.

Теорема (первая теорема о пределе композиции):

$$\left.\begin{cases} f : X \to Y, \\ a - \text{предельная точка } X, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \\ g : Y \to Z, \\ b - \text{предельная точка } Y, \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = A, \\ \forall x \in X \quad f(x) \neq b. \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = A$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad 0 < |y - b| < \delta \quad |g(y) - A| < \varepsilon .$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для

$$\varepsilon = \delta \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \sigma \quad |f(x) - b| < \delta .$$

По условию $\forall x \in X \quad f(x) \neq b$, следовательно, $0 < |f(x) - b| < \delta$. Полагая $y = f(x)$, получим $|g(f(x)) - A| < \varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема о пределе композиции).

$$\left.\begin{cases} f: X \to Y \\ a - \textit{предельная точка } X \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ g: Y \to Z \\ b - \textit{предельная точка } X \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = A \\ g(b) = A \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = A.$$

Доказательство: Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad 0 < |y - b| < \delta \quad |g(y) - A| < \varepsilon.$$

По условию $g(b) = A$, следовательно, можно утверждать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad |y - b| < \delta \quad |g(y) - A| < \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для

$$\varepsilon = \delta \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \sigma \quad |f(x) - b| < \delta.$$

Полагая $y = f(x)$, получим $\left|g\big(f(x)\big) - A\right| < \varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = A$. Теорема доказана.

Теорема (Критерий Коши). *Пусть* $f: X \to Y$, a - *предельная точка множества* X. *Функция* $f(x)$ *имеет конечный предел при* $x \to a$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in X \quad \big(0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta\big) \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1). Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $0 < |x' - a| < \delta \quad 0 < |x'' - a| < \delta \quad x', x'' \in X$, то

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\left(f(x')-A\right)+\left(A-f(x'')\right)\right|\le\left|f(x')-A\right|+\left|A-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

2). Докажем достаточность. Пусть выполнено условие Коши.

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x',x''\in X\quad\left(0<\left|x'-a\right|<\delta,\,0<\left|x''-a\right|<\delta\right)\quad\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon .$$

Для доказательства существования предела функции воспользуемся определением Гейне. Пусть $x_n\in X, x_n\ne a, x_n\to a$ - произвольная последовательность. Тогда $\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n>N\quad\left|x_n-a\right|<\delta$. Так как $x_n\ne a$, то $0<\left|x_n-a\right|<\delta$. Полагая $x':=x_n,\quad x'':=x_m$ из условия Коши будем иметь $\forall m,n>N\quad\left|f(x_n)-f(x_m)\right|<\varepsilon$. Т.е. $\left\{f(x_n)\right\}$ - фундаментальная последовательность, тогда по критерию Коши для последовательности $\exists\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A\in\mathbb{R}$. Докажем, что предел A не зависит от выбора x_n. Допустим, что $x'_n\in X\quad x'_n\to a,\quad x'_n\ne a$, тогда по доказанному $\exists\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A'$. Докажем, что $A'=A$. Для этого рассмотрим новую последовательность

$$\left\{x''_n\right\}:\quad x_1,x'_2,x_3,x'_4,x_5,x'_6,\cdots$$
$$x''_n\to a\quad x''_n\ne a\quad\exists\lim_{n\to\infty}f(x''_n)=A'',$$
$$A''\leftarrow f(x''_{2n})=f(x'_{2n})\to A',$$
$$A''=A',$$
$$A''\leftarrow f(x''_{2n-1})=f(x_{2n-1})\to A,$$
$$A''=A.$$

Следовательно, $A=A'$. Теперь по определению Гейне $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. Теорема доказана.

2.3. Односторонние пределы.

Пусть $f:X\to Y$, $a\in\mathbb{R}$. Введем обозначения $X_a^+=X\cap(a;+\infty),\quad X_a^-=X\cap(-\infty;a)$. Допустим, что a - предельная точка множества X_a^+.

Определение. Правым пределом функции $f(x)$ в точке a называется число $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in X \quad 0<x-a<\delta \quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Определим сужение функции f на множество X_a^+ следующим образом $f\big|_{X_a^+}: X_a^+\to Y, \quad f\big|_{X_a^+}(x)=f(x)$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f\big|_{X_a^+}(x)$.

Определение. Левым пределом функции $f(x)$ в точке a называется число $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in X \quad 0<a-x<\delta \quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Если $f\big|_{X_a^-}: X_a^-\to Y, \quad f\big|_{X_a^-}(x)=f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f\big|_{X_a^-}(x)$.

Теорема. *Если a - предельная точка множества $X_a^+ (X_a^-)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$).*

Доказательство. Пусть a - предельная точка множества X_a^+. По условию имеем:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta \quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Отсюда

$$0<x-a<\delta \Rightarrow 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$. Аналогично рассматривается второй случай. Теорема доказана.

Теорема. *Если a - предельная точка множеств X_a^+, X_a^- и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.*

Доказательство. По определению предела $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ имеем

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_1>0 \quad \forall x\in X \quad 0<a-x<\delta_1 \quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Аналогично, из того, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ для того же самого ε

$$\exists\delta_2>0\quad\forall x\in X\quad 0<x-a<\delta_2\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда

$$\forall x\in X\quad 0<\left|x-a\right|<\delta\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. Теорема доказана.

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве X, если $\forall x_1,x_2\in X\quad (x_1<x_2)\to\left(f(x_1)\le f(x_2)\right)$ и строго возрастающей, если $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве X, если $\forall x_1,x_2\in X\quad (x_1<x_2)\to\left(f(x_1)\ge f(x_2)\right)$ и строго убывающей, если $f(x_1)>f(x_2)$.

Теорема.

$$\left.\begin{cases} a-\textit{предельная точка } X_a^- \\ f(x)\ \textit{возрастает на } X_a^- \\ f(x)\ \textit{ограничена сверху на } X_a^- \end{cases}\right| \Rightarrow \exists\lim_{x\to a-0}f(x)=A\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $A=\sup\limits_{x\in X_a^-}f(x)\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$. Число $A-\varepsilon$ - не является верхней гранью множества X_a^-, следовательно, $\exists x_0\in X_a^-\quad f(x_0)>A-\varepsilon$. Положим $\delta=a-x_0$. Тогда

$$\forall x\in X\quad 0<a-x<\delta,$$
$$A-\varepsilon<f(x_0)\le f(x)\le A<A+\varepsilon,$$
$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to a-0}f(x)=A.$$

Теорема доказана.

Теорема.

$$\left.\begin{cases} a - \textit{предельная точка } X_a^+ \\ f(x) \textit{ возрастает на } X_a^+ \\ f(x) \textit{ ограничена снизу на } X_a^+ \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \in \mathbb{R} \\ A = \inf\limits_{x\in X_a^+} f(x) \end{array}.$$

Аналогичные теоремы справедливы и для убывающей функции.

2.4. Второй замечательный предел.

Лемма. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = e$.

Доказательство. Первый предел уже доказан, докажем второй.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = e.$$

Лемма доказана.

Теорема. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, то

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad e-\varepsilon < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = e$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad e-\varepsilon < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} < e+\varepsilon$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $x > N+1$. Тогда $n = [x] > N$ и $n \le x < n+1$. Справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$$

и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n} \ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < e-\varepsilon.$$

Отсюда $e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon$. Таким образом

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists D=N+1\quad \forall x>D\qquad \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon.$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Теорема доказана.

Следствие. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$**.**

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\overset{(-x=y)}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\overset{y-1=z}{=}\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e.$$

Следствие доказано.

Теорема (второй замечательный предел для функций).

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Доказательство. Так как

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{1}{x}=y\right)}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e \quad\text{и}\quad \lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=y}{=}\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e,\quad\text{то}$$

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$**.** Теорема доказана.

2.5. Примеры вычисления пределов функций.

1) $\lim\limits_{x\to a}x=a$ - очевидно по определению.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\right)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_n$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$, где $P(x),Q(x)$ - многочлены и $Q(a)\neq 0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1 \quad (a>0)$.

Доказательство. Пусть $a>1$. При $x\to +0 \quad \dfrac{1}{x}\to +\infty$. Пусть $n=\left[\dfrac{1}{x}\right]$, тогда $n\le\dfrac{1}{x}<n+1$ и $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$. Отсюда $1\leftarrow a^{\frac{1}{n+1}}<a^x\le a^{\frac{1}{n}}\to 1$. Следовательно, $a^x\to 1$ и $\lim\limits_{x\to +0}a^x=1$. Аналогично доказывается, что при $x\to -0 \qquad a^x\to 1$.

При $0<a<1$ утверждение доказывается заменой $b=\dfrac{1}{a}$. Свойство доказано.

5) $\lim\limits_{x\to \alpha}a^x=a^\alpha$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to\alpha}a^x \overset{(x-\alpha=y)}{=} \lim\limits_{y\to 0}a^{y+\alpha}=\lim\limits_{y\to 0}a^\alpha a^y=a^\alpha\lim\limits_{y\to 0}a^y=a^\alpha$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

Доказательство. Докажем по определению. Имеем:

$|\ln x-0|<\varepsilon\Leftrightarrow -\varepsilon<\ln x<\varepsilon\Leftrightarrow e^{-\varepsilon}<x<e^{\varepsilon}\Leftrightarrow -\left(1-e^{-\varepsilon}\right)<x-1<e^{\varepsilon}-1$.

Положим $\delta=\min\left\{1-e^{-\varepsilon};e^{\varepsilon}-1\right\}$, тогда

$\forall x>0 \quad 0<|x-1|<\delta \quad |\ln x-0|<\varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

7) $\lim\limits_{x\to\alpha}\log_a x=\log_a\alpha \quad (\alpha>0)$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\ln x=\lim_{x\to\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha}\alpha\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\ln\frac{x}{\alpha}+\ln\alpha\right)\overset{\left(\frac{x}{\alpha}=y\right)}{=}\lim_{y\to 1}\ln y+\lim_{y\to 1}\ln\alpha=\ln\alpha,$$

$$\lim_{x\to\alpha}\log_a x=\lim_{x\to\alpha}\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln\alpha}{\ln a}=\log_a\alpha.$$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0 \quad (a>1)$

Доказательство. Пусть $n=[x]$, тогда $n\le x<n+1$ и $\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}\le\dfrac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n}}=\dfrac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}\dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}}\to 0$. Аналогично $\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}\ge\dfrac{(n)^{\alpha}}{a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}\dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}}\to 0$. Отсюда $0\leftarrow\dfrac{(n)^{\alpha}}{a^{n+1}}\le\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}\le\dfrac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n}}\to 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0$. Свойство доказано.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a^{\beta}x}{x^{\alpha}}=0 \quad (a>1,\quad \alpha>0)$.

Доказательство. Пусть $y=\log_a x$, тогда при $x\to+\infty$ $y\to+\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^{\beta}x}{x^{\alpha}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\beta}}{a^{\alpha y}}\overset{(a^{\alpha}=b>1)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\beta}}{b^{y}}=0.$$

Свойство доказано.

Следствие. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a^{\beta}n}{n^{\alpha}}=0 \quad (a>1,\quad \alpha>0)$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\quad a\ne 1)$.

Доказательство. Пусть $y=a^{x}-1$, тогда при $x\to 0$ $y\to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a.$$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

Доказательство. Имеем $(1+x)^{\mu}=e^{\ln(1+x)^{\mu}}=e^{\mu\ln(1+x)^{\mu}}$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)^{\mu}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{e^{\mu\ln(1+x)^{\mu}}-1}{\mu\ln(1+x)}\right)\mu\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)=\mu.$$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\mu}-1}{x-1}=\mu$.

Доказательство. Пусть $y=x-1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu}-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{\mu}-1}{y}=\mu.$$

16) $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}U(x)=A\neq 0\\ \lim\limits_{x\to a}V(x)=B\\ U(x)>0\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}U(x)^{V(x)}=A^{B}$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}U(x)^{V(x)}=\lim_{x\to a}e^{\ln U(x)^{V(x)}}=\lim_{x\to a}e^{V(x)\ln U(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}V(x)\ln U(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}V(x)\lim\limits_{x\to a}\ln U(x)}=$$
$$=e^{B\ln A}=e^{\ln A^{B}}=A^{B}.$$

2.6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ $\quad a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ $\quad a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty,\infty\}$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ - бесконечно большая при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$ при $x\in\overset{\circ}{U}(a)$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x\to a$.*

Теорема. *Если* $f(x)$ *- бесконечно малая при* $x \to a$ *и* $f(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$*, то* $\dfrac{1}{f(x)}$ *- бесконечно большая при* $x \to a$.

Пусть $f, g : X \to Y$ и a - предельная точка множества X.

Определение. Будем говорить, что $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to a$, если

$$\exists L \quad \exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le L|g(x)|.$$

Теорема. *Если* $g(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$*, то* $f(x) = O\big(g(x)\big)$ *тогда и только тогда, когда* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *- ограничена в некоторой окрестности* $\overset{\circ}{V}(a)$.

Определение. Будем говорить, что $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|.$$

Теорема. *Если* $g(x) \neq 0$ *при* $x \in \overset{\circ}{U}(a)$*, то* $f(x) = o\big(g(x)\big)$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

O, o - символы Ландау.

Свойства символов Ландау.

1) $\left. \begin{cases} f(x) = O\big(g(x)\big) \\ x \to a \\ c \neq 0 \end{cases} \right| \Rightarrow cf(x) = O\big(g(x)\big).$

Доказательство. Так как $f(x) = O\big(g(x)\big)$, то $\exists L \quad \exists \delta \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x)| \le L|g(x)|$. Тогда $|cf(x)| \le cL|g(x)|$. Свойство доказано.

2) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=O(g(x)) \\ x\to a \\ c\neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow f(x)=O(cg(x)).$

3) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=O(h(x)) \\ g(x)=O(h(x)) \\ x\to a \end{array}\right| \Rightarrow (f(x)\pm g(x))=O(h(x)).$

Доказательство.

$\exists L_1 \quad \exists\delta_1 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_1 \quad |f(x)|\leq L_1|h(x)|,$

$\exists L_2 \quad \exists\delta_2 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_2 \quad |f(x)|\leq L_2|h(x)|,$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$

$x\in X \quad 0<|x-a|<\delta,$

$|f(x)\pm g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|=L_1|h(x)|+L_2|h(x)|=(L_1+L_2)|h(x)|=L_3|h(x)|.$

Свойство доказано.

4) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=O(g(x)) \\ g(x)=O(h(x)) \\ x\to a \end{array}\right| \Rightarrow (f(x))=O(h(x)).$

Доказательство.

$\exists L_1 \quad \exists\delta_1 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_1 \quad |g(x)|\leq L_1|h(x)|,$

$\exists L_2 \quad \exists\delta_2 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_2 \quad |f(x)|\leq L_2|g(x)|,$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$

$x\in X \quad 0<|x-a|<\delta,$

$|f(x)|\leq L_2\big|L_1|h(x)|\big|=L_1L_2|h(x)|=L_3|h(x)|.$

5) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=o(g(x)) \\ x\to a \\ c\neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow cf(x)=o(g(x)).$

6) $$\left.\begin{cases} f(x)=o\big(g(x)\big) \\ x\to a \\ c\neq 0 \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)=o\big(cg(x)\big).$$

7) $$\left.\begin{cases} f(x)=o\big(h(x)\big) \\ g(x)=o\big(h(x)\big) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow \big(f(x)\pm g(x)\big)=o\big(h(x)\big).$$

8) $$\left.\begin{cases} f(x)=o\big(g(x)\big) \\ g(x)=O\big(h(x)\big) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow \big(f(x)\big)=o\big(h(x)\big).$$

Доказательство.

$$\exists L \quad \exists\delta_1 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_1 \quad |g(x)|\le L|h(x)|,$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \frac{\varepsilon}{L} \quad \exists\delta_2 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_2 \quad |f(x)|\le\frac{\varepsilon}{L}|g(x)|,$$

$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$$

$$x\in X \quad 0<|x-a|<\delta,$$

$$|f(x)|\le\frac{\varepsilon}{L}|g(x)|\le\frac{\varepsilon}{L}L|h(x)|=\varepsilon|h(x)|.$$

9) $$\left.\begin{cases} f(x)=O\big(g(x)\big) \\ g(x)=o\big(h(x)\big) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow \big(f(x)\big)=o\big(h(x)\big).$$

Доказательство.

$$\exists L \quad \exists\delta_1 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_1 \quad |f(x)|\le L|g(x)|,$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \frac{\varepsilon}{L} \quad \exists\delta_2 \quad \forall x\in X \quad 0<|x-a|<\delta_2 \quad |g(x)|\le\frac{\varepsilon}{L}|h(x)|,$$

$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$$

$$x\in X \quad 0<|x-a|<\delta,$$

$$|f(x)|\le L|g(x)|\le L\frac{\varepsilon}{L}|h(x)|=\varepsilon|h(x)|.$$

10) $\left.\begin{cases} f(x)=o\big(g(x)\big) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)=O\big(g(x)\big).$

11) $\left.\begin{cases} f_1(x)=O\big(g_1(x)\big) \\ f_2(x)=O\big(g_2(x)\big) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow \big(f_1(x)\,f_2(x)\big)=O\big(g_1(x)g_2(x)\big)$

12) $\left.\begin{matrix} f_1(x)=O\big(g_1(x)\big) \\ f_2(x)=o\big(g_2(x)\big) \\ x\to a \end{matrix}\right| \Rightarrow \big(f_1(x)\,f_2(x)\big)=o\big(g_1(x)g_2(x)\big).$

Пусть $f,g: X\to Y$ и a - предельная точка множества X. Будем считать, что $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$ при $x\in \overset{\circ}{U}(a)$.

Определение. Будем говорить, что $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Свойства эквивалентности.

1) $\left.\begin{cases} f(x)\sim g(x) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow g(x)\sim f(x).$

2) $f(x)\sim f(x) \quad (x\to a).$

3) $\left.\begin{cases} f(x)\sim g(x) \\ g(x)\sim h(x) \\ x\to a \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{matrix} f(x)\sim h(x) \\ x\to a \end{matrix}.$

Основные эквивалентности.

1) $\sin x\sim x \quad (x\to 0).$

2) $\operatorname{tg} x\sim x \quad (x\to 0).$

3) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$.

4) $\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$.

5) $e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$.

6) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (x \to 0)$.

7) $x^\mu - 1 \sim \mu(x-1) \quad (x \to 1)$.

Теорема. *Если* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a$*, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

2.7. Непрерывность функции.

Пусть $f : X \to Y$ и $x_0 \in X$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется изолированной, если

$\exists \delta > 0 \quad (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$.

Замечание. *В изолированной точке любая функция непрерывна. Предел в такой точке не имеет смысла.*

Теорема. *Если* $x_0 \in X$ *- предельная точка, то* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$\forall U\left(f\left(x_0\right)\right) \quad \exists V\left(x_0\right) \quad \forall x \in X \cap V\left(x_0\right) \quad f(x) \in U\left(f\left(x_0\right)\right)$ или

$\forall U\left(f\left(x_0\right)\right) \quad \exists V\left(x_0\right) \quad f\left(X \cap V\left(x_0\right)\right) \subset U\left(f\left(x_0\right)\right)$.

Свойства непрерывности.

1) *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $cf(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Если x_0 изолированная точка, то утверждение очевидно. Если x_0 предельная точка множества, то

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = cf\left(x_0\right).$$

Что и требовалось доказать.

2) $\left.\begin{cases} f(x) \textit{ непрерывна в точке } x_0 \\ g(x) \textit{ непрерывна в точке } x_0 \end{cases}\right| \Rightarrow \left(f(x) \pm g(x)\right)$ *непрерывна в точке* x_0.

3) $\left.\begin{cases} f(x) \textit{ непрерывна в точке } x_0 \\ g(x) \textit{ непрерывна в точке } x_0 \end{cases}\right| \Rightarrow \left(f(x) \times g(x)\right)$ *непрерывна в точке* x_0.

4) $\left.\begin{cases} f(x) \quad \textit{непрерывна в точке } x_0 \\ g(x) \quad \textit{непрерывна в точке } x_0 \\ g\left(x_0\right) \neq 0 \end{cases}\right| \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ *непрерывна в точке* x_0.

Теорема. *Пусть* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$, *а* $g(x)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f\left(x_0\right)$, *то* $(g \circ f)(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$.

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad 0 < \left|y - y_0\right| < \delta \quad \left|g(y) - g\left(y_0\right)\right| < \varepsilon$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то для выбранного δ

$$\exists \sigma > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \left|x - x_0\right| < \sigma \quad \left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \delta.$$

Так как $\left|f(x)-y_0\right|<\delta$, то, полагая $y=f(x)$, будем иметь

$\left|g(f(x))-g(y_0)\right|<\varepsilon$ или $\left|g(f(x))-g(f(x_0))\right|<\varepsilon$. А это и означает, что

$g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Обозначим через $C(x)$ - класс всех непрерывных на множестве X функций.

Свойства непрерывных на множестве функций.

1) $f\in C(x)\Rightarrow \alpha f\in C(x)\quad \alpha\in\mathbb{R}$.

2) $f,g\in C(x)\Rightarrow (f\pm g)\in C(x)$.

3) $f,g\in C(x)\Rightarrow (f\times g)\in C(x)$.

4) $\left.\begin{cases} f,g\in C(x) \\ \forall x\in X\quad g(x)\neq 0\end{cases}\right|\Rightarrow\left(\dfrac{f}{g}\right)\in C(x)$.

Приведем классификацию точек разрыва.

Пусть $f:X\to Y$ и не является непрерывной в точке x_0, или $x_0\notin X$.

Определение. Точка x_0 называется устранимой точкой разрыва, если $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$.

Определение. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, если $\exists\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$ и $A\neq B$ $A,B\in\mathbb{R}$.

Определение. Будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

2.8. Непрерывные на сегменте функции.

Напомним, что сегментом называется множество

$\left[a;b\right]=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|a\le x\le b\right\}\quad a,b\in\mathbb{R}$.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса): *Любая непрерывная на сегменте функция ограничена.*

Доказательство. Пусть $f\in C\left(\left[a;b\right]\right)$. Докажем, что $f\left(x\right)$ ограничена. Допустим противное, то есть $\forall n\in N\quad \exists x_n\in\left[a;b\right]\quad \left|f\left(x_n\right)\right|>n$. Так как $a\le x_n\le b$, то последовательность $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_{n_k}\to\alpha\in\mathbb{R}$. Так как $a\le x_{n_k}\le b$, то $a\le\alpha\le b$. Функция $f\left(x\right)$ непрерывна в точке α, следовательно, $f\left(x_{n_k}\right)\to f\left(\alpha\right)$, что противоречит тому, что $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|>n_k\to\infty$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная на сегменте функция принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство. Докажем, что $f\left(x\right)$ принимает наибольшее значение. Функция $f\left(x\right)$ по первой теореме Вейерштрасса ограничена. Пусть $M=\sup\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$. Докажем, что $\exists x_0\in\left[a;b\right]\quad f\left(x_0\right)=M$. По определению супремума $\forall\delta>0\quad\exists x\in\left[a;b\right]\quad f\left(x\right)>M-\varepsilon$. Положим $\delta=\dfrac{1}{n}$, тогда $\exists x_n\in\left[a;b\right]\quad f\left(x\right)>M-\dfrac{1}{n}$. Последовательность $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, следовательно $\exists x_{n_k}\to\alpha\in\left[a;b\right]$. Тогда по непрерывности $f\left(x_{n_k}\right)\to f\left(\alpha\right)$. Так как $M\leftarrow M-\dfrac{1}{n_k}<f\left(x_{n_k}\right)\le M$, то $f\left(x_{n_k}\right)\to M$ и $f\left(\alpha\right)=M$.

Доказательство второй части теоремы аналогично. Теорема доказана.

Теорема (первая теорема Больцано-Коши). *Если* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a;b]$ *и принимает на его концах значения разных знаков, то* $\exists x_0 \in (a;b) \quad f(x_0)=0$.

Доказательство. Будем считать, что $f(a)<0, \quad f(b)>0$. Разделим сегмент $[a;b]$ пополам. Возможны три случая:

1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, тогда очевидно $x_0=\frac{a+b}{2}$.

2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, тогда будем рассматривать сегмент $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$. На его концах значения разных знаков.

3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, тогда будем рассматривать сегмент $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$. На его концах значения разных знаков.

Полученный сегмент делим пополам и опять получаем один из трех случаев. Если через конечное число шагов произойдет первый случай, то мы нашли искомое x_0, если нет, то получим бесконечную последовательность вложенных сегментов $[a_n;b_n]$, таких что $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$. Тогда по теореме Кантора $\exists \alpha \in [a_n;b_n]$ для всех n. Так как $a_n \to \alpha$, то $f(a_n)\to f(\alpha)$. Кроме того, $f(a_n)<0$, следовательно, $f(\alpha)\le 0$. Так как $b_n \to \alpha$, то $f(b_n)\to f(\alpha)$. Кроме того, $f(b_n)>0$, следовательно, $f(\alpha)\ge 0$. Мы доказали, что $f(\alpha)=0$. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема Больцано-Коши). *Пусть* $f \in C([a;b])$, $f(a)=A$ *и* $f(b)=B$*, тогда* $\forall C$*, лежащего между* A *и* B, $\exists c \in (a;b) \quad f(c)=C$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-C$. Эта функция непрерывна на $[a;b]$ и принимает на концах значения разных знаков, тогда по первой теореме Больцано-Коши $\exists \alpha \in (a;b) \quad g(\alpha)=0$, то есть $f(\alpha)-C=0, \quad f(\alpha)=C$. Что и требовалось доказать.

Определение. Множество $P \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если для любых чисел $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_3 \in P \Rightarrow x_2 \in P$, то есть, если $x_1, x_2 \in P$, то $[x_1; x_2] \subset P$.

Теорема. *Монотонная функция f, определенная на промежутке P, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда $Q = \operatorname{Im} f = f(P)$ является промежутком.*

Доказательство. Будем считать, что функция f возрастает.

1). Пусть функция f непрерывна. Докажем, что Q является промежутком. Пусть $y_1 < y_2 < y_3 \quad y_1, y_3 \in Q$, докажем, что $y_2 \in Q$.
Так как $y_1, y_3 \in Q$, то $\exists x_1, x_3 \quad f(x_1) = y_1 \quad f(x_3) = y_3$. Если $x_1 < x_3$, то рассмотрим $[x_1; x_3]$, если $x_1 > x_3$, то рассмотрим $[x_3; x_1]$. Функция f непрерывна на таких сегментах и принимает на концах y_1 и y_3, значит по второй теореме Больцано-Коши принимает и все промежуточные значения, то есть $\exists x_2 \in (a;b) \quad f(x_2) = y_2 \Rightarrow y_2 \in Q$. Значит Q - промежуток.

2). Пусть $Q = f(P)$ - промежуток. Докажем, что f непрерывна на промежутке P. Пусть $x_0 \in P$. x_0 - внутренняя точка P или правый конец P. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0)$. Если $x < x_0$, то $f(x) \le f(x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Так как $f(x) \le f(x_0)$, то $A \le f(x_0)$. Докажем, что $A = f(x_0)$. Допустим противное $A < f(x_0)$. Возьмем $x_1 < x_0$ и $x_1 \in P$, тогда $f(x_1) = y_1 \le A$. Пусть $y_1 \le A < y_2 < y_0 = f(x_0)$. Так как $y_1 < y_2 < y_0$ и $y_1 \in Q, \quad y_0 \in Q$, то $y_2 \in Q$, то есть $\exists x_2 \quad f(x_2) = y_2$. Так как $y_2 < y_0$, то $x_2 < x_0$ и $f(x_2) \le A$, следовательно, $y_2 \le A$. Но $y_2 > A$ по выбору. Мы получили противоречие. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, если x_0 внутренняя точка P или левый конец, то $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, а это означает непрерывность функции f. Теорема доказана.

Теорема. Если f строго возрастает и непрерывна на промежутке P, то $Q=f\left(P\right)$ - промежуток и $\exists f^{-1}:Q\to P$, которая строго возрастает и непрерывна на Q.

Доказательство.

1). $Q=f\left(P\right)$ - промежуток по предыдущей теореме.

2). $f:P\to Q$ биективна, следовательно, $\exists f^{-1}:Q\to P$.

3). Докажем, что f^{-1} строго возрастает.

Пусть $y_1<y_2$, докажем, что $f^{-1}\left(y_1\right)<f^{-1}\left(y_2\right)$. Допустим противное, то есть, что $x_1=f^{-1}\left(y_1\right)\geq f^{-1}\left(y_2\right)=x_2$. Тогда $f\left(x_1\right)\geq f\left(x_2\right)$ так как f возрастает. Но $f\left(x_1\right)=y_1,\quad f\left(x_2\right)=y_2$, следовательно, $y_1\geq y_2$, что противоречит допущению.

4). Докажем, что f^{-1} непрерывна.

Функция f^{-1} строго возрастает, $f^{-1}\left(Q\right)=P$ - промежуток, следовательно, f^{-1} непрерывна на Q по предыдущей теореме.

Теорема полностью доказана.

Приложения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

Доказательство.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{(\arcsin x=t)}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$, так как в силу непрерывности функции $\arcsin x$ $x\to 0\Rightarrow t\to 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

2.9. Равномерная непрерывность.

Определение. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

Фиксируя x_1 или x_2 мы получим просто непрерывность, то есть из равномерной непрерывности следует обычная непрерывность.

Теореме (Кантора). *Любая непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Допустим противное, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon ,$$

где $X = [a;b]$. Возьмем $\delta = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_1^n, x_2^n \in X \quad |x_1^n - x_2^n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_1^n) - f(x_2^n)| \geq \varepsilon .$$

Так как $x_1^n \in [a;b]$, то последовательность $\{x_1^n\}$ ограничена.

Следовательно, $\exists x_1^{n_k} \to \alpha \in [a;b]$. Так как $|x_1^{n_k} - x_2^{n_k}| < \dfrac{1}{n_k}$, то

$\alpha \leftarrow \left(x_1^{n_k} - \dfrac{1}{n_k} \right) < x_2^{n_k} < \left(x_1^{n_k} + \dfrac{1}{n_k} \right) \to \alpha$ и $x_2^{n_k} \to \alpha$. Функция f непрерывна в точке α, значит $f(x_1^{n_k}) \to f(\alpha)$, $f(x_2^{n_k}) \to f(\alpha)$ и $f(x_1^{n_k}) - f(x_2^{n_k}) \to 0$, что противоречит тому, что $|f(x_1^n) - f(x_2^n)| \geq \varepsilon$. Теорема доказана.

Упражнения

1) Привести пример функций, для которых теорема о пределе композиции без дополнительных условий неверна.
2) Доказать, что любая равномерно непрерывная на конечном интервале функция ограничена.

3) Доказать, что произведение двух равномерно непрерывных на конечном интервале функций является равномерно непрерывной функцией.
4) Привести пример двух равномерно непрерывных на числовой прямой функций, произведение которых не является равномерно непрерывным.
5) Доказать, что любая непрерывная и периодическая функция, определенная на всей числовой прямой, равномерно непрерывна.
6) Доказать, что если функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет конечный предел на бесконечности, то она равномерно непрерывна.

3. Дифференцирование

3.1. Определение производной. Её физический и геометрический смысл.

Пусть функция $f: X \to Y$, $x_0 \in X$, x_0 - предельная точка X.

Определение. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$. Этот предел называется производной функции f в точке x_0. Т.е. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Если положить $x - x_0 = \Delta x$, то $x = \Delta x + x_0$ и можно написать

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пусть $x = f(t)$ - уравнение движения точки по числовой прямой. Тогда $S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ - путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_0 + \Delta t, t_0]$. Средняя скорость на этом промежутке определяется формулой $v_{cp} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Предел средней скорости, когда длина промежутка времени стремится к нолю, называется мгновенной скоростью. Таким образом $f'(t_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} v_{cp} = v(t_0)$. В данном случае физический смысл производной – это мгновенная скорость.

Пусть теперь Γ - график функции $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ см. Рис. 2. Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$ на графике.

Определение. Касательной к кривой Γ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M когда точка M стремится к точке M_0 вдоль кривой Γ.

Тангенс углового коэффициента секущей M_0M вычисляется по формуле

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

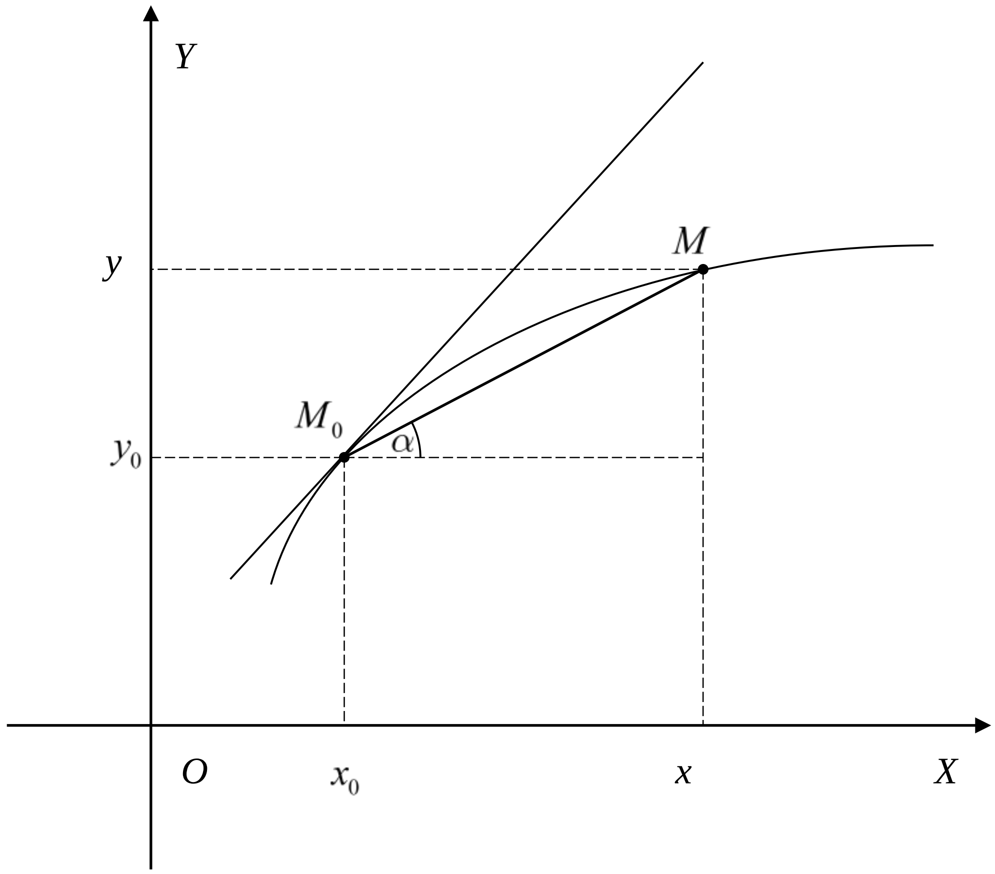

Рис. 2.

Касательная существует тогда и только тогда, когда существует предел углового коэффициента, то есть когда существует производная $f'(x_0)$. Итак, угловой коэффициент a касательной $y = ax + b$ равен $f'(x_0)$. Найдем коэффициент b. Имеем $y_0 = ax_0 + b$ и $b = y_0 - ax_0$. Подставляя полученные значения коэффициентов в уравнение касательной, будем иметь

$$y = ax - ax_0 + y_0,$$

$$y = a(x - x_0) + y_0,$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Итак, уравнение касательной к графику Γ функции $f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Для производной функции используются следующие обозначения: $f'(x),\quad \frac{df}{dx}(x),\quad \dot{f}(x)$.

Таблица производных элементарных функций.

1) $f(x) \equiv c$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$c' = 0$

2) $f(x) \equiv x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

$x' = 1$

3) $f(x) = x^n \quad (n \in N)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x) - x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \cdots + x^{n-1}\right]}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

5) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6) $f(x)=x^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\alpha\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

7) $f(x)=a^{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\ln a}{1}=a^{x}\ln a$$

$$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$$

$$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$

8) $f(x)=\log_a x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a e\Delta x}{x\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$$

9) $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\cos x$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

10) $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\sin x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

Перейдем к изучению свойств производной.

Теорема. *Если* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$ и, следовательно, $\alpha(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$. Отсюда $f(x)-f(x_0)=(\alpha(x)+f'(x_0))(x-x_0)\to 0$ т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Это означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Теорема. *Если* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x, *то* $cf(x)$ *дифференцируема в точке* x *и* $(cf(x))'=cf'(x)$.

Доказательство. По определению производной имеем

$$(cf(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=cf'(x).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если* $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то* $(f(x)+g(x))$ *дифференцируема в точке* x *и* $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

Следствие. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$.

Теорема. Если $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $(f(x)\cdot g(x))$ дифференцируема в точке x и

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Доказательство. Найдем по определению производной

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)+f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\right)=$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Производная произведения трех функций находится по формуле*

$$(f(x)\cdot g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

Теорема.

$$\left.\begin{cases} f,g: X\to Y \\ x_0 - \textit{предельная точка } X \\ g(x_0)\neq 0 \\ f,g \quad \textit{дифф. в точке } x_0 \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{cases} h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{дифф. в точке } x_0 \\ h'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{cases}$$

Т.е. справедлива формула $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство. По определению производной имеем

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x g(x_0)g(x_0+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x g(x_0)g(x_0+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\dfrac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0)g(x_0+\Delta x)}=$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема доказана.

Теорема (дифференцирование сложной функции).

$$\left.\begin{cases} f:X\to Y\\ x_0-\textit{предельная точка } X\\ f\quad \textit{дифференцируема в точке } x_0\\ y_0=f(x_0)-\textit{предельная точка } Y\\ g:Y\to Z\\ g\quad \textit{дифференцируема в точке } y_0\end{cases}\right|\Rightarrow\begin{cases} h=g\circ f\quad \textit{дифференцируема в точке } x_0\\ h'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)\end{cases}$$

Т.е. справедлива формула $\left(g\left(f(x)\right)\right)'=g'\left(f(x)\right)f'(x)$.

Доказательство. Введем функцию

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ g'(y_0), & y=y_0\end{cases}.$$

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0}G(y)=G(y_0)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то применяя вторую теореме о пределе композиции, получим

$$\left(g\left(f(x_0)\right)\right)'=\lim_{x\to x_0}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)} \frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} G\left(f\left(x\right)\right)\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} G\left(f\left(x\right)\right)\lim_{x\to x_0} \frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0} G\left(y\right)\cdot f'\left(x_0\right) = g'\left(y_0\right)\cdot f'\left(x_0\right).$$

Теорема доказана.

Теорема (дифференцирование обратной функции).

$$\left.\begin{cases} f: X \to Y \quad \text{биективна} \\ x_0 - \text{предельная точка } X \\ f \quad \text{дифференцируема в точке } x_0 \\ f'\left(x_0\right) \neq 0 \\ y_0 = f\left(x_0\right) \\ f^{-1} \quad \text{непрерывна в точке } y_0 \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{cases} y_0 - \text{предельная точка } Y \\ f^{-1} \quad \text{дифференцируема в точке } y_0. \\ \left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)} \end{cases}$$

Доказательство.

1) Так как x_0 - предельная точка X, то $\exists x_n \in X \quad x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0$. Функция $f\left(x\right)$ дифференцируема в точке x_0, значит, непрерывна в точке x_0. Следовательно, $y_n = f\left(x_n\right) \to y_0 = f\left(x_0\right) \quad y_n \neq y_0$, так как $f\left(x\right)$ биективна и $x_n \neq x_0$. Тогда y_0 - предельная точка Y.

2) Так как функция $f^{-1}\left(y\right)$ непрерывна в точке y_0, то при $y \to y_0$ и $x \to x_0$, где $x = f^{-1}\left(y\right)$. Функция $f\left(x\right)$ биективна, следовательно, и $f^{-1}\left(y\right)$ биективна, тогда $f^{-1}\left(y\right) \neq f^{-1}\left(y_0\right)$ при $y \neq y_0$. По определению имеем

$$\frac{1}{f'\left(x_0\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}\left(y\right)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0} = \left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right).$$

Т.е. $\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}$. Теорема доказана.

Таблица производных (продолжение).

11) $f\left(x\right) = tgx$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

12) $f(x) = ctgx$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

13) $f(x) = \sin x$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$f'(x) = \cos x - \textit{дифференцируема на} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x \neq 0 \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

14) $f(x) = \cos x$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

15) $f(x) = tgx$

$$f : \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = arctgy$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 - \textit{дифференцируема на} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

16) $f\left(x\right) = ctgx$

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Гиперболические функции.

Определение. Гиперболическим синусом называется функция $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$.

Определение. Гиперболическим косинусом называется функция $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$. Следующие равенства легко проверяются

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x.$ Найдем функции обратные к гиперболическим.

1) $f\left(x\right) = \operatorname{sh} x \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$shx = y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$e^x = t$$

$$t - \frac{1}{t} = 2y$$

$$t^2 + 2yt - 1 = 0$$

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$a) \quad e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ *решений нет*

$b) \quad e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\operatorname{Arsh} y=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$(\mathrm{Arshy})'=\frac{1}{\operatorname{sh}' x}=\frac{1}{\operatorname{ch} x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$(\operatorname{Arsh} y)'=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

2) $f(x)=chx \quad f:[0;+\infty)\to[1;+\infty)$

$$\operatorname{ch} x=y$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y$$

$$e^x=t$$

$$t+\frac{1}{t}=2y$$

$$t^2-2yt-1=0$$

$$t=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

$a)\ e^x=y-\sqrt{y^2-1}<0$ *решений нет*

$b) e^x=y+\sqrt{y^2-1}$

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Arch} y=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$(\operatorname{Arch} y)'=\frac{1}{\operatorname{ch}' x}=\frac{1}{\operatorname{sh} x}=\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}}=$$

(но так как $x>0$, то)

$$=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$(\operatorname{Arch} y)'=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

3) $f(x) = \operatorname{th} x \quad f : \mathbb{R} \to (-1;1)$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\operatorname{th} x = y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$$

$$e^x = t > 0$$

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = y$$

$$t^2 - 2 = t^2 y + y$$

$$t^2 = \frac{y+1}{1-y}$$

$$t = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

$$e^x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{1-y}$$

$$\operatorname{Arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{1-y}$$

$$(\operatorname{Arthy})' = \frac{1}{\operatorname{th}' x} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} =$$

(Так как

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ то)}$$

$$= \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}$$

$$(\text{Arthy})' = \frac{1}{1-y^2} \quad y \in (-1;1)$$

4) $f(x) = cthx \quad f : \mathbb{R} / \{0\} \to (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(\text{cthx})' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\operatorname{cth} x = y$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = y$$

$$e^x = t > 0$$

$$\frac{t^2+1}{t^2-1} = y$$

$$t^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

$$t = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$

$$e^x = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$$

$$\operatorname{Arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$$

$$(\operatorname{Arcth} y)' = \frac{1}{\operatorname{cth}' x} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{1-\operatorname{cth}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}$$

$$(\operatorname{Arcth} y)' = \frac{1}{1-y^2} \quad x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$$

3.2. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Пусть $f: X \to Y$, $f: X \to Y$ и x_0 - предельная точка множества X. Будем предполагать, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Лемма 1. *Если* $f'(x_0) > 0$*, то*

$$\exists \delta > 0 \quad \left| \begin{array}{lll} \forall x \in X & x_0 < x < x_0 + \delta & f(x) > f(x_0) \\ \forall x \in X & x_0 - \delta < x < x_0 & f(x) < f(x_0) \end{array} \right. .$$

Доказательство. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

то $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Отсюда

$$\begin{array}{lll} \forall x \in X & x_0 < x < x_0 + \delta & f(x) > f(x_0) \\ \forall x \in X & x_0 - \delta < x < x_0 & f(x) < f(x_0). \end{array}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $f'(x_0) < 0$*, то*

$$\exists \delta > 0 \quad \left| \begin{array}{lll} \forall x \in X & x_0 < x < x_0 + \delta & f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in X & x_0 - \delta < x < x_0 & f(x) > f(x_0) \end{array} \right. .$$

Доказывается сведением к лемме 1 заменой $g(x) = -f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b).

Определение. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a;b) \quad |x - x_0| < \delta \quad f(x) \le f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой строгого максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a;b) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < f(x_0)$.

Аналогично вводятся минимум и строгий минимум.

Теорема Ферма. *Если* $x_0 \in (a,b)$, x_0 *- точка максимума или минимума функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, то* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 - точка максимума. Допустим противное, то есть, что $f'(x_0) \neq 0$. Возможны два случая:

1) Если $f'(x_0) > 0$, то $\exists \delta \quad \forall x \in X \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad f(x) > f(x_0)$. Следовательно, x_0 не является точкой максимума.
2) Если $f'(x_0) < 0$, то $\exists \delta \quad \forall x \in X \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad f(x) > f(x_0)$. Следовательно, x_0 не является точкой максимума.

В обоих случаях мы получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема Ролля. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на* (a,b), *непрерывна на* $[a,b]$ *и принимает на концах сегмента равные значения, то есть* $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0$.

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно, по первой теореме Вейерштрасса она ограничена и по второй теореме Вейерштрасса достигает наибольшего и наименьшего значений, то есть

$$\exists x_1 \quad f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = M,$$

$$\exists x_2 \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = m.$$

a) Если $m = M$, то $f(x) \equiv m$, $f'(x) \equiv 0$, и в качестве c можно брать любую точку из (a,b).
b) Если $m \neq M$, то либо $x_1 \in (a,b)$, либо $x_2 \in (a,b)$. Пусть c та, точка из них, что лежит внутри интервала. Тогда она является точкой экстремума, а значит по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема Лагранжа. *Если* $f(x)$ *дифференцируема на* (a,b) *и непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\exists c \in (a,b) \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Доказательство. Обозначим $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$.

Функция $g(x)$ дифференцируема на (a,b) и непрерывна на $[a,b]$ и $g(a)=0,\quad g(b)=0$ Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)\quad g'(c)=0$. Но

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Следовательно,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \text{ и } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $f(x)$ *дифференцируема на* (a,b)*, непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)=0$*, то* $f(x)\equiv c\quad x\in[a,b]$.

Доказательство. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на сегменте $[a,x]$. Тогда $\exists c\in(a,x)\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$. Отсюда $f(x)=f(a)\quad \forall x\in[a;b]$ и $f(x)\equiv f(a)=const$.Теорема доказана.

Следствие 2. *Если* $f(x)$ *дифференцируема на* (a,b)*, непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)=g'(x)$*, то* $\exists c\quad f(x)\equiv g(x)+c$.

Доказательство. По условию имеем $\left(f(x)-g(x)\right)'\equiv 0$, следовательно $f(x)-g(x)\equiv const$. Теорема доказана.

Теорема Коши. *Если функции* $f(x), g(x)$ *дифференцируема на* (a,b)*, непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\forall x\in(a,b)\quad g'(x)\neq 0$*, то* $\exists c\in(a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

1) Покажем, что $g(b)-g(a)\neq 0$. Допустим противное $g(b)-g(a)=0$. Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)\quad g'(c)=0$, что противоречит условию.

2) Введем функцию $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$. Функция $F(x)$ дифференцируема на (a,b), непрерывна на $[a,b]$ и $F(a)=0,\quad F(b)=0$. Тогда по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)\quad F'(c)=0$. Имеем

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если положить $g(x)=x$, то $g'(x)=1\neq 0$ и по доказанной теореме $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{1}$. Таким образом теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

Теорема Дарбу. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, то $f'(x)$ принимает на (a,b) все промежуточные значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Доказательство.

1) Докажем, что если $f'(a)<0$, а $f'(b)>0$, то $\exists c\in(a,b)\quad f'(c)=0$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса $\exists c\in[a,b]\quad f(c)=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$.

Если $c=a$, то по лемме 1 $\exists\delta\quad\forall x\in X\quad a<x<a+\delta\quad f(x)<f(c)$, а это противоречит тому, что $f(c)=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$, то есть $c\neq a$.

Если $c=b$, то по лемме 2 $\exists\delta \quad \forall x\in X \quad b-\delta<x<b \quad f(x)<f(c)$. Опять получили противоречие. Следовательно, $c\in(a,b)$ и по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Случай, когда $f'(a)>0$ и $f'(b)<0$ рассматривается аналогично.

2) Пусть $f'(a)=A, \quad f'(b)=B$. Докажем, что $f'(x)$ принимает все промежуточные значения между A и B. Допустим, что $A<B$ и пусть $A<C<B$. Введем функцию $F(x)=f(x)-C\cdot x$. Тогда $F'(x)=f'(x)-C$ и

$$F'(a)=A-C<0, \quad F'(b)=B-C>0.$$

В силу пункта 1) $\exists c\in(a,b) \quad F'(c)=0$. Отсюда $f'(c)-C=0$ и $f'(c)=C$.

Остальные случаи доказываются аналогично. Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и непрерывна на $[a,b]$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=A\in\mathbb{R}$, то $f(x)$ дифференцируема в точке a и $f'(a)=A$.*

Доказательство. По определению производной имеем

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

По теореме Лагранжа $\exists c(x)\in(a,x) \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$. Так как $a<c(x)<x$ то при $x\to a \quad c(x)\to a$ и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}f'(c(x))\overset{(c(x)=t)}{=}\lim_{t\to a+0}f'(t)=A.$$

Т.е. $f'(a)=A$. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для правого конца сегмента.

Замечание. *Если производная существует на промежутке, то она не может иметь разрывов первого рода.*

Теорема. *Дифференцируемая на (a,b) функция возрастает на нем тогда и только тогда, когда $f'(x)\ge 0$, и убывает тогда и только тогда, когда $f'(x)\le 0$.*

Доказательство.

1) Пусть функция возрастает на (a,b) и $x_0\in(a,b)$. Тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \quad \forall x\ne x_0$ и, следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$.

2) Пусть $f'(x)\ge 0 \quad \forall x\in(a,b)$ и пусть $x_1<x_2$. Применим к функции на сегменте $[x_1,x_2]$ теорему Лагранжа. Тогда $\exists c\in(x_1,x_2)$, такое что $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\ge 0$. Следовательно, $f(x_1)\le f(x_2)$.

Аналогично доказывается критерий убывания. Теорема доказана.

Замечание. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a (в точке b) и возрастает на (a,b), то она возрастает и на $[a,b)$ (на $(a,b]$).*

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in[a,b)$ и $x_1<x_2$. Если $x_1>a$, то $f(x_1)\le f(x_2)$ в силу возрастания функции на (a,b). Если $x_1=a$, то переходя к пределу в неравенстве $f(x)\le f(x_2)$ $(a<x<x_2)$ при $x\to a+0$, получим $f(a)\le f(x_2)$. Замечание доказано.

Теорема. *Дифференцируемая на интервале (a,b) функция строго возрастает на нем тогда и только тогда, когда:*

1) $f'(x)\ge 0 \quad \forall x\in(a,b)$,

2) $\nexists(\alpha,\beta)\subset(a,b) \quad f'(x)\equiv 0 \quad x\in(\alpha,\beta)$.

Доказательство. Докажем необходимость.

1) Функция $f(x)$ строго возрастает, значит и просто возрастает, тогда $f'(x)\ge 0$.

2) Допустим противное, что $\exists(\alpha,\beta)\subset(a,b) \quad f'(x)\equiv 0 \quad x\in(\alpha,\beta)$, но тогда $f(x)\equiv const \quad x\in(a,b)$, что противоречит строгому возрастанию.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда $f(x)$ возрастает. Допустим, что нестрого. Тогда $\exists x_1,x_2\in(a;b) \quad x_1<x_2 \quad f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда $\forall x\,(x_1\le x\le x_2) \quad f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$. Следовательно, $f(x)\equiv const$ на (α,β) и $f'(x)\equiv 0$ на (α,β). Мы получили противоречие. Теорема доказана.

3.3. Приложение производных к вычислению пределов.

Теорема (Правило Лопиталя $\frac{0}{0}$).

$$\left.\begin{cases} f(x),g(x)-\text{дифференцируемы на }(a,b) \\ \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0 \\ g'(x)\ne 0 \quad x\in(a;b) \\ \lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R} \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists a_1\in(a,b) \quad \forall x\in(a_1,b) \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon .$$

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке b формулами $f(b)=0, \quad g(b)=0$. Доопределенные функции $f(x), \quad g(x)$ непрерывны в точке b. Пусть $x\in(a_1,b)$. Применим к сегменту $[x,b]$ и функциям $f(x),g(x)$ теорему Коши. Тогда $\exists x_0\in(x,b)$, такое что

$$\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Так как $f(b)=0, \quad g(b)=0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

при $a_1 < x < x_0 < b$. Следовательно, для точки x_0 выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}-A\right|<\varepsilon .$$

Отсюда $\forall x\in(a_1,b) \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$ и $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{f(x)}=A$. Теорема доказана.

Замечание 1. *Аналогичная теорема справедлива при* $x\to a+0$*, а, следовательно, и при* $x\to x_0 \quad (x_0\in(a,b))$.

Замечание 2. *Теорема остаётся в силе, если* $A=\pm\infty$.

Теорема.

$$\left.\begin{cases} f(x), g(x) - \textit{дифференцируемы на } (a,+\infty) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \\ g'(x)\neq 0 \quad x\in(a,+\infty) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \quad \left(A\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}\right) \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Доказательство. На основании предыдущей теоремы имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{1}{x}=y\right)}{=}\lim_{y\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Теорема доказана.

Замечание. *Аналогичная теорема справедлива и при* $x\to-\infty$.

Теорема (Правило Лопиталя $\frac{\infty}{\infty}$).

$$\left.\begin{cases} f(x), g(x) - \textit{дифференцируемы на } (a,b) \\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty \\ g'(x) \neq 0 \quad x\in(a;b) \\ \lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \end{cases}\right| \Rightarrow \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists a_1 \in (a,b) \quad \forall x \in (a_1,b) \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $A - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < A + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$, то

$$\exists a_2 \in (a,b) \quad \forall x \in (a_2,b) \quad g(x) > 0 \text{ и } g(x) > g(a_1).$$

К сегменту $[a_1, x]$и функциям $f(x), g(x)$ применим теорему Коши. Тогда $\exists x_0 \in (a_1, x)$, такое что

$$\frac{f(x) - f(a_1)}{g(x) - g(a_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Так как для точки x_0 выполнено неравенство $\left|\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(a_1)}{g(x) - g(a_1)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из условия $g(x) > g(a_1)$ следует, что $g(x) - g(a_1) > 0$. Отсюда

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) < f(x) - f(a_1) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right),$$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) + f(a_1) < f(x) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x) - g(a_1)\right) + f(a_1).$$

Так как $g(x) > 0$, то

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(a_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(a_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(a_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(a_1)}{g(x)}.$$

При $x\to b-0$

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(a_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(a_1)}{g(x)}\to A-\frac{\varepsilon}{2}>A-\varepsilon,$$

$$\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(a_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(a_1)}{g(x)}\to A+\frac{\varepsilon}{2}<A+\varepsilon.$$

Поэтому $\exists a_3\in(a_2,b)\quad \forall x\in(a_3,b)\quad A-\varepsilon<\dfrac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon$. Т.е.

$\forall x\in(a_3,b)\quad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$ и $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. Теорема доказана.

Замечание. *Аналогичные теоремы справедливы и при* $x\to a+0,\quad x\to\pm\infty,\quad x\to x_0,\quad A\in\mathbb{R},\quad A=\pm\infty$.

3.4. Старшие производные.

Определение. $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$, $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$.

Примеры.

1) $f(x)=e^x \qquad f^{(n)}(x)=e^x$

2) $f(x)=a^x \qquad f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$

3) $f(x)=x^n \qquad f^{(n)}(x)=n!$

4) $f(x)=x^\alpha \quad (\alpha\notin N) \quad f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

5) $f(x)=\sin x \qquad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

И т.д.

6) $f(x) = \cos x \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

7) $f(x) = \ln x \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

И т.д.

8) $f(x) = \log_a x \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$

9) $\left(f(ax+b)\right)^n = f^{(n)}(ax+b)a^n$

Свойства n-ной производной.

1) $\left(cf(x)\right)^n = cf^{(n)}(x)$

2) $\left(f(x) + g(x)\right)^n = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

3) $\left(f(ax+b)\right)^n = f^{(n)}(ax+b)a^n$

Действительно,

$$\left(f\left(ax+b\right)\right)' = f'\left(ax+b\right)a,$$

$$\left(f\left(ax+b\right)\right)'' = f''\left(ax+b\right)a^2,$$

и т.д.

Определение. $f^{(0)}\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Теорема. *Если* $f\left(x\right), g\left(x\right)$ - n *раз дифференцируемы, то* $f\left(x\right)g\left(x\right)$ - n *раз дифференцируема, и*

$$\left(f\cdot g\right)^{(n)}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n} c_n^k f^{(n-k)}\left(x\right)g^{(k)}\left(x\right).$$

Эта формула называется формулой Лейбница.

Доказательство. Доказательство проведём по индукции.

1) $n=1$

$$\left(f\cdot g\right)'\left(x\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

$$\sum_{k=0}^{1} c_1^k f^{(1-k)}\left(x\right)g^{(k)}\left(x\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

Формула верна.

2) Допустим, что формула верна для n. Докажем, что она верна и для $n+1$. Имеем

$$\left(f\cdot g\right)^{(n+1)}\left(x\right)=\left(\left(f\cdot g\right)^{(n)}\left(x\right)\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n} c_n^k f^{(n-k)}\left(x\right)g^{(k)}\left(x\right)\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} c_n^k\left(f^{(n-k+1)}\left(x\right)g^{(k)}\left(x\right)+f^{(n-k)}\left(x\right)g^{(k+1)}\left(x\right)\right)=$$

$$=f^{(n+1)}\left(x\right)g^{(0)}\left(x\right)+c_n^1 f^{(n)}\left(x\right)g^{(1)}\left(x\right)+\cdots+c_n^n f^{(1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)+$$
$$c_n^0 f^{(n)}\left(x\right)g^{(1)}\left(x\right)+\cdots+c_n^{n-1} f^{(1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)+f^{(0)}\left(x\right)g^{(n+1)}\left(x\right)=$$

$$=f^{(n+1)}\left(x\right)g^{(0)}\left(x\right)+c_{n+1}^1 f^{(n)}\left(x\right)g^{(1)}\left(x\right)+\cdots+c_{n+1}^n f^{(1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)+f^{(0)}\left(x\right)g^{(n+1)}\left(x\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1}^k f^{(n+1-k)}\left(x\right)g^{(k)}\left(x\right).$$

Теорема доказана.

3.5. Формула Тейлора.

Лемма 1. *Пусть* $P(x)$ *- многочлен степени* n, $x_0 \in R$. *Тогда многочлен* $P(x)$ *можно представить в виде*

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n.$$

Такое представление единственно и

$$b_0 = P(x_0), \quad b_1 = P'(x_0), \quad b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \cdots, b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Доказательство.

1) Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Положим $y = x - x_0$, тогда $x = y + x_0$ и

$$P(x) = a_0(y + x_0)^n + a_1(y + x_0)^{n-1} + ... + a_n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + ... + b_ny^n =$$
$$= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n.$$

2) Пусть $P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n$. Тогда

$P(x_0) = b_0$,

$P'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + ... + n\,b_n(x - x_0)^{n-1}$,

$P'(x_0) = b_1$,

$P''(x) = 2b_2 + 6b_3(x - x_0) + ... + n(n-1)\,b_n(x - x_0)^{n-2}$,

$P''(x_0) = 2b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}$,

и т.д.

$P^{(n)}(x) = n!b_n$,

$P^{(n)}(x_0) = n!b_n \Rightarrow \quad b_n = \dfrac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Мы получили, что для коэффициентов этого разложения справедлива формула

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \left(k = 0, 1, 2, \cdots, n\right).$$

Независимо от того, как это разложение получено, коэффициенты определены однозначно, так как производная единственна. Следовательно, разложение единственно. Теорема доказана.

Представление

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Называется формулой Тейлора для многочлена.

Лемма 2. *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на* $[a,b]$, $\exists f^{(n)}(a)$ *и* $f(a)=f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$. *Тогда* $f(x)=o((x-a)^n)$ *при* $x\to a$, *(то есть* $f(x)\to 0$ *при* $x\to a$ *быстрее, чем* $(x-a)^n$ *).*

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции.

1) Пусть $n=1$. Так как $f(a)=f'(a)=0$, то

$$0=f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}.$$

Следовательно, $f(x)=o(x-a)$ при $x\to a$.

2) Докажем переход $n\Rightarrow n+1$. По условию имеем

$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=f^{(n+1)}(a)=0$.

Введем новую функцию $g(x)=f'(x)$. Для нее

$g(a)=g'(a)=g''(a)=\ldots=g^{(n)}(a)=0$

и по предположению индукции $g(x)=o((x-a)^n)$ $(x\to a)$. Следовательно, $f'(x)=o((x-a)^n)$ $(x\to a)$. Это означает, что

$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a,a+\delta)\cap[a,b]$ $|f'(x)|\le\varepsilon|x-a|^n$.

Применим к функции $f(x)$ на сегменте $[a,x]$ теорему Лагранжа. Имеем $\exists c\in(a,x)$, такое что $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$. Так как $f(a)=0$, то $f(x)=f'(c)(x-a)$. В силу того, что $c\in(a,x)$ $|f'(c)|\le\varepsilon|c-a|^n$. Отсюда $|f(x)|=|f'(c)||x-a|\le\varepsilon|c-a|^n|x-a|\le\varepsilon|c-a|^{n+1}$ и, следовательно, $f(x)=o((x-a)^{n+1})$ при $x\to a$. Теорема доказана.

Представление функции в виде

$$f(x)=\left[f(a)+\frac{f'(a)(x-a)}{1!}+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}\right]+R_n(x)$$

называется формулой Тейлора, $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ $\left(n-1\right)$ *раз дифференцируема на* $\left[a,b\right]$ *и* $\exists f^{(n)}(a)$, *тогда при* $x\in\left[a,b\right]$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Введем многочлен

$$P(x)=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)}{1!}+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

По лемме 1 $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}=\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$, следовательно, $f^{(k)}(a)=P^{(k)}(a)$. Пусть $g(x)=f(x)-P(x)$. Тогда $g(a)=g'(a)=...=g^{(n)}(a)=0$ и по лемме 2 $g(x)=o((x-a)^n)$, следовательно, $f(x)-P(x)=o((x-a)^n)$ и $f(x)=P(x)+o((x-a)^n)$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ $\left(n-1\right)$ *раз дифференцируема на* $\left[a,b\right]$ *и* $\exists f^{(n)}(b)$. *Тогда* $\forall x\in\left[a,b\right]$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+...+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n+o((x-b)^n).$$

Доказательство. Сведем эту теорему к предыдущей. Пусть $g(x)=f(-x),\quad x\in\left[-b,-a\right]$. Тогда $g(x)$ $\left(n-1\right)$ раз дифференцируема на $\left[-b,-a\right]$, $\exists g^{(n)}(-b)$. Тогда по предыдущей теореме, учитывая что $g^k(x)=(-1)^k f^k(-x)$, будем иметь

$$g(x)=g(-b)+g'(-b)(x+b)+\frac{g''(-b)}{2!}(x+b)^2+...+\frac{g^{(n)}(-b)}{n!}(x+b)^n+o((x+b)^n).$$

Заменяя x на $-x$ получим

$$g(-x)=g(-b)+g'(-b)(-x+b)+\frac{g''(-b)}{2!}(-x+b)^2+\ldots+\frac{g^{(n)}(-b)}{n!}(-x+b)^n+$$
$$+o((-x+b)^n).$$

Отсюда

$$f(x)=f(b)+f'(b)(-1)(-1)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(-1)^2(-1)^2(x-b)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(-1)^n(-1)^n(x-b)^n+o((x-b)^n)$$

и

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n+o((x-b)^n).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на* $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ *и* $\exists f^{(n)}(x_0)$. *Тогда*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

Теорема (Обобщенная теорема Коши). *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема на сегменте* $[a,b]$, $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, $\exists f^{(n+1)}(x)$ *на интервале* (a,b), $g(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема на* (a,b). *Пусть, кроме того,* $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. *Тогда* $\exists c\in(a,b)$ *такое, что*

$$f(b)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$
$$=\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Доказательство. Пусть

$$F(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Тогда $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). К функциям $F(x)$ и $g(x)$ применим теорему Коши. Имеем $\exists c \in (a,b)$ такое, что

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}.$$

Отсюда,

$$F(b)-F(a) = \frac{g(b)-g(a)}{g'(c)} F'(c).$$

Так как

$$F'(x) = f'(x) + \left(\frac{f''(x)}{1!}(b-x) - f'(x) \right) + \left(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{n-1!}(b-x)^{n-1} \right) = \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}(b-x)^n,$$

то $F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$ и $F(b)-F(a) = \frac{g(b)-g(a)}{g'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$. Учитывая, что

$$F(b) = f(b), \quad F(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Следствие 1. *Полагая* $g(x) = (b-x)^{n+1}$, *имеем*

$$\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n = \frac{-(b-a)^{n+1}}{-(n+1)(b-c)^n} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

и

$$f(b) = \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right] +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Формула Лагранжа.

Следствие 2. *Полагая* $g(x) = b-x$, *имеем*

$$\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n = \frac{-(b-a)}{-1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n(b-a)}{n!}$$

и

$$f(b)=\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n(b-a)}{n!}.$$

Формула Коши.

Аналогичные формулы имеют место для разложения по правому концу сегмента и в его внутренней точке.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ n *раз дифференцируема на* $[x_0,x]$ $([x;x_0])$, $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[x_0,x]$ $([x,x_0])$, $\exists f^{(n+1)}(x)$ *на* (x_0,x) $((x_0,x))$. *Тогда* $\exists c\in(x_0;x)$ $(c\in(x;x_0))$ *такое, что*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ n *раз дифференцируема на* $[x_0,x]$ $([x;x_0])$, $f^{(n)}(x)$ *непрерывна на* $[x_0,x]$ $([x,x_0])$, $\exists f^{(n+1)}(x)$ *на* (x_0,x) $((x_0,x))$. *Тогда* $\exists c\in(x_0;x)$ $(c\in(x;x_0))$ *такое, что*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

Разложение некоторых функций по формуле Тейлора.

1) $f(x)=e^x$ $x_0=0$

$$f^{(n)}(x_0)=e^{x_0}=1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2) $f(x)=\sin x \quad x_0=0$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x)$$

$$R_{2n+2}(x)=\frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n+2}(x)$$

3) $f(x)=\cos x \quad x_0=0$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+1}(x)$$

4) $f(x)=\ln(1+x) \quad x_0=0$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+R_n(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

5) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \qquad x_0=0$

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}=C_\alpha^n$

$(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n}C_\alpha^k x^k+R_n(x)$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{a(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+...+\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$

$+R_n(x)$

В частном случае, когда $\alpha\in N$ и $n>\alpha$ $R_n(x)=0$ и формула Тейлора превращается в бином Ньютона.

3.6. Исследование функции с помощью производной.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Пусть* x_0 *- внутренняя точка промежутка* P *и в этой точке функция имеет экстремум (*$\max$ *или* $\min$*). Тогда в точке* x_0 *производная либо не существует, либо равна нулю.*

Доказательство вытекает из теоремы Ферма.

Определение. Если $f'(x_0)=0$ то точка x_0 называется стационарной.

Определение. Если в точке x_1 производная не существует, то точка x_1 называется критической.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть* x_0 *- внутренняя точка промежутка* P *и* $f(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности* $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ *точки* x_0. *Если при этом*

$$f'(x)\geq 0 \quad x\in(x_0-\delta,x_0),$$
$$f'(x)\leq 0 \quad x\in(x_0,x_0+\delta),$$

то x_0 *- точка максимума. Если*

$$f'(x)>0 \quad x\in(x_0-\delta;x_0),$$
$$f'(x)<0 \quad x\in(x_0;x_0+\delta),$$

то x_0 *- точка строгого максимума.*

Доказательство.

1) Пусть $f'(x) \geq 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, тогда $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \delta, x_0]$. Следовательно, $f(x) \leq f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0]$.

2) Пусть $f'(x) \leq 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, тогда $f(x)$ убывает на $[x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно, $f(x) \leq f(x_0)$ при $x \in [x_0; x_0 + \delta)$.

Таким образом x_0 - точка максимума.

Аналогично доказывается строгий максимум. Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для минимума.

Теорема (второе достаточное условие). *Пусть x_0 - внутренняя точка промежутка P, функция $f(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists f''(x_0)$. Пусть, кроме того, $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0$.*

1) Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка строгого максимума.

2) Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка строгого минимума.

Доказательство.

1) Применим лемму, предшествующую теореме Ферма, к функции $f'(x)$. Так как $f''(x_0) < 0$, то $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \quad f'(x) < f'(x_0) = 0,$$
$$\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \quad f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Отсюда по предыдущей теореме x_0 - точка строгого локального максимума.

2) Случай $f''(x_0) > 0$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема (третье достаточное условие). *Пусть x_0 - внутренняя точка промежутка P, функция $f(x)$ $(n-1)$раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $\exists f^{(n)}(x_0)$ и*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)} \neq 0.$$

1) Если n - нечетное, то в точке x_0 экстремума нет.

2) Если n - четное и

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 строгий максимум.

b) $f^{(n)}(x_0)>0$*, то в точке* x_0 *строгий минимум.*

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

Учитывая условие теоремы, эту формулу можно переписать так:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)=(x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right).$$

Запишем остаточный член в форме Пеано $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$. Отсюда $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\to 0$ при $x\to x_0$, т.е. $\alpha(x)=\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ - бесконечно малая величина.

Итак, мы получили, что $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)\right)$.

1) Пусть n - нечетное число. Допустим, что $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}+\alpha(x)\right)>0$, следовательно,

$$\exists\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\forall x\in\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)>0.$$

Тогда при

$$\begin{aligned} &x\in(x_0-\delta,x_0) \quad f(x)-f(x_0)<0,\\ &x\in(x_0,x_0+\delta) \quad f(x)-f(x_0)>0. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке x_0 экстремума нет.

Аналогично рассматривается случай $f^{(n)}\left(x_0\right)<0$.

2) Пусть n - четное число. Допустим, что $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$. Тогда

$$\exists\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\forall x\in\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\quad \frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\alpha(x)>0.$$

Так как $\left(x-x_0\right)^n>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}\left(x_0\right)$, то $f(x)-f(x_0)>0$ и $f(x)>f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}\left(x_0\right)$. Следовательно, в точке x_0 строгий минимум.

Аналогично рассматривается случай $f^{(n)}\left(x_0\right)<0$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, $x_1,x_2,...,x_k$ *- стационарные или критические точки этой функции, принадлежащие интервалу* (a,b). *Тогда*

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\max\left\{ f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_k), f(b)\right\},$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)=\min\left\{ f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_k), f(b)\right\}.$$

Доказательство очевидно.

3.7. Исследование функции на выпуклость.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке P.

Определение. Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз, если

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1+\alpha_2=1 \quad \forall x_1,x_2 \in P \quad f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Называется выпуклой вверх, если

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1+\alpha_2=1 \quad \forall x_1,x_2 \in P \quad f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Линейная функция удовлетворяет обоим неравенствам и, следовательно, является одновременно выпуклой и вверх и вниз.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вниз, если

$$\forall \alpha_1,\alpha_2>0\; \alpha_1+\alpha_2=1\, \forall x_1,x_2 \in P\; x_1 \neq x_2 \quad f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Называется строго выпуклой вверх, если

$$\forall \alpha_1,\alpha_2>0\; \alpha_1+\alpha_2=1\, \forall x_1,x_2 \in P\; x_1 \neq x_2 \quad f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Ниже мы докажем теоремы для нестрогой выпуклости. Для строгой доказательства аналогичны.

В определении выпуклости несущественно требовать $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ или $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Если $x_1 = x_2$, то неравенство автоматически выполняется, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что.

Придадим условию выпуклости вниз другую форму. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $x_1 < x_2$. Тогда для $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ будем иметь $x_1 < x < x_2$ и

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $\alpha_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Подставим эти значения в условие выпуклости

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Преобразуем это условие. Имеем

$$(x_2 - x_1) f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$\left[(x_2 - x) + (x - x_1)\right] f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$(x_2 - x)\big(f(x) - f(x_1)\big) \leq (x - x_1)\big(f(x_2) - f(x)\big),$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Таким образом справедлива теорема.

Теорема. *Функция* $f(x)$ *выпукла вниз тогда и только тогда, когда* $\forall x_1, x, x_2 \in P$ *таких, что* $x_1 < x < x_2$, *выполняется неравенство*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Теорема. *Дифференцируемая на промежутке* P *функция* $f(x)$ *выпукла вниз на нем тогда и только тогда, когда* $f'(x)$ *возрастает.*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз, $x_1, x_2 \in P$ $x_1 < x_2$. Тогда $\forall x\ x_1 < x < x_2$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $x \to x_1+0$ получим

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

Переходя теперь к пределу при $x \to x_2-0$ будем иметь

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

Отсюда $f'(x_1) \le f'(x_2)$ и функция $f'(x)$ возрастает.

2) Пусть функция $f'(x)$ возрастает. По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ такое, что $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$. Аналогично $\exists c_2 \in (x, x_2)$ такое, что $\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(c_2)$. Так как $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) \le f'(c_2)$ и

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Дифференцируемая функция строго выпукла вниз тогда и только тогда, когда ее производная строго возрастает.*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ строго выпукла вниз. Тогда ее производная по предыдущей теореме возрастает. Допустим, что возрастание не строгое. Тогда $\exists (\alpha, \beta) \subset P$, такое что $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f'(x) = c$, но тогда $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) = cx + d$, что противоречит строгой выпуклости.

2) Пусть функция $f'(x)$ строго возрастает. Точно так же, как и в предыдущей теореме для любых чисел $x_1, x, x_2 \in P$ таких, что $x_1 < x < x_2$

$$\exists c_1 \quad x_1 < c_1 < x \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$$

и

$$\exists c_2 \; x < c_2 < x_2 \quad \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(c_2).$$

Так как $f'(x)$ строго возрастает и $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) < f'(c_2)$ и $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$. То есть, $f(x)$ строго выпукла вниз. Теорема доказана.

Аналогичные теоремы справедливы для выпуклых вверх функций.

Теорема. *Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда* $f''(x) \geq 0$.

Теорема. *Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ строго выпукла вниз тогда и только тогда, когда* $f''(x) \geq 0$ *и* $\nexists(\alpha,\beta) \subset P \quad f''(x) \equiv 0 \quad x \in (\alpha,\beta)$.

Теорема. *Дифференцируемая функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда её график лежит выше любой касательной.*

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз и дифференцируема, точка $x_0 \in P$. Рассмотрим функцию $g(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Докажем, что $f(x) \geq g(x)$, то есть, что $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$. Применим теорему Лагранжа. Имеем $f'(c)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$, отсюда $\left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x-x_0) \geq 0$. Точка c лежит между x и x_0.

Если $x > x_0$, то $c > x_0$, и выполнено

$$\begin{cases} f'(c) - f'(x_0) \geq 0 \\ x - x_0 > 0 \end{cases}.$$

Если $x < x_0$, то $c < x_0$, и выполнено

$$\begin{cases} f'(c) - f'(x_0) \le 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases}.$$

Если $x = x_0$, то $f(x_0) = g(x_0)$

2) Пусть график лежит выше любой касательной, то есть $\forall x_0 \forall x \quad f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ или $f(x) - f(x_0) \le f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим два случая.

a) Пусть $x > x_0$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0)$.

b) Пусть $x < x_0$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0)$.

Пусть $x_1, x, x_2 \in P$ произвольные числа, такие что $x_1 < x < x_2$. Воспользуемся пунктом b). Положим $x = x_1, \quad x_0 = x$, тогда $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le f'(x_0)$.

Теперь воспользуемся пунктом a). Положим $x = x_2, \quad x_0 = x$, тогда $\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le f'(x_0)$. Следовательно, $\dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Теорема доказана.

Теорема (Неравенство Йенсена). *Если функция* $f(x)$ *выпукла вниз на* P, *то* $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \ge 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1 \quad \forall x_1, x_2 ... x_n \in P$ *выполняется неравенство:*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Это неравенство называется неравенством Йенсена.

Доказательство. Доказательство проведём методом индукции.

1) Если $n = 1$, то неравенство принимает вид $f(x_1) \le f(x_1)$.

2) Допустим, что неравенство справедливо для n и докажем, что оно справедливо для $n+1$. Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \ge 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 1 \quad x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \in P.$$

Обозначим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\alpha = 0$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, $\alpha_{n+1} = 1$ и неравенство очевидно.

2) Пусть $\alpha > 0$. Так как $\alpha + \alpha_{n+1} = 1$, то

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left[\alpha\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha}x_n\right) + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right] =$$

$$= f\left(\alpha x + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right) \le \alpha f\left(x\right) + \alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) =$$

$$= \alpha f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha}x_n\right) + \alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) \le$$

$$\le \alpha\left[\frac{\alpha_1}{\alpha} f\left(x_1\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha} f\left(x_2\right) + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} f\left(x_n\right)\right] + \alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) =$$

$$= \alpha_1 f\left(x_1\right) + \alpha_2 f\left(x_2\right) + \dots + \alpha_n f\left(x_n\right) + \alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right).$$

Теорема доказана.

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на промежутке P.

Определение. Точка $x_0 \in P$ называется точкой перегиба, если существует $\delta > 0$ такое, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция выпукла вниз, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вверх или наоборот.

Если в точке перегиба (x_0) провести касательную, то с одной стороны она будет выше графика, а с другой ниже, то есть в точке x_0 касательная пересекает график.

Теорема. *Точка* x_0 *является точкой перегиба дважды дифференцируемой функции* $f\left(x\right)$ *тогда и только тогда, когда* $f''\left(x\right)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0. *Если в точке перегиба вторая производная непрерывна, то* $f''\left(x_0\right) = 0$.

Доказательство очевидно.

3.8. Асимптоты.

Определение. Вертикальная прямая $x = x_0$ называется асимптотой графика функций $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0$.

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема. *Прямая* $y = kx + b$ *является асимптотой графика функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty \; (x \to -\infty)$ *тогда и только тогда, когда* $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Доказательство.

1) Пусть $y = kx + b$ - асимптота функции $f(x)$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[f(x) - (kx + b) \right] + (kx + b)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\left[f(x) - (kx + b) \right] + b \right) = b.$$

2) Пусть $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0$. Следовательно, $y = kx + b$ - асимптота.

Теорема доказана.

3.9. Дифференциал функции.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная функция $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Для дифференциала используют обозначение $df(x_0)$. По определению

$\left(df\left(x_0\right)\right)\left(\Delta x\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x$. Рассмотрим тождественную функцию $i\left(x\right)\equiv x$. Для дифференциал этой функции имеем $di\left(x_0\right)=i$ или $dx=i$. Используя это обозначение можно написать $df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)dx$. Условие дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ можно переписать в виде

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}-f'\left(x\right)\right]=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)\right]-\left[f'\left(x\right)\Delta x\right]}{\Delta x}=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)\right)-df\left(x\right)\left(\Delta x\right)}{\Delta x}=0.$$

Свойства дифференциала.

1) $d\left(cf\left(x\right)\right)=cd\left(f\left(x\right)\right)$
2) $d\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=d\left(f\left(x\right)\right)+d\left(g\left(x\right)\right)$
3) $d\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=g\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)d\left(g\left(x\right)\right)$
4) $d\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\dfrac{g\left(x\right)df\left(x\right)-f\left(x\right)dg\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$
5) $d\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)=df\left(g\left(x\right)\right)dg\left(x\right)$

По аналогии с дифференцируемостью n-ного порядка можно определить дифференциал n-ного порядка $d^n f\left(x\right)=f^{(n)}\left(x\right)\left(dx\right)^n$.

Упражнения

1) Доказать, что если функция дифференцируема на промежутке и ее производная ограничена, то функция равномерно непрерывна.
2) Доказать, что производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь разрывов первого рода.
3) Привести пример функции, которая имеет в точке x_0 максимум, но не является возрастающей ни на каком интервале $(x_0-\varepsilon, x_0)$.
4) Привести пример функции, у которой $f'(x_0)>0$, но функция не является возрастающей, ни на каком интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.
5) Привести пример не нулевой бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси функции, у которой все производные в ноле равны нулю.
6) Доказать, что если дифференцируемая функция имеет на промежутке n различных корней, то ее производная имеет на этом промежутке не менее $n-1$ различного корня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В.А. Математический анализ, ч. 1.—М,: Наука, 1981.
2. Зорич В.А. Математический анализ, ч. 2.—М,: Наука, 1984.
3. Дороговцев А.Я.Математический анализ. Справочное пособие. Киев, «Вища Школа», 1985.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.—М,: Наука, 1988.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2.—М,: Наука, 1983.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2.—М,: Наука, 1981.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ.—М,: Наука, 1979.
8. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.—М,: Высшая школа, 1999.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3.—М,: Наука, 1969.
10. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел, непрерывность, дифференцируемость. Издание второе переработанное и дополненное. —М,: Физматлит, 2003.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. Интегралы, ряды. Издание второе переработанное и дополненное. —М,: Физматлит, 2003.
12. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.Сборник задач по математическому анализу (функции нескольких переменных). Санкт-Петербург, 1994
13. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. АСТ, Астрель, Москва,2004.