В.Е.Ковальчук, П.А.Чалов

Лекции по математическому анализу

Оглавление

Глава I

Первый семестр

1 Введение в анализ

Как и любая математическая дисциплина, математический анализ имеет свой объект исследования и свой метод исследования, опирающийся на первоначальные понятия множества и функции. Объектом исследования в математическом анализе являются функции, их свойства и операции над ними (дифференцирование, интегрирование и другие). Метод исследования — предельный переход. В этой главе мы познакомимся с основными понятиями анализа.

1.1 Логическая символика

В математических рассуждениях для сокращения записи часто используют логические символы: $\forall$, $\exists$, : (или $|$), $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$.

Символ $\forall$ называется квантором всеобщности и заменяет слова: для любого, для каждого, для всех, ...

Символ $\exists$ называется квантором существования и заменяет слова: найдётся, существует, можно указать, ...

Символ : (или $|$) заменяет слова: такой что, удовлетворяющий условию, обладающий свойством, ...

Символ $\Rightarrow$ (импликация) заменяет слова: следует (из написанного слева следует написанное справа), влечёт (написанное слева влечёт написанное справа), то (если верно написанное слева, то верно и написанное справа), ...

Символ $\Leftrightarrow$ (равносильность, эквивалентность) означает, что утверждения (высказывания), написанные слева и справа от него, равносильны (или оба верны, или оба неверны).

Символ $\vee$ (дизъюнкция) заменяет союз "или" (не исключающее).

Символ $\wedge$ (конъюнкция) заменяет союз "и".

Символ := заменяет слова "по определению означает" или "левой части присваиваем значение правой части".

Если какой-либо из символов перечёркнут, то это означает его отрицание. Например, $\nexists$ читается как "не найдётся", "не существует", а $\not\Rightarrow$ — как "не следует".

Примеры.

1. Запись $x^2 + 1 > 0 \ \forall x$ может быть прочитана так: для любого числа x выражение $x^2 + 1$ положительно.

2. Высказывание $\nexists x : x^2 = -3$ читается следующим образом: не существует такого числа x, чтобы его квадрат был равен -3. Но можно сказать и иначе: уравнение $x^2 = -3$ не имеет вещественных корней.

3. Выражение $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -3$ читается так: если $x^2 + 2x - 3 = 0$, то либо $x = 1$, либо $x = -3$.

4. Предложение $x^2 > 4 \not\Rightarrow x > 2$ может быть сформулировано так: если $x^2 > 4$, то не обязательно $x > 2$.

1.2 Множества

Понятие множества является первичным понятием, как точка в геометрии или натуральное число в арифметике. Слова: совокупность, система, класс, собрание и другие являются синонимами слова множества.

Множества, как правило, обозначают заглавными латинскими или греческими буквами: A, B, $\ldots$, Λ, $\mathcal{P}$, $\ldots$. Множество состоит из элементов. Если a — общее наименование элементов множества A, то пишут $A = \{a\}$ и говорят: множество A состоит из элементов вида a. Запись $a \in A$ читается как "элемент a принадлежит множеству A"($\in$ — знак принадлежности). Запись $A \ni a$ означает то же самое, но можно сказать и "множество A содержит элемент a".

Существует два общепринятых способа задания множеств. Первый способ — перечислением элементов, составляющих множество, например, $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ — множество цифр (знаков, с помощью которых записываются числа в десятичной системе счисления). Однако такой способ задания множеств пригоден только в случае конечных множеств (множеств, состоящих из конечного числа элементов), да и то не всегда. Например, чтобы задать перечислением множество корней кубического уравнения $x^3 - 6x^2 - 15x + 4 = 0$, необходимо сначала решить это уравнение, что является достаточно непростым (а может быть, и ненужным) делом. Поэтому, как правило, множества задаются с помощью некоторого условия (или признака), которому элементы, принадлежащие множеству, удовлетворяют, а элементы, не принадлежащие множеству, не удовлетворяют. В этом случае принято писать

$$A = \{a : P(a)\}$$

(A есть множество элементов, удовлетворяющих условию P). Ещё раз подчеркнём, что условию P удовлетворяют все элементы множества A и только они, что с помощью математической символики может быть записано так:

$$a \in A \Leftrightarrow P(a).$$

Например, множество корней приведённого выше кубического уравнения может быть задано следующим образом:

$$A = \{x : x^3 - 6x^2 - 15x + 4 = 0\}.$$

Определение 1.1. *Два множества A и B назовём равными и будем писать $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть, если каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот.*

С помощью математической символики это определение может быть записано следующим образом:

$$(A = B) := (a \in A \Leftrightarrow a \in B).$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что множество B является подмножеством множества A (или множество B содержится во множестве A) и писать $B \subset A$, если каждый элемент множества B является элементом множества A, то есть,*

$$(B \subset A) := (a \in B \Rightarrow a \in A).$$

Если $B \subset A$, то будем говорить также, что множество A содержит множество B и писать $A \supset B$.

Из определения следует, что $A \subset A$, то есть любое множество является подмножеством самого себя.

Для удобства введём в рассмотрение пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество будем обозначать символом $\varnothing$ и считать, что оно содержится в любом множестве ($\varnothing \subset A$, каково бы ни было множество A).

Непосредственно из двух сформулированных выше определений вытекает следующее предложение: *два множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого*, то есть

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Операции над множествами

Определение 1.3. *Пусть даны множества A и B. Назовём:*

a) объединением (или суммой) множеств A и B ($A \cup B$) множество, состоящее из <u>всех</u> элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B,

$$(C = A \cup B) := (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B);$$

b) пересечением множеств A и B ($A \cap B$) множество, состоящее из <u>всех</u> элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B,

$$(C = A \cap B) := (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B);$$

c) разностью множеств A и B ($A \setminus B$) множество <u>всех</u> элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B,

$$(C = A \setminus B) := (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A, x \notin B);$$

d) симметрической разностью множеств A и B ($A \vartriangle B$) множество <u>всех</u> элементов, либо принадлежащих A, но не принадлежащих B, либо, наоборот, принадлежащих B, но не принадлежащих A,

$$(C = A \vartriangle B) := (x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A, x \notin B) \vee (x \in B, x \notin A)).$$

Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами.

1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — коммутативность;

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — ассоциативность;

4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — дистрибутивность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения соответственно.

Все эти свойства легко устанавливаются с помощью сделанного ранее замечания о том, что равенство множеств есть их взаимное вложение. Проверим последнее свойство.

Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$. Тогда $x \in (A \cap B) \vee x \in C$. Если $x \in (A \cap B)$, то $x \in A \wedge x \in B$. Но тогда $x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C$, следовательно, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Если же $x \in C$, то $x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C$, следовательно, снова $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Этими рассуждениями установлено вложение левой части доказываемого равенства в правую. Противоположное вложение доказывается аналогичными рассуждениями. Читателям предлагается провести их самостоятельно, равно как и проверить остальные свойства.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого множества X, то можно ввести ещё одну операцию над множествами, называемую дополнением.

Определение 1.4. *Пусть $A \subset X$. Назовём дополнением множества A до множества X и обозначим символом $C_X A$ разность $X \setminus A$.*

Если заранее оговорено или из контекста ясно, что дополнение берётся именно до множества X, то вместо $C_X A$ можно писать просто CX.

Дополнение множества A до множества X обладает следующими столь же легко проверяемыми свойствами. Если $A, B \subset X$, то:

1. $C(CA) = A$;
2. $C(A \cup B) = CA \cap CB$;
3. $C(A \cap B) = CA \cup CB$.

Свойства 2 и 3 называют соотношениями двойственности.

Операции объединения и пересечения можно распространить на любое конечное и даже бесконечное количество множеств.

Пусть даны множества A_λ, где индекс λ принимает любое значение из произвольного (не обязательно числового) множества Λ.

Определение 1.5. *Назовём объединением множеств A_λ и обозначим символом $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ множество A, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_λ. Другими словами,*

$$\left(A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: \ x \in A_\lambda\Big).$$

Определение 1.6. *Назовём пересечением множеств A_λ и обозначим символом $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ множество A, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_λ. Другими словами,*

$$\left(A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longleftrightarrow x \in A_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\Big).$$

Если $\Lambda = \{1, 2, \ \ldots, \ m\}$, то будем употреблять обозначения $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k$, а если Λ — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то будем писать или $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$, или $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и для пересечения соответственно.

Все перечисленные выше свойства операций объединения и пересечения, включая законы дистрибутивности и соотношения двойственности, сохраняют свою силу во всех случаях.

Определение 1.7. *Пусть даны множества $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$. Назовём декартовым (или прямым) произведением множеств A и B и обозначим символом $A \times B$ множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары, состоящие из элементов множеств A (первый) и B (второй),*

$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A, b \in B\}.$$

Аналогично определяется декартово (прямое) произведение любого конечного или бесконечного количества множеств.

Если даны множества $A_k,\ k = \overline{1,m}$, (запись $k = \overline{1,m}$ означает то же, что и запись $k = 1, 2, \ldots, m$) или множества $A_k,\ k = 1, 2, \ldots$, то

$$\prod_{k=1}^{m} A_k := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m):\ a_k \in A_k,\ k = \overline{1,m}\},$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \ldots = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots):\ a_k \in A_k,\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

Декартово произведение множества A на себя принято обозначать символом A^2, а если A берётся множителем m раз, то символом A^m,

$$A^2 := A \times A;\ A^m := \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{m}.$$

1.3 Вещественные числа

Понятие вещественного числа формировалось постепенно и завершилось к середине XIX века. Существует несколько различных подходов к построению теории вещественного числа. Мы используем подход, идея которого принадлежит одному из крупнейших математиков XIX века К. Вейерштрассу.

Будем предполагать, что читатель знаком с:
множеством натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3,\ \ldots, n,\ \ldots\}$,
множеством целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,\ \ldots, \pm n,\ \ldots\}$,
множеством рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n}:\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$,
с операцией сравнения этих чисел и арифметическими операциями над ними.

Определение 1.8. *Вещественным числом будем называть снабжённую знаком "$+$" или "$-$" бесконечную десятичную дробь. Множество вещественных чисел обозначим символом $\mathbb{R}$.*

Итак, вещественные числа записываются в виде

$$x = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots\ ,$$

где из двух знаков "$\pm$" в каждом конкретном случае выбирается только один, $a_0 \in \mathbb{N}$ — неотрицательное целое число, $a_k \in F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $(k \in \mathbb{N})$ — десятичные знаки. Числа, снабжённые знаком "$+$ будем называть положительными и знак "$+$ как правило, опускать, числа, снабжённые знаком "$-$ будем называть отрицательными. Число $0 = 0,000\ldots 0\ldots$ можно считать и отрицательным, и положительным.

Числа, отличающиеся друг от друга только знаком, будем называть противоположными. Число, противоположное числу x, будем обозначать $-x$.

Множество всех положительных чисел вместе с нулём будем называть множеством неотрицательных чисел и обозначать символом $\mathbb{R}_+$, а множество всех отрицательных чисел вместе с нулём будем называть множеством неположительных чисел и обозначать символом $\mathbb{R}_-$.

Рациональные числа являются вещественными, поскольку представляются в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{2} = 0,5000\ldots = 0,4999\ldots,\quad -\frac{31}{25} = -1,24000\ldots = -1,23999\ldots,$$

$$\frac{2}{3} = 0,666\ldots, \quad -\frac{18}{7} = -2,5714285714\ldots .$$

Из первых двух примеров мы видим, что некоторые рациональные числа имеют по два представления в виде бесконечной десятичной дроби: одно — с нулём в периоде, а второе — с девяткой. Таким свойством обладают числа вида $\dfrac{m}{10^l}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ и дробь $\dfrac{m}{10^l}$ несократима. В самом деле, рациональные числа со знаменателем 10^l записываются в виде конечной десятичной дроби как $r = \pm a_0, a_1a_2\ldots a_l$, где $a_l \neq 0$, поэтому одна форма их записи в виде бесконечной десятичной дроби выглядит так: $r = \pm a_0, a_1a_2\ldots a_l000\ldots$. Далее, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем равенство

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \frac{9/10}{1-1/10} = 1\,,$$

откуда $1 \cdot 10^{-l} = 0,999\ldots \cdot 10^{-l}$, поэтому, отщепляя от l-го десятичного знака числа r единичку, получаем его второе представление:

$$r = \pm(a_0, a_1a_2\ldots(a_l - 1) + 1 \cdot 10^{-l}) =$$

$$= \pm(a_0, a_1a_2\ldots(a_l - 1) + 0,999\ldots \cdot 10^{-l}) = \pm a_0, a_1a_2\ldots(a_l - 1)999\ldots .$$

В дальнейшем при рассмотрении теоретических вопросов мы будем, как правило, употреблять представление вещественных чисел с девяткой в периоде (исключение составляет, конечно, число $0,000\ldots$). Представление вещественных чисел с нулём в периоде будем употреблять в исключительных случаях и каждый раз это оговаривать.

Определение 1.9. *Вещественные числа, записываемые в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, будем называть иррациональными. Множество иррациональных чисел будем обозначать символом* $\mathbb{J}$.

Сравнение вещественных чисел

Пусть даны два вещественных числа $x = \pm a_0, a_1a_2a_3\ldots a_l\ldots$ и $y = \pm b_0, b_1b_2b_3\ldots b_l\ldots$.

Определение 1.10. *Числа x и y будем называть равными и писать $x = y$, если они имеют одинаковые знаки и одинаковые значащие цифры, то есть, если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_l = b_l$, ...*

Если хотя бы одно из условий, указанных в определении, нарушается, то будем говорить, что числа x и y не равны, и писать $x \neq y$. Для неравных между собой вещественных чисел введём отношения $<$ (меньше) и $>$ (больше).

1) Пусть сначала оба числа x и y неотрицательны,

$$x = a_0, a_1a_2a_3\ldots a_l\ldots, \quad y = b_0, b_1b_2b_3\ldots b_l\ldots .$$

Так как $x \neq y$, то нарушается хотя бы одно из равенств $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_l = b_l$, ... Пусть k — наименьший из номеров, для которых равенство нарушается, то есть $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, но $a_k \neq b_k$. Тогда будем считать, что $x < y$, если $a_k < b_k$, и $x > y$, если $a_k > b_k$.

2) Пусть одно из чисел, скажем x, отрицательно, а второе, y, неотрицательно. Тогда будем считать, что $x < y$ или что $y > x$.

3) Пусть, наконец, оба числа x и y отрицательны. Для сравнения отрицательных чисел нам понадобится понятие модуля вещественного числа.

Определение 1.11. *Пусть дано вещественное число*

$$x = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_l \dots \ .$$

Модулем числа x назовём число $|x| = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_l \dots$.

Из двух отрицательных чисел будем считать меньшим то, модуль которого больше, то есть

$$x < y \Leftrightarrow |x| > |y| \, .$$

Запись $x \le y$ (x меньше или равен y) означает, что или $x < y$, или $x = y$.

Нетрудно убедиться, что правило сравнения вещественных чисел обладает следующим основополагающим свойством:

$$x < y, \ y < z \Rightarrow x < z$$

(свойством транзитивности).

Пусть сначала числа x, y, z неотрицательны,

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_l \dots \ , \quad y = b_0, b_1 b_2 \dots b_l \dots \ , \quad z = c_0, c_1 c_2 \dots c_l \dots \ .$$

Так как $x < y$, то найдётся такой номер k, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k < b_k$. А так как $y < z$, то найдётся номер m такой, что $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$, $\dots$, $b_{m-1} = c_{m-1}$, $b_m = c_m$. Пусть $k \le m$. Тогда, очевидно, $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $\dots$, $a_{k-1} = c_{k-1}$, а $a_k < b_k \le c_k$. Следовательно, $x < z$. Если же $m < k$, то $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $a_{m-1} = c_{m-1}$, $a_m = b_m < c_m$, и снова $x < z$.

Если числа x, y, z отрицательны, то $|x| > |y|$, $|y| > |z|$, следовательно, по доказанному, $|x| > |z|$ или $x < z$.

Если же $x < 0$, а $z \ge 0$, то по определению $x < z$.

Следующая лемма характеризует плотность множества вещественных чисел.

Лемма 1.1. *Между любыми двумя неравными вещественными числами можно указать вещественное число, как рациональное, так и иррациональное.*

Доказательство. 1. Пусть сначала числа x и y неотрицательны,

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_l \dots \ , \quad y = b_0, b_1 b_2 \dots b_l \dots \ ,$$

и $x < y$. В силу последнего условия найдётся номер k такой, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, а $a_k < b_k$. Рассмотрим значащие цифры числа y, начиная с номера $k+1$. Они не могут все быть равными нулю в силу договорённости о неприменении записи вещественных чисел с нулём в периоде. Поэтому найдётся номер $m \ge k+1$ такой, $b_m \ne 0$.

Положим $c_m = b_m - 1$, выберем совершенно произвольно (но не все нули подряд, начиная с некоторого места) цифры c_{m+1}, c_{m+2}, $\dots$ и рассмотрим число

$$z = b_0, b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots b_{m-1} c_m c_{m+1} c_{m+2} \dots \ .$$

Так как $a_k < b_k$, а все предыдущие цифры одинаковы, то $x < z$. Так как $c_m < b_m$, а все предыдущие цифры одинаковы, то $z < y$. Следовательно, z находится между x и y. Поскольку, начиная с номера $m+1$, цифры числа z выбираются совершенно произвольно, то число z можно выбрать как рациональным, так и иррациональным.

2. Если $x < y \le 0$, то $|y| > |x| \ge 0$ и по первой части найдётся z (рациональное или иррациональное) такое, что $|y| > z > |x|$. Но тогда $x < -z < y$.

3. Если $x < 0$, а $y > 0$, то между ними находится число 0. Если нужно выбрать иррациональное число, то его можно выбрать между нулём и y по первой части доказательства, или между x и нулём по второй. ■

Следствие 1.1. *Между любыми двумя неравными вещественными числами содержится бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел.*

Доказательство. По лемме между неравными числами x и y можно указать как рациональное, так и иррациональное число z. В свою очередь, между x и z и между z и y можно найти как рациональное, так и иррациональное число, и так далее до бесконечности. ■

Геометрическая интерпретация вещественного числа

Возьмём горизонтальную прямую, укажем на ней стрелкой положительное направление (обычно вправо), выберем на прямой точку O и назовём её начальной точкой (точкой начала отсчёта), выберем, наконец, точку A правее точки O и будем считать длину отрезка OA равной единице. Получившуюся фигуру называют числовой (или вещественной) осью.

Выберем на числовой оси справа от точки O точку M и проделаем следующую процедуру. Будем откладывать отрезок единичной длины (то есть равный по длине отрезку OA) на отрезке OM, начиная от точки O и совмещая всякий раз начало следующего отрезка с концом предыдущего, до тех пор, пока он целиком помещается на отрезке OM.

Пусть отрезок единичной длины поместился целиком в отрезке OM a_0 раз. Далее берём одну десятую часть (одну вторую, если пользуемся двоичной системой счисления) отрезка единичной длины и таким же образом откладываем её в оставшейся части отрезка OM. Пусть она отложилась целиком a_1 раз. Продолжим описанный процесс далее. Пусть одна сотая часть первоначального отрезка отложилась в отрезке OM a_2 раз, одна тысячная часть — a_3 раз и так далее.

В результате описанного процесса получается набор чисел a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots$, где a_0 — неотрицательное целое число, а остальные — целые числа в пределах от 0 до 9. Этот набор чисел может получиться конечным, если на каком-то шаге соответствующий отрезок уложится без остатка в оставшейся части отрезка OM, или бесконечным, если ни на каком шаге этого не случится. Образуем вещественное число $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, являющееся конечной десятичной дробью в первом случае и бесконечной десятичной дробью во втором. Число x назовём *координатой* точки M и тот факт, что точка M имеет координату x, будем отмечать так: $M(x)$.

Если точка M расположена слева от точки O, то поступаем точно так же, только координате x точки M присваиваем знак "$-$". Точке O, естественно, отвечает координата $x = 0$, точке A — координата $x = 1$.

Наоборот, пусть дано вещественное число $x = \pm a_0, a_1a_2a_3\ldots$ Если это число положительно (отрицательно), то вправо (влево) от нуля откладываем a_0 раз отрезок единичной длины, затем a_1 раз одну десятую этого отрезка, a_2 раз одну сотую и так далее. В результате получим точку M, для которой число x является её координатой.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками числовой оси: каждому вещественному числу соответствует точка на числовой оси, каждой точке на числовой оси соответствует вещественное число, являющееся её координатой. Это соответствие позволяет нам в дальнейшем не делать различия между вещественными числами и их геометрической интерпретацией — точками. Например, фразу "дана точка x" мы будем понимать одновременно и как "дано вещественное число x и как "дана точка M с координатой x".

В заключение выясним геометрический смысл модуля вещественного числа. Пусть дано вещественное число (точка) $x \neq 0$. Если оно положительно, то точка x находится справа от точки O на расстоянии $x = |x|$ от неё, а если x отрицательно, то точка x находится слева от точки O на расстоянии $-x = |x|$ от неё. Таким образом, $|x|$ можно интерпретировать как расстояние от начала координат до точки x.

Использование геометрического смысла модуля позволяет проще решать некоторые неравенства. Например, если дано неравенство $|x| < M$, то оно означает, что x находится ближе к началу координат, чем M, то есть располагается между точкой M и симметричной ей относительно нуля точкой $-M$. Таким образом,

$$|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M\,. \tag{1.1}$$

Ограниченные числовые множества

Пусть $X = \{x\}$ — некоторое множество вещественных чисел, в дальнейшем будем использовать термин "числовое множество".

Определение 1.12. *Числовое множество X назовём ограниченным сверху, если существует такое число (постоянная) M, что для каждого элемента x множества X выполняется неравенство $x \le M$. Число M называется верхней гранью множества X.*

Определение 1.13. *Числовое множество X назовём ограниченным снизу, если существует такое число (постоянная) m, что для каждого элемента x множества X выполняется неравенство $x \ge m$. Число m называется нижней гранью множества X.*

Определение 1.14. *Числовое множество X назовём ограниченным, если оно ограничено и снизу, и сверху, то есть если*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}\ (m \le M):\ \forall x \in X \Rightarrow m \le x \le M. \tag{1.2}$$

Лемма 1.2. *Числовое множество X ограничено тогда и только тогда, когда*

$$\exists M_0 \in \mathbb{R}:\ \forall x \in X \Rightarrow |x| \le M_0\,. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если множество X ограничено, то выполняется условие (1.2). Положим

$$M_0 = \max\{|m|, |M|\}$$

(наибольшее из чисел $|m|$, $|M|$). Выпишем очевидную цепочку неравенств

$$-M_0 \le -|m| \le m \le x \le M \le |M| \le M_0\,,$$

из которой следует, что $|x| \le M_0$ для любого x из множества X.

Наоборот, если выполняется условие (1.3), то $-M_0 \le x \le M_0$. Положим $-M_0 = m$, $M_0 = M$. Тогда $m \le x \le M$ для любого x из множества X. ■

Если множество X ограничено сверху, то оно имеет бесконечно много верхних граней, потому что, если M — верхняя грань X, то и любое число $M' > M$ тоже является верхней гранью X. Аналогично, если множество X ограничено снизу, то оно имеет бесконечно много нижних граней. Естественно, возникает вопрос: всегда ли существует наименьшая среди всех верхних граней ограниченного сверху множества и наибольшая среди всех нижних граней ограниченного снизу множества? Утвердительный ответ на этот вопрос дадим несколько позднее, а пока сформулируем несколько определений.

Определение 1.15. *Пусть X — ограниченное сверху числовое множество. Наибольший из элементов множества X назовём максимальным элементом множества X и будем обозначать одним из символов: x_{max} или $\max X$.*

Определение 1.16. *Пусть X — ограниченное снизу числовое множество. Наименьший из элементов множества X назовём минимальным элементом множества X и будем обозначать одним из символов: x_{min} или $\min X$.*

Отметим, что не всякое ограниченное сверху (снизу) числовое множество содержит максимальный (минимальный) элемент.

Примеры.

1. Множество всех отрицательных чисел ограничено сверху числом 0, но не имеет наибольшего элемента, так как по лемме 1.1 для любого $x < 0$ найдётся x': $x < x' < 0$.

2. Множество $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ограничено снизу числом 0, но не содержит минимального элемента, так как для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем: $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

В обоих рассмотренных примерах причиной отсутствия максимального (минимального) элемента было то, что множества содержали бесконечное число элементов. Конечные же множества содержат, очевидно, максимальный и минимальный элементы, которые могут быть найдены методом перебора.

Пусть X — конечное множество, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Сравниваем x_1 с остальными элементами множества X. Если $x_1 > x_k$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, то $x_1 = x_{max}$. Если же нет, то найдётся l $(1 < l \leq n)$ такое, что $x_l > x_1$. Далее сравниваем оставшиеся элементы $x_{l+1}, \ldots, x_n$ с элементом x_l. После проведения $(n-1)$-го сравнения получим x_{max}. Аналогично может быть найден элемент x_{min}.

Определение 1.17. *Пусть множество X ограничено сверху. Наименьшую из всех его верхних граней назовём точной верхней гранью и обозначим символом* $\sup X$ *(супремум).*

Определение 1.18. *Пусть множество X ограничено снизу. Наибольшую из всех его нижних граней назовём точной нижней гранью и обозначим символом* $\inf X$ *(инфимум).*

Лемма 1.3. *Число $\overline{M}$ является точной верхней гранью ограниченного сверху множества тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами:*

1) $x \leq \overline{M}$ $\forall x \in X$;

2) $\forall M' < \overline{M}$ $\exists x \in X : x > M'$.

Число $\underline{m}$ является точной нижней гранью ограниченного снизу множества тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами:

1) $x \geq \underline{m}$ $\forall x \in X$;

2) $\forall m' > \underline{m}$ $\exists x \in X : x < m'$.

Доказательство. Первое свойство точной верхней грани следует из того, что точная верхняя грань есть верхняя грань. Второе свойство вытекает из того, что никакое меньшее число верхней гранью множества X не является, поэтому неравенство $x \leq M'$ не может выполняться для всех элементов из множества.

Рассуждения, устанавливающие справедливость второй части леммы, аналогичны. ■

Как было отмечено выше, не всякое ограниченное сверху (снизу) множество имеет максимальный (минимальный) элемент, поэтому существование точных верхней и нижней граней нуждается в доказательстве. Сделаем это чуть позже, а пока отметим следующее почти очевидное обстоятельство.

Лемма 1.4. *Если числовое множество X имеет максимальный (минимальный) элемент, то у него существует точная верхняя (нижняя) грань и справедливо равенство*

$$\sup X = \max X \quad (\inf X = \min X).$$

Доказательство. Пусть существует $\max X = x_m$. Тогда: а) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $x \leq x_m$ и б) для любого $M' < x_m$ элемент x_m (принадлежащий X!)

удовлетворяет неравенству $x_m > M'$. Таким образом, элемент x_m удовлетворяет условиям первой части леммы 1.3. Справедливость второй части данного утверждения устанавливается аналогично. ■

Теорема 1.1. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Докажем сначала существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества. Доказательство разобьём на два случая, именно: множество X содержит неотрицательные элементы и все элементы множества X отрицательны.

1) Пусть множество X содержит неотрицательные элементы и M — одна из его верхних граней. Очевидно, что $M \geq 0$. Множество всех неотрицательных элементов множества X обозначим символом $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} = \{x \in X :\ x \geq 0\}$. Рассмотрим множество, состоящее из целых частей всех элементов множества $\widetilde{X}$. Это множество не пустое (множество $\widetilde{X}$ не пустое) и конечное, так как между нулём и M может уместиться только конечное число целых чисел, поэтому существует наибольший элемент этого множества. Пусть

$$\overline{a}_0 = \max\{a_0 :\ x = a_0, a_1a_2a_3\ldots,\ x \in \widetilde{X}\}$$

и X_0 — подмножество множества $\widetilde{X}$, состоящее из чисел с целой частью $\overline{a}_0$,

$$X_0 = \{x \in \widetilde{X} :\ a_0 = \overline{a}_0\}.$$

Множество X_0 не пусто, так как хотя бы один элемент с целой частью $\overline{a}_0$ во множестве $\widetilde{X}$ найдётся.

Рассмотрим множество $\{a_1\}$ первых десятичных знаков элементов множества X_0. Это множество непустое и конечное, поэтому содержит максимальный элемент. Положим

$$\overline{a}_1 = \max\{a_1 :\ x = \overline{a}_0, a_1a_2a_3\ldots \in X_0\} \text{ и } X_1 = \{x \in X_0 :\ a_1 = \overline{a}_1\}.$$

Множество X_1 снова не пусто.

Рассмотрим множество $\{a_2\}$ вторых десятичных знаков элементов множества X_1. Это множество непустое и конечное, поэтому содержит максимальный элемент. Пусть

$$\overline{a}_2 = \max\{a_2 :\ x = \overline{a}_0, \overline{a}_1a_2a_3\ldots \in X_1\} \text{ и } X_2 = \{x \in X_1 :\ a_2 = \overline{a}_2\}.$$

Множество X_2 тоже не пусто.

Продолжим описанный процесс. Пусть уже построено непустое множество

$$X_{l-1} = \{x = \overline{a}_0, \overline{a}_1\ldots\overline{a}_{l-1}a_la_{l+1}\ldots\}\ (l \geq 3).$$

Рассмотрим множество $\{a_l\}$ l-х десятичных знаков элементов множества X_{l-1}. Это множество непустое (X_{l-1} не пусто) и конечное, поэтому оно содержит максимальный элемент. Пусть $\overline{a}_l = \max\{a_l :\ x = \overline{a}_0, \overline{a}_1\overline{a}_2\ldots\overline{a}_{l-1}a_l\ldots \in X_{l-1}\}$ и $X_l = \{x \in X_{l-1} :\ a_l = \overline{a}_l\}$. Множество X_l опять не пусто.

Итак, процесс нахождения чисел $\overline{a}_l$ и выделения множеств X_l не может прерваться. Продолжив его неограниченно, получим набор чисел $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_l, \ldots$ и набор множеств $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_l \supset \ldots$. Образуем вещественное число

$$\overline{M} = \overline{a}_0, \overline{a}_1\overline{a}_2\ldots\overline{a}_l\ldots$$

и покажем, что оно является точной верхней гранью множества X, для чего проверим, что число $\overline{M}$ обладает свойствами точной верхней грани, приведёнными в лемме 1.3.

Пусть $x = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_l \dots$ — любой элемент множества X. Если $x < 0$, то $x < \overline{M}$, так как $\overline{M} \geq 0$. Если $x \geq 0$, то $x \in \widetilde{X}$. Если при этом $x \notin X_0$, то $a_0 < \overline{a}_0$, следовательно, $x < \overline{M}$. Если $x \in X_0$, но $x \notin X_1$, то $a_0 = \overline{a}_0$, но $a_1 < \overline{a}_1$, поэтому $x < \overline{M}$. И так далее. Если найдётся номер l такой, что $x \in X_k$ при $k = 0, 1, \dots, l-1$, но $x \notin X_l$, то $a_0 = \overline{a}_0$, $a_1 = \overline{a}_1$, ..., $a_{l-1} = \overline{a}_{l-1}$, но $a_l < \overline{a}_l$, поэтому $x < \overline{M}$. Если при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ будем иметь $a_k = \overline{a}_k$, то $x = \overline{M}$. Таким образом, установлено, что во всех случаях $x \leq \overline{M}$, то есть $\overline{M}$ обладает первым свойством точной верхней грани.

Покажем, что никакое $M' < \overline{M}$ верхней гранью множества X не является. Если $M' < 0$, то это очевидно, поскольку по предположению множество X содержит неотрицательные элементы. Пусть, поэтому, $M' = a'_0, a'_1 a'_2 \dots a'_l \dots$. Так как $M' < \overline{M}$, то, возможно, $a'_0 < \overline{a}_0$. В таком случае возьмём любой элемент $x \in X_0$ (X_0 не пусто!) и будем иметь $x > M'$. Если $a'_0 = \overline{a}_0$, то найдётся $l \geq 1$ такое, что $a'_0 = \overline{a}_0$. $a'_1 = \overline{a}_1$, ..., $a'_{l-1} = \overline{a}_{l-1}$, $a'_l < \overline{a}_l$. Так как ни при каком l множество X_l не пусто, то найдётся $x \in X_l$. Для него $a_0 = \overline{a}_0$, $a_1 = \overline{a}_1$, ..., $a_{l-1} = \overline{a}_{l-1}$, $a_l = \overline{a}_l$, поэтому $M' < x$. Этими рассуждениями установлено, что число $\overline{M}$ обладает и вторым свойством точной верхней грани.

2) Пусть все элементы множества X отрицательны. Рассмотрим множество

$$-X = \{-x : \ x \in X\}.$$

Это множество ограничено снизу числом 0. Докажем, что оно имеет точную нижнюю грань. Доказательство проведём тем же методом, который использован в первой части, только для чисел с двумя представлениями в виде десятичной дроби будем использовать представление с нулём в периоде.

Итак, пусть $-x = a_0, a_1 a_2 \dots a_l \dots$ — общий вид элементов множества $-X$. Найдём $\underline{a}_0 = \min\{a_0 : \ -x \in (-X)\}$ и введём множество $X_0 = \{-x \in (-X) : \ a_0 = \underline{a}_0\}$. Вычислим $\underline{a}_1 = \min\{a_1 : \ -x \in X_0\}$ и выделим множество $X_1 = \{-x \in X_0 : \ a_1 = \underline{a}_1\}$. И так далее. На l-м шаге определим $\underline{a}_l = \min\{a_l : \ -x \in X_{l-1}\}$ (не исключено, что начиная с некоторого номера все $\underline{a}_l = 0$, поэтому и приходится рассматривать представление вещественных чисел с нулём в периоде) и множество $X_l = \{-x \in X_{l-1} : \ a_l = \underline{a}_l\}$. И так далее до бесконечности. Затем образуем число $\underline{m} = \underline{a}_0, \underline{a}_1 \underline{a}_2 \dots \underline{a}_l \dots$ и показываем, что оно является точной нижней гранью для множества $-X$.

Доказательство завершается использованием легко проверяемого при помощи правила сравнения вещественных чисел и леммы 1.3 утверждения: $\sup X = -\inf(-X)$. Положим $\overline{M} = -\underline{m}$. Тогда

$$\overline{M} = -\underline{m} = -\inf(-X) = \sup X\ .$$

Существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества можно доказать точно так же, но проще применить сформулированное выше утверждение. Если множество X ограничено снизу, то множество $-X = \{-x : \ x \in X\}$ ограничено сверху. По доказанному, оно имеет точную верхнюю грань $\overline{M}$. Тогда число $\underline{m} = -\overline{M}$ будет точной нижней гранью множества X. ■

Отметим, что доказанная теорема устанавливает лишь существование точных верхней и нижней граней у множества, ограниченного соответственно сверху и снизу, но не указывает способа их вычисления, что зачастую является достаточно нелёгкой задачей. Например, множество $X = \{\sin n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху и снизу числами 1 и -1 соответственно, поэтому по доказанной теореме $\sup X$ и $\inf X$ существуют, но чему они равны?

Точные верхняя и нижняя грани (в случае существования) могут принадлежать множеству, а могут и не принадлежать. Если $\sup X \in X$, то в силу леммы 1.3 $\sup X = x_{max}$. Обратное доказано в лемме 1.4. Аналогичная ситуация имеет место и для $\inf X$.

Если $\sup X \in X$ ($\inf X \in X$), то будем говорить, что точная верхняя (нижняя) грань множества X достигается и заменять $\sup X$ ($\inf X$) на $\max X$ ($\min X$).

Примеры.

1. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq 1\}$. Здесь

$$-1 = \min X = \inf X \in X, \quad 1 = \max X = \sup X \in X.$$

2. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 < x < 3\}$. Здесь $\inf X = -2$, $\sup X = 3$. Проверим первое утверждение, используя лемму 1.3, второе проверяется аналогично.

а) Из условия, задающего множество X, следует, что $x \geq -2$ для каждого $x \in X$.

б) Возьмём любое $m' > -2$. Если $m' \leq 3$, то по лемме 1.1 найдётся x такой, что $-2 < x < m'$. Очевидно, что $x \in X$. Если же $m' > 3$, то условию $x < m'$ удовлетворяет любой элемент $x \in X$.

Оба условия леммы 1.3 выполнены, поэтому $-2 = \inf X$.

3. Пусть $X = \left\{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Здесь $\inf X = 0 \notin X$, $\sup X = \max X = 1 \in X$. Второе утверждение очевидно. Проверим первое.

а) $\dfrac{1}{n} > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, так что первое условие леммы 1.3 выполнено.

б) Пусть $m' > 0$ — любое. По лемме 1.3 найдётся рациональное число $r = \dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ такое, что $0 < r < m'$. Тогда $\dfrac{1}{q} \in X$ и $\dfrac{1}{q} \leq r < m'$, следовательно, выполнено и второе условие леммы 1.3. Поэтому $0 = \inf X$.

4. Пусть $X = \mathbb{N}$. Тогда $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1 \in \mathbb{N}$, $\sup \mathbb{N}$ не существует, так как множество сверху не ограничено.

Если множество X не ограничено сверху, то оно не имеет точной верхней грани в смысле определения 1.17, но иногда бывает удобно писать $\sup X = +\infty$ и говорить соответственно. Это же соглашение примем и для множеств, неограниченных снизу, именно: $\sup X = -\infty$.

Арифметические операции над вещественными числами

Мы полагаем, что читателю известны правила выполнения арифметических операций над рациональными числами и свойства этих операций. Определим теперь сумму и произведение двух произвольных вещественных чисел.

Определение 1.19. *Пусть x и y — произвольные вещественные числа, а r', r''; s', s'' — любые рациональные числа, удовлетворяющие условиям*

$$r' \leq x \leq r''; \quad s' \leq y \leq s''. \tag{1.4}$$

Назовём суммой чисел x и y и обозначим символом $x + y$ вещественное число z, удовлетворяющее неравенствам

$$r' + s' \leq z \leq r'' + s''. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Для любых вещественных чисел x и y сумма $x+y$ определена и единственна.*

Доказательство. Пусть R' — множество чисел вида $r' + s'$, R'' — множество чисел вида $r'' + s''$, где числа r', s', r'', s'' описаны в определении 1.19. В силу свойств неравенств для рациональных чисел $r' + s' \le r'' + s''$, следовательно, множество R' ограничено сверху (любой суммой $r''+s''$), поэтому по теореме 1.1 существует $\sup R'$. Аналогично, множество R'' ограничено снизу (любой суммой $r'+s'$), поэтому по той же теореме существует $\inf R''$.

Так как $\sup R'$ — точная верхняя грань множества R', а $r''+s''$ — просто верхняя грань, то по определению 1.17 для любого $r''+s'' \in R''$ выполняется неравенство $\sup R' \le r''+s''$. Аналогичное рассуждение и использование определения 1.18 приводят к выводу

$$\sup R' \le \sup R''.$$

Покажем, что $\sup R' = \inf R''$. Если бы это было не так, то есть

$$\sup R' < \inf R'',$$

то по следствию из леммы 1.1 нашлись бы два рациональных числа p и q такие, что $\sup R' < p < q < \inf R''$. Но тогда разность $q - p = \delta > 0$.

Будем брать в 1.4 в качестве r', r''; s', s'' десятичные приближения чисел x и y с недостатком и избытком так, чтобы в десятичных записях r' и r'', соответственно, s' и s'' совпадало всё вплоть до l-го знака после запятой. Тогда $r'' - r' \le \dfrac{1}{10^l}$, $s'' - s' \le \dfrac{1}{10^l}$, поэтому $(r'' + s'') - (r' + s') \le \dfrac{2}{10^l}$. Так как

$$r' + s' \le \sup R' < p < q < \inf R'' \le r'' + s'' \ ,$$

то

$$\delta = q - p < (r'' + s'') - (r' + s') \le \frac{2}{10^l} \ . \tag{1.6}$$

Поскольку l можно брать любое, то (1.6) невозможно по следующей причине. Существует только конечное множество натуральных чисел, расположенных между нулём и числом $\dfrac{2}{\delta}$, тем более конечно количество чисел вида 10^l, поэтому если l достаточно велико, то $10^l > \dfrac{2}{\delta}$, или $\delta > \dfrac{2}{10^l}$.

Полученное противоречие показывает невозможность предположения $\sup R' < \inf R''$, следовательно, доказано, что $\sup R' = \inf R''$.

Положим

$$z = \sup R' = \sup\{r' + s' : \ r', s' \in \mathbb{Q}, r' \le x, s' \le y\} \, .$$

Число z существует, удовлетворяет определению 1.19, поэтому является суммой чисел x и y, и единственно, так как всякое число z, удовлетворяющее условию (1.5), обязано содержаться между $\sup R'$ и $\inf R''$.

Теорема доказана. ■

Разность вещественных чисел $x - y$ определяется как сумма $x + (-y)$ (сумма числа x и противоположного y числа $-y$).

Доказанная теорема служит обоснованием приближённого вычисления суммы вещественных чисел путём сложения их десятичных приближений, взятых с необходимой степенью точности (неважно, с недостатком или с избытком).

Определим теперь произведение двух вещественных чисел. Пусть сначала числа x и y положительны. Возьмём любые положительные рациональные числа $r', r''; s', s''$, удовлетворяющие условиям $r' \le x \le r''$, $s' \le y \le s''$.

Определение 1.20. *Назовём произведением положительных чисел x и y и обозначим символом $x \cdot y$ или xy вещественное число z, удовлетворяющее неравенству*

$$r's' \le z \le r''s''. \tag{1.7}$$

Теорема 1.3. *Произведение любых двух положительных вещественных чисел существует и единственно.*

Доказательство этой теоремы приводить не будем. Оно в принципе такое же, как и доказательство предыдущей теоремы, лишь оценки при доказательстве единственности чуть сложнее.

Замечание 1.1. *Как нетрудно видеть, определённые здесь операции сложения и умножения вещественных чисел, будучи применёнными к рациональным числам дают тот же результат, что и правила сложения и умножения рациональных чисел. Действительно, пусть $r, s \in \mathbb{Q}$. Возьмём, в частности, в (1.5) $r' = r'' = r$, $s' = s'' = s$. Тогда (1.5) примет вид: $r + s \le z \le r + s$, то есть, $z = r + s$.*

Определим теперь произведение двух любых вещественных чисел x и y следующим образом:

1) если $x = 0$, то $0 \cdot y = 0$ для любого вещественного y;
2) если $x < 0$, $y < 0$, то $xy = |x| \cdot |y|$;
3) если $x < 0$, а $y > 0$, или наоборот, то $xy = -|x| \cdot |y|$.

Перед тем как определять операцию деления, докажем вспомогательное утверждение.

Определение 1.21. *Число z назовём обратным числу y и обозначим символом $\dfrac{1}{y}$ или y^{-1}, если $yz = 1$.*

Лемма 1.5. *Для любого $y \ne 0$ число z, обратное к y, существует.*

Доказательство. Пусть сначала $y > 0$, $y = b_0, b_1 b_2 \dots b_l \dots$. Пусть $r'_l = b_0, b_1 b_2 \dots b_l 000 \dots$, $r''_l = b_0, b_1 b_2 \dots b_l 999 \dots$ — десятичные приближения числа y, взятые с недостатком и избытком. Так как $y \ne 0$, то в десятичной записи числа y найдётся хотя бы одна отличная от нуля значащая цифра, поэтому можно утверждать, что начиная с некоторого номера m будет иметь место оценка

$$r'_l \ge 10^{-m} \quad \forall\, l \ge m\,. \tag{1.8}$$

Тем более эта оценка справедлива для r''_l.

Так как для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $r'_k \le r''_l$, то $\dfrac{1}{r''_l} \le \dfrac{1}{r'_k}$, следовательно, и $\sup\left\{\dfrac{1}{r''_l} :\ l \in \mathbb{N}\right\} \le \inf\left\{\dfrac{1}{r'_k} :\ k \in \mathbb{N}\right\}$, поэтому по лемме 1.1 найдётся $z \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\sup\left\{\frac{1}{r'_k} :\ k \in \mathbb{N}\right\} \le z \le \inf\left\{\frac{1}{r''_l} :\ l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тем более

$$\frac{1}{r''_l} \le z \le \frac{1}{r'_l} \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из $r'_l \le y \le r''_l$ по определению произведения вещественных чисел следует, что

$$r'_l \cdot \frac{1}{r''_l} \le yz \le r''_l \cdot \frac{1}{r'_l} \quad \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим правую часть неравенства 1.9. Так как $r_l'' = r_l' + 10^{-l}$, то, предполагая $l \geq m$ и используя 1.8, имеем:

$$yz \leq r_l'' \cdot \frac{1}{r_l'} = \frac{r_l' + 10^{-l}}{r_l'} = 1 + \frac{10^{-l}}{r_l'} \leq 1 + \frac{10^{-l}}{10^{-m}} = 1 + \frac{1}{10^{l-m}}\,.$$

Аналогично оценивается левая часть неравенства 1.9.

$$yz \geq r_l' \cdot \frac{1}{r_l''} = \frac{r_l'' - 10^{-l}}{r_l''} = 1 - \frac{10^{-l}}{r_l''} \geq 1 - \frac{10^{-l}}{10^{-m}} = 1 - \frac{1}{10^{l-m}}\,.$$

Таким образом,

$$1 - \frac{1}{10^{l-m}} \leq yz \leq 1 + \frac{1}{10^{l-m}} \quad \forall l \geq m.$$

Этим неравенствам может удовлетворять только $yz = 1$ (см. конец доказательства теоремы 1.2). Лемма доказана. ■

Если $y < 0$, то положим $z = -\dfrac{1}{|y|}$. Тогда

$$yz = (-|y|) \cdot \left(-\frac{1}{|y|}\right) = |y| \cdot \frac{1}{|y|} = 1,$$

следовательно, $z = y^{-1}$.

Если $y = 0$, то y^{-1} не существует, ибо по определению умножения на ноль $0 \cdot z = 0 \neq 1$ для любого $z \in \mathbb{R}$.

Теперь определим операцию деления. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, причём $y \neq 0$. Операцию деления x на y определим как умножение x на $\dfrac{1}{y}$,

$$\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}\,.$$

Итак, все арифметические операции над вещественными числами определены. Можно показать, что все свойства этих операций, известные нам для рациональных чисел, сохраняются, как сохраняются и свойства числовых неравенств. Можно ввести операцию возведения в степень, натуральную, целую, рациональную, понятие арифметического корня. Всё это делается с помощью техники, аналогичной продемонстрированной при доказательстве теоремы 1.2. Ещё раз эта техника будет продемонстрирована позднее при определении показательной функции.

Введём числовые множества, которые постоянно будут использоваться в дальнейшем.

Отрезок (сегмент) $[a;\ b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

Интервал $(a;\ b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

Полуинтервалы $(a;\ b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ и $[a;\ b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

Промежуток — общее наименование для $\mathbb{R}$, бесконечных интервалов $(-\infty;\ b)$ и $(a;\ +\infty)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, бесконечных полуинтервалов $(-\infty;\ b]$ и $[a;\ +\infty)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, отрезков, интервалов и полуинтервалов.

$U(a)$ $(U_\delta(a))$ — окрестность (дельта-окрестность) точки a (δ-окрестность a) — интервал с центром в точке a радиуса $\delta > 0$.

$$U_\delta(a) = (a - \delta;\ a + \delta).$$

$\overset{\circ}{U}(a)$ ($\overset{\circ}{U}_\delta(a)$) — проколотая δ-окрестность a — δ-окрестность a с выброшенным центром.

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}.$$

$U_\delta^+(a)$ — правосторонняя окрестность точки a — полуинтервал $[a;\ a+\delta)$.
$U_\delta^-(a)$ — левосторонняя окрестность точки a — полуинтервал $(a-\delta;\ a]$.
$\overset{\circ}{U}{}_\delta^+(a)$ — правосторонняя проколотая окрестность точки a — интервал $(a;\ a+\delta)$.
$\overset{\circ}{U}{}_\delta^-(a)$ — левосторонняя проколотая окрестность точки a — интервал $(a-\delta;\ a)$.
$U_\delta(\infty)$ — окрестность бесконечно удалённой точки.

$$U_\delta(\infty) = (-\infty;\ -\delta)\bigcup(\delta;\ +\infty).$$

$U_\delta^+(\infty)$ — правосторонняя окрестность бесконечно удалённой точки.

$$U_\delta^+(\infty) = (\delta;\ +\infty).$$

$U_\delta^-(\infty)$ — левосторонняя окрестность бесконечно удалённой точки.

$$U_\delta^-(\infty) = (-\infty;\ -\delta).$$

Всюду выше предполагается, что $\delta > 0$.

Иногда бывает удобно рассматривать множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с присоединённой к нему бесконечно удалённой точкой. Это множество обозначают символом $\dot{\mathbb{R}}$ (a) и множество $\mathbb{R}$ с присоединёнными к нему символами $+\infty$ и $-\infty$. Это множество обозначают символом $\overline{\mathbb{R}}$.

1.4 Функции

В анализе слова "отображение" , "оператор" , "функция" суть слова-синонимы. Употребление в каждом конкретном случае того или иного из этих слов вызвано скорее традициями, привычкой, чем какими-либо иными соображениями.

Определение 1.22. *Пусть даны множества X и Y. Отображением множества X во множество Y называют правило или закон, по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие <u>единственный</u> элемент y из множества Y.*

Отображения принято обозначать строчными или заглавными латинскими или греческими буквами: f, F, φ,... и фразу "дано отображение f множества X во множество Y" символически записывают так: $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Множество X называют областью определения (задания) отображения f и обозначают символом $D(f)$.

Элемент y, ставящийся в соответствие отображением f элементу x, записывается в виде $y = f(x)$ и называется *образом* элемента x, а элемент x такой, что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y и обозначается символом $f^{-1}(y)$.

Пусть $A \subset X$ — некоторое множество. Множество

$$f(A) := \{f(x) :\ x \in A\}$$

(множество, составленное из всех образов элементов множества A) называют образом множества A при отображении f, в частности, множество $f(X)$ называют областью изменения (множеством значений) отображения f и обозначают символом $E(f)$.

Пусть множество $B \subset Y$. Множество

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

(множество тех элементов из X, образы которых содержатся в B) назовём прообразом множества B при отображении f.

Выделяют три типа отображений.

Определение 1.23. *Отображение $f : X \to Y$ назовём инъетивным (инъекцией), если каждый элемент множества Y имеет не более одного прообраза. Другими словами, если из того, что $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Примеры

1. Отображение $f : \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = \sin x$ инъективно, так как каждый неотрицательный y из $[-1;\ 1]$ имеет в $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ один прообраз $x = \arcsin y$, а отрицательные y прообразов не имеют, поскольку $\sin x \geq 0$ на $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Отображение $f : [-1;\ 1] \to [0;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = x^2$, не является инъекцией, так как каждый $y \neq 0$ имеет два прообраза $x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$.

Определение 1.24. *Отображение $f : X \to Y$ назовём сюръетивным (сюръекцией), если каждый элемент множества Y имеет хотя бы один прообраз. Другими словами, если $f(X) = Y$.*

Примеры

1. Отображение $f : [-1;\ 1] \to [0;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = x^2$, — сюръекция. Элемент $y = 0$ имеет один прообраз $x = 0$. Остальные $y \in [0;\ 1]$ имеют по два прообраза $x = \pm\sqrt{y}$.

2. Отображение $f : \mathbb{R} \to [-1;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = \sin x$, — сюръекция. Каждый $y \in [-1;\ 1]$ имеет бесконечное множество прообразов $x = (-1)^n \arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.25. *Отображение $f : X \to Y$ назовём биективным (биекцией), если оно является одновременно и инъективным и сюръективным. Другими словами, если каждый элемент y множества Y имеет прообраз и притом только один.*

Примеры

1. Отображение $f : [-1;\ 1] \to [-1;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = x^3$, — биекция, так как каждому $y \in [-1;\ 1]$ отвечает единственный прообраз $x = \sqrt[3]{y} \in [-1;\ 1]$.

2. Отображение $f : [-1;\ 1] \to [0;\ 1]$, определяемое правилом $f(x) = x^2$, не является биекцией, так как каждому $y \in [0;\ 1]$, кроме $y = 0$, отвечают два прообраза $x = \pm\sqrt{y}$.

Понятия инъекции, сюръекции и биекции тесно связаны с разрешимостью уравнения

$$f(x) = y. \tag{1.10}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.6. *Если отображение $f : X \to Y$ является сюръекцией, то уравнение (1.10) имеет решение при любой правой части $y \in Y$. Если отображение $f : X \to Y$ является инъекцией, то решение уравнения (1.10) в случае существования является единственным. Если же отображение f является биекцией, то уравнение (1.10) имеет решение при любой правой части из Y и это решение единственно.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из того, что если f — сюръекция, то каждый элемент y множества Y имеет хотя бы один прообраз $x = f^{-1}(y)$. Вторая часть утверждения справедлива потому, что если f — инъекция, то из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, поэтому двух различных решений при одной и той же правой части y уравнение (1.10) иметь не может. Третья часть утверждения после доказанного очевидна. ■

Определение 1.26. *Пусть дано отображение $f: X \to Y$. Отображение $f^{-1}: Y \to X$ назовём обратным к отображению f, если оно каждому элементу y множества Y ставит в соответствие тот элемент x множества X, который отображением f переводится в y.*

Непосредственно из определения обратного отображения следует выполнение двух тождеств:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \ x \in X; \tag{1.11}$$

$$f(f^{-1}(y)) \equiv y, \ y \in Y. \tag{1.12}$$

Требование выполнения этих двух тождеств можно принять за определение обратного отображения.

Очевидно также, что если отображение f^{-1} является обратным к отображению f, то отображение f является обратным к отображению f^{-1}.

Лемма 1.7. *Обратное к $f: X \to Y$ отображение определено в том и только том случае, когда отображение f — биекция.*

Доказательство. Если f — биекция, то по лемме 1.6 уравнение (1.10) имеет и притом единственное решение для любой правой части y из множества Y. Поставив каждому $y \in Y$ в соответствие решение уравнения (1.10), получим отображение $g: Y \to X$, удовлетворяющее определению 1.26. Следовательно, $g = f^{-1}$.

Наоборот, если отображение f^{-1}, обратное к f, определено, то справедливы тождества (1.11) и (1.12). По второму из них $x = f^{-1}(y)$ удовлетворяет уравнению (1.10), следовательно, уравнение (1.10) имеет решение при любой правой части $y \in Y$. Если x — какое-либо решение уравнения (1.10), то по первому из тождеств $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$, то есть решение единственно. Так как уравнение (1.10) имеет единственное решение при любой правой части y из множества Y, то по лемме 1.6 отображение f — биекция. ■

Определение 1.27. *Пусть даны два отображения: $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Рассмотрим отображение $F: X \to Z$, определяемое следующим образом: $F(x) = g(f(x))$, $x \in X$. Отображение F называют композицией или суперпозицией отображений f и g или сложной функцией и пишут $F = g \circ f$.*

Примеры

1. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to [-1;\ 1]$, $g(y) = \sin y$. Тогда суперпозиция этих отображений $F = g \circ f: \mathbb{R} \to [-1;\ 1]$ действует по правилу $F(x) = \sin x^2$.

2. Пусть $f: \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \operatorname{tg} x$; $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(y) = \sqrt{y}$. Тогда суперпозиция $F = g \circ f: \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^+$, $F(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Как уже отмечалось выше, слова "отображение" , "функция" , "оператор" являются словами-синонимами. В случае, когда X и Y — множества вещественных чисел, употребляются термины "числовая функция "вещественнозначная функция "функция действительного переменного" или просто "функция" , если из контекста ясно, что области определения и изменения — множества вещественных чисел. Такие функции задаются главным образом одним из следующих трёх способов: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный.

1) Аналитический способ задания функции — это способ задания функции с помощью формулы, например, $y = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$, $y = \sin^2 3x$. При этом, если область определения не указывается, то имеется в виду "естественная область определения" — множество всех тех значений x, при которых выражение, задающее функцию, определено. В первом примере $D(y) = [0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$, во втором $D(y) = \mathbb{R}$. Отметим, что функция может задаваться различными формулами в разных частях области определения. Приведём несколько примеров.

а) Функция $y = |x|$ (см. определение 1.11) задаётся на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \ \ x, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

б) Функция $y = \operatorname{sgn} x$ (знак числа x) задаётся на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \ \ 0, & x = 0, \\ \ \ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

в) Функция Дирихле $y = D(x)$ определяется на $[0;\ 1]$ ($[a;\ b]$, $\mathbb{R}$) следующим образом:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Эти функции в дальнейшем будут постоянно использоваться в примерах и контрпримерах.

2) Графический способ задания функции состоит в следующем. На плоскости xOy (в декартовой прямоугольной системе координат) для каждого $x \in D(f)$ отмечаются точки $(x,\ f(x))$. Получившаяся линия (для "хороших" функций) называется графиком функции. Например, для функции $y = x^2$ графиком служит парабола, для функции $y = \sin x$ — синусоида.

В общем случае графиком отображения $f\ :\ \ X \to Y$ называют множество точек $\{(x,\ f(x)) :\ x \in X\}$ в декартовом произведении $X \times Y$.

3) Табличный способ задания функции представляет из себя таблицу из двух строк (или двух колонок), в первой из которых перечисляются значения аргумента $x_1, x_2, \dots$, а во второй — отвечающие им значения функции $y_1, y_2, \dots$.

Так как задача анализа — изучение различных операций, производимых над функциями, то главным является аналитический способ задания, а графический и табличный играют вспомогательную роль.

Из совокупности всех функций выделяют классы функций, обладающих каким-либо свойством.

Определение 1.28. *Функцию f называют чётной, если: 1) её область определения $D(f)$ симметрична относительно нуля, то есть $D(f)$ вместе с каждым x содержит также и $-x$; 2) для каждого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.*

График чётной функции симметричен относительно оси Oy, так как вместе с каждой точкой $(x, f(x))$ графику принадлежит также и точка $(-x, f(x))$.

Определение 1.29. *Функцию f называют нечётной, если: 1) её область определения $D(f)$ симметрична относительно нуля; 2) для каждого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.*

График чётной функции симметричен относительно начала координат, так как вместе с каждой точкой $(x, f(x))$ графику принадлежит также и точка $(-x, -f(x))$.

Определение 1.30. *Функцию f называют периодической с периодом T $(T > 0)$, если: 1) её область определения $D(f)$ вместе с каждым x содержит также $x + T$ и $x - T$; 2) для каждого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.*

Очевидно, что если T — период функции f, то периодами являются также числа $2T$, $3T$, ..., то есть у каждой периодической функции периодов бесконечно много. Поэтому, когда говорят *функция имеет период T*, то имеют в виду *наименьший положительный период*, то есть такое число $T > 0$, что ни одно меньшее положительное число периодом этой функции не является.

Определение 1.31. *Функцию f называют ограниченной на множестве X $(X \subset D(f))$, если множество $f(X)$ ограничено. Другими словами, функция f ограничена на множестве X, если существует положительная постоянная M такая, что*

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X.$$

Арифметические операции над функциями определяются следующим образом. Пусть функции $f, g : \ X \to \mathbb{R}$ (определены на одном и том же множестве!).

Определение 1.32. 1) *Суммой (разностью) $f \pm g$ функций f и g называют функцию, определённую на множестве X правилом*

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

2) *Произведением функций f и g называют функцию fg, определённую на множестве X правилом*

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

3) *Если $g(x) \neq 0$ $(x \in X)$, то частным $\dfrac{f}{g}$ функций f и g называют функцию, определённую на множестве X правилом*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Таким образом, арифметические операции над функциями определяются *поточечно* (в каждой точке $x \in X$).

Аналитический способ задания функции с помощью формулы $y = f(x)$ называют явным. Он не является единственным. Существуют и другие способы аналитического задания функции: неявный, параметрический, в полярной системе координат.

Пусть X, Y — числовые множества и $F : \ X \times Y \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0\,. \tag{1.16}$$

Если для каждого x из некоторого множества $E \subset X$ решение уравнения (1.16) существует и единственно, то, поставив каждому $x \in E$ в соответствие решение y уравнения (1.16), получим функцию $f: E \to Y$, называемую неявной функцией, определяемой уравнением (1.16).

Пусть на множестве $T \subset \mathbb{R}$ заданы две функции: $\varphi: T \to \mathbb{R}$ и $\psi: T \to \mathbb{R}$. Если φ биективно отображает T на $\varphi(T)$, то определена обратная функция $\varphi^{-1}: \varphi(T) \to T$, а вместе с ней и функция $f = \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(T) \to \mathbb{R}$. Определённую таким образом функцию f называют функцией, заданной параметрически, и записывают в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T, \tag{1.17}$$

или в виде

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in T. \tag{1.18}$$

Аргумент t в этом случае называют параметром. Необходимость в параметрическом задании функции возникает, например, при описании траектории точки, движущейся по плоскости, в случае, если её положение на плоскости (координаты) определяется временем.

Кроме декартовой прямоугольной системы координат на плоскости рассматривают и другие системы координат. Самой распространённой из них является полярная. Полярная система координат вводится следующим образом. На плоскости выбирается точка O, называемая полюсом. Из точки O проводится луч (обычно горизонтально и вправо), называемый полярным лучом. На нём выбирается масштаб (указывается отрезок OA, длина которого принимается за единицу). После этого положение любой точки M на плоскости определяется двумя числами: расстоянием r от точки O до точки M и углом φ от полярной оси до направления на точку M (угол отсчитывается в радианах). Пара (r, φ) называется полярными координатами точки M и записывается это, как обычно, $M(r, \varphi)$.

Если нужно рассматривать одновременно и декартовы и полярные координаты, то обычно поступают следующим образом. Совмещают начала декартовой и полярной систем координат, совмещают положительное направление оси Ox с полярным лучом и выбирают в обеих системах координат одинаковый масштаб. После этого, как нетрудно убедиться, декартовы и полярные координаты оказываются связанными следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Если r и φ интерпретируются как полярные координаты и функция задана правилом $r = f(\varphi)$ или $\varphi = g(r)$, то говорят, что функция задана в полярной системе координат.

В заключение приведём классификацию явно заданных функций.

Функции постоянную $y = C$, $C = const$, степенную $y = x^p$ $(p \in \mathbb{R})$, показательную $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, логарифмическую $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называются основными (или простейшими) элементарными функциями.

Определение 1.33. *Функцию f назовём элементарной, если её можно выразить через основные элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций.*

Примеры

1. Функция $y = \sqrt[3]{\dfrac{3x-2}{4x+1}}$ — элементарная, так как представима в виде суперпозиции элементарной функции $z = \dfrac{3x-2}{4x+1}$ и основной элементарной функции $y = \sqrt[3]{z}$.

2. Функция $y = (x^2+3)\sin^3\left(\dfrac{\cos 2x - 7}{\sqrt{\log_2(x+4)}}\right)$ — элементарная, так как представлена через основные элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций.

Функции, не выражаемые через основные элементарные описанным в определении 1.33 способом, называют неэлементарными. Неэлементарные функции существуют. Их примеры будут приведены позднее.

1.5 Задачи

1. Сформулировать отрицания утверждений:
   а) множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху;
   б) множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу;
   в) множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено.

2. Для любых $a, b > 1$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^{n-1} < b$, $a^n \geq b$. Доказать.

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \{-x : x \in X\}$. Доказать, что $\inf Y = -\sup X$, $\sup Y = -\inf X$.

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, $Z = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать равенства:
$$\inf Z = \inf X + \inf Y, \quad \sup Z = \sup X + \sup Y.$$

5. Пусть $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $X \subset \mathbb{R}^+$, $Y \subset \mathbb{R}^+$,
   $Z = \{xy : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать равенства:
$$\sup Z = \sup X \cdot \sup Y, \quad \inf Z = \inf X \cdot \inf Y.$$

6. Пусть $b > a > 0$, $X \subset [a; b]$, $Y = \left\{\dfrac{1}{x} :\ x \in X\right\}$. Доказать равенства:
$$\sup Y = \frac{1}{\inf X}\,, \quad \inf Y = \frac{1}{\sup X}\,.$$

7. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ и $Z = \{x - y :\ x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что
$$\sup Z = \sup X - \inf Y.$$

8. Пусть X и Y непустые множества вещественных чисел такие, что:
   а) $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$;
   б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$ такие, что $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$.
   Показать, что $\sup X = \inf Y$.

9. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограниченно сверху, $Y \subset \mathbb{R}$ ограниченно снизу,
   $Z = \{-5x + 7y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что
   а) Z ограниченно снизу; б) $\inf Z = -5\sup X + 7\inf Y$.

10. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограниченно сверху, $Y \subset \mathbb{R}$ ограниченно снизу,
    $Z = \{-3x + 2y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что
    а) Z ограниченно снизу; б) $\inf Z = -3\sup X + 2\inf Y$.

11. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограниченно сверху, $Y \subset \mathbb{R}$ ограниченно снизу, $Z = \{2x - 3y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что
а) Z ограниченно сверху; б) $\sup Z = 2\sup X - 3\inf Y$.

12. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограниченно сверху, $Y \subset \mathbb{R}$ ограниченно снизу, $Z = \{4x - 31y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что
а) Z ограниченно сверху; б) $\sup Z = 4\sup X - 31\inf Y$.

13. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ — ограниченные множества, $Z = \{x + 3y : x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать равенство $\inf Z = \inf X + 3\inf Y$.

14. Найти $\inf M$ и $\sup M$, если:

$$a)\ M = \left\{1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} : n \in \mathbb{N}\right\},\ b)\ M = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

15. Доказать, что множество X не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента и найти $\inf X$ и $\sup X$, если:
а) $X = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 < 7\}$;
b) $X = \left\{\frac{m}{n} :\ 0 < m < n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

16. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ и $f(x) \geq g(x)$ $(x \in X)$. Доказать, что

$$\sup\{f(x) :\ x \in X\} \geq \sup\{g(x) :\ x \in X\},$$

$$\inf\{f(x) :\ x \in X\} \geq \inf\{g(x) :\ x \in X\}.$$

17. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in X)$, $\sup\{f(x) :\ x \in X\} = +\infty$, $\inf\{g(x) :\ x \in X\} \neq -\infty$. Доказать, что $\sup\{f(x) + g(x) :\ x \in X\} = +\infty$.

18. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in X)$, $\inf\{f(x) :\ x \in X\} = -\infty$, $\sup\{g(x) :\ x \in X\} \neq +\infty$. Доказать, что $\inf\{f(x) + g(x) :\ x \in X\} = -\infty$.

19. Пусть функция f — нечётная. Доказать, что $\inf\{f(x)\} = -\sup\{f(x)\}$.

20. Существует ли функция f, являющаяся одновременно и чётной, и нечётной?

21. Существует ли функция f, имеющая периодом любое положительное число T?

22. Пусть $f :\ \mathbb{R} \to [-1;\ 1]$ определено равенством $f(x) = \sin x$. Найти: а) $f\left(\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]\right)$;
b) $f\left(\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right)\right)$; c) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$;
d) $f^{-1}\left(\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right)$; e) $f^{-1}([-1;\ 1])$; f) $f^{-1}((-1;\ 1))$.

23. Пусть $f :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — функция, ставящая в соответствие числу x его десятичное приближение с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, то есть, если $x = a_0{,}a_1a_2\ldots a_l\ldots$, то $f(x) = a_0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.
Является ли функция f: а) инъекцией; б) сюръекцией?
Найти: а) $f([1;\ 2))$; b) $f([2;\ 4])$; c) $f^{-1}(2,71)$; d) $f^{-1}([2;\ 3])$.

24. Пусть $f:\ X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset X$. Доказать, что:
    a) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$; b) $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$;
    c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

25. Привести пример отображения $f:\ X \to Y$, для которого
    $f(A \bigcap B) \neq f(A) \bigcap f(B)$, $A, B \subset X$.

26. Пусть $f:\ X \to Y$ и $A \subset Y$, $B \subset Y$. Доказать, что если $A \subset B$, то $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

27. Пусть $f:\ X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset Y$. Доказать, что:
    a) $A \subset f^{-1}(f(A))$; b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

28. Пусть $f:\ X \to Y$ и $A \subset Y$, $B \subset Y$. Доказать,что:
    a) $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$;
    b) $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$;
    c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

29. Какая из указанных функций $f:\ [0;\ 1] \to [0;\ 3]$:
    a) $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$; b) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; c) $f(x) = 3^x$;
    d) $f(x) = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$; e) $f(x) = 3 - \dfrac{16}{3}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$; f) $f(x) = |3x - 1|$
    инъективна, сюръективна или биективна?

2 Предел числовой последовательности

Операция предельного перехода — основная операция математического анализа. Посредством предельного перехода определяются, например, дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов. Мы начнём изучение этой операции с определения предела числовой последовательности и изучения его свойств.

2.1 Числовые последовательности

С понятием числовой последовательности читатель уже сталкивался в курсе элементарной математики. Арифметическая и геометрическая прогрессии, десятичные приближения $1,\ 1,4,\ 1,41,\ldots$ иррационального числа $\sqrt{2}$ являются примерами числовых последовательностей.

Дадим строгое определение последовательности и числовой последовательности.

Определение 2.1. *Пусть X — любое множество. Назовём последовательностью отображение $f:\mathbb{N} \to X$. Если же X — множество вещественных $(\mathbb{R})$ или комплексных $(\mathbb{C})$ чисел, или их подмножество, то последовательность будем называть числовой последовательностью.*

В дальнейшем будем записывать значение $x = f(n)$ в виде x_n, а саму последовательность в виде $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, или $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, или просто (x_n). При этом x_n будем называть n-м членом или просто членом последовательности.

Подчеркнём ещё раз, что последовательностью называется не произвольный ряд занумерованных чисел $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$. Слова "последовательность (x_n)" подразумевают, что известен закон, по которому для каждого $n \in \mathbb{N}$ определяется член x_n этой последовательности.

В этом разделе мы будем рассматривать только последовательности вещественных чисел, поэтому в дальнейшем, говоря "последовательность будем всегда подразумевать "вещественная числовая последовательность хотя многое из сказанного будет справедливо и для комплексных числовых последовательностей, и для других последовательностей, которые будут рассматриваться позже. Однако, если какое-либо утверждение не переносится на последовательности более общего вида, то мы будем стараться отмечать это обстоятельство.

Приведём примеры числовых последовательностей.

1. $\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1\,, \dfrac{1}{2}\,, \dfrac{1}{3}\,, \ldots, \dfrac{1}{n}\,, \ldots\right)$;

2. $(1) = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$;

3. $((-1)^{n-1}) = (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots)$;

4. $(a^{n-1}) = (1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, \ldots)$;

5. $(\sin n) = (\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots, \sin n, \ldots)$.

Определение 2.2. *Последовательность (x_n) будем называть стационарной, если существует такой номер n_0, что $x_n = x_{n_0}$ при $n \geq n_0$.*

Таким образом, после переобозначения $x_{n_0} = a$, стационарная последовательность имеет следующий вид: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}, a, a, \ldots, a, \ldots)$.

Из приведённых выше примеров стационарной является последовательность из примера 2.

Определение 2.3. *Последовательность (x_n) будем называть: а) ограниченной сверху, если существует число M такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq M$; б) ограниченной снизу, если существует число m такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \geq m$; с) ограниченной, если она ограничена как сверху так и снизу.*

Последовательности из приведённых выше примеров 1, 2, 3, 5 ограничены. Последовательность из примера 4 ограничена, если $|a| \leq 1$, неограничена сверху, если $a > 1$ и неограничена, если $a < -1$.

Для ограниченных последовательностей справедлива лемма, аналогичная по содержанию лемме 1.2 для множеств.

Определение 2.4. *Пусть даны последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Определим сумму, разность, произведение и частное двух последовательностей и произведение последовательности на постоянную (число) следующим образом:*

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{=} (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{=} (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{=} (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

d) $\dfrac{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} \overset{def}{=} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) $c(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{=} (cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

В случае частного, естественно, следует требовать выполнения условия $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

А теперь сформулируем основополагающее для всего курса определение предела последовательности.

Определение 2.5. *Пусть дана числовая последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Число a назовём пределом последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполняется условие*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Если существует предел a последовательности (x_n), то будем говорить, что последовательность (x_n) сходится к a, и писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Если же предел последовательности (x_n) не существует, то будем говорить, что она расходится.

Замечание 2.1. *Как следует из определения предела последовательности, номер n_0, начиная с которого неравенство (2.1) заведомо выполняется, зависит от ε. Когда бывает необходимо особо подчеркнуть это обстоятельство, пишут $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Вообще говоря, если ε стремится к нулю, то n_0 возрастает до бесконечности.*

Замечание 2.2. *Так как неравенство $|x - a| < \varepsilon$ задаёт ε-окрестность точки a, то определение предела последовательности имеет следующий геометрический смысл: все члены сходящейся к a последовательности, начиная с номера $n_0(\varepsilon)$, располагаются в $U_\varepsilon(a)$.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. *Стационарная последовательность*

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, a, a, \ldots, a, \ldots)$$

сходится к a, потому что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0$ имеем:

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Пример 2.2. *Рассмотрим последовательность $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.*

Выберем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, решая неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Положим $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Если $n \geq n_0$, то $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, поэтому

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Пример 2.3. *Последовательность $(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ расходится.*

Решение. Заметим, что члены последовательности попеременно принимают значения 0 и 2. Поэтому, если a — любое вещественное число, а $\varepsilon < 1$, то не найдётся такого n_0, начиная с которого все x_n принадлежат $U_\varepsilon(a)$. Действительно, если бы такой номер существовал, то при $n \geq n_0$ и x_n, и x_{n+1} принадлежали бы $U_\varepsilon(a)$, поэтому расстояние между ними должно было бы быть меньше $2\varepsilon < 2$ (2ε — длина окрестности). Но это невозможно, так как всегда $|x_n - x_{n+1}| = 2$. ■

Номер n_0, начиная с которого неравенство 2.1 начинает выполняться, далеко не всегда удаётся найти точно, да это, по определению предела последовательности, и не требуется. Обычно с помощью оценок находят такое значение n_0, что при $n \geq n_0$ неравенство 2.1 заведомо выполняется, а что будет при $n < n_0$, согласно определению предела последовательности, знать не требуется.

Пример 2.4. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}=\dfrac{2}{3}$.

Решение. Выберем произвольно $\varepsilon>0$, напишем неравенство

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

и укажем номер n_0, начиная с которого оно заведомо выполняется. Для начала левую часть неравенства упростим.

$$\left|\frac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{13n+16}{3(3n^2-2n+1)}\right|=\frac{13n+16}{3(3n^2-2n+1)}\ .$$

Как нетрудно проверить, $13n+16<18n$ при $n\geq 4$, а $3n^2-2n+1>2n^2$ при $n\geq 2$. Поэтому

$$\left|\frac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{13n+16}{3(3n^2-2n+1)}<\frac{18n}{6n^2}=\frac{3}{n}\ .$$

при $n\geq 4$.

Используя полученную оценку, находим:

$$\left|\frac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{3}{n}<\varepsilon$$

при $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Остаётся положить $n_0=\max\left\{4;\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]+1\right\}$ и убедиться, что при $n\geq n_0$ неравенство

$$\left|\frac{2n^2+3n+6}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

выполняется. ■

Пример 2.5. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$.

Решение. Для доказательства нам потребуется неравенство Бернулли

$$(1+x)^n\geq 1+nx, \tag{2.2}$$

справедливое при $n\in\mathbb{N}$ и $x>-1$.

Докажем его методом математической индукции.

1) При $n=1$ неравенство Бернулли принимает вид $1+nx\geq 1+nx$, следовательно, выполняется.

2) Пусть для некоторого $n\in\mathbb{N}$ неравенство Бернулли справедливо. Покажем, что оно выполняется и для следующего значения n, то-есть, если $(1+x)^n\geq 1+nx$, то и $(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$.

Имеем:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n\geq(1+x)(1+nx)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x\ .$$

и неравенство Бернулли доказано.

Приступим к решению примера. Рассмотрим два случая: $a>1$ и $a<1$ (третий случай: $a=1$ – тривиален).

Пусть $a > 1$. Тогда и $\sqrt[n]{a} > 1$, поэтому $\sqrt[n]{a}$ можно представить в виде $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$. Возведя обе части в степень n и воспользовавшись неравенством Бернулли, получим:

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n \ ,$$

или $\alpha_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $n_0 = \left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда, если $n \geq n_0$, то $n > \dfrac{a-1}{\varepsilon}$, поэтому

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n \leq \frac{a-1}{n} < \varepsilon \, ,$$

и в случае $a > 1$ требуемое утверждение установлено.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Положим $b = \dfrac{1}{a}$. Тогда $b > 1$, поэтому, выбрав по $\varepsilon > 0$ номер n_0 так же, как и выше, при $n \geq n_0$ будем иметь: $\sqrt[n]{b} - 1 < \varepsilon$. Но тогда при $n \geq n_0$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = 1 - \sqrt[n]{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1 < \varepsilon \ ,$$

что и требовалось доказать. ■

Начнём изучение свойств сходящихся последовательностей.

Теорема 2.1. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Докажем, что она ограничена, то есть, что существует число M такое, что для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $|x_n| \leq M$.

Возьмём $\varepsilon = 1$ и, пользуясь определением предела последовательности, подберём n_0 так, чтобы при $n \geq n_0$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < 1$. Тогда при $n \geq n_0$ имеем: $|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1$ или $|x_n| < |a| + 1$.

Положим

$$M = \max\{|x_1|; |x_2|; \ldots; |x_{n_0-1}|; |a| + 1\}.$$

Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $|x_n| \leq M$. ■

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Пример 2.2 показывает, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ может быть ограниченной, но не сходящейся.

Теорема 2.2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Проведём доказательство этого утверждения методом «от противного». Допустим, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет два *различных* предела a и a_1. Для определённости предположим, что $a_1 > a$. Тогда $a_1 - a = 2\varepsilon > 0$. Пользуясь определением предела последовательности, по построенному числу ε подберём номера n_0' и n_0'' так, чтобы при $n \geq n_0'$ выполнялось условие $|x_n - a| < \varepsilon$, а при $n \geq n_0'$ — условие $|x_n - a_1| < \varepsilon$, и положим $n_0 = \max\{n_0'; n_0''\}$. Возьмём номер $n > n_0$. Тогда $n > n_0'$ и $n > n_0''$, поэтому выполнены оба условия. Но в таком случае

$$2\varepsilon = a_1 - a = |a_1 - a| = |(x_n - a) + (a_1 - x_n)| \leq |x_n - a| + |x_n - a_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \, .$$

Мы получили невозможное неравенство $2\varepsilon < 2\varepsilon$, то есть противоречие. Противоречие возникло из-за предположения о существовании у последовательности двух различных пределов, следовательно, такое предположение неверно. ■

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 2.6. *Последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *будем называть бесконечно малой последовательностью, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такой, что при* $n \geq n_0$ *выполняется условие* $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Используя определение предела последовательности, можно дать эквивалентную формулировку. Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ назовём бесконечно малой последовательностью, если её предел равен нулю.

Определение 2.7. *Последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *назовём бесконечно большой последовательностью, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такой, что при* $n \geq n_0$ *выполняется условие* $|\alpha_n| > \varepsilon$.

Если последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая, то будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ и даже говорить, что (α_n) стремится (сходится) к бесконечности, но при этом следует помнить, что по определению 2.5 бесконечно большая последовательность является расходящейся последовательностью.

Пример 2.6. *Последовательность* $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *является бесконечно малой.*

Эта последовательность рассмотрена в примере 2.2.

Пример 2.7. *Последовательность* (q^n) *является бесконечно малой при* $|q| < 1$ *и бесконечно большой при* $|q| > 1$.

Доказательство. 1) Пусть $|q| < 1$. Возьмём любое $\varepsilon < 1$, и, решив неравенство $|q^n| < \varepsilon$, определим номер n_0, начиная с которого оно выполняется. Последовательно находим:

$$|q|^n < \varepsilon,\ n \ln|q| < \ln\varepsilon,\ n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},\ n_0 = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1.$$

Номер n_0 указан, следовательно, последовательность (q^n) при $|q| < 1$ является бесконечно малой.

2) Пусть $|q| > 1$. Выберем произвольно $\varepsilon > 1$ и укажем номер, начиная с которого выполняется неравенство $|q^n| > \varepsilon$.

$$|q|^n > \varepsilon,\ n \ln|q| > \ln\varepsilon,\ n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},\ n_0 = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1.$$

Номер n_0 найден. По определению, последовательность (q^n) является бесконечно большой при $|q| > 1$. ■

Изучим свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Теорема 2.3. *Последовательность* (x_n) *тогда и только тогда сходится к числу* a, *когда последовательность* $(x_n - a)$ *является бесконечно малой.*

Доказательство. Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно сравнить определения сходящейся и бесконечно малой последовательностей.

Утверждение $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$.

Утверждение $(x_n - a)$ — бесконечно малая последовательность означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$. ■

Теорема 2.4. *Пусть $\alpha_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Последовательность (α_n) — бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ — бесконечно большая.*

Доказательство. Пусть последовательность (α_n) — бесконечно малая. Докажем, что последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ — бесконечно большая.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (α_n) — бесконечно малая, то по числу $\dfrac{1}{\varepsilon}$ найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будет выполняться $|\alpha_n| < \dfrac{1}{\varepsilon}$. Но тогда, перевернув обе части этого неравенства, при $n \geq n_0$ будем иметь: $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > \varepsilon$, а это означает, что последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ является бесконечно большой.

Обратное утверждение доказывается совершенно аналогично. ■

Теорема 2.5. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть (α_n) и (β_n) — бесконечно малые последовательности. Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера n_0', n_0'' такие, что будут выполняться условия $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq n_0'$ и $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq n_0''$. Положим $n_0 = \max\{n_0'; n_0''\}$ и возьмём любое $n \geq n_0$. Тогда $n \geq n_0'$ и $n \geq n_0''$, поэтому

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Отсюда по определению следует, что последовательность $(\alpha_n+\beta_n)$ — бесконечно малая. ■

Замечание 2.3. *Как при доказательстве этой теоремы, так и при доказательстве единственности предела было произведено одинаковое рассуждение: сначала по $\varepsilon > 0$ были найдены два номера n_0' и n_0'', а потом взят максимальный из них. В дальнейшем подобная ситуация будет возникать многократно. Чтобы избежать повтора, указанное рассуждение будет опускаться. Именно, если по одному и тому же условию нужно будет указать два или несколько чисел, а потом выбрать максимальное (минимальное) из них, то будет сразу указываться это максимальное (минимальное) число, годящееся для всех рассматриваемых случаев.*

Теорема 2.6. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность (α_n) — бесконечно малая, а последовательность (x_n) — ограниченная. Нужно доказать, что последовательность $(\alpha_n x_n)$ — бесконечно малая.

По определению ограниченной последовательности существует число M такое, что $|x_n| \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как последовательность α_n — бесконечно малая, то найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будем иметь: $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Но тогда при $n \geq n_0$ $|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, а это означает, что последовательность $(\alpha_n x_n)$ является бесконечно малой. ■

Следствие 2.1. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность.*

Бесконечно малая последовательность, как сходящаяся, ограничена. В справедливости следствия убеждаемся, приняв одну из двух последовательностей за бесконечно малую, а другую — за ограниченную.

Следствие 2.2. *Произведение бесконечно малой последовательности на постоянную — бесконечно малая последовательность.*

Постоянную c можно рассматривать как стационарную последовательность

$$(c, c, \ldots, c, \ldots),$$

которая, очевидно, ограничена.

Теорема 2.7. *Произведение двух бесконечно больших последовательностей — бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Даны две бесконечно большие последовательности (α_n) и (β_n). Нужно доказать, что последовательность $(\alpha_n \beta_n)$ — бесконечно большая.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число. Тогда найдётся номер n_0 такой, что при $n > n_0$ будут выполняться условия $|\alpha_n| > \sqrt{\varepsilon}$ и $|\beta_n| > \sqrt{\varepsilon}$. Тогда

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| > \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon\,,$$

что и требовалось. ■

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Здесь, опираясь на теорему 2.3, мы докажем теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей. Применение этих теорем существенно облегчает нахождение пределов.

Теорема 2.8. *Пусть последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходятся, причём*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда последовательность $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Проще говоря, для сходящихся последовательностей предел суммы равен сумме пределов.

Доказательство. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся соответственно к a и b, то по теореме 2.3 последовательности $(\alpha_n) = (x_n - a)$ и $(\beta_n) = (y_n - b)$ являются бесконечно малыми. Так как

$$(x_n + y_n) - (a + b) = (x_n - a) + (y_n - b) = \alpha_n + \beta_n$$

по теореме 2.5 является бесконечно малой последовательностью, то, снова по теореме 2.3 последовательность $(x_n + y_n)$ сходится к $a + b$. ■

Теорема 2.9. *Пусть последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходятся, причём*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда последовательность $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства предыдущей.

Теорема 2.10. *Пусть последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходятся, причём*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда последовательность $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

Доказательство. Доказательство опять основывается на теореме 2.3. Рассмотрим разность $x_n y_n - ab$ и представим её в нужном виде.

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - a y_n + a y_n - ab = (x_n - a) y_n + a(y_n - b).$$

Произведения $((x_n - a)y_n)$ и $(a(y_n - b))$ — бесконечно малые последовательности (как произведения бесконечно малой и ограниченной последовательности и бесконечно малой последовательности и постоянной), поэтому последовательность $(x_n y_n - ab)$ — бесконечно малая (как сумма бесконечно малых последовательностей). По теореме 2.3 последовательность $(x_n y_n)$ сходится к числу ab. ■

Следствие 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}(c x_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *где* c *— постоянная.*

Для доказательства теоремы о пределе частного нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть последовательность* (y_n) *сходится к числу* $b \neq 0$ *и* $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда последовательность* $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ *ограничена.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Так как последовательность (y_n) сходится, то найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ выполняется условие $|y_n - b| < \varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. В силу легко проверяемого неравенства $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ тем более справедливо неравенство

$$|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2} \ (n \geq n_0). \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$ или $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| < \dfrac{2}{|b|}$ при $n \geq n_0$. Положим

$$M = \max\left\{\frac{1}{|y_1|}; \frac{1}{|y_2|}; \ldots; \frac{1}{|y_{n_0-1}|}; \frac{2}{|b|}\right\}.$$

Очевидно, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| \leq M$.

Лемма доказана. ■

Замечание 2.4. *Попутно доказано, что если* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то, начиная с некоторого номера, и* $y_n \neq 0$. *Поэтому в формулировке леммы можно было бы опустить условие* $y_n \neq 0$. *Тогда лемма осталась бы в силе, только члены последовательности* $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ *были бы определены лишь при* $n \geq n_1$, *где* n_1 *— некоторое натуральное число, меньшее или равное* n_0.

Теорема 2.11. *Пусть последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходятся,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

причём $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *и* $b \neq 0$. *Тогда последовательность* $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Рассмотрим разность $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$ и преобразуем её.

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} &= \frac{x_n b - a y_n}{b y_n} = \frac{x_n b - ab + ab - a y_n}{b y_n} = \\ &= \frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{b y_n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot ((x_n - a)b - a(y_n - b)). \end{aligned}$$

Используя свойства бесконечно малых последовательностей, убеждаемся, что правая (значит, и левая) часть написанного равенства — бесконечно малая последовательность и на основании теоремы 2.3 делаем вывод о справедливости утверждения, приведённого в формулировке теоремы. ■

Пример 2.8. *Вычислим* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1} - 2\cdot 5^n}{5^{n+1} + 7\cdot(-2)^n}$.

Решение. Сначала проведём анализ выражения. Принимая во внимание пример 2.7, заключаем, что каждое слагаемое как в числителе, так и в знаменателе стремится к бесконечности, причём стремится тем быстрее, чем больше (по модулю) основание степени (чем больше $|q|$, тем меньше номер $n_0(\varepsilon)$). Поэтому и числитель, и знаменатель исследуемого выражения стремятся к бесконечности. В этом случае говорят, что анализируемое выражение есть неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ (бесконечность делить на бесконечность).

Так как применить теорему 2.11 нельзя (её условия не выполняются), то преобразуем выражение, вынеся в числителе и знаменателе за скобки 5^n (быстрее всего возрастает). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2\cdot 5^n}{5^{n+1} + 7\cdot(-2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(3\cdot(3/5)^n - 2)}{5^n(5 + 7\cdot(-2/5)^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(3/5)^n - 2}{5 + 7\cdot(-2/5)^n}\,.$$

Теперь основания степеней по модулю меньше единицы. Используя тот же пример 2.7, делаем вывод, что первое слагаемое в числителе и второе в знаменателе стремятся к нулю. Поэтому числитель стремится к -2, знаменатель — к 5, а дробь — к $-2/5$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1} - 2\cdot 5^n}{5^{n+1} + 7\cdot(-2)^n} = -\dfrac{2}{5}\,.$ ■

Предельный переход в неравенствах

Теорема 2.12. *Пусть последовательность* (x_n) *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. *Если* $x_n \geq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *то и* $a \geq 0$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует последовательность с неотрицательными членами, у которой предел $a < 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ и найдём номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будет выполняться $|x_n - a| < \varepsilon$ или $-\dfrac{|a|}{2} < x_n - a < \dfrac{|a|}{2}$. Взяв правую часть этого неравенства, будем иметь при $n \geq n_0$: $x_n < a + \dfrac{|a|}{2} = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} < 0$. Но этого не может быть, так как *все* члены последовательности (x_n) неотрицательны. Теорема доказана. ■

Замечание 2.5. *Так как изменение (удаление, прибавление) нескольких первых членов последовательности на значении её предела, очевидно, не отражается, то в доказанной теореме не обязательно требовать, чтобы все члены последовательности были неотрицательны, но обязательно должны быть неотрицательны все члены последовательности, начиная с некоторого номера n_1.*

Это замечание относится и к аналогичным утверждениям, которые будут рассмотрены позже.

Замечание 2.6. *Если у сходящейся последовательности $x_n > 0$, начиная с некоторого номера, то нельзя утверждать, что и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, а можно лишь, что $a \geq 0$.*

Пример 2.9. *Рассмотрим последовательность $\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Имеем: $\dfrac{1}{n} > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.*

Следствие 2.4. *Пусть последовательность (x_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $x_n \geq b$, то и $a \geq b$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(x_n - b)$. Члены этой последовательности по условию неотрицательны, а на основании теоремы 2.9 она сходится к числу $a-b$. Тогда по теореме 2.12 $a - b \geq 0$ или $a \geq b$. ■

Следствие 2.5. *Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда и $a \leq b$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(y_n - x_n)$. По условию $y_n - x_n \geq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, по теореме 2.9 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = b - a$. Тогда по теореме 2.12 имеем: $b - a \geq 0$ или $b \geq a$. ■

Теорема 2.13 (О трёх последовательностях)**.** *Пусть даны три последовательности: (x_n), (y_n), (z_n), причём $x_n \leq y_n \leq z_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

Эту теорему называют ещё принципом двустороннего ограничения.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости последовательностей (x_n) и (z_n) найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ и $-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$.

Напишем следующую цепочку неравенств:

$$-\varepsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \varepsilon\,.$$

Из неё вытекает, что $|y_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, а это означает по определению предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Пример 2.10. *Рассмотрим последовательность (x_n), где*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и вычислим её предел.

Решение. Оценим члены последовательности снизу, выбрав среди знаменателей составляющих x_n дробей самый большой.

$$x_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Оценим члены последовательности сверху, выбрав среди знаменателей составляющих x_n дробей самый маленький.

$$x_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Следовательно,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\ (n \in \mathbb{N})\,.$$

Вычислим пределы крайних последовательностей в этом неравенстве.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1\,.$$

Так как крайние последовательности имеют одинаковый предел, то по принципу двустороннего ограничения средняя последовательность имеет тот же предел. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1\,.$$

■

2.2 Монотонные последовательности

Определение 2.8. *Вещественную числовую последовательность (x_n) будем называть:*

a) неубывающей, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} \geq x_n$;
b) возрастающей, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$;
c) невозрастающей, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} \leq x_n$;
d) убывающей, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} < x_n$.

Определение 2.9. *Последовательности неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие будем называть монотонными последовательностями.*

Пример 2.11. *Последовательности:*

a) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ — *убывающая;*
b) $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots)$ — *неубывающая;*
c) $(1, -2, 3, -4, 5, \ldots)$ — *немонотонная;*
d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$ — *возрастающая.*

Если последовательность неубывающая (возрастающая), то она ограничена снизу (первым членом), но сверху может быть не ограничена (пример *b*). Невозрастающая (убывающая) последовательность, напротив, ограничена сверху, но снизу может быть не ограничена. Однако для неубывающих, ограниченных сверху, и невозрастающих, ограниченных снизу, последовательностей справедливо утверждение, являющееся одной из основ математического анализа.

Теорема 2.14 (Вейерштрасс)**.** *Монотонная и ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Формулировка теоремы содержит два утверждения.

1) Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она сходится.

2) Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она сходится.

Оба утверждения доказываются одинаково. Проведём доказательство первого из них, а доказательство второго рекомендуем читателям провести самостоятельно.

Итак, (x_n) — неубывающая, ограниченная сверху последовательность. Как непустое, ограниченное сверху, множество $\{x_n\}$ членов последовательности имеет по теореме 1.1 точную верхнюю грань $\overline{x}$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}\,. \tag{2.4}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По первому свойству точной верхней грани для любого $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \le \overline{x} < \overline{x} + \varepsilon\,.$$

По второму свойству точной верхней грани найдётся элемент x_{n_0}, удовлетворяющий неравенству $x_{n_0} > \overline{x}$. Так как последовательность (x_n) не убывает, то при $n \ge n_0$

$$x_n \ge x_{n_0} > \overline{x} - \varepsilon\,.$$

Из этих двух неравенств следует, что если $n \ge n_0$, то

$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon\,,$$

что по определению предела последовательности означает сходимость последовательности (x_n) к числу $\overline{x}$. ■

Замечание 2.7. *Если объединить доказанную теорему с теоремой об ограниченности сходящейся последовательности* (*теорема 2.1*)*, то получим необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности: монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Как уже отмечалось выше, теорема Вейерштрасса играет фундаментальную роль в математическом анализе. С её помощью может быть установлена справедливость значительного количества утверждений, некоторые из которых играют не меньшую роль, чем сама теорема Вейерштрасса. Начнём с *принципа стягивающихся сегментов.*

Определение 2.10. *Систему сегментов* (*отрезков*) $[a_n; b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) *назовём стягивающейся, если каждый следующий сегмент содержится в предыдущем,*

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots\,,$$

и длины сегментов стремятся к нулю,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0\,.$$

Теорема 2.15 (Кантор)**.** *Всякая стягивающаяся система сегментов имеет и притом единственную общую точку.*

Доказательство. Необходимо доказать, что существует, и притом единственная, точка c такая, что $c \in [a_n; b_n]$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, или, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n] = \{c\}$.

Рассмотрим последовательность (a_n) левых концов сегментов. Так как каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, то

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots ,$$

то есть, эта последовательность — неубывающая и ограниченная сверху ($a_n \le b_1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$), следовательно, по теореме Вейерштрасса она имеет предел $a = \sup\{a_n\}$, поэтому $a_n \le a$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. По аналогичной причине последовательность (b_n) правых концов сегментов имеет предел $b \le b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $a_n \le b_n$, то, переходя к пределу и используя второе следствие из теоремы 2.12, найдём, что $a \le b$. Но по условию $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, а по теореме 2.9 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a$. Поэтому $b = a = c$. Итак, $a_n \le c \le b_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Этим доказано, что последовательность стягивающихся сегментов имеет общую точку.

Пусть c' — точка, принадлежащая всем сегментам. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $a_n \le c' \le b_n$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, поэтому по принципу двустороннего ограничения (теорема 2.13) $c' = c$. Это означает, что общая точка у сегментов может быть только одна. ■

Теорема 2.16. *Последовательность* $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

Доказательство. Покажем, что рассматриваемая последовательность возрастает и ограничена сверху. Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона и преобразуем получившееся выражение к нужному виду.

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Теперь первые два слагаемых сложим, а начиная с третьего слагаемого каждый множитель числителя первой дроби разделим на один из сомножителей n знаменателя второй дроби. Тогда

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Выпишем для сравнения $(n+1)$-й член последовательности.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сравнивая почленно правые части формул (2.5) и (2.6), видим, что, начиная со второго, каждое слагаемое в формуле (2.6) больше соответствующего слагаемого в формуле (2.5), к тому же в формуле (2.6) на одно положительное слагаемое больше. Значит, действительно, $x_{n+1} > x_n$, то есть, последовательность (x_n) — возрастающая.

Теперь произведём оценку x_n сверху, заменив все скобки в правой части 2.6 единицей, а все множители в знаменателях дробей двойками. И то, и другое ведёт к увеличению выражения, поэтому

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2 + 1 = 3.$$

Следовательно, последовательность (x_n) ограничена сверху.

Таким образом, последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, как возрастающая и ограниченная сверху, по теореме Вейерштрасса сходится. ■

Предел последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, следуя великому математику Леонарду Эйлеру, обозначают буквой e,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.7}$$

Из оценок, проведённых при доказательстве теоремы, следует, что $2 < e \leq 3$. Доказано, что число e иррациональное и даже трансцендентное. К настоящему времени число e вычислено с очень высокой степенью точности. В дальнейшем мы покажем, как это может быть сделано, а также выясним чрезвычайно важную роль числа e в математике, а пока приведём несколько первых десятичных знаков числа e: $e = 2,71828\ldots$.

Приведём ещё один пример использования теоремы Вейерштрасса.

Пусть дано положительное число a. Выберем число $x_1 > 0$. Положим

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.8}$$

Формулы типа (2.8), определяющие каждый следующий член последовательности через предыдущие, называются *рекуррентными* формулами.

Теорема 2.17. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}\,$.

Доказательство. Изучим свойства последовательности (x_n).

1) $x_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Очевидно.

2) $x_n \geq \sqrt{a}$ при $n \geq 2$.

Перепишем формулу (2.8) в виде

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

и применим известное неравенство $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$, справедливое при $t > 0$, положив в нём $t = \dfrac{x_n}{\sqrt{a}}$. Тогда

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}\,,\ n = 1, 2, \ldots .$$

3) Покажем, что последовательность (x_n), начиная с номера $n = 2$, является невозрастающей.

В самом деле, вынеся в (2.8) x_n за скобку, будем иметь:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \le x_n\,,$$

так как по пункту 2 $x_n^2 \ge a$. Следовательно, $x_{n+1} \le x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Итак, последовательность x_n невозрастающая по пункту 3 и ограниченная снизу по пункту 2. Тогда теореме Вейерштрасса существует $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Так как $x_n \ge \sqrt{a} > 0$, то и $b \ge \sqrt{a} > 0$. Найдём его. Для этого в обеих частях равенства (2.8) перейдём к пределу, устремив n к бесконечности. Получим сводящееся к квадратному уравнение $b = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{a}{b}\right)$, положительным решением которого является $b = \sqrt{a}$. ∎

Рекуррентную формулу (2.8) используют для приближённого вычисления $\sqrt{a}$ с помощью вычислительных устройств.

2.3 Произвольные последовательности

Определение 2.11. *Пусть (x_n) — произвольная последовательность. Пусть $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — любая возрастающая последовательность натуральных чисел.*

Последовательность $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ назовём подпоследовательностью последовательности (x_n).

Например, последовательности

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots\right),\ \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2k+1}, \dots\right),\ \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \dots\right)$$

суть подпоследовательности последовательности $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right)$.

Отметим, что в число подпоследовательностей последовательности (x_n) входит и сама последовательность (x_n), так как последовательность номеров $(1, 2, \dots, k, \dots)$ является возрастающей.

Теорема 2.18. *Если последовательность (x_n) сходится к числу a, то и любая подпоследовательность этой последовательности тоже сходится к a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и (x_{n_k}) — подпоследовательность последовательности (x_n). Нужно показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела последовательности, найдём номер n_0 такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \ge n_0$. Положим $k_0 = \min\{k :\ n_k \ge n_0\}$ и возьмём $k \ge k_0$. Тогда, очевидно, $n_k \ge n_0$, поэтому $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Итак, по $\varepsilon > 0$ найден номер k_0 такой, что $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ при $k \ge k_0$. Теорема доказана. ∎

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2.19. *Если любая подпоследовательность последовательности (x_n) сходится, то сходится и последовательность (x_n), и все подпоследовательности имеют одинаковый предел.*

Доказательство. Это утверждение тривиально. Последовательность (x_n) сходится по условию, так как, как отмечено выше, она является своей подпоследовательностью. А все подпоследовательности имеют одинаковый предел по предыдущей теореме. ∎

Определение 2.12. *Число a будем называть предельной точкой последовательности (x_n), если любая окрестность точки a содержит бесконечно много членов этой последовательности.*

Если последовательность (x_n) сходится, то в любой ε-окрестности её предела a содержатся все члены последовательности, начиная с номера $n_0(\varepsilon)$. Поэтому предел a является предельной точкой сходящейся последовательности. Обратное утверждение, как будет показано ниже на примерах, неверно.

Теорема 2.20. *Число a является предельной точкой последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к a.*

Доказательство. Если существует подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к a, то любая окрестность точки a содержит все члены подпоследовательности (x_{n_k}), начиная с некоторого номера, то есть, содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). По определению, a является предельной точкой последовательности (x_n).

Докажем обратное. Пусть a — предельная точка последовательности (x_n). Тогда, по определению, любая окрестность точки a содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). Пусть (ε_k) — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Рассмотрим ε_1-окрестность точки a. Она содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). Возьмём любой из них и обозначим его номер n_1. Итак, $x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$. Рассмотрим ε_2-окрестность точки a. Она тоже содержит бесконечно много членов последовательности (x_n), поэтому среди них найдётся такой, номер которого больше номера n_1. Возьмём этот член последовательности и обозначим его номер n_2. Итак, $x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$, причём $n_2 > n_1$. Описанный процесс выбора членов последовательности можно продолжить бесконечно. Пусть члены последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ уже выбраны. Рассмотрим ε_k-окрестность точки a. Она тоже содержит бесконечно много членов последовательности (x_n), поэтому среди них найдётся такой, номер которого больше уже выбранных номеров $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Возьмём этот член последовательности и обозначим его номер n_k. Итак, $x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$, причём $n_k > n_{k-1}$. И так далее.

В результате мы получаем подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), обладающую свойством $|x_{n_k} - a| < \varepsilon_k$. Так как $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, то последовательность $(x_{n_k} - a)$ — бесконечно малая, то есть, $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$.

Теорема доказана. ■

Замечание 2.8. *Условие «последовательность (x_n) содержит подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к a», часто принимают за определение предельной точки последовательности.*

Примеры

1) Последовательность $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right)$ сходится к нулю, поэтому имеет единственную предельную точку $a = 0$.

2) Последовательность $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ предельных точек не имеет, потому что при $\varepsilon < 0,5$ ε-окрестность любой точки $a \in \mathbb{R}$ может содержать не более одного члена последовательности.

3) Последовательность $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{n-1}{n}, \ldots\right)$ имеет две предельные точки: $a_1 = 0$ (любая её ε-окрестность содержит бесконечно много членов последовательности вида $1/n$) и $a_2 = 1$ (любая её ε-окрестность содержит бесконечно много членов последовательности вида $(n-1)/n$).

4) Для последовательности

$$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}, \ldots\right)$$

каждая точка a отрезка $[0,1]$ является предельной.

Для доказательства этого утверждения зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k_0 = \min\left\{k : \frac{1}{2^k} < \varepsilon\right\}.$$

Пусть теперь a — любая точка отрезка $[0,1]$. Тогда при $k \geq k_0$ как минимум один член последовательности из каждой группы членов $\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}$ будет располагаться в ε-окрестности точки a. Следовательно, в любой окрестности любой точки отрезка $[0,1]$ содержится бесконечно много членов последовательности.

Как видно из приведённых примеров, последовательность может не иметь ни одной предельной точки, может иметь одну, две, ..., и даже бесконечно много предельных точек.

Теорема 2.21. *Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то a — единственная предельная точка этой последовательности.*

Доказательство. По теореме 2.18, если последовательность (x_n) сходится к a, то и любая её подпоследовательность тоже сходится к a, поэтому других предельных точек у сходящейся последовательности быть не может. ■

Докажем теорему, имеющую для анализа не меньшее значение, чем теоремы Вейерштрасса, Кантора и некоторые другие.

Теорема 2.22. (**Больцано, Вейерштрасс**) *Всякая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть (x_n) — ограниченная последовательность. Тогда существуют числа a_1, b_1 такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_1 \leq x_n \leq b_1$, то есть, последовательность (x_n) целиком расположена на отрезке $[a_1, b_1]$. Разобьём отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Тогда получим два отрезка $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$ длины $(b_1 - a_1)/2$. Хотя бы один из них содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). Возьмём тот из отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности (если оба отрезка обладают этим свойством, то можно взять любой из них, например, левый) и обозначим его $[a_2, b_2]$. Таким образом, отрезок $[a_2, b_2]$ содержит бесконечно много членов последовательности (x_n) и его длина равна $(b_1 - a_1)/2$.

Отрезок $[a_2, b_2]$ снова разделим пополам, из получившихся двух отрезков возьмём тот, который содержит бесконечно много членов последовательности, и обозначим его $[a_3, b_3]$. Таким образом, отрезок $[a_3, b_3]$ содержит бесконечно много членов последовательности (x_n) и его длина равна $(b_1 - a_1)/4$.

Ясно, что описанный процесс можно продолжить бесконечно. Если получен отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ длины $(b_1 - a_1)/2^{k-2}$, содержащий бесконечно много членов последовательности, то делим его пополам, из получившихся двух отрезков берём тот, который содержит бесконечно много членов последовательности, и обозначаем его $[a_k, b_k]$. Таким образом, отрезок $[a_k, b_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности (x_n) и его длина равна $(b_1 - a_1)/2^{k-1}$. И так далее.

Так как последовательность сегментов $([a_k, b_k])$ — стягивающаяся, то она по теореме Кантора имеет единственную общую точку c. Покажем, что c является предельной точкой последовательности.

Выберем любой член последовательности x_{n_1} в сегменте $[a_1, b_1]$. Выберем элемент x_{n_2} в сегменте $[a_2, b_2]$ так, чтобы номер n_2 был больше номера n_1. Это можно сделать, потому что сегмент $[a_2, b_2]$ содержит бесконечно много членов последовательности, следовательно, среди них обязательно найдётся член последовательности с номером, бо́льшим, чем n_1. По этой же причине в сегменте $[a_3, b_3]$ найдётся член последовательности с номером $n_3 > n_2$. Продолжая этот процесс, на k-м шаге в сегменте $[a_k, b_k]$ выберем член последовательности с номером $n_k > n_{k-1}$ и так далее.

В результате из последовательности (x_n) выделена подпоследовательность (x_{n_k}). Так как $c \in [a_k, b_k]$ и $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, то $|x_{n_k} - c| \le b_k - a_k$. Но $b_k - a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, поэтому и $x_{n_k} - c \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, откуда следует, что $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$. Для завершения доказательства остаётся применить теорему 2.20. ■

Следующее утверждение можно рассматривать как дополнение к теореме Больцано-Вейерштрасса.

Лемма 2.2. *У неограниченной сверху (снизу) последовательности существует подпоследовательность, сходящуюся к* $+\infty$ $(-\infty)$.

Доказательство. Оба утверждения доказываются аналогично. Докажем первое из них, второе рекомендуем читателям провести самостоятельно. Но сначала отметим, что если последовательность неограничена сверху, то после отбрасывания любого конечного числа её первых членов всё равно получится неограниченная последовательность.[1]

Итак, последовательность (x_n) неограничена сверху. Это означает, что какое бы большое M мы ни взяли, неравенство $x_n \le M$ не может выполняться для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Поэтому найдётся член последовательности $x_{n_1} > 1$. Среди членов последовательности с номерами, бо́льшими n_1, найдётся $x_{n_2} > 2$, среди членов последовательности с номерами, бо́льшими n_2 найдётся $x_{n_3} > 3$ и так далее. Продолжив описанный процесс неограничено, получим подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), обладающую свойством: $x_{n_k} > k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, это — искомая подпоследовательность. ■

Доказанная лемма позволяет расширить понятие предельной точки последовательности. Если последовательность неограничена сверху, то к числу её предельных точек будем относить $+\infty$, если последовательность неограничена снизу, то к числу её предельных точек будем относить $-\infty$, а если последовательность неограничена и сверху и снизу, то к числу её предельных точек будем относить либо ∞, либо $+\infty$ и $-\infty$ в зависимости от обстоятельств.

А вместе с расширением понятия предельной точки, объединив доказанную лемму с теоремой Больцано-Вейерштрасса, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.23. *Любая числовая последовательность имеет в* $\overline{\mathbb{R}}$ *или* $\dot{\mathbb{R}}$ *хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Если последовательность неограничена, то предельной точкой является или ∞, или $+\infty$, или $-\infty$. Если же последовательность ограничена, то она имеет предельную точку по теореме Больцано-Вейерштрасса. ■

Введём широко используемые в анализе понятия верхнего и нижнего пределов последовательности.

[1]Если бы "остаток" последовательности был ограничен сверху постоянной M, то, поскольку среди конечного числа отброшенных первых членов найдётся наибольший x_{n_0}, то вся последовательность была бы ограничена сверху бо́льшим из чисел M и x_{n_0}.

Определение 2.13. *Верхним пределом последовательности (x_n) назовём наибольшую из всех её предельных точек, а нижним пределом — наименьшую из её предельных точек. Верхний и нижний пределы последовательности (x_n) обозначают соответственно $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$.*

Если последовательность неограничена сверху, то согласно лемме 2.2 $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, если снизу, то по этой же лемме $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$. Существование верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности не очевидно, ранее на примерах мы видели, что ограниченное множество не всегда содержит наибольший и (или) наименьший элементы.

Теорема 2.24. *Любая ограниченная последовательность имеет нижний и верхний пределы.*

Доказательство. Если последовательность (x_n) ограничена, то и множество $A = \{a\}$ её предельных точек тоже ограничено и, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса, не пусто. Тогда оно по теореме о существовании точных граней у не пустого ограниченного множества (теорема 1.1) имеет точную верхнюю грань $\overline{a} = \sup A$ и точную нижнюю грань $\underline{a} = \inf A$. Докажем, что $\overline{a} \in A$. (Утверждение $\underline{a} \in A$ доказывается аналогично.)

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По свойствам 1 и 2 точной верхней грани (лемма 1.3) найдётся $a \in A$, удовлетворяющая неравенствам $\bar{a} - \varepsilon < a \le \bar{a}$. Положим $\delta = a - (\bar{a} - \varepsilon)$. Так как $a > \bar{a} - \varepsilon$, то $\delta > 0$. Поскольку a — предельная точка, то $U_\delta(a)$ содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). Но $U_\delta(a) \subset U_\varepsilon(\bar{a})$, ибо из определения числа δ следует, что $a - \delta = \bar{a} - \varepsilon,\ \ a + \delta = a + a - (\bar{a} - \varepsilon) = 2a - \bar{a} + \varepsilon \le 2\bar{a} - \bar{a} + \varepsilon = \bar{a} + \varepsilon$. Из доказанного вложения следует, что если $U_\delta(a)$ содержит бесконечно много членов последовательности, то и $U_\varepsilon(\bar{a})$ содержит бесконечно много членов последовательности, то есть, $\bar{a}$ — предельная точка последовательности (x_n).

Итак, доказано, что множество A предельных точек последовательности содержит наибольший элемент, то есть, существование верхнего предела последовательности. ■

Замечание 2.9. *Может показаться, что для доказательства существования конечного верхнего предела достаточно требовать только ограниченности последовательности (x_n) сверху. Однако это не так, потому что если последовательность ограничена только сверху, то у неё может не быть конечных предельных точек. Примером может служить последовательность $(-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots)$, имеющая одну предельную точку $-\infty$. В этом случае в соответствии с определением 2.13 мы должны считать, что $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$, так что и в этом случае верхний предел существует.*

Аналогичная ситуация имеет место и для нижнего предела.

Изучим некоторые свойства верхнего и нижнего пределов последовательности.

Теорема 2.25. *Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\bar{a}$ — её верхний предел, то для любого $\varepsilon > 0$:*

a) *найдётся номер n_0 такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство $x_n < \bar{a} + \varepsilon$;*

b) *найдётся подпоследовательность (x_{n_k}), все элементы которой удовлетворяют неравенству $x_{n_k} > \bar{a} - \varepsilon$.*

2. *Если $\underline{a}$ — её нижний предел, то для любого $\varepsilon > 0$:*

a) *найдётся номер n_0 такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство $x_n > \underline{a} - \varepsilon$;*

b) *найдётся подпоследовательность (x_{n_k}), все элементы которой удовлетворяют неравенству $x_{n_k} < \underline{a} + \varepsilon$.*

Иначе говоря, правее любой ε-окрестности верхнего предела может находиться только конечное число членов последовательности, а в самой окрестности должно содержаться бесконечно много её членов (но не обязательно все, начиная с некоторого номера). Для нижнего предела наоборот: левее любой ε-окрестности может находиться только конечное число членов последовательности, а в самой окрестности должно содержаться бесконечно много её членов.

Доказательство. Обе части теоремы доказываются одинаково. остановимся на доказательстве первой части.

a) Допустим, что это не так. Тогда для некоторого ε_0 найдётся бесконечно много членов последовательности (x_n), удовлетворяющих условию $x_n \geq \overline{a}+\varepsilon_0$. Расположив номера этих членов в порядке возрастания, получим подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), которая в силу своей ограниченности имеет предельную точку a, тоже удовлетворяющую условию $a \geq \overline{a} + \varepsilon_0$.[1] Так как, очевидно, предельная точка подпоследовательности является также и предельной точкой последовательности, то последовательность (x_n) имеет предельную точку a, расположенную правее точной верхней грани $\overline{a}$ множества предельных точек, а это невозможно.

b) По теореме 2.20 найдётся подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), сходящаяся к $\overline{a}$. Отбросим конечное число первых членов, не удовлетворяющих условию $x_{n_k} > \bar{a} - \varepsilon$, и перенумеруем оставшиеся члены подпоследовательности заново. Тогда все члены подпоследовательности (x_{n_k}) будут удовлетворять условию $x_{n_k} > \bar{a} - \varepsilon$. ■

Замечание 2.10. *Если последовательность ограничена сверху, но снизу не ограничена, то она может иметь конечный верхний предел, как, например, последовательность* $\left(2, -2, \dfrac{3}{2}, -3, \ldots, 1 + \dfrac{1}{m}, -m, \ldots\right)$*, у которой верхний предел равен 1, но может и не иметь (см. замечание 2.9).*

Теорема 2.26. *Для любой последовательности (x_n) справедливы равенства:*

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup_{m\geq n}\{x_m\}\right\}; \quad \underline{\lim}\, x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\inf_{m\geq n}\{x_m\}\right\}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Оба равенства доказываются одинаково, поэтому докажем первое.

Пусть $\overline{\lim}\, x_n = \overline{a}$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup\limits_{m\geq n}\{x_m\}\right\} = b$. Нужно доказать, что $\overline{a} = b$. Рассмотрим три случая.

1) $\overline{a} = +\infty$. В этом случае последовательность (x_n) не ограничена сверху и останется неограниченной после отбрасывания любого конечного числа первых членов (см. замечание, сделанное при доказательстве леммы 2.2), поэтому $\sup\limits_{m\geq n}\{x_m\} = +\infty$, значит, и

$$b = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup_{m\geq n}\{x_m\}\right\} = +\infty.$$

2) $\overline{a} = -\infty$. В этом случае для любого положительного числа ε найдётся номер n_0 такой, что $x_n < -\varepsilon$ при $n \geq n_0$.[2] Но тогда при $n \geq n_0$ получим, что $\sup\limits_{m\geq n}\{x_m\} \leq -\varepsilon$, следовательно, и $b = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup\limits_{m\geq n}\{x_m\}\right\} \leq -\varepsilon$. Так как ε можно взять сколь угодно большим, то $b = -\infty$.

[1] Это утверждение есть следствие теорем 2.12 и 2.20.

[2] В противном случае рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве теоремы 2.25, приведут к существованию предельной точки, отличной от $-\infty$.

3) $\overline{a} \neq \pm\infty$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда по первому свойству верхнего предела существует номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство $x_n < \overline{a} + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{m \geq n}\{x_m\} \leq \overline{a} + \varepsilon$ при $n \geq n_0$, поэтому и $b = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup\limits_{m \geq n}\{x_m\} \right\} \leq \overline{a} + \varepsilon$.

По второму свойству верхнего предела найдётся подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), все элементы которой удовлетворяют неравенству $x_{n_k} > \overline{a} - \varepsilon$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $n_k \geq n$, то $\sup\limits_{m \geq n}\{x_m\} \geq x_{n_k} > \overline{a} - \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому и $b = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup\limits_{m \geq n}\{x_m\} \right\} \geq \overline{a} - \varepsilon$.

Итак, $\overline{a} - \varepsilon \leq b \leq \overline{a} + \varepsilon$. Так как ε может быть взято сколь угодно малым, то $\overline{a} = b$. ■

Следующую теорему называют критерием сходимости числовой последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов или первым критерием сходимости числовой последовательности.

Теорема 2.27. *Ограниченная числовая последовательность сходится в том и только том случае, когда её нижний предел равен верхнему, то есть,*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n. \tag{2.10}$$

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы 2.21, определения 2.13 верхнего и нижнего пределов и теоремы 2.24 о их существовании.

Если последовательность (x_n) сходится, то $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ — её единственная предельная точка, следовательно, $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a$.

Если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a$, то a — единственная предельная точка последовательности (x_n), следовательно, все её подпоследовательности, в том числе и она сама, сходятся к a. ■

Роль, которую играет в анализе вводимое ниже понятие фундаментальной последовательности и всё, с ним связанное, трудно переоценить.

Определение 2.14. *Числовую последовательность (x_n) назовём фундаментальной, если она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для любых $m, n \geq n_0$ выполняется неравенство*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Условие Коши часто формулируют следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для любых $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

В эквивалентности обеих формулировок убедиться несложно.

Изучим простейшие, но часто используемые свойства фундаментальных последовательностей.

Лемма 2.3. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Если последовательность (x_n) фундаментальна, то она удовлетворяет условию Коши. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что при $m, n \geq n_0$ будет выполняться неравенство $|x_m - x_n| < 1$. Зафиксируем номер $m \geq n_0$ и воспользуемся известным неравенством $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. Тогда для любого $n \geq n_0$ получим:

$$\big||x_n| - |x_m|\big| \leq |x_n - x_m| < 1\,,$$

откуда следует, что $|x_n| < |x_m| + 1$ для любого $n \geq n_0$.

Положим
$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_m| + 1\}.$$
Непосредственной проверкой убедимся, что $|x_n| \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В самом деле, если $n < n_0$, то $|x_n|$ — один из элементов множества, максимальным элементом которого является M, следовательно, $|x_n| \leq M$. Если же $n \geq n_0$, то $|x_n| < |x_m| + 1 \leq M$. ■

Лемма 2.4. *Если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (x_n) фундаментальна, то найдётся номер n_0 такой, что при $m, n \geq n_0$ выполняется условие $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть (x_{n_k}) — сходящаяся подпоследовательность последовательности (x_n) и её предел равен a. Тогда найдётся номер k_0 такой, что при $k \geq k_0$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Выберем номер n_k так, чтобы он удовлетворял двум условиям: $k \geq k_0$ и $n_k \geq n_0$. Тогда для любого $n \geq n_0$ имеем:
$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
а это означает, что последовательность (x_n) сходится к a. ■

Следующая теорема играет в анализе такую же фундаментальную роль, как теорема о существовании точных граней, теорема о пределе монотонной последовательности, теорема о последовательности стягивающихся сегментов, теорема о существовании предельных точек.

Теорема 2.28 (Критерий Коши)**.** *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность (x_n) сходится к числу a. Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и найдём по $\varepsilon/2$ номер n_0 так, чтобы при $n \geq n_0$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Возьмём теперь любые два номера $m, n \geq n_0$. Тогда
$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
и необходимость доказана.

Достаточность. Если последовательность (x_n) фундаментальна, то по лемме 2.3 она ограничена, поэтому по теореме 2.22 (Больцано-Вейерштрасса) содержит сходящуюся подпоследовательность, следовательно, по лемме 2.4 сходится. ■

Замечание 2.11. *Доказанная теорема не даёт возможности определить, чему равен предел последовательности в случае её сходимости, но зато для установления факта сходимости* (*или расходимости*) *последовательности не привлекается ничего, кроме членов самой последовательности, ибо фундаментальность является внутренним свойством последовательности, зависящим только от её членов и ни от чего больше.*

Пример 2.12. *Пусть a_k $(k \in \mathbb{N})$ — вещественные числа, удовлетворяющие условию $|a_k| \leq q^k$, где $0 < q < 1$. Доказать сходимость последовательности $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.*

Решение. Возьмём произвольные $n, p \in \mathbb{N}$ и составим и оценим разность $x_{n+p} - x_n$.

$$|x_{n+p} - x_n| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| =$$
$$= |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \leq$$
$$\leq q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} < q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} + \ldots = \frac{q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Так как последовательность q^n — бесконечно малая (пример 2.7), то по $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ будет выполняться условие $q^n < \varepsilon(1-q)$. Тогда, если $n \geq n_0$, то

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{q^{n+1}}{1-q} < \varepsilon(1-q) \cdot \frac{1}{1-q} = \varepsilon\,.$$

■

Пример 2.13. *Доказать, что последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, где*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N},$$

расходится.

Решение. Возьмём любые натуральные n и p и рассмотрим разность $x_{n+p} - x_n$. Имеем:

$$x_{n+p} - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right) -$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} >$$
$$> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}\,.$$

Если взять $p = n$, то получим отсюда, что

$$x_{2n} - x_n > \frac{1}{2}\,.$$

Из полученной оценки видно, что если взять $\varepsilon \leq 1/2$, то не существует номера n_0 такого, чтобы при любых $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. (Убедиться в этом можно, взяв $n = p = n_0$.) Следовательно, условие Коши не выполняется, последовательность расходится. ■

2.4 Задачи

1. Доказать, что если последовательность (x_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$, то $\exists\ m \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n > a$ при всех $n \geq m$.

2. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) расходящиеся. Можно ли утверждать, что:
   a) последовательность $(x_n + y_n)$ расходится?
   b) последовательность $(x_n y_n)$ расходится?

3. Пусть последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится. Что можно сказать о сходимости: a) последовательности $(x_n y_n)$; b) последовательности $(x_n + y_n)$?

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{если } n = 2k-1, \\ y_k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} , k \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

5. Пусть (x_n) и (y_n) — бесконечно малые последовательности и $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Может ли последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ быть: a) сходящейся; b) расходящейся; c) бесконечно малой; d) бесконечно большой; e) расходящейся, но ограниченной; f) расходящейся и неограниченной?

6. Пусть (x_n) и (y_n) — бесконечно большие последовательности и $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Может ли последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ быть: a) сходящейся; b) расходящейся; c) бесконечно малой; d) бесконечно большой; e) расходящейся, но ограниченной; f) расходящейся и неограниченной?

7. Пусть последовательность (x_n) сходится. Обязана ли сходиться последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$?

8. Пусть последовательность (x_n) сходится. Доказать, что если последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \in [-1; 1]$.

9. Пусть $l \in [-1; 1]$. Построить сходящуюся последовательность (x_n) такую, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$.

10. Является ли последовательность (y_k) подпоследовательностью последовательности (x_n), если :

$$a)\ x_n = 2n,\ n \in \mathbb{N}, \quad y_k = 2(k + (-1)^{k+1}),\ k \in \mathbb{N};$$

$$b)\ x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \quad y_k = \frac{1}{k - \cos(\pi k)},\ k \in \mathbb{N};$$

$$c)\ x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \quad y_k = \frac{1}{3k - \cos(\pi k)},\ k \in \mathbb{N}?$$

11. Доказать ограниченность последовательностей:

$$a)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k},\ n \in \mathbb{N}; \quad b)\ x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N}; \quad c)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\ n \in \mathbb{N};$$

$$d)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1},\ n \in \mathbb{N}; \quad e)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)},\ n \in \mathbb{N}; \quad f)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\ n \in \mathbb{N};$$

$$g)\ x_n = \sqrt{n^2+1} - n,\ n \in \mathbb{N}; \quad h)\ x_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+1},\ n \in \mathbb{N};$$

$$i)\ x_n = \sqrt[3]{9n - n^3} + \sqrt[3]{9n + n^3},\ n \in \mathbb{N}; \quad j)\ x_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

12. Доказать неограниченность последовательностей:

$$a)\ x_n = \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1},\ n \in \mathbb{N};\quad b)\ x_n = \sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} - n,\ n \in \mathbb{N}.$$

13. Доказать, что из неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

14. Доказать, что последовательность $x_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)},\ n \in \mathbb{N}$, монотонна.

15. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!,\ n \in \mathbb{N}$, возрастает и ограничена.

16. Доказать, что монотонная последовательность сходится, если у неё есть сходящаяся подпоследовательность.

17. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0$.

18. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, расходится.

19. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

20. Доказать, что последовательность (x_n) будет бесконечно малой тогда и только тогда, когда будет бесконечно малой последовательность $(|x_n|)$.

21. Для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$. Доказать.

22. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \geq cy_n$, где $c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

23. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leq cy_n$, где $c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

24. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $|x_n| \geq cy_n$, где $c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

25. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $y_n \geq c$ для всех n, начиная с некоторого. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

26. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leq c$ для всех n, начиная с некоторого. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

27. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $y_n \geq c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

28. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $y_n \le c < 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

29. Пусть (x_n) – ограниченная числовая последовательность. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер m такой, что неравенства $x_n < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon$, $x_n > \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon$ будут выполняться при всех $n \ge m$.

30. Пусть (x_n) и (y_n) ограниченные последовательности. Доказать, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

31. Пусть (x_n) и (y_n) ограниченные последовательности, причём $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n)(\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) \le (\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n)\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n)\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) \le (\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n)(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n).$$

32. Доказать, что если последовательность (x_n) сходящаяся, а (y_n) ограниченная, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

33. Доказать, что если последовательность (x_n) сходящаяся и $x_n \ge 0$, а (y_n) ограниченная, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n)$.

34. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, если $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

35. Отрезком $[a;b]_Q$ рациональных чисел называется множество

$$[a;b]_Q = \{x \in Q : \ a \le x \le b, \ a \in Q, b \in Q\}.$$

Систему $([a_n;b_n]_Q)_{n\in\mathbb{N}}$ отрезков рациональных чисел назовём вложенной, если для любого n выполняется включение

$$[a_{n+1};b_{n+1}]_Q \subset [a_n;b_n]_Q.$$

Справедливо ли утверждение, что пересечение любой системы вложенных отрезков рациональных чисел содержит по крайней мере одно рациональное число? (одно вещественное число?)

36. Справедливо ли следующее утверждение: всякая система вложенных интервалов $((a_n;b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1};b_{n+1}) \subset (a_n;b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет непустое пересечение?

37. Справедливо ли следующее утверждение: всякая система вложенных интервалов $((a_n;b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1};b_{n+1}) \subset (a_n;b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет пустое пересечение?

38. Существует ли система вложенных интервалов $((a_n; b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}) \subset (a_n; b_n),\ n \in \mathbb{N}$, имеющая пустое пересечение?

39. Существует ли система вложенных интервалов $((a_n; b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}) \subset (a_n; b_n),\ n \in \mathbb{N}$, имеющая непустое пересечение?

40. Справедливо ли следующее утверждение: всякая система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, имеет непустое пересечение?

41. Справедливо ли следующее утверждение: всякая система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, имеет пустое пересечение?

42. Существует ли система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, имеющая пустое пересечение?

43. Существует ли система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, имеющая непустое пересечение?

44. Пусть $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Существует ли система вложенных интервалов $((a_n; b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}) \subset (a_n; b_n),\ n \in \mathbb{N}$, для которой справедливо равенство:
a) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) = (a; b)$, если $a_n \neq a,\ b_n \neq b,\ \ n \in \mathbb{N}$; b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) = [a; b]$;
c) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) = [a; b)$; d) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) = (a; b]$?

45. Справедливо ли следующее утверждение: всякая стягивающаяся система вложенных интервалов $((a_n; b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}) \subset (a_n; b_n),\ n \in \mathbb{N}$, и $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, имеет пустое пересечение?

46. Справедливо ли следующее утверждение: всякая стягивающаяся система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, и $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, имеет пустое пересечение?

47. Справедливо ли следующее утверждение: всякая стягивающаяся система вложенных полуинтервалов $((a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $(a_{n+1}; b_{n+1}] \subset (a_n; b_n],\ n \in \mathbb{N}$, и $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, имеет пустое пересечение?

48. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Найдётся ли система вложенных полуинтервалов $([a_n; b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то есть таких, что $[a_{n+1}; b_{n+1}) \subset [a_n; b_n),\ n \in \mathbb{N}$, для которой справедливо равенство $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n) = [a; b]$?

3 Предел и непрерывность функции

3.1 Некоторые сведения о числовых множествах

Прежде, чем начать изучение понятий предела функции, непрерывности функции и связанных с ними свойств функций, введём некоторые понятия и изучим свойства числовых множеств, связанные с этими понятиями.

Пусть X — некоторое множество вещественных чисел.

Определение 3.1. *Точку $a \in \mathbb{R}$ назовём предельной точкой множества X, если любая окрестность точки a содержит бесконечно много элементов множества X.*

Множество предельных точек множества X принято обозначать символом X'.

Замечание 3.1. *Как следует из сформулированного определения, множество, имеющее предельные точки, обязательно бесконечно. На вопрос, всякое ли бесконечное множество имеет предельные точки, ответ будет дан позже.*

Замечание 3.2. *Предельная точка a может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.*

Ниже на примерах мы в этом убедимся, а пока докажем теорему, содержащую утверждение, часто принимаемое за определение предельной точки.

Теорема 3.1. *Для того чтобы точка a была предельной для множества X, необходимо и достаточно, чтобы нашлась последовательность <u>различных</u> элементов множества X, сходящаяся к a.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a — предельная точка множества X. Пусть (ε_n) — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. В каждой ε_n-окрестности точки a выберем по точке x_n множества X. Это можно сделать, потому что каждая окрестность a содержит точки множества X, а поскольку каждая окрестность содержит таких точек бесконечно много, то, отбросив при необходимости уже выбранные точки x_1, x_2, x_{n-1}, точку x_n можно подобрать так, чтобы она отличалась от ранее выбранных. В результате получаем последовательность (x_n), состоящую из различных точек множества X.

Так как $|x_n - a| < \varepsilon_n$, а $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то последовательность $(x_n - a)$ — бесконечно малая, то есть, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Достаточность. Пусть существует последовательность (x_n), сходящаяся к a и состоящая из различных точек множества X. Тогда любая ε-окрестность точки a содержит все члены этой последовательности за исключением некоторого конечного числа первых членов. Другими словами, любая ε-окрестность точки a содержит бесконечно много элементов множества X. ■

Следствие 3.1. *Если точка a не является предельной для множества X, то существует окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, которая не содержит других точек множества X, за исключением, быть может, самой точки a.*

Доказательство. Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что такой окрестности не существует, то есть любая окрестность точки a содержит точку множества X, отличную от a. Возьмём $\varepsilon_1 > 0$. По сделанному предположению найдётся точка $x_1 \in X \cap U_{\varepsilon_1}(a)$, $x_1 \neq a$. Положим $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_1/2; |x_1 - a|\}$. Так как $x_1 \neq a$, то $\varepsilon_2 > 0$. По предположению найдётся точка $x_2 \in X \cap U_{\varepsilon_2}(a)$, $x_2 \neq a$. Кроме того, $x_2 \neq x_1$, поскольку $|x_2 - a| < |x_1 - a|$. Положим $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_2/2; |x_2 - a|\}$. И так далее. Продолжая описанный процесс до бесконечности, получим последовательность (x_n), состоящую из отличных друг от друга точек множества X, сходящуюся к a, так как

$$|x_n - a| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но это по доказанной теореме означает, что a — предельная точко множества X, что противоречит условию. ■

Примеры.

1. $X = [a,\, b],\ b > a$.

Любая точка $c \in [a,\, b]$ является предельной для $[a,\, b]$, так как, очевидно, для любого $c \in [a,\, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(c) \bigcap [a,\, b]$ бесконечно. Если же $c \notin [a,\, b]$, скажем, $c < a$, то, взяв $\varepsilon = a - c$, видим, что $U_\varepsilon(c) \bigcap [a,\, b] = \varnothing$. Таким образом, $[a,\, b]' = [a,\, b]$.

2. $X = (a,\, b),\ b > a$.

Теми же рассуждениями, что и в предыдущей задаче, убеждаемся, что $(a,\, b)' = [a,\, b]$.

3. $X = \mathbb{N}$

Как нетрудно видеть, ε-окрестность любого вещественного числа a при любом $\varepsilon > 0$ может содержать лишь конечное множество натуральных чисел. Таким образом, множество натуральных чисел предельных точек не имеет, то есть, $N' = \varnothing$.

4. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Как следует из определения, конечное множество не может иметь предельных точек. $X' = \varnothing$.

5. $X = \mathbb{Q}$.

Возьмём любое $a \in \mathbb{R}$ и любую $U_\varepsilon(a)$. Согласно следствию из леммы 1.1 она содержит бесконечно много рациональных чисел, следовательно, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

6. $X = \left\{ \dfrac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Как нетрудно видеть, для данного множества единственной предельной точкой является ноль. $X' = \{0\}$.

Теорема 3.2 (Больцано, Вейерштрасс)**.** *Всякое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Так как множество X ограничено, то найдутся постоянные m и M такие, что для всех элементов x множества X выполняется неравенство $m \le x \le M$. Обозначим ради единообразия $m = a_0,\ M = b_0$ и разделим отрезок $[a_0,\ b_0]$ пополам точкой $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Так как множество X бесконечно, то хотя бы один из двух получившихся отрезков содержит бесконечное подмножество множества X. Выберем тот из отрезков, который содержит бесконечное подмножество множества X и обозначим его $[a_1,\ b_1]$. (Если оба отрезка содержат бесконечное бесконечно много элементов множества X, то можно взять любой из них, для определённости — левый.) Далее, рассуждая аналогично предыдущему, разделим выбранный отрезок $[a_1,\ b_1]$ пополам, выберем тот из двух получившихся отрезков, который содержит бесконечное подмножество множества X и обозначим его $[a_2,\ b_2]$.

Описанный процесс может быть продолжен бесконечно, потому что если получен отрезок $[a_k,\ b_k]$, содержащий бесконечное подмножество множества X, то, разделив его пополам точкой $c_k = (a_k + b_k)/2$, получим два отрезка, по крайней мере один из которых содержит бесконечное подмножество множества X. Выберем его и обозначим $[a_{k+1},\ b_{k+1}]$.

В результате получаем последовательность сегментов $[a_k,\ b_k]$, обладающую свойствами:

1) $[a_k,\ b_k] \supset [a_{k+1},\ b_{k+1}]$ (k=1,2,...);

2) $b_k - a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$;

3) каждый из сегментов содержит бесконечное подмножество множества X.

Из первых двух свойств следует, что последовательность сегментов $[a_k,\ b_k]$ — стягивающаяся, поэтому по теореме Кантора (теорема 2.15) существует единственная принадлежащая всем сегментам точка c, являющаяся, как следует из доказательства теоремы, пределом последовательностей левых и правых концов сегментов.

Используя третье свойство, выберем $x_1 \in X \bigcap [a_1,\ b_1]$, затем выберем $x_2 \in X \bigcap [a_2,\ b_2]$ так, чтобы $x_2 \neq x_1$, затем выберем $x_3 \in X \bigcap [a_3,\ b_3]$ так, чтобы $x_3 \neq x_1,\ x_2, \dots$, выберем $x_k \in X \bigcap [a_k,\ b_k]$ так, чтобы выполнялось условие $x_k \neq x_1,\ x_2, \dots,\ x_{k-1}, \dots$. На каждом шаге это можно сделать, потому что каждый из выделенных сегментов содержит бесконечное подмножество множества X, а до этого выбрано только конечное число элементов множества, поэтому каждый сегмент содержит бесконечно много элементов множества X, отличных от уже выбранных.

Рассмотрим выделенную последовательность (x_k) элементов множества X. Так как по построению $a_k \leq x_k \leq b_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, то по теореме о трёх последовательностях (теорема 2.13) имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = c$, то есть, c — предельная точка множества X. ■

Лемма 3.1. *Если множество X не ограничено сверху (снизу), то найдётся последовательность его (различных) элементов, сходящаяся к $+\infty$ $(-\infty)$.*

Доказательство. Отметим, что если множество X не ограничено сверху или снизу, то оно обязательно бесконечно.

Пусть множество X не ограничено сверху. Тогда для любого числа M найдётся $x \in X$, удовлетворяющий условию $x > M$. Следовательно, найдётся $x_1 \in X$ такой, что $x_1 > 1$, найдётся $x_2 \in X$, такой, что $x_2 > 2$ и $x_2 \neq x_1$ (если бы такой элемент не нашёлся, то это означало бы, что $x \leq x_1$ для каждого $x \in X$, а это, в свою очередь, означало бы, что множество X ограничено сверху),..., найдётся $x_k \in X$ такой, что $x_k > k$ и $x_k \neq x_1, x_2, x_{k-1}$ и так далее.

Продолжив описанный процесс неограничено, получим последовательность (x_k), состоящую из различных элементов множества X, которая по построению является бесконечно большой.

Вторая часть леммы доказывается аналогично. ■

Доказанная лемма позволяет расширить понятие предельной точки множества. Если множество X не ограничено сверху, то будем считать, что $+\infty$ — его предельная точка, если снизу, то $-\infty$ будем считать его предельной точкой, а если множество X не ограничено, то его предельной точкой будем считать ∞.

Таким образом, справедливо утверждение, называемое *расширенной теоремой Больцано-Вейерштрасса.*

Теорема 3.3. *Всякое бесконечное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Определение 3.2. *Точку a множества $X \subset \mathbb{R}$ назовём изолированной точкой множества X, если найдётся окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, не содержащая, кроме a, ни одной точки множества X, то есть, $X \bigcap U_\varepsilon(a) = \{a\}$.*

Примеры.

1. Множества $\mathbb{R}$, $(a,\ b)$, $[a,\ b]$, очевидно, изолированных точек не содержат.

2. Множества $\mathbb{N}$, $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $X_2 = \left\{\dfrac{1}{n}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ состоят из изолированных точек.

Относительно $\mathbb{N}$ утверждение очевидно. В случае X_1 положим $\delta = \min\{|x_i - x_j|:\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., m\}$. Тогда, очевидно, $U_\delta(x_i)$ содержит только точку x_i. В случае X_2 возьмём любой элемент множества x_n и положим $\delta_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Тогда, очевидно, окрестность $U_{\delta_n}(x_n)$ содержит только точку x_n.

3. У множества $X = (0,\ 1) \bigcup \{2\} \bigcup (3,\ 4)$ точка $x = 2$ изолированная, остальные — предельные.

Как вытекает из определений предельной и изолированной точек множества $X \subset \mathbb{R}$, возможны только два варианта: либо точка $a \in X$ — изолированная (найдётся её окрестность, в которой нет других точек множества, кроме a), либо предельная (если в каждой её окрестности содержатся точки множества, не совпадающие с a).

Определение 3.3. *Назовём множество $X \subset \mathbb{R}$ замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, то есть, если $X' \subset X$.*

Определение 3.4. *Обозначим символом $\overline{X}$ и назовём замыканием множества $X \subset \mathbb{R}$ множество, образованное путём присоединения к множеству X всех его предельных точек, то есть, $\overline{X} = X \bigcup X'$.*

Саму операцию присоединения к множеству его предельных точек тоже называют замыканием.

Ясно, что для замкнутого множества $X = \overline{X}$, для не замкнутого — $X \subset \overline{X}$.

Примеры

1. Пустое множество $\varnothing$ будем считать замкнутым по определению.

2. Множества $\mathbb{R}$, $[a,\, b]$, $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ — замкнуты.

3. Множества $(a,\, b)$, $\mathbb{Q}$, $X = \left\{ \dfrac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$ не замкнуты.

$\overline{(a,\, b)} = [a,\, b]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{X} = \{0\} \bigcup X$.

Определение 3.5. *Точку a множества $X \subset \mathbb{R}$ назовём внутренней точкой множества, если найдётся окрестность точки a, все точки которой принадлежат множеству X.*

Определение 3.6. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовём открытым, если все его точки — внутренние.*

Примеры.

1. Пустое множество $\varnothing$ будем считать открытым по определению.

2. $\mathbb{R}$, $(-\infty,\, a)$, $(a,\, +\infty)$, $(a,\, b)$ $(a < b)$ — открытые множества.

Покажем, что интервал $(a,\, b)$ — открытое множество, тогда открытость остальных множеств станет очевидной. Пусть x — любая точка интервала $(a,\, b)$. Тогда $a < x < b$, поэтому $\delta = \min\{x-a,\, b-x\} > 0$. Очевидно, $U_\delta(x) \subset (a,\, b)$, поэтому точка x — внутренняя точка интервала $(a,\, b)$. Так как все точки интервала $(a,\, b)$ являются внутренними, то, по определению, интервал $(a,\, b)$ — открытое множество.

3. Множества $[a,\, b]$, $(-\infty,\, a]$, $[a,\, +\infty)$ не являются открытыми.

Это утверждение следует из того, что точка a не является внутренней для каждого из множеств, ибо любая её окрестность содержит точки, не принадлежащие множеству.

4. Множество $\mathbb{Q}$ не является открытым.

Ни одна точка множества $\mathbb{Q}$ не является внутренней, потому что в силу леммы 1.1 в любой окрестности любого вещественного, следовательно, и любого рационального числа содержатся как рациональные, так и иррациональные числа.

Определение 3.7. *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$. Обозначим символом CX (или $C_{\mathbb{R}}X$) и назовём дополнением множества X (до $\mathbb{R}$) разность $\mathbb{R} \setminus X$.*

Примеры.

1. $C\mathbb{R} = \varnothing$, $C\varnothing = \mathbb{R}$.

2. $C\mathbb{Q} = \mathbb{J}$ (множество иррациональных чисел).

3. $C[a,\, +\infty) = (-\infty,\, a)$, $C(a,\, +\infty) = (-\infty,\, a]$.

Замкнутые и открытые множества связаны между собой следующим утверждением.

Теорема 3.4. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение CX открыто.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество X замкнуто и a — любая точка, не принадлежащая X. Так как X замкнуто, то по следствию из теоремы 3.1 a не может быть его предельной точкой. Следовательно, найдётся окрестность $U_\delta(a)$, не содержащая точек множества X, то есть, $U_\delta(a) \subset CX$, а это означает, что a — внутренняя точка множества CX. Итак, все точки множества CX — внутренние, следовательно, CX — открытое множество.

Достаточность. Пусть множество CX открыто. Тогда все его точки — внутренние, то есть, имеют окрестность, в которой нет точек множества X. Но это означает, что ни одна точка a, не принадлежащая множеству X, не может быть предельной для него, следовательно, каждая предельная точка множества X принадлежит множеству X, то есть, множество X замкнуто. ■

Примеры.

1. $C\mathbb{R} = \varnothing$. Множество $\mathbb{R}$ одновременно и замкнутое, и открытое, поэтому и пустое множество принято считать и открытым и замкнутым, чтобы не делать оговорок в доказанной теореме.

2. $C\mathbb{Q} = \mathbb{J}$. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не является ни открытым, ни замкнутым, поэтому и множество иррациональных чисел $\mathbb{J}$ ни замкнуто, ни открыто.

Определение 3.8. *Пусть даны числовые множества X и G_λ $(\lambda \in \Lambda)$, где Λ — произвольный набор индексов. Систему множеств $\{G_\lambda\}$ назовём покрытием множества X, если $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, другими словами, если для каждого $x \in X$ найдётся $\lambda \in \Lambda$ такое, что $x \in G_\lambda$.*

Покрытие будем называть открытым, если все множества G_λ — открытые.

Покрытие будем называть конечным, если множество Λ — конечное.

Примеры

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество, $m = \inf X$, $M = \sup X$. Тогда отрезок $[m; M]$ — покрытие множества X.

2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество. Для каждого $x \in X$ определим $\delta_x > 0$ и построим интервал $G_x = (x - \delta_x; x + \delta_x)$. Система интервалов $\{G_x : \ x \in X\}$ — открытое покрытие множества X.

3. Рассмотрим интервал $(0; 1)$ и систему интервалов $\left(\dfrac{1}{n}; 1\right)$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как для каждого $x \in (0; 1)$ найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{n} < x$, то $x \in \left(\dfrac{1}{n}; 1\right)$, следовательно, система интервалов $\left\{\left(\dfrac{1}{n}; 1\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ образует открытое покрытие интервала $(0; 1)$.

Теорема 3.5 (Гейне, Борель)**.** *Из любого открытого покрытия сегмента $[a; b]$ можно выделить конечное покрытие.*

Доказательство. Необходимо доказать, что если система множеств $\{G_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ образует покрытие сегмента $[a; b]$, то из этой системы можно выделить конечный набор множеств $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots, G_{\lambda_l}$, тоже образующий покрытие сегмента $[a; b]$.

Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдётся такое покрытие $\{G_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ сегмента $[a; b]$, из которого конечного покрытия выделить нельзя.

Разделим сегмент $[a;\, b]$ пополам точкой $c = (a+b)/2$. Если из системы множеств $\{G_\lambda\}$ нельзя выделить конечного покрытия сегмента $[a;\, b]$, то нельзя выделить и конечного покрытия по крайней мере одного из сегментов $[a;\, c]$ или $[c;\, b]$, потому что в противном случае объединение конечных покрытий этих сегментов составляло бы конечное покрытие всего сегмента $[a;\, b]$. Возьмём тот из двух сегментов, который не имеет конечного покрытия, и обозначим его $[a_1;\, b_1]$ (если конечного покрытия не имеют оба сегмента, то можно взять любой). Разделим сегмент $[a_1;\, b_1]$ пополам точкой $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. По той же причине, что и выше, для одного из получившихся сегментов, $[a_1;\, c_1]$ или $[c_1;\, b_1]$, не существует конечного покрытия множествами из системы $\{G_\lambda\}$. Возьмём тот из них, для которого конечного покрытия не существует, обозначим его $[a_2;\, b_2]$, разделим пополам точкой $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ и так далее.

В результате бесконечного продолжения описанного процесса мы получим стягивающуюся последовательность сегментов

$$[a;\, b] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots \supset [a_k;\, b_k] \supset \ldots,$$

которая по теореме Кантора (теорема 2.15) имеет единственную общую точку x_0. Так как точка x_0 принадлежит сегменту $[a;\, b]$, а система $\{G_\lambda\}$ образует покрытие сегмента $[a;\, b]$, то найдётся множество G_{λ_0}, содержащее точку x_0. Множество G_{λ_0} — открытое, поэтому найдётся окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, содержащаяся в G_{λ_0}. Так как длины выделенных сегментов $[a_k;\, b_k]$, равные $(b-a)/2^k$, стремятся к нулю при $k \to \infty$, то найдётся сегмент $[a_{k_0};\, b_{k_0}]$, длина которого будет меньше δ. Так как точка $x_0 \in [a_{k_0};\, b_{k_0}]$, то расстояние от неё до каждого из концов сегмента $[a_{k_0};\, b_{k_0}]$ не превосходит длины сегмента, то есть меньше δ, а радиус окрестности $U_\delta(x_0)$ равен δ, поэтому

$$[a_{k_0};\, b_{k_0}] \subset U_\delta(x_0) \subset G_{\lambda_0},$$

то есть сегмент $[a_{k_0};\, b_{k_0}]$ покрывается одним множеством из системы $\{G_\lambda\}$, в то время как по построению ни для одного из выделенных сегментов $[a_k;\, b_k]$ конечного покрытия множествами из системы $\{G_\lambda\}$ не существует.

Получено противоречие. Теорема доказана. ■

Следствие 3.2. *Если $F \subset \mathbb{R}$ — ограниченное замкнутое множество, то из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.*

Доказательство. Так как множество F ограничено, то существует такой сегмент $[a;\, b]$, что $F \subset [a;\, b]$. Пусть система множеств $\{G_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ — открытое покрытие множества F. Если система $\{G_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ не образует покрытия сегмента $[a;\, b]$, то добавим к ней множество $\widetilde{G} = CF = \mathbb{R} \setminus F$. Множество $\widetilde{G}$ — открытое как дополнение замкнутого множества (теорема 3.4), не содержит точек множества F, следовательно, содержит все те точки сегмента $[a;\, b]$, которые не принадлежат F, поэтому система множеств $\{G_\lambda\} \bigcup \widetilde{G}$ является открытым покрытием сегмента $[a;\, b]$. По доказанной теореме из него можно выделить конечное покрытие сегмента $[a;\, b]$, а значит, и множества F. Если в это покрытие входит множество $\widetilde{G}$, то удалим его, так как оно точек множества F не содержит. Останется конечное покрытие множества F. ■

Определение 3.9. *Множество $F \subset \mathbb{R}$ называют компактным множеством, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.*

Если использовать определение компактного множества, то следствие из теоремы Гейне-Бореля можно сформулировать так: *любое ограниченное замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ компактно.*

Замечание 3.3. *Требования ограниченности и замкнутости множества для возможности выделения конечного покрытия существенны. В приведённом выше примере 3 из указанного покрытия интервала конечного покрытия выделить нельзя. Если же множество замкнуто, но не ограничено, то можно построить контрпример, подправив пример 2. Пусть $\delta_x < 1$ для каждого $x \in F$. Тогда объединение любой конечной системы интервалов будет иметь конечную длину и не сможет покрыть множество F.*

3.2 Предел функции

Пусть X — некоторое бесконечное множество вещественных чисел ($X \subset \mathbb{R}$) a — его предельная точка ($a \in X'$) и f — вещественнозначная функция, определённая на множестве X ($f : X \to \mathbb{R}$).

Определение 3.10 (Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ назовём пределом (или предельным значением) функции f в точке a (при x, стремящемся к a), и будем писать*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

если выполняется следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое[1]*, что для всех x из области определения функции f, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ ($\forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$), справедливо неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то говорят также "$f(x)$ сходится (стремится) к b при x, стремящемся к a, и пишут $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$".

Сформулированное определение называют определением предела функции в точке по Коши "на языке $\varepsilon - \delta$". Это же определение можно сформулировать и на "языке окрестностей".

Определение 3.11 (Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ назовём пределом (или предельным значением) функции f в точке a (при x, стремящемся к a), и будем писать*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b,$$

если выполняется следующее условие: для любой окрестности $U(b)$ точки b найдётся окрестность $U(a)$ точки a такая, что для всех x из области определения функции f, принадлежащих $\overset{\circ}{U} (a)$, значение функции $f(x)$ принадлежит $U(b)$.

Идентичность обоих определений очевидна, если принять во внимание определение окрестности (проколотой окрестности).

Определение 3.12 (Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ назовём пределом (или предельным значением) функции f в точке a (при x, стремящемся к a), и будем писать*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b,$$

если для любой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов множества X такой, что

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a, \quad x_n \neq a \quad (n \in \mathbb{N}),$$

выполняется условие

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} b.$$

[1]Вообще говоря, δ зависит от ε, то есть, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Теорема 3.6. *Определения сходимости по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Необходимо доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Коши, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и по Гейне, и наоборот.

I. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Коши. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (a) \bigcap X$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то по найденному δ можно указать такой номер n_0, что при всех $n \geq n_0$ будет выполняться условие $|x_n - a| < \delta$. Но тогда из (3.1) следует, что

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

для любого $n >\geq n_0$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то есть, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне.

II. Пусть, как и прежде, $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : x \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне. Предположим, что число b не является пределом функции f в точке a по Коши. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдётся $x \in X$ и удовлетворяющий условию $0 < |x - a| < \delta$, для которого $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$. В таком случае рассмотрим последовательность положительных чисел δ_n, сходящуюся к нулю, и для каждого n подберём $x_n \in X$ так, чтобы $0 < |x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$. Тогда, очевидно, последовательность $(x_n) \subset X$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, но $f(x_n) \nrightarrow b$. Это невозможно, так как по условию b является пределом $f(x)$ при $x \to a$ по Гейне.

Следовательно, если b является пределом функции f в точке a по Гейне, то оно является пределом функции f в точке a и по Коши. ■

Пример 3.1. *Пусть $X = \mathbb{R}$, $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ любое. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.*

Возьмём любые $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Тогда, если $0 < |x - a| < \delta$, то $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ по Коши.

Пример 3.2. *Пусть $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ и $a \in \mathbb{R}$ — любое. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.*

Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для любого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, имеем: $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ по Коши.

Пример 3.3. *Пусть $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.*

Покажем, что при $x \to 0$ функция $\sin\dfrac{1}{x}$ предела не имеет. Используем определение предела функции по Гейне. Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{\pi/2 + \pi n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, но последовательность $f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$ предела не имеет.

Пример 3.4. *Пусть $X = [0,\ 1]$ и D — функция Дирихле (см. (1.15)).*

Покажем, что функция Дирихле ни в одной точке a отрезка $[0,\ 1]$ предела не имеет, используя определение предела по Гейне.

Пусть (x'_n) — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к a, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $D(x'_n) = 1 \to 1$.

Пусть теперь (x''_n) — последовательность иррациональных чисел, такая что $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $D(x_n) = 0 \to 0$.

То, что по двум последовательностям, сходящимся к a, получаются различные пределы, противоречит определению предела функции по Гейне.

Расширим понятие предела функции в точке, введя односторонние пределы, бесконечные пределы, предел в бесконечно удалённой точке.

Односторонние пределы

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ и любая левосторонняя окрестность $\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a) = (a-\delta,\ a)$ точки a содержит точки множества X.

Определение 3.13. *Число b будем называть левым пределом (или пределом слева) функции f в точке a и писать*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b = f(a-0),$$

если:
a) по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы для любого $x \in (a-\delta,\ a) \bigcap X$ выполнялось условие $|f(x) - b| < \varepsilon$ (**Коши**);
b) для любой последовательности $(x_n) \subset X$ такой, что $x_n < a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, последовательность $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ (**Гейне**).

Аналогично определяется правый предел. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ и любая правосторонняя окрестность $\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a)$ точки a содержит точки множества X.

Определение 3.14. *Число b будем называть правым пределом (или пределом справа) функции f в точке a и писать*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b = f(a+0),$$

если:
a) по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы для любого $x \in (a,\ a+\delta) \bigcap X$ выполнялось условие $|f(x) - b| < \varepsilon$ (**Коши**);
b) для любой последовательности $(x_n) \subset X$ такой, что $x_n > a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, последовательность $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ (**Гейне**).

Левый и правый пределы функции в точке будем называть односторонними пределами.

Эквивалентность определений односторонних пределов по Коши и по Гейне устанавливается точно так же, как и для обычных пределов.

Если $a \in X'$, то любая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ содержит точки множества X. Но тогда или любая левосторонняя окрестность $\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a)$, или любая правосторонняя окрестность $\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a)$, или обе содержат точки множества X. В таком случае, сравнивая определения предела и односторонних пределов, получаем, что если в точке a существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то в этой точке существует и тоже равен b один из односторонних пределов $f(a+0)$ или $f(a-0)$ или оба. Например, если $X = (c;\, d)$, то $x \to c$ автоматически означает, что $x \to c+0$, следовательно, существование предела и правого предела функции в точке c — одно и то же. Аналогично, в точке d существование предела функции равносильно существованию левого предела.

Нетрудно установить и обратное: если в какой-либо точке существуют оба односторонних предела данной функции и они равны между собой, то в этой точке определён и предел функции, совпадающий с односторонними пределами. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в справедливости этого утверждения.

Однако возможны и иные ситуации.

Пример 3.5.

$$y = sgn\, x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Очевидно, в точке $x = 0$ правый предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$, а левый предел $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -1$. Таким образом, оба односторонних предела в точке $x = 0$ существуют, но различны. Это означает, в частности, что рассматриваемая функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Пример 3.6. $f(x) = E(x) = [x]$.

Так обозначается функция, называемая "целой частью числа x" и определяемая следующим образом. Если x — любое вещественное число и $n \le x < n + 1$, где n — целое, то $E(x) := n$. Другими словами, $E(x)$ есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

Например, $[5] = 5$. $[2{,}104] = 2$, $[-3{,}15] = -4$.

Пусть n — целое число. Тогда $E(x) = n - 1$ при $n - 1 < x < n$, и $E(x) = n$ при $n < x < n + 1$. Поэтому $\lim\limits_{x\to n-0} E(x) = n - 1$, $\lim\limits_{x\to n+0} E(x) = n$.

Пример 3.7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

Очевидно, $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$, как показано выше (пример 3.3), не существует.

Таким образом, в точке $x = 0$ у данной функции один из односторонних пределов существует, а второй — нет.

Бесконечные пределы

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, и $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 3.15. *Будем говорить, что предел функции f в точке a равен бесконечности, и писать*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

если выполняется одно из следующих условий:

a) *для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого x из области определения функции f, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > \varepsilon$ (Коши);*

b) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов множества X, удовлетворяющей условиям $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $x_n \ne a$ $(n \in \mathbb{N})$, последовательность $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ (Гейне).*

Аналогично определяются $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, а также односторонние бесконечные пределы.

Примеры.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

a) Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, если $0 < |x| < \delta$, то

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

b) Покажем, что $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда при $-\delta < x < 0$, так как функция $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $x < 0$ убывает, имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = -\varepsilon.$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда при $0 < |x| < \delta$ имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

Пределы на бесконечности

Пусть X — неограниченное множество.

Определение 3.16. *Будем говорить, что число $b \in \mathbb{R}$ является пределом функции f при $x \to \infty$ и писать $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, если:*

а) *для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого $x \in X$ и удовлетворяющего условию $|x| > \delta$ $(x \in X \bigcap U_\delta(\infty))$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$* (**Коши**);

б) *для любой последовательности $(x_n) \subset X$, такой что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, последовательность $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$* (**Гейне**).

Аналогично определяются $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, включая и те случаи, когда b есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать все эти определения по Коши и по Гейне и доказать их эквивалентность.

Примеры

1. $f(x) = \dfrac{1-2x}{1+x}$, $x \neq -1$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$.

Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём $\delta > 0$ так, чтобы при $|x| > \delta$ выполнялось неравенство $|f(x) - (-2)| < \varepsilon$. Для начала упростим оцениваемое выражение.

$$|f(x) - (-2)| = \left|\frac{1-2x}{1+x} + 2\right| = \frac{3}{|1+x|}.$$

Оценим получившуюся дробь, воспользовавшись второй частью неравенства треугольника: Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $|a-b| \geq |a|-|b|$. В силу этого неравенства $|1+x| = |x-(-1)| \geq |x|-1$, поэтому $\dfrac{3}{|1+x|} \leq \dfrac{3}{|x|-1}$.

Решим неравенство $\dfrac{3}{|x|-1} < \varepsilon$. Так как мы ищем предел на бесконечности, то можно считать, что $|x| > 1$, поэтому имеем $|x| - 1 > \dfrac{3}{\varepsilon}$ или $|x| > \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$. Следовательно, можно положить $\delta = \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$.

Действительно, если взять любой x, удовлетворяющий условию $|x| > \delta$, то будем иметь:

$$|f(x) - (-2)| = \frac{3}{|1+x|} \leq \frac{3}{|x|-1} < \frac{3}{\left(\dfrac{3}{\varepsilon}+1\right)-1} = \varepsilon.$$

2. $f(x) = \log_2 x$ $(x > 0)$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $\log_2 x > \varepsilon$. Так как основание логарифма больше единицы, то это неравенство выполняется при $x > 2^\varepsilon$. Следовательно, можно положить $\delta = 2^\varepsilon$. Тогда для любого $x > \delta$ будет иметь место $f(x) > \varepsilon$.

3. $f(x) = \cos x$.

Покажем, что при $x \to \infty$ данная функция предела не имеет. Используем для этого определение предела функции по Гейне.

Рассмотрим последовательность $x_n = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $x_n \to \infty$, но последовательность $f(x_n) = \cos \pi n = (-1)^n$ расходится. В соответствии с определением предела функции по Гейне функция $f(x) = \cos x$ при $x \to \infty$ предела не имеет.

Критерий Коши существования предела функции

Теорема 3.7. *Пусть X — некоторое бесконечное множество вещественных чисел, точка $a \in X'$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Функция f имеет в точке a конечный предел тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие, называемое условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда, выбрав любое $\varepsilon > 0$ и используя определение предела функции по Коши, по $\varepsilon/2$ подберём $\delta > 0$ так, чтобы для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнялось неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon/2$. Взяв теперь любые $x', x'' \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, имеем:

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) - (f(x'') - b)| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть условие Коши выполняется. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, подберём по нему $\delta > 0$ так, как требуется в условии Коши, и рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \subset X$, такую что $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Поскольку последовательность (x_n) сходится к a и $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, найдётся такой номер n_0, что для любого $n \geq n_0$ будет выполнено условие $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. Но тогда для любых $n, m \geq n_0$ имеем: $x_n, x_m \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, поэтому по условию Коши $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. Последнее означает, что последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна и по критерию Коши для последовательностей (теорема 2.28) является сходящейся, то есть, существует число b такое, что $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

Таким образом, установлен следующий факт: для любой последовательности (x_n) из множества $X\backslash\{a\}$, сходящейся к a, существует число b такое, что $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

Покажем, что число b не зависит от выбора последовательности (x_n). Действительно, пусть (x_n') и (x_n'') — две последовательности из множества $X\backslash\{a\}$, сходящиеся к a, для которых $f(x_n')\xrightarrow[n\to\infty]{} b'$, $f(x_n'')\xrightarrow[n\to\infty]{} b''$. Построим третью последовательность

$$(x_1,x_2,\ldots,x_m,\ldots)=(x_1',x_1'',x_2',x_2'',\ldots,x_n',x_n'',\ldots).$$

Очевидно, эта последовательность также содержится в $X\backslash\{a\}$. Покажем, что она сходится к a. Возьмём любое $\delta>0$. По нему найдутся номера n_0' и n_0'' такие, что при $n\geq n_0'$ и $n\geq n_0''$ выполняются соответственно неравенства $|x_n'-a|<\delta$ и $|x_n''-a|<\delta$. Положим $m_0=2\max\{n_0';n_0''\}$. Тогда, очевидно, при $m\geq m_0$ будем иметь $|x_m-a|<\delta$, и сходимость построенной последовательности к a установлена. По доказанному выше последовательность $(f(x_1'),f(x_1''),f(x_2'),f(x_2''),\ldots,f(x_n'),f(x_n''),\ldots)$ сходится к некоторому $b\in\mathbb{R}$. Но последовательности $(f(x_n'))$, $(f(x_n''))$ являются её подпоследовательностями, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}f(x_n'')=b,$$

то есть $b'=b''=b$.

Итак, существует число b такое, что для любой последовательности (x_n) из множества $X\backslash\{a\}$, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} b$. По определению предела функции по Гейне это означает, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. ■

Замечание 3.4. *Критерий Коши существования предела функции справедлив как для конечной, так и для бесконечно удалённой предельной точки a. Доказательство специально проведено так, чтобы не делать разницы между этими двумя случаями.*

Замечание 3.5. *Критерий Коши существования предела функции справедлив и для односторонних пределов. Чтобы убедиться в этом, достаточно в доказательстве заменить окрестность точки a на соответствующую одностороннюю окрестность.*

Изучим некоторые свойства функций, имеющих предел. Будем предполагать, для упрощения формулировок и доказательств, что a — конечная предельная точка области определения X рассматриваемых функций, а предел обычный, хотя, с соответствующими поправками в формулировках и доказательствах, свойства остаются справедливыми и для бесконечно удалённой предельной точки и для односторонних пределов.

Теорема 3.8 (О сохранении знака). *Пусть $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ и $a\in X'$. Если функция f имеет в точке a конечный, отличный от нуля предел b, то существует такая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, в пределах которой знак $f(x)$ совпадает со знаком b.*

Доказательство. Положим $\varepsilon=|b|$ и, пользуясь определением предела функции по Коши, найдём отвечающее ему δ.

Если $b>0$, то для любого $x\in X\bigcap\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ имеем: $|f(x)-b|<\varepsilon=b$, или $-b<f(x)-b<b$, или $0<f(x)<2b$, или $f(x)>0$.

Если $b<0$, то для любого $x\in X\bigcap\overset{\circ}{U}_\delta(a)$: $|f(x)-b|<\varepsilon=-b$, или $b<f(x)-b<-b$, или $2b<f(x)<0$, или $f(x)<0$.

Таким образом, $\operatorname{sgn}f(x)=\operatorname{sgn}b$ для любого $x\in X\bigcap\overset{\circ}{U}_\delta(a)$. ■

Теорема 3.9. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ и $a \in X'$. Если функция f имеет в точке a конечный предел b, то существует такая окрестность $U(a)$, что функция f ограничена на $X \bigcap U(a)$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1$ и найдём по нему $\delta > 0$, как этого требует определение предела функции по Коши. Тогда для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < 1$ или, по второй части неравенства треугольника, $|f(x)| - |b| \le |f(x) - b| < 1$, откуда следует, что $|f(x)| < |b| + 1$.

Положим $M = |b| + 1$, если $a \notin X$, и $M = \max\{|f(a)|; |b| + 1\}$, если $a \in X$. Очевидно, что для любого $x \in X \bigcap U_\delta(a)$ имеет место $|f(x)| \le M$. ■

Теорема 3.10. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ и $a \in X'$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \ne 0$, то существует проколотая окрестность точки a такая, что функция $\dfrac{1}{f}$ ограничена на $X \bigcap \overset{\circ}{U} (a)$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ и найдём $\delta > 0$, чтобы для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$ выполнялось неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда по неравенству треугольника

$$|b| - |f(x)| \le |b - f(x)| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Отсюда следует, что $|f(x)| > \dfrac{2}{|b|}$ или $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \dfrac{2}{|b|} = M$ всюду в $X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$. ■

Замечание 3.6. *Если функция f определена в точке a, причём $f(a) \ne 0$, то, выбрав $M = \max\left\{\dfrac{2}{|b|}; \dfrac{1}{|f(a)|}\right\}$, получаем, что функция $\dfrac{1}{f}$ ограничена в $X \bigcap U_\delta(a)$.*

Теорема 3.11. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ и $a \in X'$. Если функции f и g имеют конечные пределы при $x \to a$, то сумма, разность, произведение и частное (при дополнительных условиях: $g(x) \ne 0$ $(x \in X)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \ne 0$) этих функций тоже имеют конечный предел при $x \to a$. При этом:*

$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Доказательство. Все четыре утверждения доказываются совершенно одинаково с использованием определения предела функции по Гейне и соответствующего утверждения для последовательностей. Остановимся на доказательстве последнего из них.

Обозначим $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Возьмём произвольную последовательность $(x_n) \subset X$, $x_n \to a$, $x_n \ne a$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда по условию последовательности $(f(x_n))$ и $(g(x_n))$ сходятся к b и c соответственно. Применяя к этим последовательностям теорему 2.11 (убедившись предварительно в выполнении её условий), получаем, что последовательность $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ сходится и имеет предел $\dfrac{b}{c}$. Снова применяя определение предела функции по Гейне, получаем требуемое утверждение. ■

Следствие 3.3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть если c — постоянная, то $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно в качестве функции g взять функцию $g(x) \equiv c$ $(x \in X)$.

Пример 3.8. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ *для любых* $a \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$.

Выше было показано, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$, поэтому

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot x = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a \cdot a = a^2.$$

По индукции

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a}(x^{n-1} \cdot x) = a^{n-1} \cdot a = a^n.$$

Пример 3.9. *Если* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *— многочлен, то* $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Пример 3.10. *Если* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены, и* $Q(a) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} R(x) = R(a)$.

По теореме о сохранении знака (теорема 3.8) найдётся окрестность $U(a)$, в которой $Q(x) \neq 0$. Считая $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ и применяя теорему о пределе частного и результат предыдущего примера, получаем требуемое утверждение.

Теорема 3.12 (Предельный переход в неравенстве)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$ *— бесконечное множество,* $f, g : X \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ *и функции* f *и* g *имеют пределы при* $x \to a$ *(может быть, бесконечные). Если существует такая окрестность* $U(a)$, *что* $f(x) \leq g(x)$, $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Замечание 3.7. *Как и в случае последовательностей, наличие строгого неравенства между функциями не гарантирует строгого неравенства между их пределами.*

Теорема 3.13 (Принцип двустороннего ограничения)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$ *— бесконечное множество,* $f, g, h : X \in \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Если функции* f, g, h *связаны на* $X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$ *неравенством* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Теоремы 3.12, 3.13 доказываются точно так же, как и теорема 3.11. Рекомендуем читателям провести эти доказательства.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Из определения синуса и того факта, что хорда меньше стягиваемой ею дуги окружности, следует неравенство

$$0 < |\sin x| < |x| \ (x \neq 0). \tag{3.3}$$

Используя определение предела функции по Коши и полагая $\delta = \varepsilon$, получаем, что если $|x - 0| = |x| < \delta$, то $|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \delta = \varepsilon$, что и требуется.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Используя формулу $\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ и оценку (3.3), проведём оценку косинуса, считая $|x| < \pi/2$.

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Поэтому

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1\ (x\neq 0). \tag{3.4}$$

Так как крайние части в этом неравенстве при $x\to 0$ имеют одинаковый предел 1, то, используя принцип двустороннего ограничения, получаем требуемое.

Теорема 3.14. (**Первый замечательный предел**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический круг. Пусть сначала $0<x<\pi/2$. Отложим точки $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(\cos x;\sin x)$, $C(1;\operatorname{tg} x)$ (точка B — конец радиуса-вектора OB, составляющего угол x с осью абсцисс; точка C лежит на его продолжении). Сравним площади образовавшихся треугольника OAB, сектора OAB и треугольника OAC. Очевидно,

$$S_{\triangle OAB}<S_{сек.OAB}<S_{\triangle OAC}.$$

Вычислим площади каждой из фигур:

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\,OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}\,\sin x;$$

$$S_{сек.OAB}\left(=\frac{1}{2}\,R^2\alpha\right)=\frac{1}{2}\,x;$$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\,OA\cdot AC=\frac{1}{2}\,\operatorname{tg} x.$$

Подставим вычисленные значения площадей в предыдущее неравенство.

$$\frac{1}{2}\,\sin x<\frac{1}{2}\,x<\frac{1}{2}\,\operatorname{tg} x.$$

Сократим на общий множитель и перейдём к обратным величинам.

$$\frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}.$$

Умножив неравенство на $\sin x$ ($\sin x>0$), получим окончательно

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) установлено для $0<x<\pi/2$, но так как все его части — чётные функции, то оно справедливо и для $-\pi/2<x<0$. Используя принцип двустороннего ограничения и уже установленный факт $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, получаем из него требуемое утверждение. ■

Пример 3.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Сначала проведём анализ. Так как $\cos 2x\to 1$ при $x\to 0$ (см. пример 2 к теореме 3.13), то предел числителя равен нулю. Знаменатель тоже стремится к нулю. Следовательно, данное выражение есть неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$.

Преобразуем выражение, используя известную тригонометрическую формулу, затем, используя теорему о пределе произведения и первый замечательный предел, вычислим предел данного выражения. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

3.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть, как и прежде, X — некоторое бесконечное числовое множество, a — его предельная точка (может быть, бесконечно удалённая). Все рассматриваемые функции будем считать определёнными на множестве X.

Определение 3.17. *Функцию α будем называть бесконечно малой (б.м.) при $x \to a$ (в окрестности точки a), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Определение 3.18. *Функцию α будем называть бесконечно большой (б.б.) при $x \to a$ (в окрестности точки a), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \infty$.*

Изучим некоторые свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Теорема 3.15. *Для того чтобы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - b$ была бесконечно малой при $x \to a$.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно расписать определения предела функции и бесконечно малой функции по Коши и сравнить их, как это было проделано в аналогичной теореме для последовательностей (см. теорему 2.3) ∎

Теорема 3.16. *Сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.*

Доказательство. Так как α и β — бесконечно малые при $x \to a$ функции, то

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \beta(x) = 0.$$

Но тогда по теореме 3.11

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x\to a} \alpha(x) + \lim_{x\to a} \beta(x) = 0,$$

что и доказывает теорему. ∎

Теорема 3.17. *Произведение бесконечно малой и ограниченной в окрестности точки a функций есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть функции $\alpha, f : X \to \mathbb{R}$, α — бесконечно малая при $x \to a$, а f — ограниченная в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$ функции. Необходимо доказать, что функция αf — бесконечно малая при $x \to a$.

Так как f ограничена в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$, то существует постоянная M, такая что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$. Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и по числу ε/M подберём δ_2 так, чтобы для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)$ выполнялось неравенство $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ будем иметь

$$|\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ∎

Следствие 3.4. *Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на постоянную есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.*

Постоянную M можно рассмотреть как функцию, принимающую во всех точках множества X постоянное значение M и применить доказанную теорему.

Следствие 3.5. *Произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.*

Доказательство. Пусть функции $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to a$. Как имеющая предел, функция β по теореме 3.9 ограничена в окрестности точки a. Но тогда по доказанной теореме произведение $\alpha\beta$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция. ■

Теорема 3.18. *Произведение двух бесконечно больших в окрестности точки a функций есть бесконечно большая в окрестности точки a функция.*

Доказательство. Пусть функции $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ — бесконечно большие при $x \to a$. Это означает, что выбрав произвольно и зафиксировав $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ будут выполняться неравенства $|\alpha(x)| > \sqrt{\varepsilon}$, $|\beta(x)| > \sqrt{\varepsilon}$. Но тогда для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ будем иметь:

$$|\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| > \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.19. *Если α — бесконечно большая при $x \to a$ функция, то существует окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что на множестве $X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$ определена функция $1/\alpha$, являющаяся бесконечно малой при $x \to a$. Наоборот, если α — бесконечно малая при $x \to a$ и в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a не обращается в ноль, то на $X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$ определена функция $1/\alpha$, являющаяся бесконечно большой при $x \to a$.*

Доказательство. Если α — бесконечно большая при $x \to a$ функция, то по $\varepsilon = 1$ можно указать такую окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$, что $|\alpha(x)| > 1$, если $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$. На указанном множестве $\alpha(x) \neq 0$, поэтому на нём определена функция $1/\alpha$. Покажем, что она является бесконечно малой при $x \to a$. Для этого выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и по числу $1/\varepsilon$ найдём $\delta > 0$ такое, что $|\alpha(x)| > 1/\varepsilon$ при $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. (Так как при необходимости δ можно уменьшить, то можно считать, что $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \subset \overset{\circ}{U}(a)$.) Тогда при $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ функция $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} < \varepsilon$, из чего следует, что она является бесконечно малой в окрестности точки a.

Обратно, если α в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a не обращается в ноль, то функция $1/\alpha$ определена на множестве $X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$. То, что она бесконечно большая при $x \to a$, доказывается совершенно аналогично. ■

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть, по прежнему, $X \subset \mathbb{R}$ — бесконечное множество, $a \in X'$. Все рассматриваемые на X функции будем предполагать б.м. или б.б. при $x \to a$.

Определение 3.19. *Будем говорить "$\alpha(x)$ есть <u>о маленькое</u> по отношению к $\beta(x)$ при $x \to a$" и писать $\alpha(x) = o(\beta(x))$ $(x \to a)$, если*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

В случае бесконечно малых величин (б.м.в.) говорят также, что $\alpha(x)$ при $x \to a$ убывает быстрее или имеет больший (более высокий) порядок малости по сравнению с $\beta(x)$, а в случае бесконечно больших величин (б.б.в.), что $\alpha(x)$ при $x \to a$ возрастает медленнее или имеет меньший (более низкий) порядок роста по сравнению с $\beta(x)$.

Пример.

Пусть $\alpha(x) = 2x + x^2$, $\beta(x) = x^2 + 3x^3$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3x^3}{2x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+3x)}{x(2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+3x)}{2+x} = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + x^2}{x^2 + 3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2/x+1)}{x^3(1/x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x+1}{x(1/x+3)} = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta(x) = o(\alpha(x))$ $(x \to 0)$ и $\alpha(x) = o(\beta(x))$ $(x \to \infty)$.

Рассмотренный пример показывает, что сравнительное поведение функций в окрестностях различных предельных точек может быть разным, поэтому указание предельной точки, в окрестности которой производится их сравнение, обязательно.

Определение 3.20. *Будем говорить "$\alpha(x)$ есть о большое по отношению к $\beta(x)$ при $x \to a$" и писать $\alpha(x) = O(\beta(x))$ $(x \to a)$, если существуют постоянная M и окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такие, что для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство*

$$|\alpha(x)| \le M|\beta(x)|.$$

В этом случае говорят также, что в окрестности точки a функция α убывает не медленнее, чем функция β, если она б.м., или возрастает не быстрее, чем функция β, если она б.б.

Пример.

Пусть $\alpha(x) = x\sin(1/x)$ $(x \ne 0)$, $\beta(x) = x$.

Так как $|\alpha(x)| = |x\sin(1/x)| \le |x| \cdot |\sin(1/x)| \le 1 \cdot |x| = 1 \cdot |\beta(x)|$, то, по определению, $x\sin(1/x) = O(x)$ $(x \to 0)$.

Определение 3.21. *Будем говорить "$\alpha(x)$ слабо эквивалентна $\beta(x)$ при $x \to a$" и писать $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ $(x \to a)$, если одновременно $\alpha(x) = O(\beta(x))$ $(x \to a)$ и $\beta(x) = O(\alpha(x))$ $(x \to a)$.*

Если функции α и β слабо эквивалентны при $x \to a$, то говорят, что они имеют при $x \to a$ одинаковый порядок убывания (возрастания).

Предложение 3.1. *$\alpha(x) \asymp \beta(x)$ $(x \to a)$ тогда и только тогда, когда существует $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и постоянные m, M $(0 < m < M < +\infty)$ такие, что для любого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ имеют место неравенства*

$$m|\beta(x)| \le |\alpha(x)| \le M|\beta(x)|. \tag{3.6}$$

Доказательство. Если $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ $(x \to a)$, то, согласно определению, в некоторой проколотой окрестности точки a выполняются оба неравенства:

$$|\alpha(x)| \le M_1|\beta(x)|, \quad |\beta(x)| \le M_2|\alpha(x)|.$$

Так как $M_1, M_2 > 0$ (во всяком случае, их всегда можно увеличить), то, полагая $M = M_1$ и $m = \dfrac{1}{M_2}$, получаем (3.6).

Обратное очевидно. ■

Пример.

Пусть $\alpha(x) = x + \sin x$, $\beta(x) = x$.

Так как для $0 < |x| < \pi/2$ выполняются неравенства $0 < |\sin x| < |x|$, то

$$|x| < |x + \sin x| < 2|x|$$

(при оценке учли, что x и $\sin x$ для рассматриваемых значений x имеют одинаковый знак), следовательно, $x + \sin x \asymp x$ при $x \to 0$.

Определение 3.22. *Будем говорить "$\alpha(x)$ эквивалентна $\beta(x)$ при $x \to a$" и писать $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$, если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Предложение 3.2. *Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$, то $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ $(x \to a)$.*

Доказательство. По условию, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и найдём по нему такое $\delta > 0$, чтобы в $X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$. Раскроем модуль и произведём другие очевидные упрощения.

$$-\frac{1}{2} < \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 < \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2} < \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} < \frac{3}{2};\quad \frac{1}{2}|\beta(x)| < |\alpha(x)| < \frac{3}{2}|\beta(x)|$$

всюду в $X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$, а это и означает, что $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ $(x \to a)$. ■

Обратное утверждение неверно.

Пример.

$x + \sin x \asymp x$ при $x \to 0$ (см. предыдущий пример), однако $x + \sin x \not\sim x$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 \neq 1.$$

Примеры.

1) $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$.

Это предложение есть перефразировка теоремы 3.13 (первый замечательный предел).

2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$.

Из решения примера 3.11 следует, что $1 - \cos 2x \sim 2x^2$ при $x \to 0$. Заменив $2x$ на x, получаем требуемое утверждение.

3) $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

4) $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.

Сделаем замену $\arcsin x = y$ или $x = \sin y$. Из (3.6) следует, что

$$y \to 0 \Leftrightarrow x \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Теорема 3.20. *При раскрытии неопределённостей вида* $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ *можно множители, содержащиеся в выражении заменять эквивалентными величинами.*

Слова "можно заменить" означают, что в случае существования предела его величина не изменится, а если предел не существует, то и после произведённой замены он существовать не будет.

Доказательство. 1. Пусть α, β, γ — б.м. в окрестности точки a функции, $\alpha \sim \gamma$ при $x \to a$ и пусть существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}.$$

2. В случае, когда α, β, γ — б.б. в окрестности точки a функции, а остальные условия сохраняются, доказательство совершенно аналогично.

3. Пусть α, γ — б.м., а β — б.б. в окрестности точки a функции, $\alpha \sim \gamma$ при $x \to a$ и пусть существует $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)\cdot\beta(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)\beta(x) = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\gamma(x)\beta(x) =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\lim_{x\to a}\gamma(x)\beta(x) = 1\cdot\lim_{x\to a}\gamma(x)\beta(x).$$

4. Случай, когда α, γ — б.б., а β — б.м. в окрестности точки a функции, аналогичен предыдущему. ■

Пример 3.12. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

Нам известно, что $1-\cos 4x \sim \dfrac{(4x)^2}{2} = 8x^2$, а $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ при $x \to 0$. Используя доказанную теорему, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{9x^2} = \frac{8}{9}.$$

Замечание 3.8. *Нельзя(!) при вычислении предела заменять эквивалентными величинами слагаемые. Это может привести к неправильному результату.*

Пример 3.13. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

1. Правильное решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}.$$

2. Неправильное решение (замена в числителе $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ эквивалентными величинами).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3} = 0.$$

Символы "o", "O", "$\asymp$", "$\sim$" называют символами Ландау. Они обладают многочисленными свойствами, перечисленными в конце главы в разделе "Задачи". Советуем читателям ознакомиться с ними. В дальнейшем свойства символов Ландау будут использоваться при необходимости как известные.

В заключение отметим, что бывают величины, не сравнимые с помощью какого-либо из символов Ландау.

Пример. Пусть $\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\beta(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Обе они — бесконечно малые при $x \to \infty$. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что их нельзя сравнить с помощью символов Ландау.

3.4 Непрерывные функции

Пусть X — бесконечное числовое множество, a — принадлежащая ему (!) предельная точка, функция f определена на множестве X.

Определение 3.23. *Назовём функцию f непрерывной в точке a множества X, если выполняется следующее условие:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{3.7}$$

Так как a можно записать в виде $a = \lim\limits_{x \to a} x$, то формулу (3.7) можно переписать в виде

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x). \tag{3.8}$$

Таким образом, если функция f непрерывна в точке a, то знак предела можно занести под знак функции, или, другими словами, можно поменять местами операции предельного перехода и вычисления значения функции.

Если воспользоваться определением предела функции в точке по Коши, то определение непрерывной в точке функции приобретёт следующий вид.

Определение 3.24. *Будем называть функцию f непрерывной в точке a множества X, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \in X \bigcap U_\delta(a)$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Следует отметить, что, в отличие от определения предела функции в точке, в определении непрерывности функции нет необходимости исключать саму точку a, так как неравенство (3.9) в точке a, очевидно, тоже выполняется.

Если же использовать определение предела функции в точке по Гейне, то определение непрерывности функции в точке будет выглядеть так.

Определение 3.25. *Назовём функцию f непрерывной в точке a множества X, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$ такой, что $x_n \to a$ $(n \in \mathbb{N})$ последовательность*

$$f(x_n) \to f(a). \tag{3.10}$$

И в этом определении нет необходимости требовать, чтобы все члены последовательности (x_n) были отличны от a, поскольку если некоторые члены последовательности (x_n) будут равны a, то соответствующие члены последовательности $(f(x_n))$ будут равны $f(a)$, что отнюдь не помешает сходимости последовательности $(f(x_n))$ к $f(a)$. , Поэтому в дальнейшем, употребляя определение непрерывности функции в точке по Коши или по Гейне, соответствующих оговорок относительно точки a делать не будем.

Отметим ещё, что определения непрерывности функции в точке по Коши и по Гейне формально выполняются и в том случае, когда a — изолированная точка множества X. Действительно, если a — изолированная точка, то существует её δ-окрестность, в которой других точек множества X нет. Поэтому, если $|x-a|<\delta$, то $x=a$ и $|f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Если же $x_n \to a$, то, начиная с некоторого номера n_0 $|x_n - a| < \delta$, то есть, $x_n = a$, $f(x_n) = f(a)$, следовательно, $f(x_n) \to f(a)$.

Договоримся поэтому считать любую функцию непрерывной в каждой изолированной точке множества X, на котором она определена, и, говоря о непрерывности функции в точке a, не упоминать без необходимости, является точка a предельной или же изолированной.

Пусть для точки a выполнены условия, оговоренные в определениях односторонних пределов функции f (или одного из них).

Определение 3.26. *Будем говорить, что функция f непрерывна в точке a слева (справа), если левый (правый) предел функции в точке a существует и равен $f(a)$, то есть,*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) := f(a-0) \left(\lim_{x\to a} f(x) := f(a+0)\right) = f(a).$$

Из связи между пределом функции в точке и односторонними пределами вытекает следующее утверждение: если для точки a выполнены условия существования обоих односторонних пределов, то функция f непрерывна в точке a в том и только том случае, если она непрерывна в этой точке и слева и справа, то есть, если $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$, а если только левого (правого), то функция f непрерывна в точке a в том и только том случае, если она непрерывна в этой точке слева (справа), то есть, если $f(a-0) = f(a)$ $(f(a+0) = f(a))$.

Определение 3.27. *Будем говорить, что функция f непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X.*

Пример 3.14. *Функция $f(x) \equiv c$ непрерывна на любом множестве X, функции x^n, где $n \in \mathbb{N}$, $P(x)$, $R(x)$ непрерывны всюду в естественной области определения.*

Это следует из примеров 3.1, 3.8, 3.9, 3.10.

Пример 3.15. *Функция $sgn\, x$ непрерывна во всех точках вещественной оси, кроме точки $x = 0$, в которой все три числа: $f(0)$, $f(-0)$ и $f(+0)$ различны (см. пример 3.5).*

Пример 3.16. *Функция Дирихле $D(x)$ не является непрерывной ни в одной точке области определения, так как не имеет предела (см. пример 3.4).*

Пример 3.17. *На отрезке $[0;\ 1]$ зададим функцию f следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1-x, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна только в точке $a = 0,5$, а в остальных точках отрезка $[0;\ 1]$ таковой не является.

Покажем это.

Возьмём любую точку $a \in [0;1]$ и любую последовательность (x_n) рациональных чисел отрезка $[0;1]$ такую, что $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) = x_n \to a$.

Теперь возьмём любую последовательность (x_n) иррациональных чисел отрезка $[0;1]$ такую, что $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) = 1 - x_n \to 1 - a$.

Так как в точке непрерывности предел функции должен совпадать со значением функции, а значение функции в каждой точке определяется единственным образом, то непрерывность рассматриваемой функции возможна лишь при выполнении условия $a = 1 - a$, то есть только при $a = \dfrac{1}{2}$.

Точки разрыва и их классификация

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ и $a \in X'$.

Определение 3.28. *Назовём точку a точкой разрыва функции f, если в этой точке функция f не является непрерывной.*

Если a — точка разрыва функции f, то представляются возможными три случая:
1) $a \notin X$ (точка a не принадлежит области определения);
2) $a \in X$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует;
3) $a \in X$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но не равен $f(a)$.

Классификацию точек разрыва проведём только для случая, когда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ (односторонняя проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}{}^{\pm}(a)$) точки разрыва, содержащаяся в области определения X функции f. Различают: точки устранимого разрыва, точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.

Определение 3.29. *Точка разрыва $x = a$ функции f называется точкой устранимого разрыва, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но функция f либо не определена в точке a, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.*

Пример 3.18. *Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$.*

Так как мы знаем (первый замечательный предел), что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, но функция в точке $x = 0$ не определена, то $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

Название — точка устранимого разрыва — объясняется следующими обстоятельствами. Пусть a — точка устранимого разрыва функции f, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq f(a)$ (если $f(a)$ определено). Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{a\}, \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ в точке $x = a$ непрерывна. Таким образом, разрыв в точке a устраняется доопределением или переопределением функции в точке a.

В рассмотренном выше примере, чтобы не было разрыва в точке $x = 0$, следует рассматривать функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Определение 3.30. *Точка разрыва $x = a$ функции f называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция f имеет конечные пределы слева и справа, но*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Пример 3.19. *Для функции $sgn\, x$ точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (см. пример 3.5).*

Пример 3.20. *Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ $(x \neq 0)$.*

У этой функции $a = 0$ — точка разрыва. Чтобы установить, какая она, найдём пределы слева и справа.

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{-x} = -\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = -1;$$

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Так как пределы оба существуют, конечны, но различны, то делаем вывод, что $a = 0$ — точка разрыва первого рода.

Определение 3.31. *Точка разрыва $x = a$ функции f называется точкой разрыва второго рода, если она не является точкой устранимого разрыва или точкой разрыва первого рода.*

Таким образом отдельно выделяют точки устранимого разрыва и точки разрыва первого рода, а все остальные точки разрыва называют точками разрыва второго рода.

Пример 3.21. *Для функций $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ точка $a = 0$ является точкой разрыва второго рода, потому что у этих функций в точке $a = 0$ оба односторонних предела бесконечны.*

Пример 3.22. *У функции $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ точка $a = 0$ является точкой разрыва второго рода, потому что односторонние пределы в этой точке у неё оба не существуют (см. пример 3.3).*

Пример 3.23. *Пусть $f(x) = \sin \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$.*

Для этой функции $a = 0$ — точка разрыва. Чтобы определить, какой она является, попробуем найти левый и правый пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x\to -0} \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to -0} \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}\right) = 0;$$

$$\lim_{x\to +0} \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{|x|}\right) = 2 \lim_{x\to +0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{не существует.}$$

Значит, $a = 0$ — точка разрыва второго рода.

3.5 Монотонные функции

Пусть X — промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 3.32. *Будем называть функцию f:*

a) *неубывающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$;*

b) *возрастающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$;*

c) *невозрастающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$;*

d) *убывающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.*

Определение 3.33. *Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие на промежутке X функции будем называть функциями, монотонными на промежутке X, а возрастающие и убывающие — строго монотонными.*

Пример 3.24. *Функция $y = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$, но не является монотонной на $\mathbb{R}$.*

Пример 3.25. *Функция $y = \sin\, x$ возрастает на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, и не является монотонной ни на каком промежутке, длина которого больше π.*

Пример 3.26. *Функция $y = sgn\, x$ не убывает на $\mathbb{R}$, а функция $y = x + sgn\, x$ возрастает на $\mathbb{R}$.*

Пример 3.27. *Функция $y = [x]$ не убывает на $\mathbb{R}$.*

Монотонные функции обладают рядом хороших качеств, к изучению которых мы сейчас приступим.

Теорема 3.21. *Монотонная на отрезке $[a;\, b]$ функция f в каждой внутренней точке c отрезка $[a;\, b]$ имеет предельные значения слева и справа, в точке a имеет правый предел и в точке b — левый предел.*

Доказательство. Пусть функция f не убывает на $[a;\, b]$ и $c \in (a;\, b]$. Докажем, что в точке c существует левый предел функции f.

Рассмотрим множество $Y_c = \{f(x) : a \leq x < c\}$. Это множество не пусто $\big(f(a) \in Y_c\big)$ и ограничено сверху $\big($если $x \in [a;\, c)$, то $f(x) \leq f(c)\big)$. В таком случае по теореме о существовании точной верхней грани (теорема 1.1) существует $\gamma = \sup Y_c (\leq f(c))$. Покажем, что $\gamma = \lim\limits_{x \to c-0} f(x)$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По свойствам точной верхней грани найдётся $x' \in [a;\, c)$ такое, что $\gamma - \varepsilon < f(x') \leq \gamma$. Положим $\delta = c - x'$. Так как $x' < c$, то $\delta = c - x' > 0$. Если теперь возьмём любое $x : c - \delta < x < c$, то имеем очевидную цепочку неравенств:

$$\gamma - \varepsilon < f(x') \leq f(x) \leq \gamma < \gamma + \varepsilon,$$

из которой следует, что $|f(x) - \gamma| < \varepsilon$, если $c - \delta < x < c$. Тем самым установлено (см. определение 3.13), что $\gamma = f(c - 0) = \lim\limits_{x \to c-0} f(x)$, причём $f(c - 0) \leq f(c)$.

Доказательство существования правого предела и доказательство существования обоих односторонних пределов для невозрастающей функции проводятся аналогично, поэтому предоставляются читателям. ■

Следствие 3.6. *Монотонная на отрезке* $[a;\, b]$ *функция может иметь в интервале* $(a;\, b)$ *только точки разрыва первого рода. Концы отрезка* a *и* b *являются либо точками непрерывности, либо точками устранимого разрыва.*

Доказательство. Пусть c — внутренняя точка отрезка $[a;\, b]$. Так как в точке c оба односторонних предела существуют и конечны, она не может быть точкой разрыва второго рода. Точка c не может быть и точкой устранимого разрыва, потому что из доказательства теоремы следует, что $f(c)$ содержится между $f(c-0)$ и $f(c+0)$, поэтому, если $f(c-0) = f(c+0)$, то $f(c) = f(c-0) = f(c+0)$ и c — точка непрерывности функции. Следовательно, если c — точка разрыва, то — первого рода.

Вторая часть утверждения очевидна. ■

Теорема 3.22. *Пусть функция* f *монотонна на отрезке* $[a;\, b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. *Функция* f *непрерывна на* $[a;\, b]$ *тогда и только тогда, когда* $f([a;\, b]) = [\alpha;\, \beta]$, *другими словами, когда* f *принимает все промежуточные между* $f(a)$ *и* $f(b)$ *значения.*

Доказательство. Доказательство проведём для неубывающей на $[a;\, b]$ функции. Для невозрастающей функции доказательство проводится аналогично.
Необходимость. Пусть f непрерывна на $[a;\, b]$ и γ — любое, удовлетворяющее условию $\alpha < \gamma < \beta$, число. Нужно доказать существование $c \in (a;\, b)$ такого, что $f(c) = \gamma$.

Рассмотрим два множества: $X' = \{x \in [a;\, b] :\ f(x) \le \gamma\}$ и $X'' = \{x \in [a;\, b] :\ f(x) > \gamma\}$. Множества X' и X'' обладают следующими свойствами.

1. $X' \bigcup X'' = [a;\, b]$, причём множества X' и X'' общих точек не имеют.

Действительно, для каждой точки $x \in [a;\, b]$ справедливо только одно из неравенств: либо $f(x) \le \gamma$, либо $f(x) > \gamma$.

2. Множество X' располагается левее множества X''.

Это следует из предположения о неубывании функции f.

Из этих двух свойств вытекает, что правая граница $\sup X'$ множества X' совпадает с левой границей $\inf X''$ множества X''. Обозначим общую границу множеств X' и X'' буквой c и покажем, что $f(c) = \gamma$.

По предыдущей теореме в точке c определены левый $f(c-0)$ и правый $f(c+0)$ пределы. Так как при $x < c$ справедливо $f(x) \le \gamma$, то по теореме 3.12 о предельном переходе в неравенстве $f(c-0) = \lim\limits_{x \to c-0} f(x) \le \gamma$. Рассуждая аналогично, найдём, что $f(c+0) \ge \gamma$. Итак, $f(c-0) \le \gamma \le f(c+0)$. Но по условию функция f непрерывна в точке c, поэтому $f(c-0) = f(c+0) = f(c)$. Сравнивая эти два условия, получаем, что $f(c) = \gamma$.
Достаточность. Предположим, что функция f не является непрерывной на $[a;\, b]$. Тогда найдётся точка разрыва c функции f.

Если c — внутренняя точка $[a;\, b]$, то по следствию из предыдущей теоремы она является точкой разрыва первого рода, следовательно, $f(c-0) < f(c+0)$. Так как $f(c)$ находится между левым и правым пределами, то либо $f(c-0) < f(c)$, либо $f(c) < f(c+0)$. Допустим — первое. В таком случае функция f не может принимать значений, расположенных между $f(c-0)$ и $f(c)$, потому что если $x < c$, то $f(x) \le f(c-0)$, а если $x > c$, то $f(x) \ge f(c)$.

Если $c = a$, то $f(a) < f(a+0)$ (в противном случае функция была бы непрерывна в точке a). Так как $f(x) \ge f(a+0)$ при $x > a$, то функция f не может принимать значений, расположенных между $f(a)$ и $f(a+0)$.

Если $c = b$, то функция f не может принимать значений, расположенных между $f(b-0)$ и $f(b)$.

Таким образом, предположение о наличии у функции f точки разрыва привело к противоречию с условием теоремы. ■

Теорема 3.23. *Непрерывная и возрастающая (убывающая) на отрезке $[a;\, b]$ функция имеет обратную, которая также непрерывна и возрастает (убывает).*

Доказательство. Как и выше, обозначим $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Так как f непрерывна, то по предыдущей теореме $f([a;\, b]) = [\alpha;\, \beta]$, то есть, отображение f сюръективно, а в силу строгой монотонности отображение f инъективно. Поэтому (см. лемму 1.7) существует обратное отображение $f^{-1} : [\alpha;\, \beta] \to [a;\, b]$. То, что оно строго монотонно, очевидно. ■

Пример 3.28. *На множестве $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и покажем, что она имеет обратную.*

Решение. Сначала рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ на отрезке $[0; a]$, где $a > 0$ — любое. На данном отрезке функция f непрерывна (пример 3.14) и возрастает, поскольку если $x_2 > x_1 \geq 0$, то $x_2^2 = x_2 \cdot x_2 > x_1 \cdot x_1 = x_1^2$ и далее по индукции. Так как функция $f : [0; a] \to [0; a^n]$ удовлетворяет условиям последней теоремы, то она имеет обратную $f^{-1} : [0; a^n] \to [0; a]$, непрерывную и возрастающую на $[0; a^n]$.

Если $a \to +\infty$, то и $a^n \to +\infty$, поэтому функция f^{-1} определена, непрерывна и возрастает на $[0; +\infty)$.

Функцию f^{-1} записывают в виде $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ и называют арифметическим корнем n-й степени из числа x. ■

3.6 Свойства непрерывных функций

Теорема 3.24 (Непрерывность арифметических операций)**.** *Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$. Если функции f, g непрерывны в точке a множества X (на множестве X), то сумма $f + g$, разность $f - g$, произведение $f \cdot g$ и частное f/g (при дополнительном условии $g(a) \neq 0$ $(g(x) \neq 0$ на $X))$ непрерывны в точке a (на множестве X).*

Доказательство. Так как непрерывность на множестве есть непрерывность в каждой точке множества, то достаточно доказать непрерывность в точке. Остановимся на доказательстве непрерывности частного.

Если $g(a) \neq 0$, то по теореме о сохранении знака (теорема 3.8) существует окрестность $U_\delta(a)$ точки a, в которой $g(x) \neq 0$, следовательно, по крайней мере в этой окрестности частное f/g определено. Далее применяем теорему 3.11, согласно которой

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

■

Следствие 3.7. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in X$ (на множестве X) и $c \in \mathbb{R}$, то функция cf непрерывна в точке a (на множестве X).*

Теорема 3.25 (непрерывность суперпозиции)**.** *Пусть $f : X \to Y$ $(X, Y \subset \mathbb{R})$ непрерывна в точке a множества X (на множестве X), $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $b = f(a)$ множества Y (на множестве Y). Тогда функция $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ (суперпозиция функций f и g) непрерывна в точке a (на множестве X).*

Доказательство. Для доказательства теоремы используем определение непрерывности функции по Гейне. Пусть $(x_n) \subset X$, $x_n \to a$. Тогда в силу непрерывности функции f в точке a последовательность $y_n = f(x_n) \to b = f(a)$. Так как функция g непрерывна в точке b, а последовательность $y_n \to b$, то $g(y_n) \to g(b)$. Но тогда

$$F(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(b) = g(f(a)) = F(a)$$

и непрерывность суперпозиции в точке доказана.

Если условия непрерывности функций f и g будут выполнены на множествах X и Y соответственно, то и суперпозиция будет непрерывна на множестве X. $\blacksquare$

Определение 3.34. *Основными элементарными функциями будем называть функции постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические.*

Теорема 3.26. *Все основные элементарные функции непрерывны в своей естественной области определения.*

Доказательство.

О непрерывности постоянной функции говорилось в примере 3.14.

1. Функция x^n $(n \in \mathbb{Z})$.

При $n = 0$ функция $x^0 \equiv 1$ при $x \neq 0$ и потому непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как постоянная. При $n > 0$ непрерывность x^n при $x \in \mathbb{R}$ показана в примере 3.14. При $n < 0$ функция $x^n = 1/x^{|n|}$ определена при $x \neq 0$ и непрерывна как частное непрерывных функций.

2. Функция a^x.

Функцию a^x сначала нужно определить, потому что в курсе элементарной математики без понятия предела сделать это было невозможно. Мы определим функцию a^x и докажем её непрерывность, считая $a > 1$. При $a = 1$ теми же рассуждениями, которые будут проделаны, показывается, что $1^x \equiv 1$, а при $0 < a < 1$ можно положить $a^x = 1/b^x$, где $b = 1/a$.

Итак, пусть $a > 1$. Для целых и рациональных значений x функцию a^x определим как обычно: если $n \in \mathbb{Z}$, то при $n > 0$ полагаем $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a берётся множителем n раз), $a^0 = 1$ и при $n < 0$ полагаем $a^n = 1/a^{|n|}$; если $r \in \mathbb{Q}$, $r = \dfrac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$, то полагаем $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ (см. пример 3.28). С использованием свойств корней и степеней легко доказывается, что $a^r > 0$ для любого $r \in \mathbb{Q}$, $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$ и что функция a^r возрастает на множестве $\mathbb{Q}$.

Прежде чем переходить к определению a^x для любого вещественного x, напомним читателям, что в разделе "Предел последовательности" было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (пример 2.5). По определению предела последовательности это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ выполняется условие $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$. Положим $\delta = 1/n_0$. Тогда справедливо следующее утверждение: для любого $r \in \mathbb{Q}$, такого что $|r| < \delta$, имеет место неравенство

$$|a^r - 1| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

В самом деле, если $0 \leq r < \delta$, то

$$|a^r - 1| = a^r - 1 < a^\delta - 1 = a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon,$$

а если $-\delta < r < 0$, то

$$|a^r - 1| = 1 - a^r = a^r(a^{-r} - 1) < a^{-r} - 1 < \varepsilon.$$

Определим теперь функцию a^x для любого вещественного x. Возьмём любую последовательность (r_k) рациональных чисел, сходящуюся к x. Как сходящаяся, последовательность (r_k) ограничена сверху рациональным числом r_0. Как сходящаяся, последовательность (r_k) фундаментальна, поэтому для любого $\delta > 0$ найдётся такой номер k_0, что для любых $k, l \geq k_0$ будет выполняться условие $|r_k - r_l| < \delta$. Рассмотрим теперь последовательность (a^{r_k}) и покажем, что она фундаментальна. Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и по ε/a^{r_0}

подберём $\delta > 0$ так, чтобы при $|r| < \delta$ выполнялось условие 3.11 с правой частью ε / a^{r_0}. Затем по δ подберём k_0, как это указано выше, и возьмём любые $k, l \geq k_0$. Тогда принимая во внимание, что $|r_k - r_l| < \delta$ будем иметь:

$$|a^{r_k} - a^{r_l}| = \left|a^{r_l}\left(a^{r_k - r_l} - 1\right)\right| = a^{r_l}\left|a^{r_k - r_l} - 1\right| < a^{r_0} \cdot \varepsilon / a^{r_0} = \varepsilon.$$

Как фундаментальная, последовательность (a^{r_k}) сходится. Положим по определению

$$a^x = \lim_{k \to \infty} a^{r_k}. \tag{3.12}$$

Определение a^x для любого вещественного x с помощью равенства 3.12 корректно в том смысле, что значение a^x не зависит от выбора последовательности (r_k). Этот факт устанавливается точно так же, как соответствующее утверждение в доказательстве теоремы 3.3 (критерий Коши для функций). Корректность определения означает, в частности, что если $x = r \in \mathbb{Q}$, то определение a^r с помощью равенства 3.12 совпадает с первоначальным определением как степени с рациональным показателем. (В этом случае, пользуясь произволом в выборе последовательности (r_k), полагаем $r_k = r$ для всех значений номеров k.)

Установим главные свойства показательной функции.

а) Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.

Пусть (r'_k) и (r''_k) — последовательности рациональных чисел, сходящиеся к x_1 и x_2 соответственно. Тогда $a^{r'_k + r''_k} = a^{r'_k} \cdot a^{r''_k}$. Устремляя k к ∞ и используя теоремы о пределе суммы последовательностей и произведения функций, получаем отсюда требуемое равенство.

б) Функция a^x при $a > 1$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Подберём рациональные r', r'' так, чтобы $x_1 < r' < r'' < x_2$. Пусть последовательности рациональных чисел (r'_k) и (r''_k) сходятся к x_1 и x_2 соответственно. Тогда существует номер k_0, начиная с которого будет выполняться $r'_k < r'$ и $r''_k > r''$. Так как на множестве $\mathbb{Q}$ функция a^r возрастает, то при $k \geq k_0$

$$a^{r'_k} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_k}.$$

Переходя к пределу, получаем отсюда:

$$a^{x_1} \leq a^{r'} < a^{r''} \leq a^{x_2},$$

что и требовалось.

Из этого свойства, в частности, следует, что $a^x > 0$ на $\mathbb{R}$, потому что для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдётся $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$. Так как $a^r > 0$, то и $a^x > a^r > 0$.

в) Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

В примере 2.7 в частности было показано, что последовательность (a^n) при $a > 1$ — бесконечно большая. Из этого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $a^{n_0} > \varepsilon$. Положив $\delta = n_0$ и взяв любое $x > \delta$, имеем: $a^x > a^\delta = a^{n_0} > \varepsilon$, откуда следует первое из доказываемых утверждений. Второе вытекает из теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями (теорема 3.19).

г) Функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$.

Отметим, что неравенство 3.11 остаётся справедливым и для вещественных значений x, удовлетворяющих условию $|x| < \delta$, потому что при его доказательстве использовалась только монотонность показательной функции, а это свойство при её продолжении с $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$ сохранилось. Рассмотрим любое $x_0 \in \mathbb{R}$, возьмём любое $\varepsilon > 0$ и подберём $\delta > 0$

так, чтобы неравенство 3.11 выполнялось при правой части ε/a^{x_0}. Тогда для любого x, удовлетворяющего условию $|x-x_0|<\delta$, имеем:

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| < a^{x_0} \cdot \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} = \varepsilon,$$

и непрерывность показательной функции доказана.

3. Функция $\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Функция $\log_a x$ вводится как обратная функции a^x. Снова подробно рассмотрим случай $a>1$, поскольку во втором случае $(0<a<1)$ рассуждения совершенно аналогичны.

Пусть $A>0$ — любое. На отрезке $[-A;\ A]$ функция a^x при $a>1$ возрастает и непрерывна, поэтому по теореме 3.23 обратная к ней функция $\log_a x$ на отрезке $[\alpha;\beta]=[a^{-A};\ a^A]$ определена и тоже возрастает и непрерывна. Так как при $A\to+\infty$ по доказанному выше $a^{-A}\to+0$, а $a^A\to+\infty$, то, перейдя к пределу, получаем, что функция $\log_a x$ при $a>1$ определена на $(0;\ +\infty)$, возрастает и непрерывна.

4. Тригонометрические функции.

а) Докажем непрерывность функции $\sin x$. Пусть $a\in\mathbb{R}$ — любое. Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\varepsilon$. Возьмём теперь любое x, удовлетворяющее условию $|x-a|<\delta$, и оценим разность $|\sin x-\sin a|$, принимая во внимание неравенство $|\sin x|\le|x|$. Тогда

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\frac{|x-a|}{2}\cdot 1 < 2\cdot\frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

и непрерывность функции $\sin x$ в точке a, а вместе с тем и на $\mathbb{R}$ установлена.

б) Функция $\cos x=\sin(x+\pi/2)$ непрерывна по теореме 3.25 как суперпозиция непрерывных функций $x+\pi/2$ и $\sin x$.

в) Функции $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны по теореме 3.24 во всех точках, в которых их знаменатель не обращается в ноль.

5. Обратные тригонометрические функции.

Непрерывность обратных тригонометрических функций доказывается в точности так же, как и непрерывность логарифмической функции.

6. Функция x^p $(p\in\mathbb{R})$.

Степенную функцию x^p определим при $x>0$ равенством $x^p=e^{p\ln x}$. Как суперпозиция непрерывных функций e^x и $\ln x$ степенная функция непрерывна во всех точках области определения. ■

Определение 3.35. *Элементарной функцией будем называть аналитически заданную функцию, выражаемую через основные элементарные функции посредством конечного числа алгебраических операций и суперпозиций.*

Теорема 3.27. *Все элементарные функции непрерывны в своей естественной области определения.*

Это утверждение непосредственно вытекает из определения элементарной функции и теорем 3.24, 3.25, 3.26.

Рассмотрим два класса функций, часто встречающихся в математическом анализе и приложениях.

Гиперболические функции. Гиперболическими называют функции: $y=\operatorname{ch} x$ (косинус гиперболический x), $y=\operatorname{sh} x$ (синус гиперболический x), $y=\operatorname{th} x$ (тангенс гиперболический x) и $y=\operatorname{cth} x$ (котангенс гиперболический x). Определяются они так:

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\ .$$

Из их определения видно, что гиперболические функции являются элементарными функциями, а потому по доказанной теореме являются непрерывными в области определения (ch, sh, th на $\mathbb{R}$, cth на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Свойства гиперболических функций во многом похожи на свойства тригонометрических. Функция $\operatorname{ch} x$ — чётная, остальные — нечётные, $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (основное тождество для гиперболических функций), $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ и так далее.

Показательно-степенная функция. Пусть функции $u, v : X \to \mathbb{R}$, причём $u(x) > 0$ всюду на X. Функцию $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ называют показательно-степенной (или степенно-показательной) функцией. Если u, v — элементарные функции, то и f — элементарная функция. Если u, v непрерывны на X, то и f непрерывна на X как суперпозиция непрерывных функций.

Используем уже установленные свойства непрерывных функций для нахождения некоторых пределов, широко используемых как в теории, так и при решении практических задач.

Теорема 3.28 (Второй замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.13}$$

Доказательство. Равносильность обоих утверждений устанавливается переходом от x к $\frac{1}{x}$. Докажем второе утверждение.

1) Установим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Свяжем с x функцию $n = n(x) = [x]$. Так как по определению $[x]$ имеет место неравенство $n \le x < n+1$, то $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $n \to \infty$. Нетрудно проверить, что для любого $x > 0$ имеют место неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.14}$$

Вычислим пределы левой и правой частей в этих неравенствах.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = e:1 = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Так как пределы левой и правой частей в (3.14) равны, то по принципу двустороннего ограничения имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.15}$$

2) Теперь покажем, что и
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{3.16}$$
Положим $x=-1-y$. Тогда $y\to+\infty$ при $x\to-\infty$ и
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}=\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)=e\cdot1=e.\end{aligned}$$

Равенства (3.15), (3.16) означают, что в точке ∞ существуют и равны оба односторонних предела. Из связи между пределом и односторонними пределами функции следует утверждение теоремы. ■

Показательно-степенные функции вида $(1+u(x))^{v(x)}$, у которых при $x\to a$ добавка к единице в основании $u(x)\to0$, а показатель степени $v(x)\to\infty$, называют неопределённостями вида 1^∞ (единица в степени бесконечность). Для раскрытия таких неопределённостей используют второй замечательный предел. Делается это следующим образом. Запишем данное выражение в виде
$$(1+u(x))^{v(x)}=\left(\left((1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right)^{u(x)}\right)^{v(x)}=\left((1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right)^{u(x)v(x)}.$$

Теперь, чтобы найти предел данного выражения, используем установленную выше непрерывность показательно степенной функции. Непрерывность показательно степенной функции означает, что если $a\in X$, то
$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=u(a)^{v(a)}=\left(\lim_{x\to a}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}v(x)},$$
то есть можно переходить к пределу отдельно в основании и в показателе степени. В нашем случае основание по второму замечательному пределу стремится к e, поэтому
$$\lim_{x\to a}(1+u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}u(x)v(x)}. \tag{3.17}$$

Пример 3.29. *Найти* $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Анализ показывает, что данное выражение есть неопределённость вида 1^∞. Преобразуем его к такому виду, чтобы можно было использовать формулу (3.17), и вычислим предел.
$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=(1^\infty)=\lim_{x\to1}(1+(x-1))^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=e.$$
■

Пример 3.30. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to2}(\cos\pi x)^{\frac{1}{(x-2)^2}}$.

Решение. Анализ показывает, что налицо неопределённость вида (1^∞), поэтому в соответствии с изложенной выше процедурой раскрытия таких неопределённостей выделим в основании единицу и воспользуемся формулой (3.17).
$$\lim_{x\to2}(\cos\pi x)^{\frac{1}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to2}(1+(\cos\pi x-1))^{\frac{1}{(x-2)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to2}(\cos\pi x-1)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}}.$$

Вычислим отдельно предел показателя степени.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos \pi x-1}{(x-2)^2}=-\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos\pi(x-2)}{(x-2)^2}=-\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\pi^2(x-2)^2}{2}}{(x-2)^2}=-\frac{\pi^2}{2}.$$

При вычислении этого предела мы вычли из аргумента косинуса 2π с тем, чтобы аргумент косинуса стремился к нулю, и заменили числитель эквивалентной величиной, воспользовавшись известным соотношением $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 2}(\cos\pi x)^{\frac{1}{(x-2)^2}}=e^{-\pi^2/2}$. ■

Теорема 3.29 (Третий замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Доказательство. Используя непрерывность логарифмической функции и второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

■

Следствие 3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$

Действительно, поскольку $\log_a(1+x)=\dfrac{\log_e(1+x)}{\log_e a}=\log_a e\ln(1+x)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Следствие 3.9. *Используя доказанную теорему, следствие из неё и определение эквивалентных величин, получаем, что*

$$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0),\quad \log_a(1+x)\sim x\log_a e\ (x\to 0). \tag{3.18}$$

Пример 3.31. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\ln(1+\operatorname{tg}3x)}$.

Решение. Анализ показывает, что выражение, стоящее под знаком предела, есть неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Для её раскрытия заменим числитель и знаменатель эквивалентными величинами на основании первого и третьего замечательных пределов.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\ln(1+\operatorname{tg}3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{18x^2}{x\cdot\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{18x^2}{x\cdot 3x}=6.$$

■

Теорема 3.30 (Четвёртый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

Доказательство. Положим $a^x-1=y$. Тогда $a^x=1+y$, $x=\log_a(1+y)$. Очевидно, что если $x\to 0$, то и $y\to 0$ и наоборот. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

■

Пример 3.32. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-1}{\ln\cos 4x}$.

Решение. Анализ показывает, что и здесь наблюдается неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Для её раскрытия проделаем следующие действия. Числитель дважды заменим эквивалентной величиной, используя сначала четвёртый, а затем первый замечательные пределы. В знаменателе сначала под знаком логарифма прибавим и вычтем единицу, а затем воспользуемся последовательно третьим и первым замечательными пределами.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 2x}-1}{\ln\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{\ln(1+(\cos 4x-1))}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{-(1-\cos 4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{-8x^2}=-\frac{1}{4}.$$

■

Следствие 3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Следствие 3.11.
$$a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0),\quad e^x-1\sim x\ (x\to 0).$$

Теорема 3.31 (Пятый замечательный предел)**.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p$.

Доказательство. Используя определение степенной функции и переходя к эквивалентным величинам на основании следствий из теорем 3.30, 3.29, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{px}{x}=p.$$

■

Следствие 3.12. $(1+x)^p-1\sim px\ (x\to 0)$.

Пример 3.33. *Найти* $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[6]{\operatorname{tg}x}-1}{1-\sqrt[3]{2\sin^2 x}}$.

Решение. Снова анализ показывает наличие неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$. Перепишем выражения, стоящие в числителе и знаменателе в виде, подходящем для применения пятого замечательного предела.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[6]{\operatorname{tg}x}-1}{1-\sqrt[3]{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{(1+(\operatorname{tg}x-1))^{1/6}-1}{-\big((1+(2\sin^2 x-1))^{1/3}-1\big)}.$$

Так как при $x\to\pi/4$ величины $\operatorname{tg}x-1$ и $2\sin^2 x-1$ стремятся к нулю, то мы вправе воспользоваться пятым замечательным пределом и заменить числитель и знаменатель соответствующими эквивалентными величинами, после чего предел находится при помощи несложных алгебраических преобразований.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[6]{\operatorname{tg}x}-1}{1-\sqrt[3]{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\frac{1}{6}(\operatorname{tg}x-1)}{-\frac{1}{3}(2\sin^2 x-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)}=-\frac{1}{2}.$$

■

Теорема 3.32 (Устойчивость знака). *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in X$. Если $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U_\delta(a)$ такая, что $sgnf(x) = sgnf(a)$ для любого $x \in X \bigcap U_\delta(a)$.*

Эта теорема является следствием теоремы 3.8.

Теорема 3.33 (Больцано-Коши, 1-я). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда в интервале $(a; b)$ найдётся точка c такая, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Возможны два случая: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Рассмотрим первый из них (второй совершенно аналогичен первому).

Обозначим для единообразия $a = a_0$, $b = b_0$ и разобьём отрезок $[a_0; b_0]$ пополам точкой $c_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Возможны три варианта: $f(c_1) = 0$, $f(c_1) > 0$, $f(c_1) < 0$. В первом из них точка $c = c_1$ найдена и доказательство закончено, во втором положим $[a_1; b_1] = [a_0; c_1]$, а в третьем обозначим $[a_1; b_1] = [c_1; b_0]$.

Рассмотрим отрезок $[a_1; b_1]$. Он выбран так, что $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Разделим и этот отрезок пополам точкой $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Опять возможны три случая: $f(c_2) = 0$, $f(c_2) > 0$, $f(c_2) < 0$. В первом из них точка $c = c_2$ найдена, доказательство закончено, во втором положим $[a_2; b_2] = [a_1; c_2]$, а в третьем — $[a_2; b_2] = [c_2; b_1]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2; b_2]$, разделим его пополам точкой $c_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ и повторим предыдущие рассуждения. И так далее.

Возможны два варианта: либо после конечного числа делений мы получим точку c_k, в которой $f(c_k) = 0$, либо процесс деления продолжится бесконечно.

В первом случае $c = c_k$ и теорема доказана. Во втором случае мы получим последовательность вложенных отрезков

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset [a_1; b_1] \supset \ldots \supset [a_k; b_k] \supset \ldots,$$

длины которых $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Так как эта последовательность отрезков — стягивающаяся, то по теореме Кантора (теорема 2.15) она имеет единственную общую точку c, которая является пределом как левых, так и правых концов отрезков, то есть $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Функция f в точке c непрерывна, поэтому по теореме о предельном переходе в неравенстве, если $f(a_k) < 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то и $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \le 0$, а если $f(b_k) > 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то и $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) \ge 0$. Но если одновременно $f(c) \le 0$ и $f(c) \ge 0$, то $f(c) = 0$.

Теорема доказана. ■

Теорема 3.34 (Больцано-Коши, 2-я). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, причём $A \neq B$. Тогда для любого $C \in (A; B)$ найдётся $c \in (a; b)$ такое, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a; b]$ функцию $g(x) = f(x) - C$. Эта функция на отрезке $[a; b]$ непрерывна как разность непрерывной функции и постоянной и принимает на концах отрезка значения разных знаков, так как $g(a) = A - C$, $g(b) = B - C$, а знаки $A - C$ и $B - C$ различны в силу того, что C расположено между A и B. Тогда к функции g можно применить 1-ю теорему Больцано-Коши, согласно которой найдётся точка $c \in (a; b)$ такая, что $g(c) = 0$. Но тогда $f(c) - C = 0$ или $f(c) = C$. ■

Замечание 3.9. *Первая теорема Больцано-Коши является частным, но важным случаем второй. Использованный метод её доказательства является основой для серии приближённых методов решения уравнения* $f(x) = 0$.

Замечание 3.10. *Требование непрерывности функции на отрезке в теореме Больцано-Коши является существенным и не может быть опущено. Например, функция* $\operatorname{sgn} x$, *рассматриваемая на отрезке* $[-1;\,1]$, *не является непрерывной только в одной точке* $x = 0$ *и не принимает промежуточных между* -1 *и* 1 *значений, кроме нуля.*

Определение 3.36. *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$. *Функцию* f *будем называть ограниченной на множестве* X, *если ограничено множество её значений* $f(X)$, *то есть, если найдётся* $M > 0$ *такое, что* $|f(x)| \le M$ *для любого* $x \in X$.

Аналогично вводятся понятия функции, ограниченной на множестве сверху (снизу).

Теорема 3.35 (Вейерштрасс, 1-я)**.** *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a;\,b]$, *то она ограничена на нём.*

Доказательство. Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что функция f непрерывна на отрезке $[a;\,b]$, но не ограничена на нём. Тогда для любого M найдётся $x \in [a;\,b]$ такой, что $|f(x)| > M$. Полагая $M = n$ ($n \in \mathbb{N}$), выделим из отрезка $[a;\,b]$ последовательность (x_n) такую, что $|f(x_n)| > n$ ($n \in \mathbb{N}$). По теореме Больцано-Вейерштрасса (теорема 2.22) из последовательности (x_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}). Пусть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$. Так как для каждого k выполняется неравенство $a \le x_{n_k} \le b$, то и $c \in [a;\,b]$. В точке c функция f непрерывна, поэтому последовательность $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(c)$ и потому ограничена. Но по построению последовательность $f(x_{n_k})$ не ограничена, потому что $|f(x_{n_k})| > n_k$. Получили противоречие, следовательно, сделанное допущение неверно и теорема доказана. ■

Замечание 3.11. *В доказанной теореме на функцию* f *наложено два условия: 1) функция определена на отрезке; 2) функция непрерывна на отрезке. Ни одно из них не является лишним. Приведём примеры.*

Пример 3.34. *Функция* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *на* $(0;\,1)$ *и функция* $f(x) = x^2$ *на* $[0;\,+\infty)$ *непрерывны, но не ограничены.*

Пример 3.35. *Функция* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *определена на отрезке* $[-1;\,1]$, *но не является непрерывной на нём и не ограничена.*

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена на множестве X снизу (сверху). Тогда существует $\alpha = \inf f(X)$ ($\beta = \sup f(X)$).

Определение 3.37. *Будем говорить, что функция* f *достигает на* X *точной нижней (верхней) грани, если найдётся* $x_1 \in X$ *такой, что* $f(x_1) = \alpha$ ($x_2 \in X$ *такой, что* $f(x_2) = \beta$).

Теорема 3.36 (Вейерштрасс, 2-я)**.** *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a;\,b]$, *то она достигает на нём своих точных нижней и верхней граней.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Снова применим метод доказательства от противного. Предположим, что некая непрерывная на $[a;\, b]$ функция f не достигает на $[a;\, b]$ своей точной нижней грани α. В этом случае $f(x) > \alpha$ для любого $x \in [a;\, b]$. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1}{f(x)-\alpha}$. Так как знаменатель дроби по предположению в нуль не обращается, то функция g определена на $[a;\, b]$ и непрерывна на нём как частное непрерывных функций. Тогда по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на отрезке $[a;\, b]$ сверху, то есть, существует M такое, что $g(x) = \dfrac{1}{f(x)-\alpha} \le M$. Заметим, что $M > 0$, поскольку все значения $g(x)$ положительны. Решая неравенство $\dfrac{1}{f(x)-\alpha} \le M$, найдём, что $f(x) \ge \alpha + \dfrac{1}{M}$ для любого $x \in [a;\, b]$. Это означает, что число $\alpha + \dfrac{1}{M}$ является нижней гранью множества значений функции f. Но это невозможно, так как $\alpha + \dfrac{1}{M} > \alpha$, а точная нижняя грань α по определению является наибольшей из всех нижних граней. Получено противоречие. Теорема доказана. ■

Замечание 3.12. *И в этой теореме ни одно из условий не является лишним. При невыполнении какого-либо из них теорема перестаёт быть верной.*

Пример 3.36. *Рассмотрим на отрезке* $[0,\, 1]$ *функцию* $y = \{x\} = x - [x]$. *У этой функции* $x = 1$ *— точка разрыва, потому что* $\{x\} = x$ *при* $x < 1$, *следовательно,* $\lim\limits_{x\to 1-0} \{x\} = 1$, *а* $\{1\} = 0$. *Точная верхняя грань функции на* $[0,\, 1]$ *тоже равна* 1, *но не достигается.*

Пример 3.37. *Рассмотрим на промежутке* $X = (0;\, 1]$ *функцию* $y = x$. *Эта функция непрерывна на* X, *её точная нижняя грань на* X, *очевидно, равна нулю, но не достигается.*

3.7 Равномерная непрерывность

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве X. Непрерывность на множестве определяется как непрерывность в каждой точке множества. Поэтому, если расписать определение непрерывной на множестве функции по Коши (сравним с определением 3.24), то получится следующее предложение: для любой точки a множества X по любому $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in X \bigcap U_\delta(a)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Как следует из этого предложения, δ зависит не только от ε, но и от точки a множества X, $\delta = \delta(a, \varepsilon)$. Иногда же бывает необходимо подобрать $\delta > 0$ так, чтобы оно было одинаковым для всех точек множества X, то есть зависело только от ε. Как мы увидим ниже на примерах, сделать это удаётся далеко не всегда. Если же такое δ существует, то функцию называют равномерно непрерывной.

Сформулируем точное определение.

Определение 3.38. *Функцию* $f : X \to \mathbb{R}$ *назовём равномерно непрерывной на множестве* X, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *(зависящее только от* ε*) такое, что для любых* $x', x'' \in X$ *и удовлетворяющих условию* $|x' - x''| < \delta$ *выполняется условие*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3.19}$$

Легко убедиться, что если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна на нём. В самом деле, возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, найдём по нему $\delta > 0$, как это следует по определению равномерной непрерывности, зафиксируем $a \in X$ и возьмём любой такой $x \in X$, чтобы выполнялось условие $|x - a| < \delta$. Тогда неравенство (3.19) при $x' = x$, $x'' = a$ примет вид: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, что по определению 3.24 означает непрерывность функции f в точке a, следовательно, ввиду произвольности a, и на множестве X.

Однако не всякая непрерывная на множестве функция равномерно непрерывна на нём. Приведём примеры.

Пример 3.38. *Пусть* $X = (0;\, 1]$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Как элементарная, эта функция непрерывна на $(0;\, 1]$. Покажем, что равномерно непрерывной на $(0;\, 1]$ она не является.

Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$, меньшее единицы. Положим $x' = \sqrt{\delta}$, $x'' = \sqrt{\delta} - \dfrac{\delta}{2}$. Тогда $x', x'' \in (0;\, 1]$, $|x' - x''| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, но

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}} \right| = \frac{\delta}{2\sqrt{\delta}(\sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2})} = \frac{1}{2 - \sqrt{\delta}} > \frac{1}{2},$$

что противоречит условию (3.19).

Итак, для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, рассматриваемой на множестве $X = (0;\, 1]$, по числу $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ невозможно подобрать δ, как того требует условие равномерной непрерывности, поэтому она не является равномерно непрерывной на этом множестве.

Пример 3.39. *Пусть* $X = [1,\, +\infty)$, $f(x) = x^2$.

Функция f непрерывна на X. Покажем, что равномерно непрерывной на X она не является.

Возьмём $\varepsilon = 1$ и любое $\delta > 0$. Положим $x' = \dfrac{1}{\delta}$, $x'' = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$. Тогда $|x' - x''| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, но

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Снова получаем, что по числу $\varepsilon = 1$ невозможно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие (3.19), поэтому функция f не является равномерно непрерывной на множестве X.

Теорема 3.37 (Кантор)**.** *Если функция непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$*, то она равномерно непрерывна на нём.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует функция f, непрерывная, но не равномерно непрерывная на отрезке $[a;\, b]$. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что какое бы $\delta > 0$ ни взять, можно подобрать $x', x'' \in [a;\, b]$, удовлетворяющие условию $|x' - x''| < \delta$, для которых $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Возьмём последовательность положительных чисел (δ_n) так, чтобы $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (например, можно взять $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$), для каждого δ_n, в соответствии со сказанным выше, подберём $x'_n, x''_n \in [a;\, b]$ так, чтобы выполнялись условия $|x'_n - x''_n| < \delta_n$, но

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{3.20}$$

Таким образом, выделены две последовательности (x'_n) и (x''_n). Рассмотрим первую из них. Как содержащаяся в отрезке, последовательность (x'_n) ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса (теорема 2.22) из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x'_{n_k}). Пусть $x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$. Так как $a \le x'_{n_k} \le b$, то и $a \le c \le b$, то есть $c \in [a;\, b]$. Подпоследовательность (x''_{n_k}) последовательности (x''_n) тоже сходится к c, поскольку $x''_{n_k} = (x''_{n_k} - x'_{n_k}) + x'_{n_k}$ и $x''_{n_k} - x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ по построению. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, в частности, в точке c, то

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\big) = f(c) - f(c) = 0,$$

но в силу (3.20) это невозможно. Получено противоречие, теорема доказана. ■

3.8 Задачи

1. Имеет ли множество $A = \left\{ \dfrac{2n+1}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$ предельные точки?

2. Найти предельные точки множества $A = \left\{ \dfrac{2n^3-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Найти предельные точки множества:
   a) $A = \left\{ \dfrac{m}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots n \right\}$; b) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$;
   c) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 2, 4, \dots 2n \right\}$; d) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 4n \right\}$;
   e) $A = \left\{ \dfrac{2m}{3n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 3n \right\}$; f) $A = \left\{ \dfrac{2m+1}{4n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$.

4. Доказать, что множество $A_0 = \left\{ \dfrac{m}{n_0} : m \in \mathbb{Z} \right\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, состоит из изолированных точек.

5. Имеются ли изолированные точки у множества:
   a) $A = \left\{ \dfrac{m}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots n \right\}$; b) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$;
   c) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 2, 4, \dots 2n \right\}$; d) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 4n \right\}$;
   e) $A = \left\{ \dfrac{2m}{3n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 3n \right\}$; f) $A = \left\{ \dfrac{2m+1}{4n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$?

6. Является ли замкнутым множество точек полуинтервала $(a; b]$?

7. Замкнуто ли множество $A_0 = \left\{ \dfrac{m}{n_0} : m \in \mathbb{Z} \right\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$?

8. Замкнуто ли множество:
   a) $A = \left\{ \dfrac{m}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots n \right\}$; b) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$;
   c) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 2, 4, \dots 2n \right\}$; d) $A = \left\{ \dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 4n \right\}$;
   e) $A = \left\{ \dfrac{2m}{3n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 3n \right\}$; f) $A = \left\{ \dfrac{2m+1}{4n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n \right\}$?

9. Замкнуто ли множество $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n-1; n-\dfrac{1}{n}\right]$?

10. Замкнуто ли множество $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{n}; \dfrac{n+1}{n^2}\right]$?

11. Найти замыкание множества:
a) $A = \left\{\dfrac{m}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots n\right\}$; b) $A = \left\{\dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n\right\}$;
c) $A = \left\{\dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 2, 4, \dots 2n\right\}$; d) $A = \left\{\dfrac{m}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 4n\right\}$;
e) $A = \left\{\dfrac{2m}{3n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 3n\right\}$; f) $A = \left\{\dfrac{2m+1}{4n+1} : n \in \mathbb{N},\ m = 1, 2, \dots 2n\right\}$.

12. Является ли открытым множество точек полуинтервала $[a; b)$?

13. Является ли открытым множество $(1; 8) \setminus \{2; 4; 6\}$?

14. Является ли открытым множество $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1-\dfrac{1}{n}; 1+\dfrac{1}{n}\right)$?

15. Доказать, что полуинтервал $(a; b]$ не является компактным множеством и привести пример открытого покрытия полуинтервала $(a; b]$ из которого нельзя выделить конечное покрытие.

16. Доказать, что полуинтервал $[a; b)$ не является компактным множеством и привести пример открытого покрытия полуинтервала $[a; b)$, из которого нельзя выделить конечное покрытие.

17. Компактно ли множество $\mathbb{N}$ (множество всех натуральных чисел)?

18. Компактно ли множество $\mathbb{Q}$ (множество всех рациональных чисел)?

19. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Компактно ли множество $M = \{x \in \mathbb{Q} :\ 0 \le x \le 1\}$?

20. Пусть M — множество всех иррациональных чисел x, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$. Компактно ли множество M ?

21. Сформулировать следующие определения предела функции по Коши и по Гейне и доказать их эквивалентность:
a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$;
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
g) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;
j) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; k) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; l) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
m) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; n) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

22. Пусть функции f и g не имеют предела в точке a. Следует ли отсюда, что функции $f+g$, fg также не имеют предела в этой точке?

23. Доказать, что:
a) $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$ $(x \to a)$; b) $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$ $(x \to a)$;
c) $O(o(\alpha)) = o(\alpha)$ $(x \to a)$; d) $o(O(\alpha)) = o(\alpha)$ $(x \to a)$;
e) $\beta \asymp \alpha$ $(x \to a)$, $\gamma \asymp \beta$ $(x \to a) \Rightarrow \gamma \asymp \alpha$ $(x \to a)$;
f) $\beta \asymp \alpha$ $(x \to a) \Rightarrow o(\beta) = o(\alpha)$ $(x \to a)$;
g) $\beta \asymp \alpha$ $(x \to a) \Rightarrow O(\beta) = O(\alpha)$ $(x \to a)$;
h) $O(\alpha)O(\beta) = O(\alpha\beta)$ $(x \to a)$; i) $o(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta)$ $(x \to a)$;
j) $\alpha_1 \asymp \alpha$ $(x \to a)$, $\beta_1 \asymp \beta$ $(x \to a) \Rightarrow \alpha_1\beta_1 \asymp \alpha\beta$ $(x \to a)$;
k) $O(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta)$ $(x \to a)$;
l) $\gamma \asymp \alpha$ $(x \to a) \Rightarrow \gamma o(\beta) = o(\alpha\beta)$ $(x \to a)$;
m) $O(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha)$ $(x \to a)$; n) $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$ $(x \to a)$;
o) $\beta \asymp \alpha$ $(x \to a)$, $\gamma \asymp \alpha$ $(x \to a)$, $\beta > 0$, $\gamma > 0 \Rightarrow \beta + \gamma \asymp \alpha$ $(x \to a)$;
p) $\beta \asymp \alpha$ $(x \to a) \Rightarrow \beta + O(\alpha) = O(\alpha)$ $(x \to a)$;
q) $O(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ $(x \to a)$.

24. Доказать, что:
a) $x^p O(x^q) = O(x^{p+q})$ $(x \to 0)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
b) $x^p o(x^q) = o(x^{p+q})$ $(x \to 0)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
c) $\alpha \asymp x^q$ $(x \to 0) \Rightarrow x^p\,\alpha \asymp x^{p+q}$ $(x \to 0)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
d) $x^p O(x^q) = O(x^{p+q})$ $(x \to \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
e) $x^p o(x^q) = o(x^{p+q})$ $(x \to \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
f) $\alpha \asymp x^q$ $(x \to \infty) \Rightarrow x^p\,\alpha \asymp x^{p+q}$ $(x \to \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$;
g) $O(x^p) + O(x^q) = O(x^p)$ $(x \to \infty)$, $p \geq q > 0$;
h) $O(x^p) + O(x^q) = O(x^q)$ $(x \to 0)$, $p \geq q > 0$;
i) $\alpha \asymp x^p$ $(x \to \infty)$, $\beta \asymp x^q$ $(x \to \infty) \Rightarrow \alpha + \beta \asymp x^p$ $(x \to \infty)$, $p > q > 0$;
j) $\alpha \asymp x^p$ $(x \to 0)$, $\beta \asymp x^q$ $(x \to 0) \Rightarrow \alpha + \beta \asymp x^q$ $(x \to 0)$, $p > q > 0$;
k) $o(x^p) + o(x^q) = o(x^p)$ $(x \to \infty)$, $p \geq q > 0$;
l) $o(x^p) + o(x^q) = o(x^q)$ $(x \to 0)$, $p \geq q > 0$;
m) $O(x^q) = o(x^p)$ $(x \to \infty)$, $p > q > 0$;
n) $O(x^p) = o(x^q)$ $(x \to 0)$, $p > q > 0$.

25. Доказать, что $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$ тогда и только тогда, когда $g(x) = f(x) + o(f(x))$ $(x \to a)$.

26. Показать, что $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}$ $(x \to +0)$, $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ $(x \to +\infty)$.

27. Найти функцию g вида $g(x) = Cx^p$, эквивалентную функции f при $x \to a$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^4}{2x^2 + x + 3}$, $a = 0$, $a = \infty$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}$, $a = 0$, $a = \infty$;

в) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x + x^2)}{x^2}$, $a = 0$;

г) $f(x) = \dfrac{\cos^2 3x - \cos^2 5x}{x}$, $a = 0$.

28. Доказать, что если $a > 0$, то $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln a + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.

29. Доказать, что если $a, b > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$.

30. Доказать или опровергнуть утверждение: $x^2 D(x) = o(xD(x))$ $(x \to 0)$, где $D(x)$ — функция Дирихле,
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

31. Пусть $f_1(x) \sim g_1(x)$ $(x \to a)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ $(x \to a)$. Показать, что $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$ $(x \to a)$.

32. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причём $A < B$. Доказать, что существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

33. Доказать, что если f, g — определённые на $\mathbb{R}$ периодические функции, причём $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$, то:
a) периоды f и g равны;
b) $f(x) \equiv g(x)$ на $\mathbb{R}$.

34. Пусть X — открытый промежуток, $f:\ X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда существуют $f(a \pm 0)$ и $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$. Доказать.

35. Доказать, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X, то функция g, заданная равенством
$$g(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \le c, \\ c, & f(x) > c, \end{cases}$$
где c — любое положительное число, также непрерывна на X.

36. Доказать, что если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны на X, то функции $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ и $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ также непрерывны на X.

37. Функция f непрерывна в точке x_0, а функция g разрывна в точке x_0. Доказать, что функция $f + g$ разрывна в точке x_0.

38. Функции f и g разрывны в точке x_0. Обязательно ли функция: а) $f + g$; б) $f \cdot g$ — разрывна в этой точке?

39. Функция f непрерывна, а функция g разрывна в точке x_0. Обязательно ли функция $f \cdot g$ разрывна в этой точке?

40. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

41. Доказать, что если f непрерывна на X, то функция $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$, также непрерывна на X.

42. Пусть множество X симметрично относительно нуля (то есть вместе с каждым x содержит и точку $-x$) и f непрерывна на X. Доказать, что функция $g(x) = f(|x|)$ непрерывна на $X_+ = \{x \in X :\ x \ge 0\}$.

43. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функции $m(x) = \inf\{f(t) :\ t \in [a; x]\}$, $M(x) = \sup\{f(t) :\ t \in [a; x]\}$ также непрерывны на этом отрезке.

44. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X. Доказать, что функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0, \\ 0, & f(x) \le 0, \end{cases}$$

непрерывна на X.

45. Функция f определена, непрерывна и положительна на сегменте $[a; b]$. Доказать, что существует число $\mu > 0$ такое, что $f(x) \ge \mu$ для любого $x \in [a; b]$.

46. Пусть функция f непрерывна в точке a и для каждого $\delta > 0$ существуют точки $x'_\delta, x''_\delta \in U_\delta(a)$ такие, что $f(x'_\delta)f(x''_\delta) \le 0$. Доказать, что $f(a) = 0$.

47. Пусть функция f определена и ограничена на сегменте $[a; b]$. Доказать, что функции $m(x) = \inf\{f(\xi) :\ \xi \in [a;\, x)\}$, $M(x) = \sup\{f(\xi) :\ \xi \in [a;\, x)\}$ непрерывны слева на промежутке $(a; b]$.

48. Пусть функция f определена и ограничена на сегменте $[a; b]$. Доказать, что функции $m(x) = \inf\{f(\xi) :\ \xi \in (x;\, b]\}$, $M(x) = \sup\{f(\xi) :\ \xi \in (x;\, b]\}$ непрерывны справа на промежутке $[a; b)$.

49. Пусть функция $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = \mathrm{sgn} x$. Доказать, что функции $m(x) = \inf\{-f(\xi) :\ \xi \in [-1;\, x)\}$, $M(x) = \sup\{f(\xi) :\ \xi \in [-1;\, x)\}$ непрерывны слева и разрывны справа в точке $x = 0$.

50. Пусть функция $f : [0; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = [x]$ (целая часть x). Доказать, что функции $m(x) = \inf\{-f(\xi) :\ \xi \in [0;\, x)\}$, $M(x) = \sup\{f(\xi) :\ \xi \in [0;\, x)\}$ непрерывны слева и разрывны справа в точке $x = 1$.

51. Доказать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет хотя бы один корень в интервале $(1; 2)$.

52. Имеет ли данное уравнение действительные корни на сегменте $[a;\ b]$:

    а) $x^4 - 4x - 1 = 0$, $a = -1,\ b = 2$;

    б) $2^x + \sqrt[3]{x} = 0$, $a = -1,\ b = 1$;

    в) $2^x + \cos x = 3$, $a = 0,\ b = \pi$;

    г) $\cos 2x - \ln x = 0$, $a = \pi/4,\ b = \pi/2$?

53. Доказать, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

54. Уравнение $x \cdot 2^x = 1$ имеет положительный корень, меньший единицы. Доказать.

55. Имеет ли корень уравнение $\sin x - x + 1 = 0$?

56. Является ли функция $f(x) = x^3 + 2x - 3$ обратимой на $\mathbb{R}$?

57. Доказать, что уравнение $x = y - c \sin y$, где $0 < c \le 1$, задаёт одну непрерывную функцию $y = f(x)$.

58. Доказать, что функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ и $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ взаимно обратные.

59. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{J} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \dfrac{p}{q} - \text{ несократимая дробь.} \end{cases}$$
Доказать, что функция f непрерывна в каждой иррациональной точке.

60. Функция f непрерывна на $[a;+\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Доказать, что функция f ограничена на $[a;+\infty)$.

61. Функция f непрерывна в интервале $(a;b)$ и существуют конечные $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Доказать, что функция f ограничена на $(a;b)$.

62. Доказать, что функция
$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$
принимает на любом сегменте $[0;a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, но не является непрерывной на нём.

63. Функция f непрерывна на сегменте $[a;b]$, число C заключено между $f(a)$ и $f(b)$. Доказать, что каждое из множеств
$$A = \{x \in (a;b):\ f(x) < C\}, \qquad B = \{x \in (a;b):\ f(x) > C\}$$
открыто.

64. Функция f непрерывна на сегменте $[a;b]$, число C заключено между $f(a)$ и $f(b)$. Доказать, что множество
$$X = \{x \in [a;b]:\ f(x) = C\}$$
имеет и наибольший и наименьший элементы.

65. Если функция f равномерно непрерывна на ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}$, то она ограничена на нём. Доказать.

66. Сумма двух равномерно непрерывных на множестве $X \subset \mathbb{R}$ функций равномерно непрерывна на X. Доказать.

67. Произведение двух равномерно непрерывных на ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}$ функций равномерно непрерывно на X. Доказать.

68. Если функция f равномерно непрерывна на $[a;\ c]$ и $[c;\ b]$, то она равномерно непрерывна на $[a;\ b]$ $(a < c < b)$. Доказать.

4 Производная и её приложения

Производная является основным понятием дифференциального и интегрального исчисления, составляющего основу математического анализа. Построение дифференциального и интегрального исчисления в общих чертах было завершено к концу XVII века в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница, однако его строгое обоснование было разработано лишь в начале XIX века О. Коши с помощью понятия предела.

4.1 Определение производной

Пусть X — открытый промежуток $(a;\ b)$, $a < b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f:\ X \to \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in X$ и $\Delta x \neq 0$ таково, что $x = x_0 + \Delta x \in X$. Будем называть Δx приращением аргумента, $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приращением функции и отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ разностным отношением в точке x_0.

Определение 4.1. *Если существует конечный предел разностного отношения,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{4.1}$$

где $x = x_0 + \Delta x$, то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается одним из следующих символов:

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0),\ y'(x_0),\ \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Операция вычисления производной называется дифференцированием.

Если производная $f'(x_0)$ существует, то функция называется дифференцируемой в точке x_0.

Если же производная $f'(x)$ существует в каждой точке промежутка X, то функция называется дифференцируемой на промежутке X.

Теорема 4.1. (Критерий дифференцируемости) Пусть X — открытый промежуток, f : $X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует постоянная A такая, что приращение Δy функции f в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{4.2}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$.

Доказательство. Пусть существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда по теореме 3.15 разностное отношение представимо в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{4.3}$$

Пусть для функции f в точке x_0 выполняется условие (4.2). Тогда, разделив обе части (4.2) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Отсюда следует, что функция f дифференцируема в точке x_0 и что $f'(x_0) = A$. ∎

Замечание 4.1. *Из доказательства теоремы следует, что коэффициент A в условии дифференцируемости функции (4.2) равен $f'(x_0)$, так что если известно, что f дифференцируема в точке x_0, то условие дифференцируемости можно записывать в виде (4.3).*

Так как $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, то условие дифференцируемости можно записывать и в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{4.4}$$

Замечание 4.2. *Если в (4.2) $A \neq 0$, то слагаемое $A\Delta x$ является линейной функцией от Δx, поэтому имеет такой же порядок малости, что и Δx, в то время как второе слагаемое есть $o(\Delta x)$, то есть при $\Delta x \to 0$ стремится к нулю быстрее первого слагаемого. Вследствие этого первое слагаемое в (4.2) называют главной или линейной частью приращения функции в точке x_0. Если $A = 0$, то главная часть приращения отсутствует.*

Определение 4.2. *Если функция f дифференцируема в точке x_0 открытого промежутка X, то первое слагаемое в правой части формулы (4.2) назовём дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка) функции f в точке x_0 и обозначим символом dy.*

Примем соглашение считать для независимой переменной x, что $dx = \Delta x$, хотя dx будем называть дифференциалом аргумента, а Δx — приращением. Иначе говоря, для независимой переменной понятия "приращение" и "дифференциал" будем считать тождественными.

Из определения дифференциала и принятого соглашения следует, что дифференциал функции и производная связаны друг с другом равенствами

$$dy = dy(x_0) = f'(x_0)dx; \tag{4.5}$$

$$f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}\,.$$

Пример 4.1. *Пусть $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Возьмём любое $x \in \mathbb{R}$, любое приращение $\Delta x \neq 0$ и рассмотрим приращение функции Δf.*

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0 = 0 \cdot \Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x) \equiv 0$.

Так как приращение представлено в виде (4.2), то функция $f(x) \equiv c$ дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$ и

$$c' = 0; \quad dc \equiv 0.$$

Пример 4.2. *Пусть $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Возьмём любое $x \in \mathbb{R}$, любое приращение $\Delta x \neq 0$ и рассмотрим приращение функции Δf.*

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x = 1 \cdot \Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x) \equiv 0$.

Сравнивая полученное с (4.3), заключаем, что функция $f(x) = x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и что

$$x' = 1, \quad dx = df(x) = \Delta x.$$

Геометрический смысл производной и дифференциала

Пусть на открытом промежутке X задана непрерывная функция f. Возьмём точку x_0 на промежутке X, вычислим $y_0 = f(x_0)$ и поставим задачу: написать уравнение касательной, проведённой к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$. Но сначала нужно определить, какую прямую мы будем называть касательной к графику функции.

Дадим x_0 приращение Δx, положим $x = x_0 + \Delta x$, вычислим $y = f(x)$ и через точки M_0 и $M(x, y)$ проведём прямую, которую будем называть секущей. (Рис.1?)

Определение 4.3. *Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 назовём предельное положение секущей M_0M при условии $\Delta x \to 0$.*

Напишем уравнение секущей M_0M, обозначив координаты её текущей точки буквами X, Y.

$$\frac{Y-y_0}{y-y_0} = \frac{X-x_0}{x-x_0}\,,$$

или

$$Y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x_0).$$

Из последнего уравнения видно, что предельное положение секущей определено тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Таким образом, касательную к графику функции в точке M_0 можно провести в том и только том случае, когда функция f дифференцируема в точке x_0, при этом уравнение касательной имеет следующий вид:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0). \tag{4.6}$$

А поскольку $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, а угловой коэффициент прямой, как известно, равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, то получается, что производная имеет следующий геометрический смысл: *производная функции f в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке* $(x_0,\ f(x_0))$, то есть

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

По тому же рисунку (!?) можно установить и геометрический смысл дифференциала. Длина отрезка $M'M$ равна Δy, а длина отрезка $M''M'$ равна $M_0M''\cdot\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)\Delta x$, то есть dy — линейной части приращения Δy (см. (4.3)). Так как второе слагаемое в (4.3) — бесконечно малая более высокого порядка, чем первое (при $\Delta x \to 0$), то в достаточно малой окрестности точки x_0 можно считать, что

$$f(x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)dx. \tag{4.7}$$

Эта замена приращения функции дифференциалом часто используется для приближённого вычисления значений функции и построения приближённых формул.

Физический смысл производной

Пусть по прямой движется точка и известен путь $s = f(t)$, пройденный ею за время t ($t \in [0, T]$). Требуется определить скорость движения точки в момент времени $t_0 \in (0;\, T)$.

Для решения поставленной задачи возьмём приращение $\Delta t \neq 0:\ t + \Delta t \in [0;\, T]$ и вычислим среднюю скорость точки на временном промежутке $[t;\ t+\Delta t]$. За этот промежуток времени пройден путь $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$, поэтому $v_{ср.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Тогда

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} v_{ср.} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Следовательно, физический смысл производной заключается в следующем: *скорость есть производная от пройденного пути.*

Сделаем несколько обобщений понятия производной. Пусть, как и раньше, X — открытый промежуток, $f:\ X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

Определение 4.4. *Правой производной $f'_+(x_0)$ функции f в точке x_0 назовём предел отношения приращения функции к приращению аргумента в точке x_0 при стремлении Δx к нулю справа,*

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Аналогично, левая производная

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Если функция имеет в точке x_0 правую (левую) производную, то будем называть её дифференцируемой в точке x_0 справа (слева). Для такой функции в право(лево)сторонней окрестности точки x_0 справедливо представление (4.2) с $A = f'_+(x_0)\ \big(f'_-(x_0)\big)$, она имеет в точке x_0 правую (левую) касательную.

Функция может не иметь в точке x_0 ни левой, ни правой производной, может иметь одну из них, но не иметь другой, может иметь обе, но различные.

Пример 4.3. *Пусть $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.*

Покажем, что эта функция не имеет в точке $x_0 = 0$ ни правой, ни левой производной.

Если $x_0 = 0$, то $\Delta x = x - 0 = x$, $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \dfrac{1}{x}$. Но так как функция $\sin \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не имеет ни левого, ни правого предела (см. пример 3.3), то и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует ни справа, ни слева.

Пример 4.4. *Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}\,, & x > 0\,, \\ 0, & x \le 0\,. \end{cases}$$

Эта функция, как следует из предыдущего примера, правой производной не имеет, а левая, очевидно, равна нулю.

Пример 4.5. *Пусть $f(x) = |x|$.*

Найдём правую и левую производные в точке $x_0 = 0$. Как и выше, если $x_0 = 0$, то $\Delta x = x$.

Если $x > 0$, то $f(x) = x$, поэтому $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x$ и

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Если $x < 0$, то $f(x) = -x$, поэтому $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -x$ и

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Как видим, функция $|x|$ имеет в точке 0 и правую, и левую производные, не равные друг другу. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть X — открытый промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке определены обе односторонние производные, причём $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.*

Доказательство этого тривиального утверждения предоставляется читателю.

Теорема 4.3. *Пусть X — открытый промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Если функция f имеет в точке x_0 правую производную, то она непрерывна в точке x_0 справа, если имеет левую, то непрерывна слева, и если имеет производную, то непрерывна.*

Перед доказательством теоремы отметим, что условие непрерывности функции в точке по Коши в случае промежутка может быть сформулировано следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что если $|\Delta x| < \delta$, то $|\Delta y| < \varepsilon$.

Это утверждение называют *разностной формой условия непрерывности*. Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно заметить, что $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y$.

Доказательство. Пусть функция f имеет в точке x_0 правую производную. Тогда для её приращения в точке x_0 имеет место представление (4.4) при $\Delta x > 0$. Так как оба слагаемых в правой части этого представления бесконечно малы при $\Delta x \to 0$, то по $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы при $0 < \Delta x < \delta$ выполнялось: $|A\Delta x| < \varepsilon/2$, $|o(\Delta x)| < \varepsilon/2$, то есть $|\Delta y| < \varepsilon$.

Второе и третье утверждения теоремы доказываются аналогично. ■

То, что обратное утверждение неверно, следует из рассмотренных выше примеров 4.3 — 4.5. В этих примерах функция непрерывна в точке $x = 0$, однако в примере 4.3 функция в точке $x = 0$ не имеет ни левой, ни правой производной, в примере 4.4 функция не имеет левой производной, но имеет правую, в примере 4.5 функция не имеет производной, хотя имеет и левую, и правую.

Определение 4.5. *Пусть X — открытый промежуток, $f : x \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Пусть функция f непрерывна в точке x_0. Будем говорить, что функция f имеет в точке x_0 бесконечную производную и писать $f'(x_0) = \infty$, если в этой точке*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty.$$

Так как в этом случае угол наклона секущей, проведённой к графику функции через точку x_0, стремится к $\pi/2$ при $\Delta x \to 0$, то касательная к графику функции в этой точке будет вертикальной и иметь уравнение $x = x_0$.

Если $f'(x_0) = \infty$, то функция не является дифференцируемой в точке x_0, поскольку в этом случае условие дифференцируемости (4.3) не имеет смысла.

Пример 4.6. *Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$ и найдём её производную в точке $x_0 = 0$.*

Возьмём приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta y = \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = +\infty.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше в конечном случае, можно определить бесконечную правую $f'_+(x_0)$ и бесконечную левую $f'_-(x_0)$ производные.

4.2 Таблица производных. Правила дифференцирования

Таблицу производных выпишем сразу целиком ради удобства использования, хотя вывод формул будет осуществляться постепенно, по мере установления правил дифференцирования различных видов функций.

Таблица производных

1) $c' = 0$;

2) $(x^p)' = px^{p-1}$ $(p \in \mathbb{R})$,

в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,

в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$; 6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

15) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 16) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Формула 1) уже доказана (пример 4.1). Докажем формулы 3) и 5).

3) $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$

При выводе формулы был использован 4-й замечательный предел (теорема 3.30).

5) $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(\sin x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Теорема 4.4. (Арифметические операции над дифференцируемыми функциями) Пусть функции u, v определены на открытом промежутке X и дифференцируемы в точке $x \in X$. Тогда в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное (при дополнительном условии $v(x) \neq 0$) этих функций и

1) $(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$;

2) $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Доказательство. 1) Возьмём $\Delta x \neq 0$ и составим приращение функции $u \pm v$.

$$\Delta(u \pm v) = (u \pm v)(x + \Delta x) - (u \pm v)(x) =$$

$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) \pm (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u \pm \Delta v.$$

Разделим обе части получившегося равенства на Δx и перейдём к пределу, устремив Δx к нулю. Получим:

$$(u \pm v)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

2) Опять возьмём $\Delta x \neq 0$, вычислим и представим $\Delta(uv)$ в нужном для использования виде.

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= \left(u(x+\Delta x) - u(x)\right)v(x+\Delta x) + u(x)\left(v(x+\Delta x) - v(x)\right) = \Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot \Delta v.$$

Разделим обе части получившегося равенства на Δx и, совершая предельный переход при $\Delta x \to 0$, учтём, что функция $v(x)$ дифференцируема, следовательно, и непрерывна в точке x.

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot \Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

3) Заметим прежде всего, что по теореме об устойчивости знака непрерывной функции (теорема 3.32) найдётся δ-окрестность точки x, в которой функция v не обращается в ноль. Возьмём поэтому $|\Delta x| < \delta$, составим приращение функции $\dfrac{u}{v}$ в точке x и преобразуем его к нужному для применения виду.

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)} =$$
$$= \frac{\left(u(x+\Delta x) - u(x)\right)v(x) - u(x)\left(v(x+\Delta x) - v(x)\right)}{v(x+\Delta x)v(x)} =$$
$$= \frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\left(\Delta u \cdot v(x) - u(x)\cdot \Delta v\right).$$

Разделим обе части на Δx и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$, учитывая непрерывность функции v в точке x.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$
$$= \frac{1}{v(x)} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)}\left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

■

Следствие 4.1. *Если c — постоянная, то $(cu)'(x) = cu'(x)$.*

Доказательство. Так как $c' = 0$, то $(cu)'(x) = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$. ■

Следствие 4.2. *При тех же условиях, что и в теореме, имеют место формулы:*
1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2) $d(uv) = vdu + udv$;
3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Доказательство. По определению дифференциала

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'(x)dx = \left(u'(x) \pm v'(x)\right)dx = u'(x)dx \pm v'(x)dx = du \pm dv.$$

Остальные формулы доказываются аналогично. ■

Теорема 4.5. (Производная сложной функции) *Пусть X — открытый промежуток в $\mathbb{R}$ и $u : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in X$. Пусть Y — открытый промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий $u(X)$, и $f : Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = u(x)$. Тогда сложная функция $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(u(x))$ $(x \in X)$, дифференцируема в точке x, причём $F'(x) = f'(y)u'(x) = f'(u(x))u'(x)$.*

Коротко правило дифференцирования сложной функции записывают в виде

$$(f(u))' = f'(u)u'. \tag{4.8}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Так как функция u по условию дифференцируема в точке x, то её приращение Δy в этой точке согласно (4.4) можно представить в виде

$$\Delta y = u'(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{4.9}$$

Рассмотрим $y = u(x)$ и дадим ему приращение Δy. Так как функция f по условию дифференцируема в точке $y = u(x)$, то её приращение Δf в этой точке согласно тому же (4.4) можно представить в виде

$$\Delta f = f'(y)\Delta y + o(\Delta y). \tag{4.10}$$

Тогда

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x)) = f(u(x) + \Delta u) - f(u(x)).$$

Так как $u(x) = y$, а $\Delta u = \Delta y$, то, используя (4.10), имеем:

$$\Delta F = f(y + \Delta y) - f(y) = \Delta f = f'(y)\Delta y + o(\Delta y).$$

Подставим сюда выражение (4.9).

$$\Delta F = f'(y)(u'(x)\Delta x + o(\Delta x)) + o(u'(x)\Delta x + o(\Delta x)) =$$

$$= f'(y)u'(x)\Delta x + f'(y)o(\Delta x) + o(u'(x)\Delta x + o(\Delta x)).$$

В получившемся выражении сумма двух последних слагаемых есть $o(\Delta x)$. В самом деле, так как $f'(y)$ — число, то $f'(y)o(\Delta x) = o(\Delta x)$. Очевидно, что $u'(x)\Delta x = O(\Delta x)$ и $O(\Delta x) + o(\Delta x) = O(\Delta x)$. Наконец, $o(O(\Delta x)) = o(\Delta x)$ и $o(\Delta x) + o(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Итак,

$$\Delta F = f'(u(x))u'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

то есть, приращение функции F представлено в виде (4.4). По замечанию 4.1 к теореме 4.1 это означает, что функция F дифференцируема в точке x, и что

$$F'(x) = f'(u(x))u'(x). \tag{4.11}$$

■

Следствие 4.3. (**Инвариантность формы первого дифференциала**) *Вид дифференциала первого порядка не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или же функцией от другой переменной.*

Доказательство. Согласно (4.5)

$$dF = F'(x)dx = f'(u(x))u'(x)dx.$$

Но $F(x) = f(u)$, а $u'(x)dx = du$, поэтому это равенство можно переписать в виде

$$df = f'(u)du.$$

Внешний вид этого равенства такой же, как и равенства (4.5). Но здесь u — функция от x, в то время как в (4.5) x — независимая переменная. ■

Теперь мы можем доказать формулы 6 — 8, 13 — 16 из таблицы производных.

6) Применяя соответствующую формулу приведения и правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

7) Применим правило дифференцирования частного.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8) Формула для производной функции $\operatorname{ctg} x$ выводится аналогично.

13) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\cdot(-1)) = \operatorname{ch} x.$

14) Выводится аналогично.

15) — 16) Выводятся аналогично формулам 7) — 8).

Теорема 4.6 (Производная обратной функции)**.** *Пусть непрерывная и строго монотонная функция $f : [a;\, b] \to [\alpha;\, \beta]$ дифференцируема в точке $x \in (a;\, b)$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y = f(x)$ и*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Существование, строгая монотонность и непрерывность обратной функции следуют из теоремы 3.23. Остаётся доказать дифференцируемость.

Возьмём в точке $y = f(x)$ приращение $\Delta y \neq 0$. Тогда, ввиду строгой монотонности функции f^{-1}: во-первых, $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \neq 0$, а во-вторых, при монотонном изменении Δy монотонно изменяется и Δx, то есть между приращениями Δy и Δx существует взаимно однозначное соответствие. Ввиду же непрерывности обеих функций, если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$, и наоборот. Поэтому

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

■

Замечание 4.3. *Если при сохранении остальных условий теоремы $f'(x) = 0$, то обратная функция в точке $y = f'(x)$ не дифференцируема, однако имеет в этой точке бесконечную производную. Наоборот, если функция f имеет в точке x бесконечную производную, то f^{-1} в точке y дифференцируема и $\left(f^{-1}\right)'(y) = 0$. Оба эти утверждения являются следствиями теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами (теорема 3.19).*

Используя доказанную теорему, докажем оставшиеся формулы из таблицы производных.

4) Функция $y = \ln x$ является обратной к функции $x = e^y$, непрерывной и строго возрастающей на $(-\infty;\ +\infty)$. Возьмём любое $x \in (0;\ +\infty)$, положим $y = \ln x$ (тогда $x = e^y$), выберем отрезок $[a;\ b]$ так, чтобы $-\infty < a < y < b < +\infty$. Тогда функция $x = e^y$ непрерывно и строго монотонно отображает отрезок $[a;\ b]$ на отрезок $[\alpha;\ \beta]$ ($\alpha = e^a$, $\beta = e^b$), содержащий внутри себя точку x. Функция e^y в рассматриваемой точке $y = \ln x$ дифференцируема, причём $(e^y)' = e^y \neq 0$. Выполнены все условия теоремы 4.6, поэтому

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\ .$$

Используя формулу перехода от одного основания логарифма к другому, получим:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}\ .$$

2) Используя определение функции x^p (теорема 3.26, п.6) и правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x} \cdot (p \ln x)' = x^p \cdot \frac{p}{x} = p x^{p-1}.$$

Замечание 4.4. *Формула $(x^p)' = px^{p-1}$ выведена при предположениях $p \in \mathbb{R}$, $x > 0$, исходя из общего определения степенной функции. Однако в случаях $p \in \mathbb{Z}$ или $p \in \mathbb{Q}$ и имеет нечётный знаменатель функция x^p может быть определена по-другому и при $x \leq 0$ ($x < 0$). При $x > 0$ эти определения дают одинаковый результат. Можно показать (попробуйте сделать это самостоятельно), что формула $(x^p)' = px^{p-1}$, когда это возможно, распространяется и на отрицательные значения x.*

9) Функция $\arcsin:\ [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ обратна к функции $\sin:\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$. Для функции $\sin$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполнены все условия теоремы 4.6, поэтому, взяв любое $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, положив $y = \arcsin x$ (или $x = \sin y$) и используя (4.12), получим, учитывая, что $\cos y > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

По замечанию к теореме 4.6 в точках -1 и 1 функция $\arcsin$ имеет бесконечные односторонние производные.

10) Доказывается аналогично.

11) Функция *arctg* $:\ \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ обратна к функции $\mathrm{tg}:\ \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Возьмём любое $x \in (-\infty; +\infty)$, положим $y = \mathrm{arctg}\, x$ (или $x = \mathrm{tg}\, y$). Выберем любой отрезок $[a;\ b]$ так, чтобы $[a;\ b] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $y \in (a;\ b)$. Функция tg, строго монотонно возрастая, отображает отрезок $[a;\ b]$ на отрезок $[\alpha;\ \beta]$ ($\alpha = \mathrm{tg}\, a$, $\beta = \mathrm{tg}\, b$), содержащий точку x. Для отрезка $[a;\ b]$ выполнены все условия теоремы 4.6, поэтому

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}\ .$$

12) Доказывается аналогично.

Таблица производных полностью обоснована.

Анализ таблицы производных и правил дифференцирования показывает , что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.7. *Любая элементарная функция дифференцируема и производная от неё является элементарной функцией.*

Теорема 4.8 (Производная показательно-степенной функции). *Пусть X — открытый промежуток, функции $u, v : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$ и функция и положительна всюду в X. Тогда функция u^v дифференцируема в точке x и её производная находится по формуле*

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x). \tag{4.13}$$

Другими словами, производная показательно-степенной функции есть сумма двух слагаемых: в первом из них функция дифференцируется как степенная, во втором — как показательная.

Доказательство. Показательно-степенная функция дифференцируема как суперпозиция дифференцируемых функций (см. определение). Вычислим её производную.

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) =$$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) = u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x) +$$

$$+ u(x)^{v(x)}v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x).$$

■

Пример 4.7. *Найдём производную функции* $(\sin x)^{\cos x}$ $(x \in (0;\ \pi))$.

Все условия доказанной теоремы выполнены, поэтому

$$((\sin x)^{\cos x})' = \cos x(\sin x)^{\cos x-1}\cos x + (\sin x)^{\cos x}(-\sin x)\ln(\sin x) =$$

$$= \cos^2 x(\sin x)^{\cos x-1} - (\sin x)^{\cos x+1}\ln(\sin x).$$

Определение 4.6. *Пусть функция f определена и положительна на открытом промежутке X и дифференцируема в точке x этого промежутка. Логарифмической производной функции f в точке x называют производную функции* $\ln f$.

Таким образом, логарифмическая производная — это

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}\ . \tag{4.14}$$

Понятие логарифмической производной бывает полезным при вычислении производных и решении некоторых других задач.

Пример 4.8. *Найти производную функции* $y = (1+x^2)^{\operatorname{tg} x}$, $|x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Применим понятие логарифмической производной.

$$\ln y = \operatorname{tg} x \ln(1+x^2);$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(1+x^2) + \operatorname{tg} x \frac{2x}{1+x^2};$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln(1+x^2) + \operatorname{tg} x \frac{2x}{1+x^2}\right) = \left(1+x^2\right)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{\cos^2 x} + \frac{2x \operatorname{tg} x}{1+x^2}\right).$$

■

Пример 4.9. *Пусть функции* $u_1, u_2, \ldots u_n$ ($n \in \mathbb{N}$) *положительны и дифференцируемы на открытом промежутке* X. *Доказать формулу*

$$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 \ldots u_{n-1} u_n'. \tag{4.15}$$

Решение. Пусть $u = u_1 u_2 \ldots u_n$. Тогда

$$\ln u = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n;$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}.$$

Умножая на u, раскрывая скобки и сокращая, получим требуемую формулу. ■

Впрочем, формула (4.15) справедлива и без предположения о положительности функций u_k и может быть доказана методом математической индукции.

Функции, заданные параметрически

Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, причём функция φ непрерывна и строго монотонна (например, возрастает). Тогда по теореме 3.23 на отрезке $[a;\ b]$ ($a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$) определена обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, а вместе с ней и функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, которую называют функцией, заданной параметрически.

С параметрически заданными функциями приходится иметь дело, например, в случае описания траектории движущейся точки, если её положение (координаты) зависит от времени, выступающего в этом примере в роли параметра t.

Теорема 4.9. (**Производная параметрически заданной функции**) *Если, дополнительно к описанным выше условиям, функции* φ *и* ψ *дифференцируемы в точке* $t \in (\alpha;\ \beta)$, *причём* $\varphi'(t) \neq 0$, *то функция* $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ *дифференцируема в точке* $x = \varphi(t)$, *и её производная может быть найдена по формуле*

$$\frac{dy}{dx} = y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4.16}$$

Нижний индекс в формуле (4.16) указывает, по какой переменной ведётся дифференцирование. Это необходимо указывать, поскольку здесь функция y дифференцируется и по x и по t.

Доказательство. Так как функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.6, то с её использованием имеем:

$$y_x' = \left(\psi(\varphi^{-1}(x))\right)' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

■

Пример 4.10. *Пусть* $x = \sin t$, $y = t\cos t$. *Найти* y'_x.

Решение. Функция $x = \sin t$ непрерывна и строго монотонна на каждом из отрезков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$), поэтому на каждом из этих отрезков параметрическими уравнениями $x = \sin t$, $y = t\cos t$ определена функция $y = y(x)$. Поскольку $x'_t = \cos t \neq 0$ в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, то в этих интервалах функция $y = y(x)$ дифференцируема и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t - t\sin t}{\cos t} = 1 - t\,\mathrm{tg}\,t.$$

■

4.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция f определена и дифференцируема на открытом промежутке X. Тогда на этом промежутке задана функция $y = f'(x)$. Если эта функция имеет производную в точке $x_0 \in X$, то эту производную называют производной второго порядка функции f в точке x_0, а саму функцию f называют дважды дифференцируемой в точке x_0. Производную второго порядка функции f в точке x_0 обозначают одним из следующих символов:

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = y''(x_0) = \frac{d^2 y}{dx^2}(x_0).$$

Так же, по индукции, определяется производная любого порядка n ($n \in \mathbb{N}$). Именно: если функция f имеет на промежутке X производные до порядка $n-1$ включительно, то производной порядка n функции f в точке $x_0 \in X$ называют производную от производной порядка $n-1$ (в случае её существования). Производную порядка n функции f в точке x_0 обозначают одним из следующих символов:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = y^{(n)}(x_0) = \frac{d^n y}{dx^n}(x_0).$$

Ради единообразия производную функции f иногда называют производной первого порядка и обозначают символом $f^{(1)}$, а саму функцию f — производной нулевого порядка и обозначают символом $f^{(0)}$, то есть,

$$f^{(0)}(x) = f(x),\ f^{(1)}(x) = f'(x).$$

Производные второго и третьего порядков иногда обозначают также символами f'', f''' соответственно, а производную четвёртого порядка — символом f^{IV}.

Выведем формулы для производных порядка n некоторых элементарных функций.

1) Степенная функция.

$$(x^p)^{(n)} = p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n}. \tag{4.17}$$

Действительно, $(x^p)' = px^{p-1}$, $(x^p)'' = (px^{p-1})' = p(p-1)x^{p-2}$. Далее по индукции, если $(x^p)^{(n-1)} = p(p-1)\ldots(p-n+2)x^{p-n+1}$, то

$$(x^p)^{(n)} = \big(p(p-1)\ldots(p-n+2)x^{p-n+1}\big)' = p(p-1)\ldots(p-n+2)\cdot(p-n+1)x^{p-n}.$$

Если $p \in \mathbb{N}$, то $(x^p)^{(p)} = p(p-1)\ldots(p-p+1)x^{p-p} = p!$ — постоянная, а при $n > p$ $(x^p)^{(n)} = 0$.

2) Показательная функция.

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a. \tag{4.18}$$

Эта формула очевидна.

3) Логарифмическая функция.

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\, \frac{(n-1)!}{x^n}\ . \tag{4.19}$$

В самом деле, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Далее

$$(\ln x)^{(n)} = \left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = (-1)(-2)\ldots(-(n-1))x^{-1-(n-1)} = (-1)^{n-1}\, \frac{(n-1)!}{x^n}\ .$$

4) Функции $\sin x$ и $\cos x$.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right). \tag{4.20}$$

Заметим, что $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Повторим указанную операцию ещё $(n-1)$ раз и получим требуемую формулу.

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right). \tag{4.21}$$

Эта формула доказывается аналогично предыдущей.

5) Функция $\operatorname{arctg} x$.

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \sin\left(n\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{4.22}$$

Если $\operatorname{arctg} x = y$, то $x = \operatorname{tg} y$, но тогда

$$\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^{1/2}} = \cos y,$$

поэтому формулу (4.22) можно переписать в виде

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{4.23}$$

В этом виде мы и будем её доказывать, используя метод математической индукции.

При $n = 1$

$$y^{(1)} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \cos^2 y.$$

Если в (4.23) положить $n = 1$, то получится то же самое, так что при $n = 1$ формула (4.23) верна.

Пусть формула (4.23) верна при некотором натуральном n. Тогда

$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = (n-1)!\left((\cos^n y)' \sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos^n y\left(\sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)'\right) =$$

$$= (n-1)!\left(\, n\cos^{n-1} y(-\sin y)y' \cdot \sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos^n y \cdot n\cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) y'\right) =$$

$$= (n-1)!\; n\cos^{n-1} y(-\sin y)\cos^2 y \cdot \sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+ (n-1)! \cos^n y \cdot n\cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^2 y =$$

$$= n! \cos^{n+1} y\left(\cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos y - \sin\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin y\right)$$

$$= n! \cos^{n+1} y \cdot \cos\left((n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Добавив в аргумент второго множителя $\frac{\pi}{2}$, получим окончательно

$$y^{(n+1)} = n! \cos^{n+1} y \cdot \sin\left((n+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Как видим, $(n+1)$-я производная имеет тот же вид, что и n-я, следовательно, формула (4.23) доказана.

Теорема 4.10 (Формула Лейбница)**.** *Пусть функции u, v определены и $n-1$ раз дифференцируемы на открытом промежутке X, а в точке x этого промежутка имеют производные порядка n. Тогда произведение uv имеет в этой точке производную порядка n, которую можно вычислить по формуле*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{4.24}$$

называемой формулой Лейбница.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции.

При $n = 1$ формула Лейбница верна, так как $(uv)' = uv' + u'v$ и по формуле Лейбница при $n = 1$ получается то же самое.

Предположим, что формула Лейбница верна для некоторого натурального значения n, и покажем, что тогда она верна и для следующего значения $n+1$. По определению,

$$(uv)^{(n+1)} = \left((uv)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\left(u^{(k)}\right)' v^{(n-k)} + u^{(k)} \left(v^{(n-k)}\right)'\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k+1)}.$$

Введём в первой сумме новый индекс суммирования, положив $k+1 = k'$. Тогда

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} u^{(k')} v^{(n-k'+1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k+1)}.$$

Опустим штрих у индекса суммирования в первой сумме, затем переставим суммы местами, выделим из первой суммы слагаемое, отвечающее значению $k = 0$, а из второй — значению $k = n+1$, а оставшиеся суммы сложим. Тогда

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)} v^{(0)}.$$

Воспользуемся формулой $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ и заметим, что перед первым слагаемым можно поставить множитель C_{n+1}^0, равный единице, а перед последним — множитель C_{n+1}^{n+1}, тоже равный единице. Тогда полученную формулу можно записать в виде

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}. \tag{4.25}$$

Так как полученная формула совпадает с формулой (4.24), если в последней заменить n на $n+1$, то индуктивный переход от n к $n+1$ обоснован. ■

Пример 4.11. *Пусть* $y = e^{3x}\cos 2x$. *Найти* $y^{(6)}$.

Решение. В силу формул (4.18), (4.21) и правила дифференцирования сложной функции

$$\left(e^{3x}\right)^{(k)} = 3^k e^{3x}, \quad (\cos 2x)^{(k)} = 2^k \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 6.$$

Применим формулу Лейбница, полагая в ней $u = e^{3x}$, $v = \cos 2x$.

$$y^{(6)} = \sum_{k=0}^{6} C_6^k \left(e^{3x}\right)^{(k)} (\cos 2x)^{(6-k)} = 1 \cdot e^{3x} \cdot 2^6 \cos(2x + 3\pi) + 6 \cdot 3e^{3x} \cdot 2^5 \cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) +$$

$$+15 \cdot 3^2 e^{3x} \cdot 2^4 \cos(2x + 2\pi) + 20 \cdot 3^3 e^{3x} \cdot 2^3 \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 15 \cdot 3^4 e^{3x} \cdot 2^2 \cos(2x + \pi) +$$

$$+6 \cdot 3^5 e^{3x} \cdot 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot 3^6 e^{3x} \cdot \cos 2x = e^{3x}\left(-64\cos 2x - 576\sin 2x + 2160\cos 2x + \right.$$

$$\left. +4320\sin 2x - 4860\cos 2x - 2916\sin 2x + 729\cos 2x\right) = e^{3x}\left(828\sin 2x - 2035\cos 2x\right).$$

■

Старшие производные параметрически заданной функции

Пусть дана параметрически заданная функция $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t \in [\alpha;\ \beta])$. Если условия теоремы 4.9 выполнены в каждой точке интервала $(\alpha;\ \beta)$, то в каждой точке интервала $(\alpha;\ \beta)$ формулой (4.16) определена производная y'_x, которая тоже является параметрически заданной функцией $x = \varphi(t)$, $y'_x = \psi_1(t)$ $(t \in (\alpha;\ \beta))$, где $\psi_1(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Если функции φ и ψ дважды дифференцируемы в некоторой точке t интервала $(\alpha;\ \beta)$, то и функция ψ_1 дифференцируема в этой точке, поэтому определена производная функции y'_x, которую называют производной второго порядка от параметрически заданной функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t \in [\alpha;\ \beta])$ и обозначают символом y''_{xx} или y''_{x^2}. Итак,

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_t}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Третья и так далее производные параметрически заданной функции определяются по индукции аналогичным образом.

Пример 4.12. *Пусть* $x = \sin t$, $y = t\cos t$. *Найти* y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}.

Решение. Данный пример является продолжением примера 4.10, в котором производная первого порядка была найдена: $y'_x = 1 - t\,\mathrm{tg}\,t$. Продолжим:

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(1 - t\,\mathrm{tg}\,t)'_t}{\cos t} = \frac{-\mathrm{tg}\,t - \dfrac{t}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{\sin t\cos t + t}{\cos^3 t};$$

$$(y)'''_{x^3} = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t} = -\frac{\left(\dfrac{\sin t\cos t + t}{\cos^3 t}\right)'_t}{\cos t} =$$

$$= -\frac{(\cos^2 t - \sin^2 t + 1)\cos^3 t - (\sin t\cos t + t)3\cos^2 t(-\sin t)}{\cos^7 t} =$$

$$= -\frac{\cos^3 t - \cos t\sin^2 t + \cos t + 3\sin^2 t\cos t + 3t\sin t}{\cos^5 t} =$$

$$= -\frac{\cos^3 t + 2\sin^2 t\cos t + 3t\sin t + \cos t}{\cos^5 t}\ .$$

Следует помнить о том, что к каждой найденной производной необходимо присоединить $x = \sin t$. ■

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция f определена и дифференцируема на открытом промежутке X. Тогда в каждой точке x промежутка X определён дифференциал (первого порядка) $dy = f'(x)dx$, который зависит как от точки промежутка X, так и от приращения dx. Принято, однако, считать, что приращение dx во всех точках промежутка X берётся одинаковым, то есть при переходе от одной точки к другой не меняется. Тогда dy является функцией от x и можно ставить вопрос о дифференциале этой функции.

Определение 4.7. *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X и дважды дифференцируема в точке x этого промежутка. Дифференциалом второго порядка функции f в точке x называют дифференциал от дифференциала первого порядка, вычисленный в точке x при том же приращении аргумента dx, что и в первый раз. Дифференциал второго порядка обозначают символами d^2y или d^2f.*

Вычислим d^2y. По определению, учитывая, что dx — постоянная, имеем:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{4.26}$$

В этой формуле следует учитывать, что dx — единый символ и dx^2 следует читать как $(dx)^2$, а не как $d(x^2)$. это замечание распространяется и на другие степени dx.

Аналогичным образом по индукции определяется дифференциал любого порядка n.

Определение 4.8. *Пусть функция f дифференцируема $n-1$ раз на промежутке X и n раз в точке x этого промежутка. Дифференциалом n-го порядка функции f в точке x называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка, вычисленный в точке x при том же приращении аргумента dx, что и в предыдущие разы. Дифференциал n-го порядка обозначают символами d^ny или d^nf.*

Так же, как и выше, выводится формула

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{4.27}$$

Выше (см. следствие из теоремы 4.5) было отмечено свойство инвариантности формы первого дифференциала. Второй и последующие дифференциалы этим свойством не обладают. Покажем это. Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Тогда

$$dy = f'(u)du.$$

Здесь $du = u'(x)dx$ — функция от x, поэтому при вычислении второго дифференциала нужно принимать во внимание, что $f'(u)du$ — произведение двух функций, поэтому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

Вид второго дифференциала изменился: появилось слагаемое $f'(u)d^2u$, которого в случае независимой переменной не было.

4.4 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Сейчас мы изучим свойства дифференцируемых функций, на которые опираются многочисленные практические применения понятия производной. Основной здесь является следующая теорема.

Теорема 4.11 (Ферма́)**.** *Пусть функция f определена на промежутке X и во внутренней(!) точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке c определена производная функции f, то*

$$f'(c) = 0. \tag{4.28}$$

Доказательство. По условию теоремы во всех точках $x \in X$ выполняется или неравенство $f(x) \le f(c)$, или неравенство $f(x) \ge f(c)$. Рассмотрим первый случай.

Так как точка c — внутренняя, то найдётся окрестность $U_\delta(c) \subset X$. Будем брать в точке c приращение Δx такое, чтобы выполнялось условие $|\Delta x| < \delta$, то есть $x = c + \Delta x \in X$. Тогда, в силу предположения $f(x) \le f(c)$, будем иметь:

$$\Delta y = f(x) - f(c) \le 0.$$

По условию теоремы в точке c определена производная

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда по теореме 4.2 в точке c определены левая и правая производные функции f и

$$f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c).$$

Но если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$, поэтому и

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0,$$

а если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$, поэтому и

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0.$$

Итак, одновременно выполняются два неравенства: $f'(c) \ge 0$ и $f'(c) \le 0$, из чего следует, что $f'(c) = 0$.

Второй случай рассматривается аналогично. ■

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл, вытекающий из геометрического смысла производной: в точке c касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Теорема Ферма перестаёт быть верной, если хотя бы одно из её условий не выполнено. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 4.13. *Пусть $f(x) = |x|$, $X = (-1;\ 1)$. Функция достигает наименьшего значения в точке $c = 0$, но в этой точке производная не определена (см. пример 4.5). У рассматриваемой функции вообще нет точек, в которых производная равна нулю.*

Пример 4.14. *Пусть $f(x) = x$, $X = [0;\ 1]$. Эта функция достигает наименьшего и наибольшего значений на концах промежутка X. $f'(x) \equiv 1$. Как видим, производная не обращается в ноль не только в точках 0 и 1, но и нигде на множестве X.*

Теорема 4.12 (Ролль). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируема в интервале $(a;\ b)$ и $f(a) = f(b)$, то в интервале $(a;\ b)$ найдётся точка c, в которой $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Если функция постоянна на отрезке $[a;\ b]$, то её производная равна нулю во всех точках интервала $(a;\ b)$. В противном случае по второй теореме Вейерштрасса (теорема 3.36) функция f достигает на отрезке $[a;\ b]$ наименьшего и наибольшего значений, причём делает это в различных точках c_1 и c_2 отрезка $[a;\ b]$. Одна из этих точек, скажем c_1, может совпадать с концом отрезка, но тогда другая, c_2, лежит внутри него. В таком случае, так как выполнены все условия теоремы Ферма, $f'(c_2) = 0$. ■

Теорема Ролля имеет следующий геометрический смысл: при выполнении её условий на интервале $(a;\ b)$ найдётся точка, в которой касательная к графику функции горизонтальна.

Следует отметить, что ни одно из условий теоремы Ролля не является лишним.

Пример 4.15. *Пусть $f(x) = x,\ x \in [-1;\ 1]$. Функция непрерывна, дифференцируема, но $f(-1) \neq f(1)$.*

Пример 4.16. *Пусть $f(x) = |x|,\ x \in [-1;\ 1]$. Функция непрерывна, $f(-1) = f(1)$, но в точке $x = 0$ функция не дифференцируема.*

Пример 4.17. *Пусть $f(-1) = 1$ и $f(x) = x,\ x \in (-1;\ 1]$. Функция дифференцируема в интервале $(-1;\ 1)$, $f(-1) = f((1)$, но непрерывности на отрезке $[-1;\ 1]$ нет.*

Во всех трёх примерах на интервале $(-1;\ 1)$ не существует точки, в которой производная обращается в нуль.

Теорема 4.13 (Лагранж). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема в интервале $(a;\ b)$. Тогда найдётся точка $c \in (a;\ b)$, такая что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.29}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

и покажем, что для неё на отрезке $[a;\ b]$ выполняются все условия теоремы Ролля.

1) g непрерывна на $[a;\ b]$ как сумма двух непрерывных функций.

2) g дифференцируема в $(a;\ b)$ как сумма двух дифференцируемых функций.

3) Проверим, что $f(a) = f(b)$. Действительно,

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

По теореме Ролля найдётся такая точка $c \in (a;\ b)$, что $g'(c) = 0$. Но

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

Следовательно,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Умножив на $b - a$ и разнеся слагаемые по разные стороны от знака равенства, получим формулу 4.29. ■

Формулу 4.29 называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Часто бывает более удобным использовать формулу Лагранжа в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),\ 0 < \theta < 1. \tag{4.30}$$

Возможность перехода от (4.29) к (4.30) устанавливается легко. Положим $\theta = \dfrac{c - a}{b - a}$. Тогда нетрудно заметить, что $0 < \theta < 1$ и что $c = a + \theta(b - a)$.

Несмотря на то, что точное значение c (равно как и θ) за очень редким исключением определить невозможно, формула Лагранжа, как мы убедимся ниже, имеет многочисленные применения.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: при выполнении её условий найдётся точка c такая, что касательная к графику функции в этой точке параллельна хорде, соединяющей концы графика.

Так же, как и в предыдущих теоремах, в теореме Лагранжа лишних условий нет.

Пример 4.18. *Пусть* $f(x) = |x|,\ x \in [-1;\ 2]$.

Функция непрерывна на $[-1;\ 2]$, но в точке $x = 0$ не дифференцируема. Так как $f(2) - f(-1) = 1$, а $2 - (-1) = 3$, то для справедливости равенства (4.29) необходимо, чтобы $f'(c) = \dfrac{1}{3}$. Но $f'(x) = -1$ при $x < 0$ и $f'(x) = 1$ при $x > 0$. Оба эти значения отличны от $\dfrac{1}{3}$, поэтому равенство (4.29) невозможно.

Пример 4.19. *Пусть* $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in [0;\ 1]$.

Функция дифференцируема в интервале $(0;\ 1)$, но не является непрерывной в точке $x = 0$. $f(1) - f(0) = 1$, а $f'(x) = 0$ всюду на $(0;\ 1)$. Равенство (4.29) невозможно.

Приведём некоторые часто употребляемые варианты формулы Лагранжа.

1) Если функция f дифференцируема на открытом промежутке X и $x_1, x_2 \in X$, то

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ \xi \in (x_1;\ x_2)\,, \tag{4.31}$$

или

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1),\ 0 < \theta < 1. \tag{4.32}$$

В этих формулах не имеет значения взаимное расположение точек x_1, x_2, ибо при перемене их местами обе части формул одновременно изменяют знак.

2) Если функция f дифференцируема на открытом промежутке X, $x \in X$ и Δx таково, что $x + \Delta x \in X$, то

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x,\ \xi \in (x,\ x + \Delta x), \tag{4.33}$$

или

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,\ 0 < \theta < 1. \tag{4.34}$$

Теорема 4.14 (Коши). *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируемы в интервале $(a;\ b)$, причём $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a;\ b))$. Тогда найдётся $c \in (a;\ b)$ такое, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{4.35}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что $g(b) \neq g(a)$, ибо в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка $c \in (a;\ b)$, в которой $g'(c) = 0$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

и покажем, что она на отрезке $[a;\ b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

1) Функция F непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ как сумма непрерывных функций.

2) Функция F дифференцируема в интервале $(a;\ b)$ как сумма дифференцируемых в этом интервале функций.

3) Непосредственной проверкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$.

В таком случае по теореме Ролля найдётся $c \in (a;\ b)$, в которой $F'(c) = 0$. Дифференцируя функцию F и подставляя в полученное выражение c, получим

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0,$$

откуда после очевидных преобразований вытекает равенство (4.35). ■

Следует отметить, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, получающимся при $g(x) = x$, и если теорема Лагранжа доказана отдельно, то только ввиду исключительно важной роли, которую она играет в математическом анализе.

Правило Лопиталя

В качестве первого применения свойств дифференцируемых функций выведем правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 4.15 (Первое правило Лопиталя). *Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, причём всюду в этой окрестности $g'(x) \neq 0$, и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Тогда, если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ . \tag{4.36}$$

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке $x = a$, положив $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(0)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(0)$. Это означает, что функции f и g непрерывны в точке $x = a$, а в остальных точках окрестности они непрерывны в силу дифференцируемости. Тогда для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ функции f и g на отрезке $[a;\ x]$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, поэтому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

где $\xi \in (a;\ x)$. Поскольку при $x \to a$, то ξ, находясь между a и x, тоже стремится к a, поэтому в правой части полученного равенства под знаком предела вместо условия $x \to a$ можно поставить условие $\xi \to a$, но тогда оно будет отличаться от доказываемого равенства (4.36) только обозначением переменной в правой части. ∎

Замечание 4.5. *Теорема остаётся справедливой и для односторонних пределов. Если функции f и g определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}{}^{\pm}_\delta(a)$, причём всюду в этой окрестности $g'(x) \neq 0$, и*

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim_{x\to a\pm 0} g(x) = 0,$$

то, если существует $\lim\limits_{x\to a\pm 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a\pm 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to \pm a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \pm a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Доказательство в точности такое же.

Замечание 4.6. *Теорема остаётся справедливой также и при стремлении x к $\infty(\pm\infty)$. Пусть все условия теоремы выполнены в окрестности бесконечно удалённой точки. Положим $x = \dfrac{1}{t}$. Тогда легко проверить, что для функций $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ и $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ условия теоремы будут выполнены в $\dfrac{1}{\delta}$-окрестности нуля, поэтому*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

В случае односторонних окрестностей бесконечно удалённой точки следует дополнительно учесть предыдущее замечание.

Пример 4.20. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Решение. Проверяем, что выполнены условия применения первого правила Лопиталя, и применяем его.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

■

Замечание 4.7. *Правило Лопиталя обратной силы не имеет. Может существовать предел отношения функций, а предел отношения производных — нет.*

Пример 4.21. *Рассмотрим* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$.

Так как $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos(1/x) = 0,$$

в то время как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \cos(1/x)\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

не существует, так как знаменатель стремится к единице, а числитель предела не имеет.

Теорема 4.16 (Второе правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в правосторонней окрестности $(a; a+\delta)$ точки a, причём всюду в этой окрестности $g'(x) \neq 0$, и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty.$$

Тогда, если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует также и* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причём*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ . \tag{4.37}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b$. Покажем, что и

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{4.38}$$

Пусть сначала $|b| < +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела функции найдётся такое δ_1 $(0 < \delta_1 \leq \delta)$, что для любого $x \in (a; a+\delta_1)$ будет выполняться условие

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - b \right| < \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{4.39}$$

Выберем $x_1 \in (a; a+\delta_1)$. Так как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то найдётся δ_2 $(0 < \delta_2 \le \delta_1)$ такое, что для любого $x \in (a; a+\delta_2)$ будет выполняться условие $|f(x)| > |f(x_1)|$. Тогда для любого такого x будем иметь: $f(x) - f(x_1) \ne 0$ ($g(x) - g(x_1) \ne 0$ при $x \ne x_1$ по теореме Лагранжа, так как по условию $g'(x) \ne 0$ в $(a; a+\delta)$).

Пусть $x \in (a; a+\delta_2)$. Преобразуем отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ так, чтобы можно было произвести его оценку:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \frac{g(x)-g(x_1)}{f(x)-f(x_1)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}$. Применив теорему Коши, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\varphi(x), \quad \xi \in (a;\ x). \tag{4.40}$$

Так как при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к ∞, то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, поэтому найдётся δ_3 $(0 < \delta_3 \le \delta_2)$ такое, что при $x \in (a; a+\delta_3)$ будут выполняться условия

$$|\varphi(x)| < 2, \quad |\varphi(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+\varepsilon)} \tag{4.41}$$

(ε в знаменатель добавлено на случай, если $b = 0$).

Возьмём теперь любой $x \in (a; a+\delta_3)$, вычтем b из обеих частей равенства (4.40) и оценим получившееся выражение, используя (4.39), (4.41).

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - b\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\varphi(x) - b\right| = \left|\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b\right)\varphi(x) + b(\varphi(x)-1)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b\right| \cdot |\varphi(x)| + |b|\cdot|\varphi(x)-1| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 + |b|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|b|+\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Тем самым в случае конечного b теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай бесконечного b. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то по теореме 3.19 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Тогда, по доказанному, и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ и снова по теореме 3.19 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
■

Замечание 4.8. *В доказательстве ничего не изменится, если предположить, что условия теоремы выполнены для левосторонней окрестности $(a-\delta; a)$ точки a. Следовательно, принимая во внимание связь между пределом функции в точке и односторонними пределами, можно сделать вывод, что второе правило Лопиталя сохраняет свою силу в случае проколотой двусторонней окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ точки a и обычных пределов.*

Замечание 4.9. *Все замечания, сделанные по поводу первого правила Лопиталя, распространяются и на второе правило Лопиталя.*

Замечание 4.10. *Если после применения одного из правил Лопиталя отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова является неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и если для него выполнены условия* *теорем 4.15 или 4.16, то к отношению* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *снова можно применить правило Лопиталя, а тогда*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}\,.$$

Таким образом, правило Лопиталя можно применять многократно.

Пример 4.22. *Вычислить* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 5x)}$.

Решение. Так как x подходит к $\dfrac{\pi}{2}$ слева, то и x, и $5x$ при достаточной близости к предельному значению находятся в первой четверти, поэтому и $\cos x$, и $\cos 5x$ положительны, следовательно выражение $\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 5x)}$ определено. Поскольку и $\cos x$, и $\cos 5x$ при стремлении x к $\dfrac{\pi}{2}$ стремятся к нулю, а $\ln x$ при $x\to+0$ стремится к $-\infty$, то мы имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. В числителе и знаменателе стоят дифференцируемые функции. Применим, пока формально, второе правило Лопиталя, потом проверим, что в проколотой окрестности $\dfrac{\pi}{2}$ производная знаменателя не обращается в ноль.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 5x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\dfrac{1}{\cos 5x}(-5\sin 5x)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x}{\sin 5x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

Проверяем, что в проколотой окрестности $\dfrac{\pi}{2}$ производная знаменателя не обращается в ноль, и проводим анализ полученного выражения. В первом пределе неопределённости нет, и он находится подстановкой предельного значения. Во втором пределе наблюдаем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой применим первое правило Лопиталя, проверив предварительно выполнение всех условий его применимости.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 5x)}=\frac{1}{5}\cdot 1\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-5\sin 5x}{-\sin x}=1.$$

■

Пример 4.23. *Показать, что* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^{ax}}=0$*, где* $a>0,\ p>0$.

Решение. Числитель и знаменатель при $x\to+\infty$ стремятся к $+\infty$. Легко проверить, что все условия применимости второго правила Лопиталя выполнены, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{px^{p-1}}{ae^{ax}}=\frac{p}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}}{e^{ax}}\,.$$

Как видим, показатель степени числителя уменьшился на единицу. Если $p-1>0$, то снова наблюдается неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$, следовательно, снова можно применить второе правило Лопиталя. Пусть $p=m+r$, где $m=[p]$, а $0<r<1$. Тогда, применив второе правило Лопиталя ещё m раз, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^{ax}}=\frac{p(p-1)(p-2)...(p-m)}{a^{m+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1-r}e^{ax}}=0\,.$$

(Если p — целое, ($p=[p]=m$), то правило Лопиталя применяется на один раз меньше.)

■

Пример 4.24. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}$, *где* $p>0$.

Решение. Анализ показывает наличие неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так как условия применимости второго правила Лопиталя выполнены, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}}=\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0.$$

■

Примеры 4.23, 4.24 показывают, что при $x\to+\infty$ функция $\ln x$ возрастает медленнее функции x^p с любым показателем $p>0$, а функция x^p при любом $p>0$, в свою очередь, возрастает медленнее функции e^{ax} с любым $a>0$. С помощью символов Ландау эти факты записываются следующим образом:

$$\ln x=o(x^p)\ (x\to+\infty),\ p>0. \tag{4.42}$$

$$x^p=o\left(e^{ax}\right)(x\to+\infty),\ p,a>0. \tag{4.43}$$

Правило Лопиталя предназначено <u>только</u> для раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Другие виды неопределённостей: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 — зачастую с помощью алгебраических преобразований можно привести к неопределённостям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, после чего становится возможным применение правила Лопиталя.

Пример 4.25. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to1-0}(\sin(\pi x))^{\ln x}$.

Решение. Анализ показывает наличие неопределённости вида 0^0. Воспользуемся тождеством $a=e^{\ln a}$ $(a>0)$ и непрерывностью функции e^x. Тогда

$$\lim_{x\to1-0}(\sin(\pi x))^{\ln x}=\lim_{x\to1-0}\left(e^{\ln(\sin(\pi x))}\right)^{\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(\sin(\pi x))}.$$

Вычислим отдельно предел показателя степени.

$$\lim_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(\sin(\pi x))=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(\sin(\pi x))}{(\ln x)^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\dfrac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=-\pi\lim_{x\to1-0}x\cos(\pi x)\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2 x}{\sin(\pi x)}=$$

$$=-\pi\cdot(-1)\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2 x}{\sin(\pi x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\pi\lim_{x\to1-0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\pi\cos(\pi x)}=0\,.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to1-0}(\sin(\pi x))^{\ln x}=e^0=1.$ ■

4.5 Формула Тейлора

Формула Тейлора занимает одно из центральных мест в математическом анализе. Она имеет обширные применения как в вопросах теории, так и при решении практических задач.

Теорема 4.17 (Формула Тейлора для многочлена)**.** *Пусть многочлен*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

представлен в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + c_n(x-a)^n. \tag{4.44}$$

Тогда его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$c_0 = P_n(a),\ c_1 = P_n'(a),\ c_2 = \frac{P_n''(a)}{2!}, \ldots,\ c_{n-1} = \frac{P_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}, c_n = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}. \tag{4.45}$$

Доказательство. Продифференцируем (4.44) последовательно n раз.

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + (n-1)c_{n-1}(x-a)^{n-2} + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots + (n-1)\cdot(n-2)c_{n-1}(x-a)^{n-3} + \\ + n\cdot(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

....

$$P_n^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1c_{n-1} + n(n-1)\ldots 3\cdot 2c_n(x-a),$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1c_n\,.$$

Вычисляя $P_n(x)$, $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, ..., $P_n^{(n)}(x)$ при значении $x = a$, найдём:

$$P_n(a) = c_0,\ P_n'(a) = c_1,\ P_n''(a) = 2!c_2,\ \ldots,\ P_n^{(n-1)}(a) = (n-1)!c_{n-1},\ P_n^{(n)}(a) = n!c_n\,,$$

откуда следуют формулы (4.45). ■

Таким образом, представление многочлена в виде (4.44) окончательно выглядит следующим образом:

$$P_n(x) = P_n(a) + P_n'(a)(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ + \frac{P_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{4.46}$$

Формулу (4.46) называют формулой Тейлора для многочлена.

Рассмотрим теперь функцию f, дифференцируемую $n-1$ раз на открытом промежутке X и имеющую в точке a этого промежутка производную порядка n. Тогда, по аналогии с формулой (4.46), мы можем составить многочлен

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{4.47}$$

Если функция f сама не является многочленом степени не выше n, то $f(x)$ не совпадает с $P_n(x)$. Введём обозначение

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{4.48}$$

Тогда, учитывая (4.47), функцию f на промежутке X можно представить в виде:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{4.49}$$

Формулу (4.49) называют формулой Тейлора с центром в точке a, а $R_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора.

Конечно, от формулы Тейлора не будет никакого проку, если мы не научимся оценивать остаточный член, судить о его поведении при увеличении n или при изменении x. Поэтому наша ближайшая задача — получить такие представления для остаточного члена, которые бы позволяли производить с ним вышеуказанные и другие потребные действия.

Теорема 4.18. *Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на открытом промежутке X и $a, x \in X$ $(x \neq a)$. Пусть $\psi : [a;\ x] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, непрерывная на $[a;\ x]$ и дифференцируемая в $(a;\ x)$, причём $\psi'(t) \neq 0$ в указанном интервале. Тогда для остаточного члена справедливо представление*

$$R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,\ \xi \in (a;\ x). \tag{4.50}$$

Это представление остаточного члена называют остаточным членом формулы Тейлора в общей форме.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a;\ x]$ функцию

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots \\ - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Функция φ непрерывна и дифференцируема на $[a;\ x]$ как сумма непрерывных и дифференцируемых слагаемых. Тогда к паре функций φ и ψ можно применить теорему Коши, согласно которой найдётся $\xi \in (a;\ x)$ такое, что имеет место равенство

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\,. \tag{4.51}$$

Вычислим $\varphi(a)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(\xi)$ и подставим в это равенство. Имеем:

$$\varphi(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \\ - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = R_n(x) \text{ (см. (4.49))};$$

$$\varphi(x) = 0;$$

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 +$$
$$+ f''(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^n + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} -$$
$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

следовательно,

$$\varphi'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

После подстановки равенство (4.51) примет вид

$$\frac{-R_n(x)}{\psi(x)-\psi(a)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!\psi'(\xi)}.$$

После очевидных преобразований отсюда получаем (4.50). ■

За счёт выбора функции ψ, удовлетворяющей условиям теоремы 4.18, можно получать различные, более простые, формы остаточного члена.

Теорема 4.19. *Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на открытом промежутке X и $a \in X$. Тогда для любого $x \in X$ остаточный член формулы Тейлора можно представить в виде*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}, \qquad (4.52)$$

где p — любое положительное число, а ξ — некоторая точка из промежутка $(a:x)$.

Это представление остаточного члена называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Шлёмильха-Роша.

Доказательство. Рассмотрим два случая: $x > a$ и $x < a$.

1) Пусть $x > a$. Рассмотрим функцию $\psi(x) = (x-t)^p$ $(p > 0)$. Эта функция на отрезке $[a;\ x]$ непрерывна, её производная $\psi'(t) = -p(x-t)^{p-1} \neq 0$ в интервале $(a;\ x)$, поэтому её можно использовать в представлении остаточного члена формулы Тейлора в общей форме. Подставив ψ и ψ' в (4.50), получим:

$$R_n(x) = \frac{-(x-a)^p}{-p(x-\xi)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

После очевидных преобразований получаем отсюда (4.52).

2) Пусть $x < a$. Тогда рассмотрим функцию $\psi(x) = (t-x)^p$ $(p > 0)$. Снова эта функция непрерывна на $[a;\ x]$, её производная $\psi'(t) = p(t-x)^{p-1} \neq 0$ в интервале $(a;\ x)$, поэтому она удовлетворяет требованиям теоремы 4.18. Подставим ψ и ψ' в (4.50). Тогда

$$R_n(x) = \frac{-(a-x)^p}{p(\xi-x)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n =$$
$$= -\left(\frac{a-x}{\xi-x}\right)^p (\xi-x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}.$$

■

Следствие 4.4. *Остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \xi \in (a;\ x). \qquad (4.53)$$

Такую форму остаточного члена называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа. Для её получения достаточно в (4.52) взять $p = n + 1$.

Остаточный член в форме Лагранжа выглядит особенно просто, имеет такой же вид, как и остальные члены формулы Тейлора $\big($лишь производная $f^{(n+1)}$ вычисляется не в точке a, а в некоторой точке ξ интервала $(a;\ x)\big)$, а потому используется наиболее часто.

Следствие 4.5. *Остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a),\ \xi \in (a;\ x). \tag{4.54}$$

Такую форму остаточного члена называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Коши. Для её получения достаточно в (4.52) взять $p = 1$. Однако запись остаточного члена в форме Коши в виде (4.54) не особенно удобна. Положим поэтому $\theta = \dfrac{\xi - a}{x - a}$. Тогда

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$$

и (4.54) принимает вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1},\ 0 < \theta < 1. \tag{4.55}$$

Выводу ещё одной формы остаточного члена предпошлём лемму, которая может пригодиться и в иных случаях.

Лемма 4.1. *Пусть функция φ определена на открытом промежутке X, дифференцируема на нём $n-1$ раз и в точке a этого промежутка имеет производную порядка n. Если $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) = 0$, …, $\varphi^{(n)}(a) = 0$, то*

$$\varphi(x) = o\left((x-a)^n\right)\ (x \to a). \tag{4.56}$$

Доказательство. Проведём доказательство леммы методом математической индукции.

Проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Если φ дифференцируема в точке a, то её приращение в этой точке можно представить в виде (4.4), поэтому

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Так как по условию $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$, то остаётся

$$\varphi(x) = o(x-a)$$

и справедливость утверждения леммы при $n = 1$ установлена.

Пусть теперь лемма справедлива для $n-1$, то есть всякая функция ψ, дифференцируемая на промежутке X $n-2$ раза, а в точке a $n-1$ раз и удовлетворяющая условиям

$$\psi(a) = \psi'(a) = \ldots = \psi^{(n-1)}(a) = 0,$$

имеет представление $\psi(x) = o\left((x-a)^{n-1}\right)\ (x \to a)$. Покажем, что тогда для функции φ справедливо (4.56).

Положим $\psi(x) = \varphi'(x)$. Очевидно, функция ψ удовлетворяет перечисленным выше условиям, поэтому по сделанному предположению

$$\psi(x) = o\left((x-a)^{n-1}\right)\ (x \to a).$$

Так как $n \geq 2$ (при $n = 1$ лемма уже доказана), то φ дифференцируема, следовательно, и непрерывна на промежутке X, поэтому для любого $x \in X$ на отрезке $[a;\ x]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. По этой теореме

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a)\,,$$

или

$$\varphi(x) = \psi(\xi)(x-a) = o\left((\xi-a)^{n-1}\right)(x-a) = o\left((x-a)^{n-1}\right)(x-a) = o\left((x-a)^n\right)\ (x \to a),$$

так как $\xi \in (a;\ x)$, следовательно, $|\xi - a| < |x - a|$. ■

Теорема 4.20. *Пусть функция f дифференцируема $n-1$ раз на открытом промежутке X и имеет производную порядка n в точке a этого промежутка. Тогда остаточный член формулы Тейлора можно представить в виде*

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)\ (x \to a). \tag{4.57}$$

Представление остаточного члена в виде (4.57) называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Доказательство. Согласно (4.48)

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \\ - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{4.58}$$

Проверим, что R_n удовлетворяет условиям леммы 4.1. Все слагаемые в правой части (4.58) дифференцируемы n раз (последний — в точке a). Найдём значения R_n и всех его производных до n-го порядка в точке a.

$$R_n(a) = 0;$$

$$R_n'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}, \quad R_n'(a) = 0;$$

. . . .

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a), \quad R_n^{(n-1)}(a) = 0;$$

$$R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) = 0.$$

Условия леммы выполнены, теорема доказана. ■

Теорема 4.21. *Пусть функция f дифференцируема $n-1$ раз на открытом промежутке X и имеет производную порядка n в точке a этого промежутка. Тогда, если f представлена в виде*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \tag{4.59}$$

то

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4.60}$$

Доказательство. По теореме 4.20 функция f может быть представлена по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Но тогда справедливо равенство

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) =$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Переходя в нём к пределу при $x \to a$, получим

$$c_0 = f(a).$$

Отбрасывая одинаковые слагаемые и разделив на $x - a$, будем иметь:

$$c_1 + c_2(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) =$$
$$= f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}),$$

откуда после предельного перехода при $x \to a$ найдём:

$$c_1 = f'(a).$$

Продолжив описанный процесс, на последнем шаге получим равенство

$$c_n + o(1) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1),$$

из которого после предельного перехода следует, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Теорема доказана. ■

Из доказанной теоремы следует, что каким бы образом ни было получено представление функции f в виде (4.59), это представление, если только выполнены условия теоремы 4.20, является разложением функции f по формуле Тейлора. Иначе говоря, представление функции в виде (4.59) единственно. Этим обстоятельством часто пользуются для разложения функций по формуле Тейлора. Примеры будут приведены позже.

Особенно просто выглядит формула Тейлора с центром в точке $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{4.61}$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi \in (0;\ x) \text{ (в форме Лагранжа)},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ \theta \in (0;\ 1) \text{ (в форме Коши)},$$

$$R_n(x) = o(x^n)\ (x \to 0) \text{ (в форме Пеано)}.$$

Формулу (4.61) часто называют формулой Маклорена.

Выведем формулы Маклорена некоторых элементарных функций.

1) $f(x) = e^x$.

Так как $f^{(k)}(x) = e^x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то $f^{(k)}(0) = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x). \tag{4.62}$$

2) $f(x) = \cos x$.

Так как $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. (4.21), то $f^{(k)}(0) = \cos\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)$. Если $k = 2l$, то

$$f^{(2l)}(0) = \cos \pi l = (-1)^l,$$

а если $k = 2l + 1$, то

$$f^{(2l+1)}(0) = \cos\left(\pi l + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^l \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x). \tag{4.63}$$

Замечание 4.11. *Номер остаточного члена в формуле Тейлора совпадает с номером последнего написанного члена. В (4.63) после слагаемого* $(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ *стоит слагаемое* $0 \cdot x^{2n+1}$, *имеющее номер* $2n+1$, *поэтому и остаточный член имеет номер* $2n+1$. *Впрочем, если нет необходимости, то можно брать остаточный член с номером* $2n$.

3) $f(x) = \sin x$.

Так как $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. (4.20)), то $f^{(k)}(0) = \sin\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)$. При $k = 2l - 1$

$$f^{(2l-1)}(0) = \sin\left(\pi l - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{l-1},$$

а при $k = 2l$

$$f^{(2l)}(0) = \sin \pi l = 0,$$

поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x). \tag{4.64}$$

Относительно формулы Маклорена функции $\sin x$ справедливо замечание, аналогичное предыдущему.

4) $f(x) = \ln(1 + x)$.

Так как $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ (см. (4.19)), то имеем: $f(0) = \ln 1 = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x). \tag{4.65}$$

5) $f(x) = (1 + x)^p$.

Имеем (см. (4.17)): $f^{(k)}(x) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)(1+x)^{p-k}$. Поэтому $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x). \tag{4.66}$$

Замечание 4.12. *Если p — натуральное число, то при $n = p$ формула (4.66) совпадает с формулой бинома Ньютона (в этом случае $R_n(x) = 0$).*

Замечание 4.13. *Если в (4.66) положить $p = -1$ и заменить x на $-x$, то получим часто используемую формулу*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x), \tag{4.67}$$

6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Имеем: $f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (k-1)!\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ (см. (4.22)). При $k = 2l$ получаем $f^{(2l)}(0) = 0$, а при $k = 2l - 1$

$$f^{(2l-1)}(0) = (2l-2)!\sin\left((2l-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{l-1}(2l-2)!\,,$$

поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x). \tag{4.68}$$

Пользуясь полученными разложениями (4.62) — (4.68) по формуле Маклорена основных элементарных функций и теоремой 4.21, можно получать формулы Тейлора других функций, и, как мы узнаем позднее, не только элементарных.

Пример 4.26. *Разложить по формуле Маклорена функции* $\operatorname{ch} x$ *и* $\operatorname{sh} x$.

Решение. В силу (4.62)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Так как x здесь может быть любым, то вместо x подставим $-x$. Получим:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Тогда

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \tag{4.69}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \tag{4.70}$$

(В формуле (4.69) остаточный член можно взять в виде $o(x^{2n+1})$, потому что формулах для e^x и e^{-x} можно было взять на одно слагаемое больше.) ■

Пример 4.27. *Разложить по формуле Маклорена функцию*

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,.$$

Решение. Черновые наброски решения показывают, что в окончательной формуле останутся только степени x вида $4k+1$, поэтому формулы Маклорена всех функций записываем в соответствующем виде.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{4}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \ldots - \\
&\quad - \frac{x^{4n-2}}{4n-2} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} - \frac{x^{4n}}{4n} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1}) + \\
&\quad + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \\
&\quad + \frac{x^{4n-2}}{4n-2} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \frac{x^{4n}}{4n} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1})\Bigg) + \\
&+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1})\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1})\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1})\right) = \\
&= x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + o(x^{4n+1}).
\end{aligned}
$$

■

Пример 4.28. *Разложить по формуле Маклорена функцию*

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $1-x$, представим дробь в виде произведения и воспользуемся формулой (4.67), подставив в неё x^3 вместо x.

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} = (1-x)\left(1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + o(x^{3n+2})\right) =$$

$$= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots + x^{3n} - x^{3n+1} + o(x^{3n+2}) - xo(x^{3n+2}).$$

Так как $xo(x^{3n+2}) = o(x^{3n+3}) = o(x^{3n+2})$ и $o(x^{3n+2}) + o(x^{3n+2}) = o(x^{3n+2})$, то окончательно

$$f(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots + x^{3n} - x^{3n+1} + o(x^{3n+2}).$$

■

Пример 4.29. *Найти первые четыре слагаемых разложения по формуле Маклорена функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.*

Решение. Функция $\operatorname{tg} x$ — нечётная, следовательно, все её производные чётного порядка — тоже нечётные функции (проверьте!), а значение нечётной функции в нуле равно нулю, поэтому искомое представление функции $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена имеет вид

$$\operatorname{tg} x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + o(x^8).$$

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, а разложения этих функций по формуле Маклорена известны, то получаем равенство

$$c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + o(x^8) = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^8)}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^7)},$$

или

$$\left(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + o(x^8)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8).$$

Раскроем в левой части скобки и приведём подобные, помня при этом, что все слагаемые со степенями x, бо́льшими седьмой, входят в $o(x^8)$. После этого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, для определения c_1, c_3, c_5, c_7 получим уравнения

$$c_1 = 1;\ c_3 - \frac{c_1}{2!} = -\frac{1}{3!};\ c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} = \frac{1}{5!};\ c_7 - \frac{c_5}{2!} + \frac{c_3}{4!} - \frac{c_1}{6!} = -\frac{1}{7!}\,.$$

Решая их последовательно, найдём

$$c_1 = 1;\ c_3 = \frac{1}{3};\ c_5 = \frac{2}{15};\ c_7 = \frac{17}{315}\,.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8). \tag{4.71}$$

■

Среди многочисленных приложений формулы Тейлора самыми простыми и наиболее употребительными являются вычисление значений функций и нахождение пределов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.30. *Вычислить число e с точностью до 10^{-4}.*

Решение. Возьмём формулу Маклорена функции e^x (см. (4.62)) и положим в ней $x = 1$. Тогда

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1).$$

Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа,

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}1^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\ (0 < \xi < 1),$$

оценим его сверху, зная, что $e < 3$,

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}\,, \tag{4.72}$$

и подберём минимальное значение n, при котором остаточный член будет меньше заданной точности вычисления 10^{-4}.

Методом подбора находим, что при $n = 6$ правая часть в (4.72) равна $\dfrac{3}{7!} \approx 0{,}0006$, что больше 10^{-4}, поэтому ещё нельзя гарантировать необходимой точности, а при $n = 7$ получаем $\dfrac{3}{8!} \approx 0{,}000074 < 10^{-4}$, поэтому для вычисления числа e с заданной точностью достаточно взять $n = 7$. Проведя вычисления, получим

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \approx$$

$$\approx 2 + 0{,}5 + 0{,}16667 + 0{,}04167 + 0{,}00833 + 0{,}00139 + 0{,}00020 = 2{,}71826 \approx 2{,}7183.$$

Для сравнения приведём значение числа e с бо́льшим количеством значащих цифр: $e = 2{,}718281828459045\ldots$. ■

Пример 4.31. *Оценить погрешность приближённой формулы*

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \tag{4.73}$$

для значений угла $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Решение. Написанная приближённая формула получается из формулы Маклорена функции $\cos x$ (см. (4.63)) при $n = 2$ отбрасыванием остаточного члена, поэтому её погрешность — величина остаточного члена. Выпишем остаточный член в форме Лагранжа и оценим его.

$$R_5(x) = \frac{\cos^{(6)}\xi}{6!}x^6 = -\frac{\cos\xi}{720}x^6;$$

$$|R_5(x)| = \left|-\frac{\cos\xi}{720}x^6\right| \le \frac{1}{720}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 \approx 0{,}00139\cdot 0{,}0206 \approx 0{,}000029.$$

Таким образом, вычисление значений функции $\cos x$ для углов, не превышающих по абсолютной величине тридцати градусов, по приближённой формуле 4.73 даёт четыре верных знака после запятой! ■

Пример 4.32. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Мы имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для её раскрытия разложим числитель по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до члена с x^3, используя формулы (4.64), (4.71):

$$\operatorname{tg} x - \sin x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

■

Пример 4.33. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln\cos x + x\sin x}{\operatorname{ch} x + \cos x - 2}$.

Решение. Как и в предыдущем примере имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель по формуле Маклорена. Но если в предыдущем примере было ясно, до какой степени вести разложение, то здесь этого сразу не видно. Методом проб устанавливаем, что в знаменателе первая отличная от нуля степень — четвёртая. До неё и будем вести разложение. Начнём со знаменателя.

Используя формулы (4.63), (4.69), имеем:

$$\operatorname{ch} x+\cos x-2=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-2=\frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

Теперь займёмся числителем. Сначала разложим $\cos x$. Тогда

$$\ln\cos x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right).$$

Далее, принимая внутреннюю скобку за аргумент в (4.65), а также используя (4.64), получаем:

$$2\ln\cos x+x\sin x=2\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\right)+$$
$$+x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{x^4}{8}+o(x^4)+o(x^4)\right)+$$
$$+x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)=-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

Подставим полученные выражения под знак предела и вычислим его.

$$\lim_{x\to0}\frac{2\ln\cos x+x\sin x}{\operatorname{ch} x+\cos x-2}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)}{\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{x^4\left(-\dfrac{1}{3}+o(1)\right)}{x^4\left(\dfrac{1}{12}+o(1)\right)}=-4\,.$$

■

Пример 4.34. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3-3x}\,\right)$.

Решение. Выражение под знаком предела — неопределённость вида $\infty\cdot0)$. Для её раскрытия преобразуем стоящее под знаком предела выражение, воспользовавшись формулой (4.66).

$$x\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3-3x}\right)=x\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}\right)=$$

$$=x^2\left(\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{1/3}-\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/3}\right)=x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=2+o(1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3-3x}\,\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(2+o(1))=2.$ ■

4.6 Исследование функций

Здесь мы рассмотрим, как используется понятие производной при изучении некоторых свойств функций.

Условия постоянства и монотонности функции

Теорема 4.22 (Условие постоянства функции на промежутке). *Функция f, определённая и дифференцируемая на открытом промежутке X, постоянна на нём тогда и только тогда, когда $f'(x) \equiv 0$ на этом промежутке.*

Доказательство. Необходимость. Необходимость очевидна, так как производная постоянной равна нулю.
Достаточность. Пусть $f'(x) \equiv 0$ на X. Пусть a — фиксированная и x — любая точки промежутка X. На отрезке $[a;\, x]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0$. Следовательно, $f(x) = f(a)$ во всех точках промежутка. ∎

Следствие 4.6. *Если f непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируема в интервале $(a;\, b)$, причём $f'(x) \equiv 0$ в $(a;\, b)$, то $f(x) \equiv C$ на $[a;\, b]$.*

В самом деле, $f(x) \equiv C$ по теореме и по непрерывности $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = C$ (то же и для точки b).

Следствие 4.7. *Если функции f, g дифференцируемы на открытом промежутке X и $f'(x) \equiv g'(x)$ на X, то $g(x) \equiv f(x) + C$ на X.*

Если $f'(x) \equiv g'(x)$, то $f'(x) - g'(x) \equiv 0$, поэтому $f(x) - g(x) \equiv C$ на X.

Пример 4.35. *Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.*

Функция g не определена в точках $x = \pm 1$, но, как нетрудно проверить, на каждом из промежутков $(-\infty;\, -1)$, $(-1;\, 1)$, $(1;\, +\infty)$ выполняется равенство $f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Поэтому по следствию 4.7 на каждом из указанных промежутков имеет место равенство $g(x) \equiv f(x) + C$. Определим значение C для каждого из промежутков.

1) Пусть $x \in (-\infty;\, -1)$. Перейдём в равенстве

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C \tag{4.74}$$

к пределу, устремив x к $-\infty$. В силу непрерывности функции arctg

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 = 0,$$

а $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, поэтому равенство (4.74) принимает вид $0 = -\dfrac{\pi}{2} + C$, откуда следует, что $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Итак, на промежутке $(-\infty;\, -1)$ $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}$.

2) Пусть $x \in (-1;\, 1)$. Положим в равенстве (4.74) $x = 0$. Тогда получим, что $C = 0$, следовательно, на промежутке $(-1;\, 1)$ имеем: $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x$.

3) Пусть $x \in (1;\, +\infty)$. Этот случай аналогичен первому. Устремляя x к $+\infty$, получим $C = -\dfrac{\pi}{2}$, следовательно, $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 4.23 (Условие монотонности функции на промежутке). *Пусть f непрерывна на промежутке X и дифференцируема всюду внутри этого промежутка. Тогда f не убывает на X в том и только том случае, когда $f'(x) \geq 0$, и не возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \leq 0$ всюду на X.*

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Вторая доказывается аналогично.
Необходимость. Пусть f не убывает на X. Тогда в каждой внутренней точке x промежутка X будет выполняться условие $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x < 0$. Поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Но тогда и $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, и необходимость доказана.
Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ всюду внутри X. Возьмём две любые точки $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$). На отрезке $[x_1;\, x_2]$ выполнены условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как по условию $f'(\xi) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) \leq f(x_2)$, следовательно, функция f на промежутке X не убывает. ■

Следствие 4.8. *Пусть f непрерывна на промежутке X и дифференцируема всюду внутри этого промежутка. Если $f'(x) > 0$ всюду внутри X, то f возрастает на X, а если $f'(x) < 0$, то убывает.*

Действительно, если $f'(x) > 0$ всюду внутри X, то для любых $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$) по формуле Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$, следовательно f возрастает на X. Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Если f возрастает (убывает) на X, то нельзя утверждать, что $f'(x) > 0$ (< 0) всюду внутри X.

Примеры.

1. *Пусть* $X = [-1;\, 1]$ *и* $f(x) = x^3$.

Функция возрастает, но $f'(0) = 0$.

2. *Пусть* $X = \mathbb{R}$ *и* $f(x) = x - \sin x$.

Покажем, что функция f — возрастающая. Возьмём любые $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ($x_1 < x_2$) и, используя (3.3), оценим разность $\sin x_2 - \sin x_1$.

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = \left|2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x_2 - x_1}{2}\right| < 2 \frac{|x_2 - x_1|}{2} = x_2 - x_1\,.$$

Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - \sin x_2) - (x_1 - \sin x_1) = (x_2 - x_1) - (\sin x_2 - \sin x_1) > (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0,$$

следовательно, функция f — возрастающая. Однако её производная

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

обращается в ноль в бесконечном числе точек $x_k = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Определение 4.9. *Пусть f непрерывна на промежутке X и x_0 — внутренняя точка промежутка. Будем говорить, что функция f возрастает в точке x_0, если найдётся окрестность $U_\delta(x_0) \subset X$ такая, что $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ ($x \in U_\delta(x_0)$).*

Понятие f *убывает в точке* x_0 определяется аналогично.

Если функция возрастает (убывает) в точке, то это не означает, что она является монотонной в некоторой окрестности данной точки.

Пример 4.36. *Пусть* $f(x) = x|x|\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$ *при* $x \neq 0$ *и* $f(0) = 0$.

Нетрудно заметить, что данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$ и что $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$, следовательно, она возрастает в точке $x = 0$. Однако не существует такой окрестности точки $x = 0$, в которой эта функция была бы неубывающей. Убедимся в этом с помощью теоремы 4.23.

Пусть $x > 0$. Тогда $f(x) = x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$. Найдём производную.

$$f'(x) = 2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}\,. \tag{4.75}$$

Первое слагаемое в (4.75) — бесконечно малая величина при $x \to 0$, второе же при стремлении x к нулю совершает бесконечное число колебаний от -1 до $+1$, следовательно, в любой окрестности нуля содержится бесконечное число промежутков как положительности, так и отрицательности производной, то есть, бесконечное число промежутков как возрастания, так и убывания функции.

При $x < 0$ ситуация аналогичная.

Итак, рассматриваемая функция возрастает в точке $x = 0$, но ни в какой окрестности нуля не является неубывающей.

Теорема 4.24 (Достаточное условие возрастания функции в точке)**.** *Пусть f непрерывна на промежутке X и дифференцируема во внутренней точке x_0 этого промежутка. Тогда, если $f'(x_0) > 0$, то f возрастает в точке x_0, а если $f'(x_0) < 0$, то убывает.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = a > 0$. Тогда по $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$ будет выполняться условие $\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - a\right| < \dfrac{a}{2}$ или $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} > \dfrac{a}{2} > 0$. А это означает, что если $\Delta x > 0$, то и $\Delta f > 0$, а если $\Delta x < 0$, то и $\Delta f < 0$. Другими словами, если $x = x_0 + \Delta x > x_0$, то и $f(x) = f(x_0) + \Delta f > f(x_0)$, а если $x = x_0 + \Delta x < x_0$, то и $f(x) = f(x_0) + \Delta f < 0$, то есть, функция в точке x_0 возрастает.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ■

Экстремумы

Определение 4.10. *Пусть f непрерывна на промежутке X и x_0 — внутренняя точка промежутка. Будем говорить, что x_0 — точка локального максимума (минимума) функции f, если можно указать такую окрестность $U_\delta(x_0) \subset X$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta$ (x_0) выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.*

Определение 4.11. *Точки локального максимума и локального минимума будем называть точками экстремума функции.*

Теорема 4.25 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть f непрерывна на промежутке X и x_0 — её точка экстремума. Тогда, если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Эта теорема есть не что иное как теорема Ферма (теорема 4.11).

Условие $f'(x_0) = 0$ не является обязательным и его выполнение не гарантирует наличие экстремума в точке x_0.

Пример 4.37. *Пусть* $f(x) = x^3$.

В точке $x = 0$ производная $f'(x) = 3x^2 = 0$, однако $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, так что необходимое условие экстремума выполнено, однако экстремума в точке $x = 0$ нет.

Пример 4.38. *Пусть* $f(x) = |x|$.

В точке $x = 0$ производная не определена (определены левая и правая производные), однако эта точка — точка локального минимума, так как $f(0) = 0$, а для любого $x \neq 0$ $f(x) > 0$.

Рассмотрим ещё один любопытный пример.

Пример 4.39. *Пусть* $f(x) = x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$ *при* $x \neq 0$ *и* $f(0) = 0$.

Точка $x = 0$ для этой функции — точка локального минимума, так как $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Хотя $f'(0) = 0$, но ни в какой окрестности нуля функция не является убывающей слева и возрастающей справа от точки ноль (см. пример 4.36).

Определение 4.12. *Пусть X — промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и x_0 — внутренняя точка промежутка X. Точку x_0 будем называть стационарной точкой функции f, если f в этой дифференцируема и $f'(x_0) = 0$.*

Определение 4.13. *Пусть X — промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, x_0 — внутренняя точка промежутка X. Точку x_0 будем называть критической точкой функции f, или точкой, подозрительной на экстремум, если $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.*

Таким образом, критические точки функции — это те точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Но, как показывают приведённые выше примеры, критическая точка может быть точкой экстремума, а может и не быть. Поэтому необходимо сформулировать условия, гарантирующие наличие экстремума в критической точке.

Теорема 4.26 (Первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция f непрерывна на промежутке X, $x_0(\in X)$ — её критическая точка и пусть существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \subset X$, в которой функция f дифференцируема. Тогда:*

а) *если $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка локального минимума функции f;*

б) *если $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка локального максимума функции f.*

При выполнении условий этой теоремы говорят в первом случае, что *производная в точке x_0 (при переходе через точку x_0) меняет знак с минуса на плюс*, а во втором случае, что *производная в точке x_0 меняет знак с плюса на минус*.

Доказательство. Рассмотрим первый случай. По условиям теоремы f непрерывна на $(x_0 - \delta; x_0]$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$. Тогда по следствию из теоремы 4.23 функция f убывает на $(x_0 - \delta; x_0]$, поэтому $f(x_0) < f(x)$ для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$. Аналогично показывается, что f возрастает на $[x_0; x_0 + \delta)$, следовательно, $f(x_0) < f(x)$ для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Но тогда по определению x_0 — точка локального минимума функции f.

Справедливость второй части теоремы устанавливается точно так же. ■

Пример 4.40. *Пусть* $f(x) = x^2$.

Точка $x = 0$ — стационарная точка, так как $f'(x) = 2x$ при $x = 0$ обращается в ноль. При переходе через ноль производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = 0$ — точка локального минимума.

Пример 4.41. *Пусть* $f(x) = x^3$.

Точка $x = 0$ — стационарная точка, так как $f'(x) = 3x^2$ при $x = 0$ обращается в ноль. При переходе через ноль производная не меняет знака , поэтому $x = 0$ не является точкой экстремума.

Пример 4.42. *Пусть* $f(x) = |x|$.

Точка $x = 0$ — критическая точка, так как при $x \neq 0$ производная $f'(x) = \text{sgn}x$, а при $x = 0$ не существует. При переходе через ноль производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = 0$ — точка локального минимума.

Пример 4.43. *Пусть* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Точка $x = 0$ — критическая точка, так как $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует. При переходе через ноль производная не меняет знака, поэтому $x = 0$ не является точкой экстремума.

Теорема 4.27 (Второе достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X и во внутренней точке x_0 имеет производную второго порядка, причём $f'(x_0) = 0$. Тогда:*
а) *если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума функции f;*
б) *если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.*

Доказательство. Рассмотрим первую часть теоремы. Если $f''(x_0) < 0$, то по теореме 4.24 f' убывает в точке x_0, поэтому найдётся окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой $f'(x) > f'(x_0)$ при $x < x_0$ и $f'(x) < f'(x_0)$ при $x > x_0$. А так как $f'(x_0) = 0$, то $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0. По предыдущей теореме x_0 — точка локального максимума функции f.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ■

Пример 4.44. *Найти экстремумы функции* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Решение. Данная функция дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$, поэтому подозрительными на экстремум точками будут стационарные точки функции, а проверку на наличие экстремума можно провести, используя второе достаточное условие. Найдём первую и вторую производные функции f:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; \quad f''(x) = 6x - 6.$$

Приравнивая первую производную к нулю и решая получившееся уравнение, найдём две стационарные точки: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$.

Вычислим значение второй производной в каждой из стационарных точек.

$f''(0) = -6 < 0$, следовательно, $x_0 = 0$ — точка локального максимума, при этом $y_{max} = f(0) = 4$;

$f''(2) = 6 > 0$, следовательно, $x_1 = 2$ — точка локального минимума функции, при этом $y_{min} = f(2) = 0$. ■

Теорема 4.28 (Третье достаточное условие экстремума). *Пусть f на промежутке X дифференцируема $n-1$ раз и во внутренней точке x_0 этого промежутка имеет производную порядка n ($n \geq 2$), причём $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:*

а) *если n — нечётное, то в точке x_0 экстремума нет;*

б) *если n — чётное, то экстремум есть: локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Доказательство. Так как $f'(x_0) = 0$, то x_0 — точка, подозрительная на экстремум. Разложим f по формуле Тейлора в точке x_0 с остаточным членом в форме Пеано. Так как по условию производные функции f с первой по $(n-1)$-ю равны нулю, то формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + (x-x_0)^n \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1) \right). \quad (4.76)$$

Так как $o(1) \to 0$ при $x \to x_0$, а $f^{(n)}(x_0)$ — отличное от нуля число, то найдётся окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \subset X$, всюду в которой будет иметь место неравенство

$$|o(1)| < |f^{(n)}(x_0)|,$$

а потому в указанной окрестности

$$\operatorname{sgn}(f^{(n)}(x_0) + o(1)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0), \quad (4.77)$$

то есть, сохраняется постоянным.

Пусть n — нечётное число. Тогда скобка $(x-x_0)^n$ имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0, поэтому и второе слагаемое в (4.76) имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0, поэтому по одну сторону от точки x_0 значения $f(x)$ будут меньше, а по другую сторону больше, чем $f(x_0)$, следовательно, x_0 не является точкой экстремума.

Пусть n — чётное число и $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда скобка $(x-x_0)^n$ во втором слагаемом справа в (4.76) больше нуля в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ и вторая, ввиду (4.77), тоже больше нуля, поэтому второе слагаемое в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ положительно. Следовательно, всюду в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, а это означает, что x_0 — точка локального минимума.

Аналогично показывается, что если n — чётное число и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума. ■

Пример 4.45. *Показать, что $x = 0$ — точка локального минимума функции*

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x.$$

Решение. Данная функция определена и дифференцируема любое число раз всюду на $\mathbb{R}$. Найдём первую производную.

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x\,.$$

Убеждаемся проверкой, что $f'(0) = 0$, следовательно, $x = 0$ — точка возможного экстремума.

Теперь будем последовательно находить производные функции f и вычислять их значения в точке $x = 0$ до первой производной, отличной от нуля.

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ равна нулю в точке $x = 0$.
$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ равна нулю в точке $x = 0$.
$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$. $f^{(4)}(0) = 4 > 0$.

Так как номер первой отличной от нуля производной — чётное число, а её значение положительно, то по теореме 4.28 точка $x = 0$ — точка локального минимума. При этом $y_{min} = f(0) = 0$. ■

Ни одно из достаточных условий экстремума не является универсальным. Для каждого из них можно привести пример функции, к которой это условие неприменимо. Для первого достаточного условия это пример 4.39, для второго — пример 4.45, для третьего — нижеприведённый пример.

Пример 4.46. *Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Покажем, что эта функция дифференцируема на $\mathbb{R}$ любое число раз и в точке $x = 0$ все её производные равны нулю.*

Решение. Найдём первую производную. При $x \neq 0$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.$$

При $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$

Для вычисления предела сделаем замену $\dfrac{1}{x} = t$. Тогда если $x \to 0$, то $t \to \infty$ и по правилу Лопиталя

$$f'(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ \quad 0, & x = 0. \end{cases}$$

Существование и равенство нулю при $x = 0$ всех последующих производных проверяется аналогично. Как нетрудно заметить, производная любого порядка функции $f(x)$ при $x \neq 0$ имеет вид

$$f^{(l)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где P — некоторый многочлен. Тогда, вычисляя $f^{(l+1)}(0)$, делаем ту же замену $\dfrac{1}{x} = t$ и, применяя нужное число раз правило Лопиталя, получаем:

$$f^{(l+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{tP(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

Таким образом, точка $x = 0$ для рассматриваемой функции, очевидно, точка локального минимума, но с помощью третьего достаточного условия экстремума этого установить нельзя. ■

Наименьшее и наибольшее значения функции

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса (теорема 3.36) она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений, однако указать точки, в которых указанные значения достигаются, и сами эти значения для функции, которая только лишь непрерывна, крайне затруднительно, а то и вовсе невозможно. Но если функция дифференцируема на отрезке за исключением, быть может, отдельных точек, то задача становится вполне решаемой.

Итак, пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на нём за исключением, может быть, нескольких точек. Наибольшее и наименьшее значения она может принять или на конце отрезка, или во внутренней его точке. В последнем случае по теореме Ферма (теорема 4.11) в этой точке её производная или не существует, или равна нулю. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке поступаем следующим образом: а) находим точки, в которых производная функции не определена; б) находим точки, в которых производная функции равна нулю; в) присоединяем к найденным точкам концы отрезка; г) вычисляем во всех полученных точках значение функции; д) выбираем из вычисленных значений наибольшее и наименьшее.

Пример 4.47. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y = |x|(x^2 - 2x - 3) + |x - 1|(x^2 - 9)$$

на отрезке $[-2;\ 3]$.

Решение. Данная функция не дифференцируема в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (см. пример 4.5). Найдём точки, в которых производная равна нулю.

1) Пусть $x \in (-2;\ 0)$. Тогда

$$y = -x(x^2 - 2x - 3) - (x - 1)(x^2 - 9) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9;$$

$$y' = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2).$$

Как нетрудно видеть, $y' = 0$ при $x_3 = -1$.

2) Пусть $x \in (0;\ 1)$. Тогда

$$y = x(x^2 - 2x - 3) - (x - 1)(x^2 - 9) = -(x - 3)^2;$$

$$y' = -2(x - 3)$$

не обращается в ноль на $(0;\ 1)$.

3) Пусть $x \in (1;\ 3)$. Тогда

$$y = x(x^2 - 2x - 3) + (x - 1)(x^2 - 9) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9;$$

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

Как нетрудно видеть, $y' = 0$ при $x_4 = 2$.

К найденным точкам $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ добавим концы отрезка и подсчитаем значения функции во всех шести точках. Результаты вычислений сведём в следующую таблицу.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-16	-9	-4	-11	0

Сравнивая полученные значения, находим, что данная функция достигает наибольшего значения $y_{max} = 0$ в точке $x = 3$ и наименьшего значения $y_{min} = -16$ в точке $x = -1$. ■

Если функция f задана на незамкнутом промежутке, конечном или бесконечном, то, как показывают примеры к первой и второй теоремам Вейерштрасса (теоремы 3.35, 3.36), она может не достигать наибольшего и (или) наименьшего значений и даже быть неограниченной. Для решения задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений в таком случае следует, как и выше, найти точки возможного экстремума и исследовать поведение функции при приближении аргумента к концам промежутка.

Пример 4.48. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y = (x^2 - 5x + 7)e^{-|x-2|}$$

на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна на указанном промежутке и дифференцируема на нём всюду, кроме точки $x_1 = 2$. Раскроем модуль, продифференцируем и найдём стационарные точки функции.

1) Пусть $x \in (0;\ 2)$. Тогда

$$y = (x^2 - 5x + 7)e^{x-2};$$

$$y' = (x^2 - 3x + 2)e^{x-2}.$$

В рассматриваемом интервале $y' = 0$ при $x_2 = 1$.

2) Пусть $x \in (2;\ +\infty)$. Тогда

$$y = (x^2 - 5x + 7)e^{-(x-2)};$$

$$y' = -(x^2 - 7x + 12)e^{-(x-2)}.$$

На этом промежутке $y' = 0$ при $x_3 = 3$ и $x_4 = 4$.

Вычислим значения функции во всех отмеченных точках. Имеем: $y(1) = 3e^{-1}$, $y(2) = 1$, $y(3) = e^{-1}$, $y(4) = 3e^{-2}$.

Найдём предельные значения функции при стремлении x к концам заданного промежутка.

$$y(+0) = \lim_{x\to+0}(x^2 - 5x + 7)e^{-|x-2|} = 7e^{-2}.$$

$$y(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 - 5x + 7)e^{-|x-2|} = 0$$

(предел находится с применением правила Лопиталя).

Сравнивая все полученные значения, приходим к выводу, что
$y_{max} = y(1) = 3e^{-1} \approx 1,104$, а $\inf\{y(x):\ x \in (0;\ +\infty)\} = 0$ — не достигается. ■

4.7 Выпуклые функции

Пусть функция f непрерывна на промежутке X. Возьмём любые две различные точки x_1 и x_2 промежутка X и положим $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Определение 4.14. *Отрезок, соединяющий любые две точки* $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$ *графика функции* f*, будем называть хордой.*

Выведем параметрические уравнения хорды. Как известно, уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Обозначим общее значение отношений, стоящих в левой и правой частях этого равенства, буквой t. Тогда одновременно имеем

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1); \ y - y_1 = t(y_2 - y_1),$$

или

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1); \ y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$

или, после перегруппировки,

$$x = (1-t)x_1 + tx_2; \ y = (1-t)y_1 + ty_2.$$

Из этих уравнений при $t = 0$ получаются координаты точки M_1, при $t = 1$ — точки M_2, и, в силу линейности обоих уравнений, при изменении t от 0 до 1 точка $M(x; y)$ будет пробегать отрезок M_1M_2.

Итак, параметрические уравнения хорды M_1M_2 имеют вид

$$x = (1-t)x_1 + tx_2; \ y = (1-t)y_1 + ty_2 \ \ (0 \le t \le 1). \tag{4.78}$$

Определение 4.15. *Непрерывную на промежутке X функцию будем называть:*

a) выпуклой, если её график располагается не выше хорды, соединяющей любые две точки графика;

b) строго выпуклой, если её график располагается ниже любой хорды (за исключением концов);

c) вогнутой, если её график располагается не ниже хорды, соединяющей любые две точки графика;

d) строго вогнутой, если её график располагается выше любой хорды (за исключением концов).

Иногда выпуклые функции называют функциями, обращёнными выпуклостью вниз, а вогнутые — функциями, обращёнными выпуклостью вверх.

Лемма 4.2. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X. Пусть x_1, x_2 — любые точки промежутка X и t — любое число из интервала $(0;\ 1)$. Тогда:*

a) функция f выпукла на промежутке X тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ ; \tag{4.79}$$

b) функция f строго выпукла на промежутке X тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ ; \tag{4.80}$$

c) функция f вогнута на промежутке X тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ ; \tag{4.81}$$

d) функция f строго вогнута на промежутке X тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ . \tag{4.82}$$

Доказательство. Все четыре утверждения доказываются совершенно аналогично, поэтому остановимся на доказательстве только первого из них.

Выберем произвольно $x_1, x_2 \in X$ и $t \in (0;\ 1)$. Проведём хорду через точки $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ графика функции f. Положим $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Точка $M(x, y)$ (см. (4.78)) лежит на хорде M_1M_2. Если функция f — выпуклая, то точка $(x, f(x))$ графика функции располагается не выше точки $M(x, y)$, следовательно, $f(x) \leq y$, что совпадает с (4.79). Наоборот, если выполнено (4.79), то это означает, что точка $(x, f(x))$ графика функции располагается не выше точки $M(x, y)$ хорды, следовательно, функция f — выпуклая. ■

Придадим необходимому и достаточному условию выпуклости функции (4.79) иную форму. Пусть x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — любые точки промежутка X и x — любая точка из интервала $(x_1;\ x_2)$, то есть, $x_1 < x < x_2$. Как следует из вывода параметрических уравнений хорды, точке x отвечает значение параметра $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Тогда $1 - t = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$.

Перепишем условие выпуклости (4.79) в виде

$$(1 - t + t)f(x) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)\ ,$$

или

$$(1-t)(f(x) - f(x_1)) \leq t(f(x_2) - f(x))\ ,$$

или

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(f(x) - f(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x))\ ,$$

или, окончательно,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ . \tag{4.83}$$

Аналогично при том же условии $x_1 < x < x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ условие строгой выпуклости (4.80) преобразуется к виду

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ , \tag{4.84}$$

условие вогнутости к виду

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{4.85}$$

и условие строгой вогнутости к виду

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ . \tag{4.86}$$

Теорема 4.29 (Первый критерий выпуклости (вогнутости)). *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X. Тогда f выпукла (вогнута) на промежутке X в том и только том случае, если f' на промежутке X не убывает (не возрастает).*

Доказательство. Остановимся на доказательстве первого из утверждений. Второе доказывается аналогично.

Итак, пусть f выпукла на промежутке X. Возьмём произвольные $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Так как функция f выпукла, для неё выполняется условие (4.83). Если в этом условии устремить x к x_1, то получим $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, а если устремить x к x_2, то получим

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$. Отсюда следует, что если $x_1 < x_2$, то $f'(x_1) \le f'(x_2)$, то есть, необходимая часть утверждения теоремы.

Пусть теперь производная f' не убывает на промежутке X. Возьмём любые точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, и любое $x \in (x_1;\ x_2)$, то есть, $x_1 < x < x_2$. Так как функция f дифференцируема, а значит, и непрерывна на промежутке X, то к отрезкам $[x_1;\ x]$ и $[x;\ x_2]$ можно применить теорему Лагранжа (теорема 4.13), согласно которой $f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1)$, $\xi_1 \in (x_1;\ x)$ и $f(x_2) - f(x) = f'(\xi_2)(x_2 - x)$, $\xi_2 \in (x_2;\ x)$. Перепишем эти формулы в виде

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1),\ \xi_1 \in (x_1;\ x); \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2),\ \xi_2 \in (x;\ x_2).$$

Так как $\xi_1 < \xi_2$, то по условию $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, следовательно, и

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,.$$

Итак, для функции f выполняется условие (4.83), поэтому она выпуклая. Достаточность, а вместе с ней и теорема, доказаны. ■

Замечание 4.14. *Требование существования производной на концах промежутка X в этой теореме и ниже не обязательно и присутствует лишь ради простоты формулировки. При доказательстве достаточности оно вообще не используется, а при доказательстве необходимости в качестве x_1 и x_2 концы промежутка X можно не брать.*

Следствие 4.9. (**Критерий строгой выпуклости (вогнутости)**) *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X. Тогда f строго выпукла* (*вогнута*) *на промежутке X в том и только том случае, если её производная f' на промежутке X возрастает* (*убывает*).

Доказательство. Докажем первую часть утверждения. Доказательство второй части проводится аналогично.

Пусть функция f строго выпукла на промежутке X. Тогда она удовлетворяет условию (4.84). Возьмём любые три точки x_0, x_1, x_2 ($x_1 < x_0 < x_2$) промежутка X и напишем для них условие (4.84),

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\,. \tag{4.87}$$

Теперь возьмём любое x так, чтобы выполнялось условие $x_1 < x < x_0$, напишем для тройки x_1, x, x_0 условие (4.84)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

и перейдём к пределу при $x \to x_1$. Получим:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\,. \tag{4.88}$$

Аналогично, выбрав x между x_0 и x_2, написав для тройки x_0, x, x_2 условие (4.84) и перейдя к пределу при $x \to x_2$, получим неравенство

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \le f'(x_2)\,. \tag{4.89}$$

Из (4.87) — (4.89) имеем цепочку неравенств

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq f'(x_2)\ ,$$

из которой вытекает, что $f'(x_1) < f'(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, а это означает, что производная f' возрастает на промежутке X.

Доказательство достаточности проводится точно так же, как в самой теореме, но только теперь $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, поэтому и

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ .$$

■

Доказанная теорема позволяет для дифференцируемых функций дать другое геометрическое определение выпуклости (вогнутости).

Определение 4.16. *Дифференцируемую на промежутке X функцию f назовём:*

a) выпуклой на промежутке X, если её график расположен не ниже касательной, проведённой к графику в каждой точке промежутка;

b) строго выпуклой на промежутке X, если её график расположен выше касательной, проведённой к графику в каждой точке промежутка;

c) вогнутой на промежутке X, если её график расположен не выше касательной, проведённой к графику в каждой точке промежутка;

d) строго вогнутой на промежутке X, если её график расположен ниже касательной, проведённой к графику в каждой точке промежутка.

Лемма 4.3. *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X. Определения 4.15 и 4.16 выпуклой (вогнутой) функции эквивалентны.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольно выбранная внутренняя точка промежутка X. Напишем уравнение касательной к графику функции f в этой точке (см. (4.6)).

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.90}$$

С другой стороны, возьмём любую точку $x \neq x_0$ промежутка X и напишем для отрезка $[x;\ x_0]$ формулу Лагранжа (см. (4.31)).

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x_0;\ x). \tag{4.91}$$

Вычтем (4.90) из (4.91). Тогда

$$f(x) - y = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0). \tag{4.92}$$

Если функция f выпуклая по первому определению, то её производная есть неубывающая функция, поэтому обе скобки в правой части (4.92) имеют одинаковый знак (первая может обращаться в нуль), следовательно, $f(x) - y \geq 0$, или $f(x) \geq y$. Последнее означает, что график функции располагается не ниже касательной, поэтому функция f выпуклая по второму определению.

Пусть теперь функция f выпуклая по второму определению. Возьмём любое $x_1 < x_0$ и любое $x_2 > x_0$ $(x_1, x_2 \in X)$ и обозначим через y_1 и y_2 ординаты точек касательной (4.90) с абсциссами x_1 и x_2. Тогда, очевидно,

$$\frac{f(x_0) - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - f(x_0)}{x_2 - x_0}\ . \tag{4.93}$$

Так как функция f выпуклая по второму определению, то $f(x_1) \geq y_1$, $f(x_2) \geq y_2$. Поэтому справедливы оценки

$$\frac{f(x_0) - y_1}{x_0 - x_1} \geq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq \frac{y_2 - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Из этих оценок и равенства (4.93) получим неравенство

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

являющееся, ввиду произвольности x_0, x_1, x_2, условием (4.83) выпуклости функции f на промежутке X. Следовательно, функция f выпукла и по первому определению.

Остальные три предложения, содержащиеся в лемме, доказываются аналогично. ■

Теорема 4.30 (Второй критерий выпуклости (вогнутости)). *Если функция f дважды дифференцируема на промежутке X, то она выпукла (вогнута) на X тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) всюду на X.*

Доказательство. По предыдущей теореме функция f выпукла (вогнута) на промежутке X тогда и только тогда, когда её производная f' не убывает (не возрастает) на промежутке X. Но f' — тоже функция, определённая на промежутке X, и по теореме 4.23 она не убывает (не возрастает) на промежутке X тогда и только тогда, когда её производная $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) всюду на X. ■

Следствие 4.10 (Достаточное условие строгой выпуклости (вогнутости)). *Если функция f дважды дифференцируема на промежутке X, причём $f''(x) > 0$ (< 0) всюду на X, то она выпукла (вогнута) на этом промежутке.*

Справедливость этого утверждения устанавливается с помощью следствия из теоремы 4.23.

Обратное утверждение места не имеет, так как, например, функция $y = x^4$ строго выпукла на $\mathbb{R}$, в то время как её производная второго порядка удовлетворяет лишь условию $y'' = 12x^2 \geq 0$.

Примеры.

1. Функция $y = a^x$ строго выпукла на $\mathbb{R}$, так как её вторая производная $y'' = a^x \ln^2 a > 0$ всюду на $\mathbb{R}$.

2. Функция $y = \log_a x$ строго выпукла на $(0;\ +\infty)$ при $0 < a < 1$ и строго вогнута при $a > 1$, так как её вторая производная $y'' = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$ в указанном промежутке больше нуля в первом случае и меньше нуля во втором.

3. Функция $y = \sin x$ строго вогнута на отрезках $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$ и строго выпукла на отрезках $[\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k]$ ($k \in \mathbb{Z}$), так как её вторая производная $y'' = -\sin x$ отрицательна на интервалах $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$ и положительна на $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$.

Определение 4.17. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X, a — внутренняя точка промежутка и в точке a существует производная $f'(a)$. Назовём точку $(a, f(a))$ точкой перегиба графика функции f, если найдётся такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, в пределах которой функция имеет разные направления (строгой) выпуклости слева и справа от точки a. Другими словами, график функции f расположен по разные стороны от точки $(a, f(a))$ строго выше и строго ниже касательной, проведённой к графику функции в точке $(a, f(a))$.*

Замечание 4.15. *Определение точки перегиба остаётся в силе и в том случае, когда* $f'(a) = \infty$.

Теорема 4.31 (Необходимое условие перегиба). *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X и во внутренней точке a промежутка имеет вторую производную. Если $(a, f(a))$ — точка перегиба, то $f''(a) = 0$.*

Доказательство. Если $(a, f(a))$ — точка перегиба, то по определению функция f имеет разные направления выпуклости по разные стороны от точки a. В таком случае по критерию строгой выпуклости (вогнутости) её производная f' либо возрастает слева от точки a и убывает справа, либо наоборот, убывает слева и возрастает справа от точки a. И в одном, и в другом случае точка a является точкой экстремума функции f', следовательно, по необходимому условию экстремума (теорема 4.25) её производная в этой точке равна нулю. Итак, $f''(a) = 0$. ■

То, что условие $f''(a) = 0$ не является достаточным для того, чтобы точка $(a, f(a))$ была точкой перегиба, показывает приведённый выше пример функции $y = x^4$. Для неё $y''(0) = 0$, однако точка $(0, 0)$ не является точкой перегиба.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что если $(a, f(a))$ — точка перегиба графика функции f, то a является точкой экстремума для её производной f', поэтому достаточные условия перегиба для графика функции f — это достаточные условия экстремума для функции f', и получаются они переформулировкой теорем 4.26 — 4.28.

Теорема 4.32 (Первое достаточное условие перегиба). *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X и имеет на нём вторую производную всюду, за исключением, может быть, внутренней точки a. Если существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, в пределах которой $f''(x)$ имеет разные знаки по разные стороны от точки a, то $(a, f(a))$ — точка перегиба графика функции f.*

Теорема 4.33 (Второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция f дважды дифференцируема на промежутке X и во внутренней точке a имеет производную третьего порядка. Если $f''(a) = 0$, а $f'''(a) \neq 0$, то $(a, f(a))$ — точка перегиба графика функции f.*

Теорема 4.34 (Третье достаточное условие перегиба). *Пусть функция f дифференцируема $n-1$ раз на промежутке X и имеет производную порядка n $(n \geq 3)$ во внутренней точке a, причём*

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

а $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда, если n — нечётное, то $(a, f(a))$ — точка перегиба графика функции f, а если n — чётное, то в точке $(a, f(a))$ перегиба нет.

Примеры

1. $y = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R}$.

Производная $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ определена всюду, кроме точки $a = 0$, в которой она принимает бесконечное значение. Вторая производная $y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$ тоже определена всюду, кроме точки $a = 0$. Так как y'' слева от точки $a = 0$ положительна, а справа отрицательна, то по первому достаточному условию $(0, 0)$ — точка перегиба.

2. $y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

$y'' = -\sin x = 0$ в точках $a_k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, $y'''(a_k) = -\cos(\pi k) = (-1)^{k+1} \neq 0$. По второму достаточному условию точки $(\pi k, 0)$ — точки перегиба.

3. $y = x^5 - 5x^6,\ x \in \mathbb{R}$.

Имеем:
$y' = 5x^4 - 30x^5 = 0$ в точке $a = 0$;
$y'' = 20x^3 - 150x^4 = 0$ в точке $a = 0$;
$y''' = 60x^2 - 600x^3 = 0$ в точке $a = 0$;
$y^{(4)} = 120x - 1800x^2 = 0$ в точке $a = 0$;
$y^{(5)} = 120 - 3600x \neq 0$ в точке $a = 0$.

Так как пять — число нечётное, то по третьему достаточному условию $(0, 0)$ — точка перегиба.

4.8 Асимптоты

Асимптотой графика функции f называют прямую, к которой график функции "неограниченно приближается когда точка $(x, f(x))$ графика уходит в бесконечность. Различают вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.

Определение 4.18. *Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a, двусторонней или односторонней. Прямую $x = a$ назовём вертикальной асимптотой графика функции f, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$.*

Примеры.

1. $y = \dfrac{1}{x}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

2. $y = \dfrac{1}{x^2}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

3. $y = \ln x$. Функция определена на $(0;\ +\infty)$.

$$\lim_{x\to +0}\ln x = -\infty.$$

Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

4. $y = e^{1/x}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0} e^{1/x} = 0; \quad \lim_{x\to +0} e^{1/x} = +\infty.$$

Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Определение 4.19. *Пусть функция f определена в окрестности (правосторонней окрестности, левосторонней окрестности) бесконечно удалённой точки. Прямую $y = kx + b$ назовём асимптотой графика функции f при стремлении x к ∞, $(+\infty, -\infty)$, если*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 \tag{4.94}$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0\right).$$

Теорема 4.35. *Пусть функция f определена в окрестности бесконечно удалённой точки. Прямая $y = kx+b$ служит асимптотой графика функции f при стремлении x к ∞ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b. \tag{4.95}$$

Доказательство. Пусть прямая $y = kx + b$ служит асимптотой графика функции f при стремлении x к ∞. Тогда выполнено (4.94) и, используя теорему 3.15, можно утверждать, что $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$. Отсюда имеем:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \tag{4.96}$$

или, разделив на x, $\dfrac{f(x)}{x} = k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}$. Устремив здесь x к ∞, получим первое из условий (4.95). Второе из условий (4.95) получим, если в (4.96) перенесём слагаемое kx в левую часть и, снова используя теорему 3.15, перейдём к пределу при $x \to \infty$. Необходимость доказана.

Пусть выполнены условия (4.95). Второе из них в силу теоремы 3.15 эквивалентно (4.94), следовательно, прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота. Доказана и достаточность. ■

Условия существования наклонной асимптоты при $x \to \pm\infty$ формулируются и доказываются совершенно аналогично.

Пример 4.49. *Найти наклонные асимптоты графика функции*

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}\ .$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $x = -1$, поэтому вопрос о существовании у её графика наклонных асимптот правомерен. Попробуем найти k и b при $x \to \infty$, используя формулы 4.95.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3(1+1/x)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x\right) = -\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{(x+1)^2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{(1+1/x)^2} = -2.$$

Поскольку k и b найдены, то прямая $y = x-2$ служит наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to \infty$. ■

Пример 4.50. *Найти наклонные асимптоты графика функции*

$$y = x + e^{-x}.$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной прямой. Так как поведение функции e^{-x} резко различно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то будем искать наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ отдельно.

а) Пусть $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0.$$

Итак, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$.

b) Пусть $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$$

(см. пример 4.23). Поскольку k найти не удалось, то график данной функции при $x \to -\infty$ асимптоты не имеет. ■

Пример 4.51. *Найти наклонные асимптоты графика функции*

$$y = x \operatorname{arctg} x.$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной прямой. Так как поведение функции $\operatorname{arctg} x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ тоже различно, то снова будем искать асимптоты отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

a) $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = (\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{x^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/(1+x)^2}{-1/x^2} = -1.$$

(При раскрытии неопределённости было использовано правило Лопиталя.)

Итак, при $x \to +\infty$ график функции имеет асимптотой прямую $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$.

b) Так как рассматриваемая функция — чётная, то её график симметричен относительно оси ординат, поэтому и асимптота при $x \to -\infty$ будет симметрична асимптоте при $x \to +\infty$, то есть это будет прямая $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$. ■

Построение графиков функций

Полное исследование функции, имеющее целью построение её графика, включает в себя следующие действия:

1) нахождение области определения функции;

2) установление свойств чётности (нечётности) и периодичности, если они имеются;

3) нахождение точек пересечения с осями координат и промежутков знакопостоянства;

4) нахождение промежутков возрастания (убывания) и точек экстремума;

5) нахождение промежутков выпуклости (вогнутости) и точек перегиба;

6) установления характера поведения функции при приближении к границам области определения, в частности, нахождение асимптот, если они имеются.

После этого в выбранной системе координат откладываем все выявленные точки графика, наносим асимптоты и проводим график через нанесённые точки в соответствии с выявленными свойствами функции. При необходимости, для более точного построения графика, можно задать на графике несколько точек.

Пример 4.52. *Провести полное исследование и построить график функции*

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.$$

Решение.

1. Так как деление на нуль невозможно, то областью определения данной функции является множество $D_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Функция, очевидно, не является периодической. Проверим её на чётность.

$$y(-x) = \frac{2(-x)^3 - 5(-x)^2 + 14(-x) - 6}{4(-x)^2} = \frac{-2x^3 - 5x^2 - 14x - 6}{4x^2}.$$

Сравнивая $y(-x)$ и $y(x)$, убеждаемся, что $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Так как $x \neq 0$, то точек пересечения с осью Oy данная функция не имеет. Точки пересечения с осью Ox найдём, положив $y = 0$ и решив уравнение

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Подбором находим один корень $x_1 = \dfrac{1}{2}$. Затем, разделив уравнение на $x - \dfrac{1}{2}$, приходим к квадратному уравнению $2x^2 - 4x + 12 = 0$, которое не имеет корней, так как его дискриминант $D < 0$. Итак, график пересекает ось Ox в точке $M_1\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$. Точки 0 (функция не определена) и $\dfrac{1}{2}$ (нуль функции) разбили область определения функции на три интервала: $(-\infty;\ 0)$, $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$, на каждом из которых знак функции постоянен, так как непрерывная функция может поменять знак только пересекая ось Ox (теорема 3.33). Определим знак функции на каждом интервале (в крайних интервалах можно взять точки -1 и 1 и вычислить в них значение функции, а в среднем легче найти предел при $x \to +0$) и сведём полученные результаты в таблицу.

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 1/2)$	$1/2$	$(1/2;\ +\infty$
y	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Для исследований по пунктам 4 и 5 нам потребуются первая и вторая производные функции. найдём их.

$$y' = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3}; \quad y'' = \frac{7x - 9}{x^4}\ .$$

4. Приравняем y' к нулю и найдём стационарные точки функции.

$$x^3 - 7x + 6 = 0; \quad x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2.$$

($x_3 = 1$ находится подбором, после деления на $x-1$ остаётся решить квадратное уравнение $x^2 + x - 6 = 0$.)

Стационарные точки функции вместе с точкой $x = 0$ делят ось Ox на пять интервалов, на каждом из которых ввиду непрерывности производная имеет постоянный знак, а функция, соответственно, либо возрастает, либо убывает. Для определения знака производной на каждом интервале удобно записать её в виде $y' = \dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)}{2x^3}$ и подсчитывать количество отрицательных множителей на каждом интервале. Полученные результаты, как и выше, сведём в таблицу.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

В этой таблице направление стрелки вверх означает возрастание функции, вниз — убывание. Подсчитаем значения функции в точках экстремума. Тогда:

$M_2\left(-3; -\dfrac{49}{12}\right)$, $M_3\left(1; \dfrac{5}{4}\right)$ — точки локального максимума;

$M_4\left(2; \dfrac{9}{8}\right)$ — точка локального минимума.

5. Приравнивая к нулю вторую производную, найдём точку $x_5 = \dfrac{9}{7}$ возможного перегиба графика. Эта точка вкупе с точкой $x = 0$ разбивает ось Ox на три интервала, на каждом из которых вторая производная имеет постоянный знак и, следовательно, график функции определённое направление выпуклости. Как и прежде, сведём результаты исследований в таблицу.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 9/7)$	$9/7$	$(9/7; +\infty)$
y''	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$\nexists$	$\frown$	$\approx 1,2$	$\smile$

Так как слева и справа от $x_5 = \dfrac{9}{7}$ график функции имеет разные направления выпуклости, то точка $M_5\left(\dfrac{9}{7}; \dfrac{913}{756}\right)$ — точка перегиба графика функции.

6. a) Так как $x = 0$ — граничная точка области определения, то выясним, как ведёт себя функция при приближении x к нулю слева и справа. Видим, что числитель при этом стремится к -6, а знаменатель — к нулю, оставаясь положительным. Поэтому

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty\ .$$

Следовательно, прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

b) Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты. Попробуем для начала найти

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = \frac{1}{2}\ .$$

Если k определилось, то попробуем найти

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\frac{5}{4} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{14}{5x} + \frac{6}{5x^2}\right) = -\frac{5}{4}\ .$$

Раз удалось найти и k и b, то график функции имеет при $x \to \infty$ наклонную асимптоту

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\ .$$

Исследование закончено. Осталось нарисовать график. Берём систему координат, проводим вертикальную асимптоту $x = 0$ и наклонную $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$, откладываем точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 и проводим через них кривую, сообразуясь со сведениями, содержащимися в таблицах пунктов 3, 4, 5. ■

4.9 Задачи

1. Можно ли утверждать, что если функции f и g не дифференцируемы в точке x_0, то и функции $f+g$, $f\cdot g$ не дифференцируемы в этой точке?

2. Пусть $X(\subset\mathbb{R})$ — открытый промежуток, $f:\ X\to\mathbb{R}$, $a\in X$. Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равны левая и правая производные функции f ($f'_-(a)$ и $f'_+(a)$). Доказать.

3. Под каким углом пересекаются кривые (т.е. касательные к кривым) $y=x^{\sqrt{3}}$ и $x=y^{\sqrt{3}}$ в точке $(1,1)$?

4. Доказать, что производная чётной (нечётной) дифференцируемой функции есть функция нечётная (чётная).

5. Доказать, что если дифференцируемая функция имеет период T, то её производная тоже имеет период T.

6. Может ли функция в точке её разрыва иметь конечную производную?

7. Доказать, что приращения функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=bx^2$ в любой точке $x>0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ бесконечно малые одного порядка при $\Delta x\to 0$.

8. Доказать, что если чётная функция f дифференцируема в точке $x=0$, то $f'(0)=0$.

9. Доказать, что функция
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
дифференцируема в точке $x=0$.

10. Известно, что функция φ имеет обратную φ^{-1}, причём $\varphi(1)=2$ и $\varphi'(1)=4$. В какой точке на основании этой информации можно вычислить производную функции φ^{-1} и чему она равна ?

11. В какой точке надо знать производную функции f, чтобы можно было вычислить производную функции $g(x)=f(\operatorname{tg}x)$ в точке $x=\dfrac{\pi}{6}$?

12. В какой точке надо знать производную функции f, чтобы можно было вычислить производную функции $g(x)=f(\ln\cos x)$ в точке $x=0$?

13. Доказать: если $f'(x_0)\neq 0$, то найдётся $\delta>0$ такое, что для всех $h:\ 0<|h|<\delta$ приращение $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ отлично от нуля.

14. Доказать, что функция
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
не имеет в точке $x=0$ ни правой, ни левой производной.

15. Показать, что если функция f дифференцируема в интервале (a,b), существуют (конечные) $f(a+0)$ и $f(b-0)$ и $f(a+0)=f(b-0)$, то в интервале (a,b) существует хотя бы одна стационарная точка функции f.

16. Доказать: если функция f непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), то функция
$$F(x) = (f(x) - f(a))(b-a) - (f(b) - f(a))(x-a)$$
имеет в интервале (a,b) по крайней мере одну стационарную точку.

17. Доказать: если функции φ и ψ непрерывны на сегменте $[a,b]$ и дифференцируемы в интервале (a,b), то функция
$$F(x) = (\varphi(x) - \varphi(a))\,(\psi(b) - \psi(a)) - (\psi(x) - \psi(a))\,(\varphi(b) - \varphi(a))$$
имеет в интервале (a,b) по крайней мере одну стационарную точку.

18. Пусть функция f дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и пусть $\sup\{|f^{'}(x)| : \ x \in [a,b]\} = M$, где $M > 0$. Тогда на любом сегменте $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ справедливо неравенство $|f(\beta) - f(\alpha)| \le M(\beta - \alpha)$.

19. Пусть функция f имеет на промежутке X ограниченную производную. Доказать, что она равномерно непрерывна на X.

20. Доказать: если функция f имеет в точке x производную второго порядка, то
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f^{''}(x).$$

21. Доказать: если функция f имеет в точке x производную третьего порядка, то
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f^{'''}(x).$$

22. Верно ли следующее утверждение?
Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема в интервале (a,b), существуют $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b-0)$ и $f(a+0) = f(b-0)$. Тогда найдётся точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

23. $P(x)$ — алгебраический многочлен восьмой степени. Известно, что $P(3) = 10$, $P'(3) = -3$, $P''(3) = 4$, $P'''(3) = 72$, $P^{(4)}(3) = -48$, $P^{(5)}(3) = 720$, $P^{(6)}(3) = -720$, $P^{(7)}(3) = -5040$, $P^{(8)}(3) = 20160$. Найти значение $P(x)$ в точке $x = 2$.

24. $P(x)$ — алгебраический многочлен третьей степени. Известно, что $P(5) = -3$, $P'(5) = 5$, $P''(5) = -13$, $P'''(5) = 144$. Найти значение $P''(x)$ в точке $x = 4$.

25. Доказать, что функция $f(x) = x - a\sin x$, где $0 < a \le 1$, возрастает.

26. Найти:
$$a)\quad \inf\left\{3n^2 - 42\,n + 17 : \ n\in\mathbb{N}\right\}; \quad b)\quad \inf\left\{n - 26\,\mathrm{arctg}\,n : \ n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$c)\quad \sup\left\{\frac{3n}{49+n^2} : \ n\in\mathbb{N}\right\}; \quad d)\quad \sup\left\{ne^{-\frac{n}{15}} : \ n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$e)\quad \inf\left\{\sqrt{n}\,(\ln n - \ln 17 - 2) : \ n\in\mathbb{N}\right\}; \quad f)\quad \inf\left\{n + \frac{36}{n} : \ n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$g)\quad \inf\left\{n^4 - 162n^2 + 5 : \ n\in\mathbb{N}\right\}; \quad h)\quad \inf\left\{n^3 - 147n + 4 : \ n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$i)\quad \inf\left\{n^3 - 21n^2 + 5 : \ n\in\mathbb{N}\right\}; \quad j)\quad \inf\left\{n - 25\ln(10+n) : \ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

27. Найти наибольший элемент множества $\left\{\dfrac{5n}{24+n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

28. Найти наименьший элемент множества:

$$a) \quad \left\{7n^2 - 40\,n + 7 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}; \quad b) \quad \left\{n + \frac{20}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$c) \quad \left\{n^4 - 14n^2 + 3 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}; \quad d) \quad \left\{n^3 - 33n - 1 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$e) \quad \left\{2n^3 - 45n + 2 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}; \quad f) \quad \left\{2n^3 - 5n + 3 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

29. Может ли график функции иметь две разные асимптоты при $x \to +\infty$?

Глава II

Второй семестр

5 Неопределенный интеграл

В курсе дифференциального исчисления были введены фундаментальные понятия математического анализа — производная и дифференциал; были установлены основные правила дифференцирования (нахождения производных) всех элементарных функций.

В этом разделе будем решать задачу, "обратную" по отношению к операции дифференцирования, а именно, по известной производной отыскивать саму функцию. Это одна из задач, к которой сводятся многие задачи математики, механики, физики и других наук.

Предположим, например, что в каждый момент времени x нам известна мгновенная скорость $f(x)$ движения материальной точки вдоль оси Oy. Требуется найти закон движения этой точки.

Мы знаем, что мгновенная скорость f является производной функции F, задающей закон движения точки. Следовательно, для решения поставленной задачи нужно восстановить функцию F по её производной f. Таким образом, отвлекаясь от механического смысла задачи, мы приходим к понятию первообразной функции, а затем и неопределенного интеграла.

Истоки интегрального исчисления уводят нас в античный период и связаны с методом исчерпывания Евдокса и Архимеда. Дальнейшее развитие и применение интегрального исчисления связано с именами многих ученых. Но основные понятия теории интегрального исчисления, как и дифференциального, были разработаны в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница. Именно они установили связь между дифференцированием и интегрированием.

С помощью интегрального исчисления удалось решить многие задачи теоретического и прикладного характера, стоявшие перед наукой того времени. Однако задача интегрирования оказалась труднее задачи дифференцирования. Операция дифференцирования, как известно, не выводит из класса элементарных функций, а операция интегрирования элементарной функции не всегда приводит к элементарной функции.

5.1 Первообразная функция

Понятие *первообразной* (или *примитивной*) функции является одним из важнейших в математическом анализе.

Определение 5.1. *Пусть $X(\subset \mathbb{R})$ — открытый промежуток, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Функция F называется первообразной функцией (или просто первообразной) для функции f на промежутке X, если в любой точке этого промежутка функция F дифференцируема и её производная равна f.*

Аналогично определяют первообразную для функции f на полуоткрытом и замкнутом промежутках. При этом используют понятия односторонних производных.

Замечание 5.1. *Очевидно, что первообразная F для функции f на промежутке X непрерывна на нём.*

Пример 5.1. *Функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1,1)$, поскольку функция F дифференцируема в интервале $(-1,1)$ и $F'(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in (-1,1)$.*

Пример 5.2. *Функция $F(x) = \ln x$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на полупрямой $(0,+\infty)$, так как на этой полупрямой функция F дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Пример 5.3. *Функция $F(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ дифференцируема на полупрямой $(0,+\infty)$ и на полупрямой $(-\infty,0)$ и $F'(x) = f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ в каждой точке $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Поэтому F является первообразной для f на каждой из полупрямых $(0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$. Но F не является первообразной для f на всей вещественной прямой, так как F разрывна в точке $x = 0$.*

Пусть F — первообразная для функции f на открытом промежутке X. Нетрудно видеть, что функция Φ, заданная равенством $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — любая постоянная, также является первообразная для функции f на промежутке X. Поэтому всякая функция, имеющая первообразную на открытом промежутке X, имеет на этом промежутке бесконечное множество первообразных.

Связь между первообразными для одной и той же функции устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 5.1. *Если F и Φ — любые первообразные для функции f на открытом промежутке X, то существует постоянная C такая, что всюду на промежутке X справедливо равенство $\Phi(x) - F(x) = C$.*

Другими словами, две первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную.

Доказательство. Определим функцию G на X по правилу: $G(x) = \Phi(x) - F(x)$. Функция G дифференцируема на промежутке X как сумма двух дифференцируемых функций, причем всюду на этом промежутке $G'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

По теореме 4.22 (условие постоянства функции на промежутке), функция G является постоянной на X. ■

Следствие 5.1. *Если F — одна из первообразных для функции f на промежутке X, то любая первообразная Φ для функции f на этом промежутке задается равенством $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.*

5.2 Неопределенный интеграл и его основные свойства

Определение 5.2. *Совокупность всех первообразных для данной функции f на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f (на этом промежутке) и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.*

В обозначении $\int f(x)\,dx$ знак $\int$ называется *знаком неопределенного интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а сама функция f — *подынтегральной функцией.*

Знак $\int$ называют знаком **неопределенного** интеграла потому, что действие, обратное дифференцированию, **многозначно**, то есть сопровождается **неопределенностью**.

Пусть F — одна из первообразных для данной функции f на промежутке X. Тогда, в силу следствия 5.1, справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{5.1}$$

где C — любая константа.

Теперь рассмотрим свойства неопределенного интеграла, сразу следующие из определения 5.2.

Свойство 1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Справедливость этого утверждения следует из определений первообразной и неопределенного интеграла (определения 5.1 и 5.2).

Второе из равенств (5.2) показывает, что знаки дифференциала d и интеграла $\int$ взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

Свойство 2. *Если функция $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема на открытом промежутке X, то справедлива формула*

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{5.3}$$

Чтобы установить это свойство достаточно в левой части формулы (5.3) воспользоваться равенством $dF(x) = f(x)\,dx$, где f — производная функции F на X.

Из формулы (5.3) следует, что знаки интеграла $\int$ и дифференциала d взаимно уничтожаются и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но при этом к функции F добавляется произвольная постоянная C.

Следующие два свойства являются простейшими правилами интегрирования. Их называют линейными свойствами интеграла.

Свойство 3. *Если функции f и g имеют первообразные на промежутке X, то и функция $f + g$ имеет первообразную на этом промежутке и справедливо равенство*

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Свойство 4. *Если функция f имеет первообразную на промежутке X, то и функция kf, где k — любая постоянная, имеет первообразную на этом промежутке и справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{5.5}$$

Каждое из равенств (5.4) и (5.5) следует понимать как равенство правой и левой частей с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Свойства 3 и 4 следуют из того, что если F и G — первообразные функций f и g соответственно на промежутке X и k — произвольная постоянная, то по теореме 4.4 (арифметические операции над дифференцируемыми функциями) функции $F+G$ и kF являются первообразными соответственно для функций $f+g$ и kf на промежутке X.

А следующее свойство часто бывает полезным при нахождении неопределенных интегралов.

Свойство 5. *Пусть функция F — одна из первообразных для функции f на промежутке X, то есть*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

a и b — произвольные постоянные, причем $a \neq 0$, $T = \{t : at+b \in X\}$. Тогда

$$\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}F(at+b) + C, \quad t \in T. \tag{5.6}$$

Доказательство. Из условия следует, что на промежутке X функция F дифференцируема и справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Учитывая это и применяя теорему о производной сложной функции, находим

$$\left(\frac{1}{a}F(at+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(at+b) \cdot a = f(at+b).$$

Следовательно функция $\dfrac{1}{a}F(at+b)$ является первообразной для функции $f(at+b)$ на промежутке T. ■

5.3 Таблица основных неопределенных интегралов

Используя таблицу производных простейших элементарных функций, составим таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C;$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a}+C, \\ -\arccos\dfrac{x}{a}+C, \end{cases} \qquad (a>0);$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C, \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C, \end{cases} \qquad (a>0);$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \quad (a\neq 0);$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0);$

К этим формулам присоединим несколько формул для гиперболических функций:

12. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

13. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Каждая из формул 1 – 15 рассматривается на тех промежутках вещественной оси, на которых определена соответствующая подынтегральная функция.

Пример 5.4. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int (5x-13)^{75}\,dx$.

Решение. Применяя свойство 5 и формулу 1, получаем:

$$\int (5x-13)^{75}\,dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-13)^{76}}{76}+C = \frac{(5x-13)^{76}}{380}+C.$$

■

Изучая дифференциальное исчисление, мы установили, что производная любой *элементарной функции* является *элементарной функцией*, то есть *операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций*. С операцией интегрирования дело обстоит иначе. Известно, что интегралы от некоторых элементарных функций не являются элементарными функциями. Примерами таких интегралов служат

$$1^\circ.\ \int e^{-x^2}\,dx, \qquad 2^\circ.\ \int \cos\left(x^2\right)\,dx, \qquad 3^\circ.\ \int \sin\left(x^2\right)\,dx,$$

$$4^\circ.\ \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad 5^\circ.\ \int \frac{\cos x}{x}dx, \qquad 6^\circ.\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

5.4 Основные методы интегрирования

Метод разложения

Этот метод применяется в случаях, когда функцию $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде линейной комбинации функций $f_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, первообразные которых нетрудно найти, то есть
$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n.$$
Тогда по свойствам 4 и 3, получим
$$\int f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int f_j(x)\,dx.$$

Пример 5.5. *Вычислить*
$$\int \frac{x^3+1}{(x+2)^{50}}\,dx.$$

Решение. Разложим функцию x^3+1 по степеням суммы $x+2$.
$$x^3+1 = \big((x+2)-2\big)^3+1 = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12\,(x+2) - 7. \tag{5.7}$$
Благодаря (5.7), подынтегральная функция представима в виде
$$\frac{x^3+1}{(x+2)^{50}} = \frac{1}{(x+2)^{47}} - 6\,\frac{1}{(x+2)^{48}} + 12\,\frac{1}{(x+2)^{49}} - 7\,\frac{1}{(x+2)^{50}}.$$
А тогда, применяя свойство 5, получаем
$$\int \frac{x^3+1}{(x+2)^{50}}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^{47}}\,dx - 6\int \frac{1}{(x+2)^{48}}\,dx + 12\int \frac{1}{(x+2)^{49}}\,dx -$$
$$-7\int \frac{1}{(x+2)^{50}}\,dx = -\frac{1}{46(x+2)^{46}} + \frac{6}{47(x+2)^{47}} - \frac{1}{4(x+2)^{48}} + \frac{1}{7(x+2)^{49}} + C.$$
■

Интегрирование заменой переменных

Изложим один из сильнейших приемов интегрирования — *метод замены переменной* или *подстановки*. Он основан на следующем утверждении.

Теорема 5.2. *Пусть X и T — промежутки, функция $\varphi : X \longrightarrow T$ — дифференцируема на промежутке X, а функция g имеет первообразную G на промежутке T, то есть*
$$\int g(t)\,dt = G(t) + C. \tag{5.8}$$
Тогда на промежутке X функция, заданная формулой $g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$, имеет первообразную, равную $G\big(\varphi(x)\big)$, то есть
$$\int g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = G\big(\varphi(x)\big) + C. \tag{5.9}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что сложная функция $G\big(\varphi(x)\big)$ дифференцируема на промежутке X. Применяя правило дифференцирования сложной функции и учитывая, что $G'(t) = g(t)$ на промежутке T, получаем равенство

$$\big(G\big(\varphi(x)\big)\big)' = G'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

Следовательно функция $G\big(\varphi(x)\big)$ действительно является первообразной для функции $g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ на промежутке X. ■

Предположим теперь, что необходимо вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx. \tag{5.10}$$

Как будет показано далее, в ряде случаев удается найти такую функцию φ, что функция f представима в виде $f(x) = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$, где функции g и φ удовлетворяют всем условиям теоремы 5.2, причем первообразная G для функции g легко находится. Тогда, на основании теоремы 5.2, получаем

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = G\big(\varphi(x)\big) + C. \tag{5.11}$$

Этот прием нахождения интеграла (5.10) и называется *методом замены переменной* или *методом подстановки*.

Пример 5.6. *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{16x^4-1}$.

Решение. Сделаем замену $t = 4x^2$. Тогда $dt = 8x\,dx$. Поэтому, применяя табличную формулу, получаем

$$\int \frac{x\,dx}{16x^4-1} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1-4x^2}{1+4x^2}\right| + C.$$

■

Пример 5.7. *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{arctg} x$, находим $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$. Так как

$$x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t},$$

получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \cos^2 t\,dt =& \frac{1}{2}\int \big(1+\cos(2t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C = \\ =& \frac{1}{2}\left(t + \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^2 t + 1}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C.\end{aligned}$$

■

Интегрирование по частям

К числу весьма эффективных методов интегрирования относится *метод интегрирования по частям*.

Теорема 5.3. *Пусть каждая из функций u, v дифференцируема на промежутке X и, кроме того, на этом промежутке существует первообразная для функции $v \cdot u'$. Тогда на X существует первообразная и для функции $u \cdot v'$, причем справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{5.12}$$

Доказательство. Функция $u \cdot v$ в каждой точке промежутка X имеет производную

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x), \tag{5.13}$$

поэтому является первообразной для функции $uv' + vu'$ на X. Из равенства (5.13) находим

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x) \tag{5.14}$$

Поскольку первообразная правой части равенства (5.14) существует, существует первообразная и левой части этого равенства. Проинтегрировав обе части равенства (5.14) по переменной x, получаем (5.12). ■

Формула (5.12) называется *формулой интегрирования по частям*. В силу того, что $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$, формулу (5.12) можно записать в виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.15}$$

Пример 5.8. *Вычислить интеграл* $\int x\,\sin x\,dx$.

Положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Находим $du = dx$, $v = -\cos x$. Теперь по формуле (5.12) получаем

$$\int x\,\sin x\,dx = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = -x\,\cos x + \sin x + C.$$

Правило интегрирования по частям можно применять повторно. Рассмотрим

Пример 5.9. *Вычислить интеграл* $\int (\arccos x)^2\,dx$.

Полагая $u = (\arccos x)^2$, $dv = dx$, находим $du = -2\,\arccos x\,\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$. Тогда получаем

$$\int (\arccos x)^2\,dx = x\,(\arccos x)^2 + 2\int \frac{x\,\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{5.16}$$

К последнему интегралу в (5.16) снова применим метод интегрирования по частям. Теперь полагаем $u = \arccos x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и находим (смотрите пример 5.1) $du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$. Продолжая равенство (5.16), по формуле (5.12) получаем

$$\begin{aligned}\int (\arccos x)^2\,dx =&x\,(\arccos x)^2 + 2\left(-\sqrt{1-x^2}\,\arccos x - \int dx\right) = \\ =&x\,(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\,\arccos x - 2x + C.\end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям, по сравнению с интегрированием путем замены переменной, имеет более ограниченную область применения, но при умелом использовании этот способ позволяет находить первообразные для многих функций. Особенно эффективно интегрирование по частям применяется к интегралам вида

$$\int P(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{5.17}$$

где $P(x)$ — многочлен, а $\varphi(x)$ относится к одному из следующих двух классов функций:

$$\begin{aligned} &1)\quad \ln x, \quad \arccos x, \quad \arcsin x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x;\\ &2)\quad e^x, \quad \cos x, \quad \sin x. \end{aligned}$$

Если функция $\varphi(x)$ принадлежит первому классу, полагают $u = \varphi(x)$, $dv = P(x)\,dx$, а если же она принадлежит второму классу, то полагают $u = P(x)$, $dv = \varphi(x)\,dx$.

Отметим, что интегралами вида (5.17) не исчерпываются возможности метода интегрирования по частям. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.10. *Вычислить интегралы*

$$I_1 = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx, \qquad I_2 = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx. \tag{5.18}$$

Решение. Проинтегрируем интеграл I_1 по частям. Положим $u = e^{ax}$, $dv = \cos(bx)\,dx$. Тогда $du = a\,e^{ax}\,dx$, $v = \dfrac{1}{b}\sin(bx)$ и по формуле (5.12) получаем

$$I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}I_2. \tag{5.19}$$

Аналогично поступим с интегралом I_2. Положим $u = e^{ax}$, $dv = \sin(bx)\,dx$. Затем найдем $du = a\,e^{ax}\,dx$, $v = -\dfrac{1}{b}\cos(bx)$ и, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$I_2 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}I_1. \tag{5.20}$$

Решая систему уравнений, составленную из уравнений (5.19) и (5.20), относительно неизвестных I_1 и I_2, находим

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big) + C, \quad I_2 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + C. \tag{5.21}$$

■

5.5 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции занимают особое место в анализе, поскольку первообразная любой такой функции является элементарной функцией и интегрирование многих функций, отличных от рациональных, сводится к интегрированию рациональных функций. Но для изложения теории интегрирования рациональных функций нам потребуются некоторые элементарные сведения о корнях алгебраических многочленов.

Корни многочленов

Рассмотрим многочлен P_n степени n

$$P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n,$$

с вещественными коэффициентами c_0, c_1, …, c_n, первый из которых отличен от нуля (в дальнейшем будем предполагать, что он равен единице).

Определение 5.3. *Комплексное число a называется корнем многочлена P_n, если многочлен P_n в точке $x = a$ обращается в нуль, то есть $P_n(a) = 0$.*

Хорошо известно, что если число a является корнем многочлена n-й степени P_n, то этот многочлен представим в виде

$$P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x), \tag{5.22}$$

где P_{n-1} — некоторый многочлен степени $n - 1$.

Определение 5.4. *Корень a многочлена P_n называется корнем кратности l, если справедливо представление*

$$P_n(x) = (x - a)^l P_{n-l}(x), \tag{5.23}$$

причем $P_{n-l}(a) \neq 0$.

Отметим, что если a — вещественный корень многочлена P_n (с вещественными коэффициентами), то P_{n-l} является многочленом с вещественными коэффициентами.

Предложение 5.1. *Если $a = u + iv$ комплексный корень кратности m многочлена P_n (с вещественными коэффициентами), то и сопряженное ему число $\overline{a} = u - iv$ является корнем этого многочлена кратности m. При этом многочлен P_n представим в виде*

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)^m P_{n-2m}(x), \tag{5.24}$$

где $p = -2u$, $q = u^2 + v^2$, а многочлен P_{n-2m} — многочлен с вещественными коэффициентами степени $n - 2m$, не обращающийся в нуль ни при $x = a$, ни при $x = \overline{a}$.

Позже будет доказана основная теорема алгебры (теорема 19.18) в которой утверждается, что всякий многочлен положительной степени имеет по крайней мере один корень.

Из сказанного следует, что всякий многочлен P_n с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде следующего произведения

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & (x - a_1)^{l_1}(x - a_2)^{l_2} \ldots (x - a_r)^{l_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \times \\ \times {} & (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

где все числа $a_1, \ldots, a_r$, $p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$, $l_1, \ldots, l_r$, $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$, причем

$$l_1 + \ldots + l_r + 2\,(m_1 + \ldots + m_s) = n.$$

Определение 5.5. *Рациональной дробью называют отношение двух многочленов*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{5.26}$$

При этом дробь (5.26) называется правильной, если степень многочлена P, стоящего в числителе, меньше степени многочлена Q, стоящего в знаменателе.

Всякая неправильная рациональная дробь всегда однозначно представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого достаточно, например, поделить столбиком числитель исходной дроби на ее знаменатель.

Пример 5.11. *Представить неправильную рациональную дробь*

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$$

в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Разделим столбиком числитель дроби на знаменатель.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{rrrr} x^3 & +\ 3x^2 & +\ 4x & +\ 1 \\ x^3 & +\ x^2 & +\ x & \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x+1 \\ \hline x+2 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{rrr} 2x^2 & +\ 3x & +\ 1 \\ 2x^2 & +\ 2x & +\ 2 \end{array} & \\
\hline
x\ -\ 1 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+3x^2+4x+1}{x^2+x+1} = x+2+\frac{x-1}{x^2+x+1}\,.$$

Лемма 5.1. *Пусть вещественное число a является корнем кратности l знаменателя правильной рациональной дроби (5.26), то есть*

$$Q(x) = (x-a)^l Q_1(x), \tag{5.27}$$

где $Q_1(a) \neq 0$. Тогда для этой дроби справедливо следующее представление:

$$R(x) = \frac{A}{(x-a)^l} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{l-k}Q_1(x)}. \tag{5.28}$$

В этом представлении $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, а P_1 — некоторый многочлен (с вещественными коэффициентами), причем последняя дробь в правой части (5.28) является правильной.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^l}.$$

Приводя ее к общему знаменателю, получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^l} = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^l Q_1(x)} = \frac{S(x)}{(x-a)^l Q_1(x)}, \tag{5.29}$$

где S обозначает многочлен, заданный равенством $S(x) = P(x) - AQ_1(x)$. Поскольку

$$S(a) = P(a) - AQ_1(a) = P(a) - \frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(a) = 0,$$

число a является корнем многочлена S некоторой кратности $k \geq 1$, то есть

$$S(x) = (x-a)^k P_1(x), \tag{5.30}$$

где $P_1(a) \neq 0$. Используя (5.29) и представление многочлена S в виде (5.30), получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^l} = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{l-k}Q_1(x)}. \tag{5.31}$$

Тем самым равенство (5.28) доказано. А так как дробь, стоящая в правой части (5.31) является суммой двух правильных дробей, то она сама является правильной. ■

Лемма 5.2. *Пусть знаменатель правильной рациональной дроби (5.26) имеет комплексные корни $a = u + iv$ и $\overline{a} = u - iv$ кратности m, то есть*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x), \tag{5.32}$$

где $Q_1(a) \neq 0$, $p = -2u$, $q = u^2 + v^2$. Тогда для этой дроби справедливо следующее представление:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-k} Q_1(x)} \,. \tag{5.33}$$

В этом представлении M и N — некоторые вещественные числа, $k \in \mathbb{N}$, а P_1 — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами, причем последняя дробь в правой части (5.33) является правильной.

Доказательство. Пусть, как обычно, $\mathrm{Re}\,(A)$ и $\mathrm{Im}\,(A)$ обозначают вещественную и мнимую части комплексного числа A. Положим

$$M = \frac{1}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right), \quad N = \mathrm{Re}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right) - \frac{u}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right).$$

Теперь рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} \,.$$

Приведем эту разность к общему знаменателю.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} = \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} \,.$$

Очевидно, что функция $S(x) = P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$ является многочленом с вещественными коэффициентами. Таким образом, получили представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} = \frac{S(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} \,. \tag{5.34}$$

Так как

$$\begin{aligned} S(a) &= P(a) - (Ma + N)\, Q_1(a) = \\ &= P(a) - \left(\frac{1}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right)(u + iv) + \mathrm{Re}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right) - \frac{u}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right)\right) Q_1(a) = \\ & P(a) - \left(\frac{u}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right) + i\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right) - \frac{u}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right)\right) Q_1(a) = \\ &= P(a) - \frac{P(a)}{Q_1(a)} Q_1(a) = 0, \end{aligned}$$

то число a является корнем многочлена S некоторой кратности k, а по предложению 5.1 и число $\overline{a}$ также является корнем этого многочлена кратности k. Следовательно, многочлен S разлагается в произведение

$$S(x) = (x^2 + px + q)^k P_1(x),$$

где P_1 — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами, не обращающийся в нуль при $x = a$ и $x = \overline{a}$. Вставляя это представление в формулу (5.34), получим представление (5.33). И поскольку сумма двух правильных дробей, в свою очередь, является правильной дробью, то $\dfrac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-k} Q_1(x)}$ — правильная дробь. ■

Последовательное применение лемм 5.1 и 5.2 к правильной дроби (5.26) приводит к следующему утверждению.

Теорема 5.4. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид*

$$\begin{aligned} Q(x) = &(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\dots(x-a_r)^{l_r}\times \\ &\times(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}\,. \end{aligned}$$

Тогда для этой дроби справедливо разложение на сумму дробей:

$$\begin{aligned} &\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{A_{l_1}^{(1)}}{x-a_1} + \\ + &\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_2)^{l_2}} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^{l_2-1}} + \dots + \frac{A_{l_2}^{(2)}}{x-a_2} + \dots + \\ + &\frac{A_1^{(r)}}{(x-a_r)^{l_r}} + \frac{A_2^{(r)}}{(x-a_r)^{l_r-1}} + \dots + \frac{A_{l_r}^{(r)}}{x-a_r} + \\ + &\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{M_{m_1}^{(1)}x+N_{m_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \\ + &\dots + \frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}} + \frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}} + \dots + \frac{M_{m_s}^{(s)}x+N_{m_s}^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}\,, \end{aligned} \tag{5.35}$$

где $A_1^{(1)},\ A_2^{(1)},\dots,A_{l_r}^{(r)},\ M_1^{(1)},\ N_1^{(1)},\dots,M_{m_s}^{(s)},\ N_{m_s}^{(s)}\in\mathbb{R}$.

Для конкретного определения этих постоянных нужно привести все дроби в (5.35) к общему знаменателю, а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. Получим систему

$$l_1+l_2+\dots+l_r+2\,(m_1+m_2+\dots+m_s)$$

линейных уравнений с таким же числом неизвестных, которыми являются перечисленные коэффициенты.

Дроби, стоящие в правой части (5.35) называют *простейшими рациональными дробями*.

Этот способ представления правильной рациональной дроби в виде суммы простейших рациональных дробей называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример 5.12. *Разложить дробь* $\dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ *на простейшие.*

Согласно теореме 5.4, разложение имеет вид

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\,. \tag{5.36}$$

Приводя обе части этого равенства к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)\,(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)\,(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2}\,.$$

Сравнивая в числителях коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x^1 и x^0, приходим к системе уравнений

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x^4 & A & +B & & & & = & 0, \\
x^3 & & -B & +C & & & = & 0, \\
x^2 & 2A & +B & -C & +D & & = & 0, \\
x^1 & & -B & +C & -D & +E & = & 1, \\
x^0 & A & & -C & & -E & = & 3,
\end{array}$$

которая в силу единственности определения коэффициентов имеет отличный от нуля определитель.

Решая эту систему, находим $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = -2$, $E = -1$. Поэтому окончательно получаем

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Поскольку всякая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а интегрирование многочлена не составляет труда, нужно научиться интегрировать лишь правильные рациональные дроби. Но ввиду теоремы 5.4 для этого достаточно уметь интегрировать простейшие рациональные дроби. Согласно определению, простейшие рациональные дроби бывают следующих четырех типов:

$$\begin{array}{llll}
I. & \dfrac{A}{x-a}, & III. & \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad q-\dfrac{p^2}{4}>0, \\
II. & \dfrac{A}{(x-a)^l},\ l>1, & IV. & \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \quad q-\dfrac{p^2}{4}>0,\ m>1.
\end{array}$$

Покажем, что каждая из четырех указанных дробей интегрируема в элементарных функциях. Действительно, применяя свойство 5 и формулы 4 и 3, сразу находим интегралы от дробей первого и второго типов:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^l}\,dx = -\frac{A}{(l-1)\,(x-a)^{l-1}} + C.$$

Для вычисления интеграла от дроби третьего и четвертого типов, учитывая, что разность $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$, преобразуем квадратный трёхчлен x^2+px+q:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left(\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1\right).$$

Теперь, сделав в интеграле

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx,$$

где $m \in \mathbb{N}$, замену переменной $t = \dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$, преобразуем его в интеграл вида:

$$\int \frac{Et+F}{(t^2+1)^m}\,dt. \tag{5.37}$$

Поэтому при $m = 1$, то есть в случае дроби третьего типа, имеем

$$\int \frac{Et + F}{t^2 + 1}\, dt = \frac{E}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1}\, dt + F \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{E}{2} \ln\left(t^2 + 1\right) + F \operatorname{arctg} t + C.$$

Осталось показать, как можно вычислить интеграл от дроби четвертого типа, который мы преобразовали в интеграл вида (5.37).

Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{Et + F}{(t^2 + 1)^m}\, dt = \frac{E}{2} \int \frac{2t\, dt}{(t^2 + 1)^m} + F \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}. \tag{5.38}$$

Очевидно, что

$$\int \frac{2t\, dt}{(t^2 + 1)^m} = -\frac{1}{(m-1)\,(t^2 + 1)^{m-1}} + C.$$

Введем обозначение:

$$K_m = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}.$$

Выведем рекуррентную формулу, сводящую вычисление интеграла K_m к вычислению интеграла K_{m-1}. Имеем:

$$\begin{aligned} K_m &= \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m} = \int \frac{(t^2 + 1) - t^2}{(t^2 + 1)^m}\, dt = \\ &= \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{m-1}} - \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^m}\, dt = K_{m-1} - \int t \cdot \frac{t\, dt}{(t^2 + 1)^m}. \end{aligned}$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям. Положим $u = t$, $dv = \dfrac{t\, dt}{(t^2 + 1)^m}$. Тогда $du = dt$, $v = -\dfrac{1}{2\,(m-1)\,(t^2 + 1)^{m-1}}$. Следовательно,

$$K_m = K_{m-1} + \frac{t}{2\,(m-1)\,(t^2 + 1)^{m-1}} - \frac{1}{2\,(m-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{m-1}}\,.$$

Так как последний интеграл есть K_{m-1}, то окончательно получаем

$$K_m = \frac{t}{2\,(m-1)\,(t^2 + 1)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{2\,(m-1)} K_{m-1}. \tag{5.39}$$

Это и есть искомая итерационная формула. Применяем её последовательно к интегралам K_{m-1}, K_{m-2}, …, пока не придём к интегралу

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Для завершения вычислений осталось возвратиться к переменной x. Предоставляем читателям проделать это самостоятельно.

Таким образом, доказана следующая теорема об интегрировании рациональной дроби.

Теорема 5.5. *Всякая рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях, причём интеграл от неё выражается через рациональную функцию, логарифм и арктангенс.*

Пример 5.13. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$.

Пользуясь результатом примера 5.12 и применяя изложенную методику, получаем

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2(x^2+1)} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{2-x}{2(x^2+1)} + C.$$

Пример 5.14. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{3x^4+7x^3+x^2-x-2}{x^4-1}\,dx .$$

Поскольку подынтегральная функция — неправильная дробь, сначала выделим ее целую часть.

$$\int \frac{3x^4+7x^3+x^2-x-2}{x^4-1}\,dx = \int \left(3 + \frac{7x^3+x^2-x+1}{x^4-1}\right)dx. \tag{5.40}$$

Оставшуюся правильную дробь разложим на простейшие, применяя метод неопределенных коэффициентов. Так как $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, то разложение имеет вид

$$\frac{7x^3+x^2-x+1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Легко убедиться, что $A=2$, $B=1$, $M=4$, $N=0$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^4+7x^3+x^2-x-2}{x^4-1}\,dx = 3\int dx + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} +$$
$$+4\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = 3x + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + 2\ln\left(x^2+1\right) + C .$$

Далее мы рассмотрим некоторые классы функций, отличных от рациональных. Проблема интегрирования этих классов функций сводится к подбору подстановок, сводящих интегралы от таких функций к интегралам от рациональных функций.

5.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Для изложения этого материала нам потребуется понятие рациональной функции двух переменных.

Определение 5.6. *Многочленом n-й степени от двух переменных x и y называется выражение вида*

$$P_n(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots +$$
$$+ a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0,n}y^n,$$

где $a_{0,0},\ a_{1,0},\ a_{0,1},\ \ldots,\ a_{0,n} \in \mathbb{R}$.

Определение 5.7. *Рациональной функцией двух переменных называется функция вида* $R(x,y) = \dfrac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$, *где* $P_n(x,y)$ *и* $Q_m(x,y)$ *— произвольные многочлены от двух переменных* x *и* y *степеней* n *и* m *соответственно.*

Отметим несколько элементарных свойств рациональных функций двух переменных.

(I) *Сумма, разность, произведение, частное и суперпозиция рациональных функций — рациональная функция.*

(II) *Если рациональная функция* $R(u,v)$ *не меняет своего значения при изменении знака одного из аргументов, например,* u, *то есть, если* $R(-u,v) = R(u,v)$, *то эта рациональная функция может быть приведена к виду* $R(u,v) = R_1(u^2,v)$, *где* R_1 *— некоторая рациональная функция.* (Это означает, что функция $R(u,v)$ содержит лишь четные степени переменной u.)

(III) *Если при изменении знака одного из аргументов, например,* u, *рациональная функция* $R(u,v)$ *также меняет знак, то есть* $R(-u,v) = -R(u,v)$, *то она приводится к виду* $R(u,v) = uR_1(u^2,v)$.

(IV) *Если при одновременном изменении знаков аргументов* u *и* v, *рациональная функция* $R(u,v)$ *не меняет своего знака, то есть если*

$$R(-u,-v) = R(u,v), \tag{5.41}$$

то эта рациональная функция может быть приведена к виду $R(u,v) = R_1\left(\dfrac{u}{v}, v^2\right)$.

Свойства (I),(II) и (III) проверяются непосредственно.

Докажем свойство (IV). Преобразуем сначала обе части равенства (5.41).

$$R(u,v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v\right), \quad R(-u,-v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, -v\right). \tag{5.42}$$

Отсюда следует, что

$$R_2\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Но тогда, согласно свойству (II),

$$R_2\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Из этого равенства и первого из равенств (5.42) получаем нужное представление.

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx. \tag{5.43}$$

Этот интеграл всегда может быть рационализирован с помощью так называемой *универсальной* подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Действительно, при такой замене имеем

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = R_1(t),\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = R_2(t),\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt = R_3(t)\,dt.$$

Поэтому интеграл (5.43) преобразуется в интеграл

$$\int R\left(R_1(t), R_2(t)\right) R_3(t)\,dt,$$

то есть в интеграл от рациональной функции одной переменной t.

Пример 5.15. *Рационализируем интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x}$.

Полагая $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{2\,dt}{\left(\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 2\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right)(1+t^2)} = \int \frac{2\left(1+t^2\right)\,dt}{3t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 4t + 3}.$$

Поскольку подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ является универсальной, она, как правило, приводит к громоздким вычислениям. В некоторых частных случаях интеграл (5.43) рационализируется с помощью других подстановок, приводящих к более простым выкладкам.

Рассмотрим следующие три случая.

1) Подынтегральная функция в интеграле (5.43) при замене $\cos x$ на $-\cos x$ меняет знак на противоположный. В этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$. Действительно, согласно свойству (II), эта функция представима в виде

$$R(\sin x, \cos x) = \widetilde{R}\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x,$$

и

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = \widetilde{R}\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x\,dx =$$
$$= \widetilde{R}\left(\sin x, 1-\sin^2 x\right)\,d(\sin x) = \widetilde{R}\left(t, 1-t^2\right)\,dt = R_1(t)\,dt.$$

Пример 5.16. *Рационализируем интеграл* $\displaystyle\int \frac{3\sin x\cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x\cos^3 x}\,dx.$

Нетрудно проверить, что в данном случае подинтегральная функция при замене $\cos x$ на $-\cos x$ меняет знак на противоположный, поэтому можно положить $t = \sin x$. Тогда

$$\int \frac{3\sin x\cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x\cos^3 x}\,dx = \int \frac{3\sin x\cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x\cos^4 x}\,\cos x dx =$$
$$= \int \frac{3t\left(1-t^2\right) + \left(1-t^2\right)^2 + 1}{t^2(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{t^4 - 3t^3 - 2t^2 + 3t + 2}{t^2(1-t)^2(1+t)^2}\,dt.$$

При универсальной же подстановке получим (проверьте это).

$$\int \frac{3\sin x\cos^2 x + \cos^4 x + 1}{\sin^2 x\cos^3 x}\,dx = \int \frac{t^8 - 6t^7 + 18t^5 + 12t^4 - 18t^3 + 6t + 2}{2t^2\left(1-t^2\right)^3}\,dt.$$

2) Подынтегральная функция в интеграле (5.43) при замене $\sin x$ на $-\sin x$ меняет знак на противоположный. В этом случае, аналогично предыдущему, подстановка $t = \cos x$ рационализирует рассматриваемый интеграле (5.43).

Пример 5.17. *Рационализируем интеграл* $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x - 1}\,dx.$

Поскольку

$$R(-\sin x, \cos x) = -\frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x - 1} = -R(\sin x, \cos x),$$

то полагаем $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x\, dx$. Поэтому

$$\int \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x - 1}\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x - 1}\, (-\sin x)\, dx =$$

$$= -\int \frac{1 - t^2}{2t^2 + (1 - t^2)^2 - 1}\, dt = \int \frac{t^2 - 1}{4t^4}\, dt.$$

При универсальной же подстановке

$$\int \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x - 1}\, dx = 16 \int \frac{t^3\, dt}{(t^2 - 1)^4}.$$

3) Подынтегральная функция в интеграле (5.43) при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$ не меняет своего знака. Тогда, согласно свойству (IV),

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int \widetilde{R}\left(\operatorname{tg} x, \cos^2 x\right)\ dx. \tag{5.44}$$

Полагая $t = \operatorname{tg} x$, находим $x = \operatorname{arctg} t$ и $dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$. Продолжая (5.44), получаем

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int \widetilde{R}\left(t, \frac{1}{1 + t^2}\right) \frac{dt}{1 + t^2} = \int R_1(t)\ dt.$$

Пример 5.18. *Рационализируем интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x}$.

Так как при $\sin x = u$ и $\cos x = v$ подынтегральная функция имеет вид

$$R(u, v) = \frac{1}{u^2 + 2uv + 3v^2}$$

и справедливо равенство $R(-u, -v) = R(u, v)$, то делаем замену $t = \operatorname{tg} x$ и получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x} + 3} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 3}.$$

В результате замены $t = \operatorname{tg} x$ получена более простая подынтегральная функция, чем в случае универсальной подстановки (см. пример 5.15).

5.7 Интегрирование иррациональностей

1. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx, \tag{5.45}$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax + b}{cx + d}}$.

Действительно,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = R_1(t), \quad dx = \frac{n(ad-bc)t^n}{(a-ct^n)^2}dt = R_2(t)dt.$$

Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(R_1(t), t\right) R_2(t)dt = \int \widetilde{R}(t)\, dt.$$

Пример 5.19. *Рационализировать интеграл*

$$\int \frac{\sqrt[3]{\frac{5x+1}{x-3}} + \sqrt{\frac{5x+1}{x-3}}}{\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-3}} + \sqrt[3]{\frac{5x+1}{x-3}}} dx.$$

Подынтегральная функция в этом интеграле имеет вид (5.45) с $n = 12$. Делая замену $t = \sqrt[12]{\dfrac{5x+1}{x-3}}$, находим $x = \dfrac{3t^{12}+1}{t^{12}-5}$, $dx = -\dfrac{192\, t^{11}\, dt}{\left(t^{12}-5\right)^2}$ и получаем

$$\int \frac{\sqrt[3]{\frac{5x+1}{x-3}} + \sqrt{\frac{5x+1}{x-3}}}{\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-3}} + \sqrt[3]{\frac{5x+1}{x-3}}} dx = -192 \int \frac{(t^4+t^6))t^{11}}{\left(t^3+t^4\right)\left(t^{12}-5\right)^2}\, dt =$$

$$= -192 \int \frac{(1+t^2))t^{12}}{(1+t)\left(t^{12}-5\right)^2}\, dt.$$

2. Интеграл вида

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx, \tag{5.46}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, а m, n, $p \in \mathbb{Q}$ называется интегралом от биномиального дифференциала.

Вопрос о рационализации интегралов этого вида был полностью решен в середине XIX века русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышёвым. Мы приведем здесь доказательство достаточности его теоремы.

Теорема 5.6. *Биномиальный дифференциал интегрируется в элементарных функциях тогда и только тогда, когда для чисел m, n и p выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$1^\circ. \quad p \in \mathbb{Z}, \qquad 2^\circ. \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, \qquad 3^\circ. \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$$

В случае 1° интеграл (5.46) представляет собой интеграл вида (5.45), точнее интеграл вида $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[r]{x}\right) dx$, где r — наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n. Поэтому он рационализируется постановкой $t = \sqrt[r]{x}$.

В случае 2°, делая замену $z = x^n$ и вводя обозначение $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$, получаем

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^p\, dz.$$

Тем самым мы преобразовали исходный интеграл в интеграл вида $\displaystyle\int R\left(z, \sqrt[s]{a+bz}\right)\, dz$ (от дробно-линейной иррациональности), где s — знаменатель числа p, который рационализируется постановкой

$$t = \sqrt[s]{a+bz}.$$

В случае 3° после замены $z = x^n$ в $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ положим $q = \dfrac{m+1}{n} + p - 1$ и будем иметь

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int z^q\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz.$$

Следовательно, и в этом случае исходный интеграл преобразован в интеграл от дробно-линейной иррациональности, который рационализируется постановкой $t = \sqrt[s]{\dfrac{a+bz}{z}}$, где s — знаменатель числа p.

Пример 5.20. *Рационализировать интеграл*

$$\int x^{\frac{3}{7}}\left(2x^{\frac{5}{9}}+3\right)^2 dx.$$

В данном примере $m = \dfrac{3}{7}$, $n = \dfrac{5}{9}$, $p = 2$. Так как $p \in \mathbb{Z}$, то выполняется условие 1°. Поэтому делаем замену $t = \sqrt[63]{x}$. Тогда $x = t^{63}$, $dx = 63t^{62}\,dt$ и

$$\int x^{\frac{3}{7}}\left(2x^{\frac{5}{9}}+3\right)^2 dx = 63\int t^{89}\left(2t^{35}+3\right)^2 dt.$$

Пример 5.21. *Рационализировать интеграл*

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(7x^{\frac{2}{3}}-4\right)^{\frac{2}{5}} dx.$$

В данном примере $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{2}{5}$. Последовательно проверяем:

$$p \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, выполняется условие 2°. Поэтому делаем замену $z = x^{\frac{2}{3}}$. Отсюда находим:

$$x = z^{\frac{3}{2}}, \quad dx = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz.$$

Подставляя найденные представления для x и dx в исходный интеграл, получаем:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(7x^{\frac{2}{3}}-4\right)^{\frac{2}{5}} dx = \frac{3}{2}\int z(7z-4)^{\frac{2}{5}}\,dz.$$

Пример 5.22. *Рационализировать интеграл*

$$\int x^{\frac{7}{15}}\left(4x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{3}{5}} dx.$$

В данном примере $m = \dfrac{7}{15}$, $n = \dfrac{1}{3}$, $p = \dfrac{3}{5}$. Последовательно проверяем:

$$p \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{22}{5} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{22}{5} + \frac{3}{5} = 5 \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, мы имеем случай 3°. Поскольку знаменатель числа p равен пяти, делаем замену $t = \sqrt[5]{\dfrac{-3}{x^{\frac{1}{3}}} + 4}$. Отсюда находим

$$x = \left(\frac{3}{4-t^5}\right)^3 = \frac{27}{\left(4-t^5\right)^3}, \quad dx = \frac{405t^4}{\left(4-t^5\right)^4}dt.$$

Подставляя найденные представления для x и dx в исходный интеграл, получаем

$$\int x^{\frac{7}{15}}\left(4x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{3}{5}}dx=\int\left(\frac{3}{4-t^5}\right)^{\frac{7}{5}}\left(4\frac{3}{4-t^5}-3\right)^{\frac{3}{5}}\frac{405t^4}{\left(4-t^5\right)^4}dt=3645\int\frac{t^7}{\left(4-t^5\right)^6}dt.$$

3. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \tag{5.47}$$

где $a,b,c\in\mathbb{R}$, рационализируется с помощью подстановок Эйлера.

1^*. Пусть $a>0$. В интеграле (5.47) сделаем замену, полагая

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.$$

Возведем теперь обе части этого равенства в квадрат и получим

$$bx+c=t^2\pm 2\sqrt{a}tx.$$

Отсюда находим

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}=R_1(t),\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}R_1(t)=R_2(t),\quad dx=R_1'(t)dt=R_3(t)dt.$$

Поэтому

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx=\int R\left(R_1(t),R_2(t)\right)R_3(t)dt=\int R_4(t)dt. \tag{5.48}$$

2^*. Пусть $c>0$. В этом случае положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}.$$

После возведения этого равенства в квадрат получим

$$ax^2+bx=x^2t^2\pm 2\sqrt{c}xt.$$

Разделим обе части полученного равенства на x и найдем

$$x=\frac{b\mp 2\sqrt{c}t}{t^2-a}=R_1(t),\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=tR_1(t)\pm\sqrt{c}=R_2(t),\quad dx=R_1'(t)dt=R_3(t)dt.$$

Следовательно, мы снова приходим к интегралу (5.48).

3^*. Пусть квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет неравные вещественные корни x_1 и x_2. Тогда

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1).$$

Как и в предыдущих случаях, возводя обе части этого равенства в квадрат, находим:

$$x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}=R_1(t),\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(R_1(t)-x_1\right)=R_2(t),$$

$$dx=R_1'(t)dt=R_3(t)dt.$$

Опять приходим к интегралу вида (5.48).

Пример 5.23. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Квадратный трёхчлен x^2+x+1 вещественных корней не имеет, но коэффициент при x^2 и свободный член положительны. Поэтому годятся первая и вторая подстановки Эйлера. Применим, например, первую подстановку. Положим

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x.$$

Имеем:

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}, \quad dx = \frac{2\left(t^2+t+1\right)}{\left(2t+1\right)^2}dt.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t+1}{t^2-1}\cdot\frac{2t+1}{t^2+t+1}\cdot\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{\left(2t+1\right)^2}dt =$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}+1}\right| + C.$$

Пример 5.24. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Так как $2+x-x^2 = (1+x)(2-x)$, то, полагая

$$\sqrt{2+x-x^2} = t\left(1+x\right),$$

находим

$$x = \frac{2-t^2}{t^2+1},\ dx = -\frac{6t}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = -2\int\frac{dt}{2-t^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}\left(1+x\right)}{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}\left(1+x\right)}\right| + C.$$

Пример 5.25. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x-x^2}}$.

Положим $\sqrt{4+x-x^2} = tx+2$. Тогда

$$x = \frac{1-4t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2\left(2t^2-t-2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt, \quad \sqrt{4+x-x^2} = -\frac{2t^2-t-2}{t^2+1},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x-x^2}} = 2\int\frac{dt}{4t-1} = 2\cdot\frac{1}{4}\ln|4t-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4\sqrt{4+x-x^2}-x-8}{x}\right| + C.$$

Заметим, что для рационализации интегралов вида 5.47 достаточно двух подстановок Эйлера. Действительно, если квадратный трёхчлен имеет ax^2+bx+c вещественные корни, то подходит третья подстановка.

Если же трёхчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней, то его знак совпадает со знаком a. Но этот квадратный трёхчлен положителен (из него извлекается квадратный корень). Поэтому $a > 0$. Следовательно, интеграл (5.47) рационализируется первой подстановкой Эйлера.

Таким образом, интеграл (5.47) всегда рационализируется или первой, или третьей подстановкой Эйлера.

5.8 Задачи

1. Существует ли рациональная функция, не интегрируемая в классе рациональных функций?

2. Верно ли, что все рациональные функции интегрируемы в классе рациональных функций?

3. Верно ли, что все рациональные функции интегрируемы в классе элементарных функций?

4. Верно ли следующее определение?
Функция $F : (a;b) \to \mathbb{R}$ называется первообразной для функции $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ на интервале $(a;b)$, если F задана формулой $F(x) = C\,f(x)$, где C — произвольная константа.

5. Верно ли следующее определение?
Функция $F : (a;b) \to \mathbb{R}$ называется первообразной для функции $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке $x \in (a;b)$ функция F дифференцируема и её производная $F^{'}$ непрерывна в интервале $(a;b)$.

6. Верно ли следующее определение?
Функция $F : (a;b) \to \mathbb{R}$ называется первообразной для функции $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ на интервале $(a;b)$, если найдётся точка $x \in (a;b)$, в которой функция F дифференцируема и имеет производную $F^{'}(x)$, равную $f(x)$.

7. Верно ли следующее определение?
Функция $F : (a;b) \to \mathbb{R}$ называется первообразной для функции $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке $x \in (a;b)$ функция F дифференцируема и имеет производную $F^{'}(x)$, равную $f(x) + C$, где $C \neq 0$.

8. Верно ли следующее определение?
Неопределенным интегралом функции f на интервале $(a;b)$ называется множество всех дифференцируемых функций F, для которых $F^{'}(x) = f(x) + C$ для любого $x \in (a;b)$, где C — постоянное число, зависящее от $F(x)$.

9. Верно ли следующее определение?
Неопределенным интегралом функции f на интервале $(a;b)$ называется множество всех функций F, дифференцируемых в интервале $(a;b)$ и имеющих производную $F^{'}(x)$, равную $f(x)$.

10. Верно ли следующее определение?
Неопределенным интегралом функции f на интервале $(a;b)$ называется всякая функция $g(x) = f(x) + C$.

11. Верно ли следующее определение?
Неопределенным интегралом функции f на интервале $(a;b)$ называется множество всех функций $g(x)$, таких что $g(x) = f(x) + C$.

12. Верно ли следующее определение?
Неопределенным интегралом функции f на интервале $(a;b)$ называется множество всех непрерывных в интервале $(a;b)$ функций $F(x) = f(x) + C$.

13. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть первообразная периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Является ли функция F периодической?

14. Доказать, что одна из первообразных чётной функции является нечётной функцией.

15. Доказать, что любая первообразная нечётной функции является чётной функцией.

16. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ не имеет первообразной на всей числовой оси.

17. Верно ли, что $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$?

18. Пусть f имеет первообразную F на интервале $(a;b)$. Верно ли, что $d\left(\displaystyle\int f(x)dx\right)$ равен:

$$a)\quad F(x);\quad b)\quad F^{'}(x);\quad c)\quad F(x)dx;\quad d)\quad d\,F(x);\quad e)\quad F(x)+C?$$

19. Пусть функции F и Φ — первообразные функции f на интервале $(a;b)$. Справедливо ли равенство:

$$a)\quad F(x) = \Phi(x);\qquad b)\quad F(x)+\Phi(x) = C?$$

20. Пусть функции f и g имеют первообразные F и G на интервале $(a;b)$. Верно ли, что функция $f+g$ также имеет первообразную на интервале $(a;b)$ и $\displaystyle\int (f(x)+g(x))dx$ равен:

$$a)\quad F(x)+G(x);\quad b)\quad F^{'}(x)+G^{'}(x);\quad c)\quad (f(x)+g(x))dx;$$

$$d)\quad \int dF(x)+G(x);\quad e)\quad (F^{'}(x)+G^{'}(x))dx?$$

21. Пусть функции f и g имеют первообразные F и G на интервале $(a;b)$. Верно ли, что функция $f\cdot g$ также имеет первообразную на интервале $(a;b)$ и $\displaystyle\int f(x)g(x)dx$ равен:

$$a)\quad F(x)G(x)+C;\quad b)\, C\,F(x)G(x);\quad c)\quad \left(\int F(x)dx\right)G(x)+F(x)\int G(x)dx;$$

$$d)\quad \left(\int f(x)dx\right)G(x)+F(x)\int g(x)dx?$$

22. Доказать, что если функция φ имеет рациональную первообразную, а функция ψ — рациональную производную, то функция $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ интегрируема в классе элементарных функций.

23. Доказать, что если функция φ имеет рациональную первообразную, то функция $f(x) = \varphi(x)\arcsin x$ интегрируема в классе элементарных функций.

24. При каких a, b, c, d $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$ равен

$$a)\quad R_1(x)+A\ln R_2(x)+B,\quad b)\quad A\ln R(x)+B,\quad c)\quad R(x)+C,$$

где R_1, R_2 и R — рациональные функции, $A, B, C \in \mathbb{R}$?

25. Через какие функции может быть выражен интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где P и Q — многочлены и многочлен Q имеет только действительные корни?

26. Через какие функции может быть выражен интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где P и Q — многочлены и многочлен Q имеет только комплексные корни?

27. Доказать, что

$$\int P(\sqrt[n]{x})dx = Q(\sqrt[n]{x}),$$

где P и Q — многочлены.

28. Может ли интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ при $a \neq 0$ быть рациональной функцией?

29. Может ли интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ при $a \neq 0$ иметь вид:

$$a)\ \alpha \ln|R(x)|, \quad b)\ \alpha \operatorname{arctg} R(x), \quad c)\ \alpha \ln|R(x)| + R_1(x),$$

где $\alpha \neq 0$, а $R(x)$ и $R_1(x)$ — рациональные (отличные от константы) функции?

30. Каким должно быть число $b^2 - 4ac$ $(a \neq 0)$ чтобы интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ имел вид $\alpha \ln|R(x)|$, где $R(x)$ — рациональная функция?

31. Может ли интеграл $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ при $A \neq 0$ и $a \neq 0$ иметь вид:

$$\begin{array}{ll} a)\ \ln(ax^2+bx+c)+C; & b)\ \alpha \ln(ax^2+bx+c)+R(x), \\ c)\ \alpha \ln|R(x)|, & d)\ \alpha \ln(ax^2+bx+c)+\beta \arcsin R(x), \end{array}$$

где $R(x)$ — рациональная функция (отличная от константы) и $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$?

32. При каком условии интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ является рациональной функцией?

33. При каком условии интеграл $\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$ является рациональной функцией?

34. Доказать, что $\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{a \sin x + b \cos x}dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C$, где A, B, C — постоянные, $x \neq k\pi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

35. Доказать, что

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma}{a \sin x + b \cos x + c}dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

36. Доказать, что

$$\int \frac{\alpha \sin^2 x + 2\beta \sin x \cos x + \gamma \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты, $x \neq k\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

37. Найти интеграл $\displaystyle\int f(x)dx$, где

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1 - |x|, & \text{если } |x| > 1; \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0, \\ x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

38. Найти интеграл: $a)$ $\displaystyle\int x f''(x)dx$; $\quad b)$ $\displaystyle\int f'(2x)dx$.

39. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

40. Найти $f(x)$, если $f(0) = 0$, а

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

41. Докажите утверждение.
Если первообразная элементарной функции f не является элементарной функцией, а φ — элементарная дифференцируемая функция, то функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ элементарная, но не интегрируемая в классе элементарных функций.

42. При каких рациональных значениях параметра q интеграл $\displaystyle\int \sqrt{1 + x^q}\, dx$ является элементарной функцией?

6 Определенный интеграл

Классическое определение интеграла, данное в XIX веке Коши и Риманом, обеспечило решение многих задач математики, механики, физики: вычисления площадей плоских фигур, объемов пространственных тел, длины дуги, определения работы, произведенной переменной силой, определения масс тел по удельной плотности, нахождения центров тяжести, пути по скорости, скорости по ускорению и многих других.

6.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Рассмотрим несколько геометрических и физических задач, которые, как мы убедимся, решаются совершенно одинаково, несмотря на их внешнюю несхожесть.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Исторически понятие определенного интеграла тесно связано с задачей о вычислении площадей плоских фигур. Пока будем пользоваться интуитивным представлением о площади, а точное определение площади дадим немного позже.

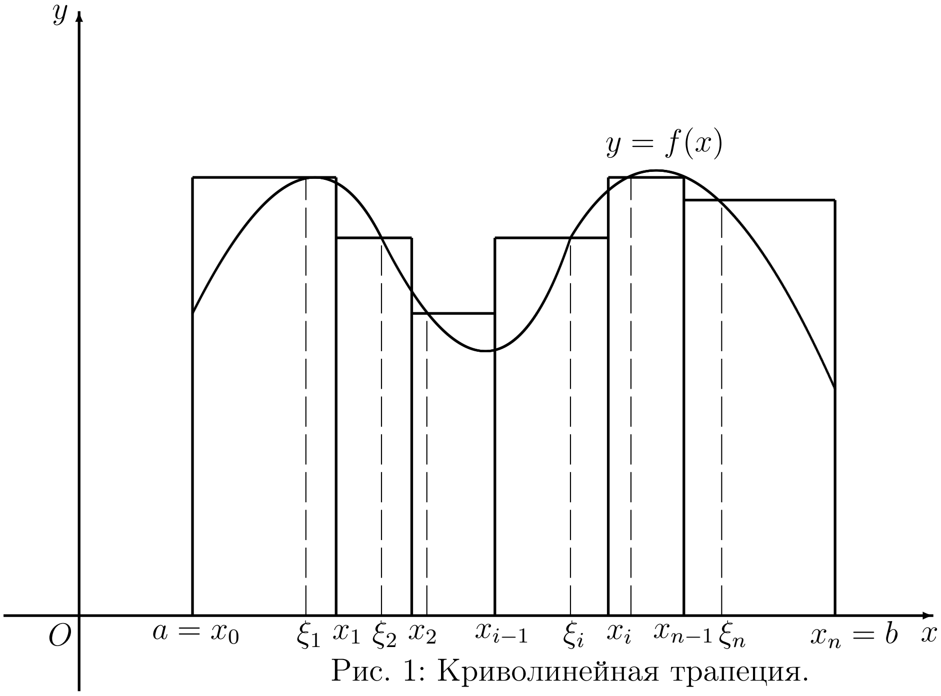

Рис. 1: Криволинейная трапеция.

Определение 6.1. *Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.*

Для вычисления площади криволинейной трапеции поступим следующим образом. Разобьем данную криволинейную трапецию на меньшие криволинейные трапеции. Для этого ее основание (сегмент $[a, b]$) разобьем на n (не обязательно равных) частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, возьмем произвольную точку ξ_i и будем считать, что площадь трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ приближенно равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(\xi_i)$ (рис. 1).

Интуитивно понятно, что площадь S всей трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников, то есть

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Естественно ожидать, что чем мельче будут сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, на которые мы разбиваем сегмент $[a, b]$, тем меньше сумма площадей прямоугольников будет отличаться от площади трапеции, то есть точное значение площади S получится как предел

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i, \tag{6.1}$$

где $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Задача о вычислении объема тела вращения. Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции. Разобьем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ выберем по точке ξ_i и

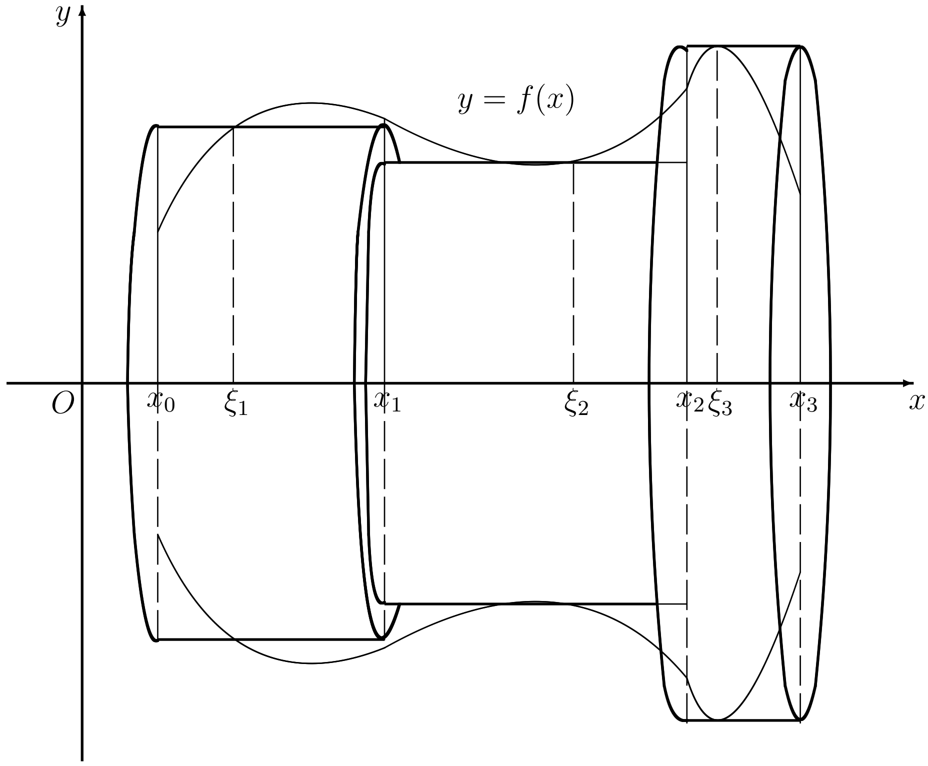

Рис. 2: Тело вращения ($n = 3$).

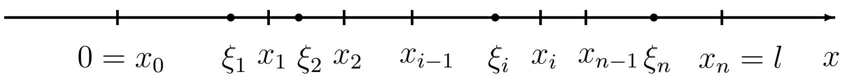

Рис. 3: Неоднородный стержень.

рассмотрим цилиндры с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$ (рис. 2). Будем считать, что объем тела вращения приближенно равен сумме объемов полученных цилиндров:

$$V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) \Big)^2 \Delta x_i.$$

А точное значение объема тела вращения будет равно

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) \Big)^2 \Delta x_i, \tag{6.2}$$

где $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Задача о вычислении массы неоднородного стержня. На сегменте $[0, l]$ оси Ox разместим неоднородный стержень (рис. 3). Пусть $\rho : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — линейная плотность стержня. Разобьем стержень на кусочки точками

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = l$$

и будем считать, что на каждом из этих кусочков плотность стержня постоянна и равна $\rho(\xi_i)$, где ξ_i — какая-либо точка сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Как известно, при постоянной линейной плотности ρ масса M стержня вычисляется по формуле: $M = \rho \cdot l$. Тогда масса i-го кусочка приближенно равна $\rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Поэтому

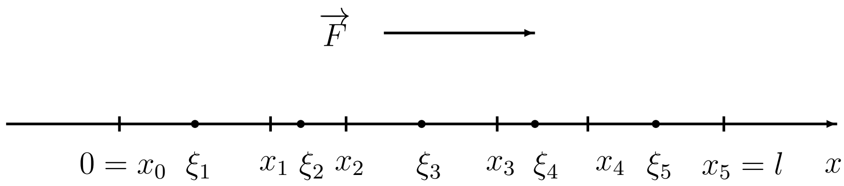

Рис. 4: Работа переменной силы.

приближенное значение массы M всего стержня находится по формуле $M \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$, а точное значение — по формуле

$$M = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{6.3}$$

где $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Задача о вычислении работы переменной силы. Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox из точки $x = 0$ в точку $x = l$ под действием переменной силы F, направленной вдоль оси Ox. Как известно, работа A по перемещению материальной точки под действием постоянной силы F на расстояние l вычисляется по формуле $A = F \cdot l$.

Для решения задачи разобьем сегмент $[0, l]$ на сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, точками (рис. 4)

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = l$$

и на каждом из них выберем точку ξ_i. Будем предполагать, что от точки x_{i-1} до точки x_i материальная точка M перемещается под действием постоянной силы $F(\xi_i)$. Тогда $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, а при неограниченном измельчении сегмента $[0, l]$ получим:

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \tag{6.4}$$

где $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Сравнивая формулы (6.1) — (6.4), видим, что все задачи решаются одним и тем же методом, а именно, сегмент, на котором определена функция, разбивается на несколько меньших сегментов, на каждом из них выбирается по одной точке, после чего составляется сумма произведений значений функции в выбранных точках и длин соответствующих сегментов разбиения и, наконец, совершается предельный переход.

Можно привести еще массу задач из самых разных областей естествознания и техники, решаемых этим же методом. Изучение и обоснование изложенного метода и приводит нас к понятию определенного интеграла.

6.2 Интегральные суммы. Интегрируемость

Символом T будем обозначать *разбиение сегмента* $[a, b]$ при помощи несовпадающих друг с другом точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на n сегментов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называют *точками* или *узлами разбиения* T, а сегменты $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$ — *частичными сегментами*.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Число $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ называют *параметром разбиения*.

Пусть T и T' — два разбиения сегмента $[a, b]$. Разбиение T' называют *продолжением разбиения* T, если каждый узел разбиения T является узлом разбиения T'.

Например, пусть T и T' — разбиения сегмента $[a, b]$ с узлами

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$
$$x'_j = a + \frac{b-a}{2n} j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n,$$

соответственно. Поскольку количество узлов разбиения T' больше, чем имеет узлов разбиение T, то разбиение T не является продолжением разбиения T', а разбиение T' является продолжением разбиения T, так как $x_i = x'_{2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Рассмотрим еще пару разбиений T и T' сегмента $[a, b]$. Пусть

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad x'_i = a + \frac{2(b-a)}{n+i} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

— их узлы. Нетрудно видеть, что среди узлов каждого из этих разбиений есть узлы, не принадлежащие другому разбиению, например, x_1 не является узлом разбиения T', а x'_1 — узлом разбиения T. Поэтому разбиения T и T' не являются продолжениями друг друга.

Пусть $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, T — разбиение сегмента $[a, b]$ с узлами x_i, а ξ_i — произвольные точки частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Введём обозначение: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

Определение 6.2. *Число*

$$\sigma = \sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции f, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Интегральная сумма имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим криволинейную трапецию. Интегральная сумма $\sigma(f, T, \xi)$, отвечающая выбранному разбиению T и данному выбору точек ξ_i, представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 5).

Приведем пример вычисления интегральной суммы.

Пример 6.1. *Пусть $C \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = C$. Интегральная сумма $\sigma(f, T, \xi)$ функции f, соответствующая данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору точек ξ_i, имеет вид:*

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C \Delta x_i = C \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a).$$

Определение 6.3. *Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(f, T, \xi)$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ и при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство*

$$|\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

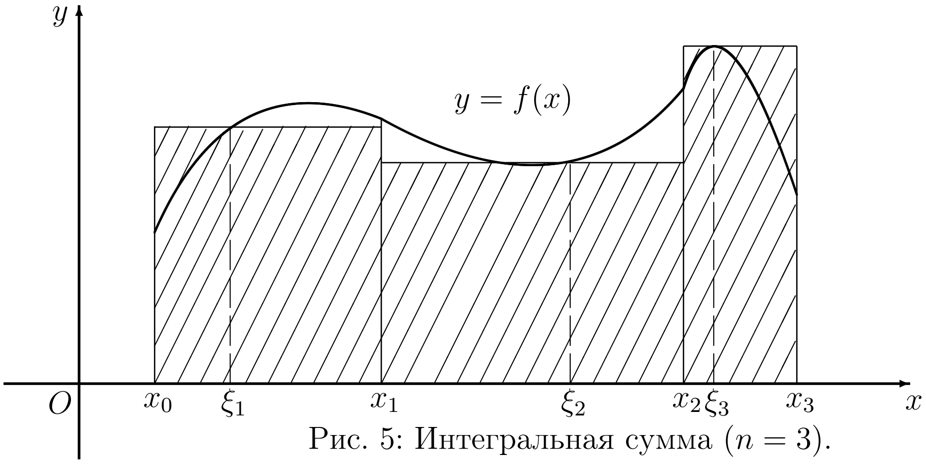

Рис. 5: Интегральная сумма ($n = 3$).

При этом пишут

$$I = \lim_{\Delta \to 0} \sigma\left(f, T, \xi\right). \tag{6.6}$$

Определение 6.4. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на сегменте $[a, b]$ (будем писать $f \in R\,[a, b]$), если при $\Delta \to 0$ существует (конечный) предел I интегральных сумм $\sigma\left(f, T, \xi\right)$. Число I называется определенным интегралом от функции f по сегменту $[a, b]$ и обозначается следующим образом:*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{6.7}$$

Первым удовлетворяющим современным требованиям строгости определением интеграла принято считать определение, данное Коши. Предполагая, что функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, Коши рассматривал интегральную сумму вида

$$\sigma\left(f, T\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right) \Delta x_i.$$

Определение интегральных сумм у Римана такое же, как у Коши, с тем отличием, что значение функции на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ выбирается произвольно (для непрерывных функций это несущественно). Однако, в отличие от Коши, и в этом — принципиальный шаг вперед, Риман рассматривает всю совокупность функций, к которым применим процесс интегрирования, и выясняет необходимые и достаточные условия, при которых функция оказывается интегрируемой.

Пример 6.1 показывает, что функция $f(x) = C$ интегрируема на любом сегменте $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b C dx = C(b - a).$$

Пример 6.2. *Покажем, что функция $f(x) = x$ интегрируема на любом сегменте $[a, b]$, и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}. \tag{6.8}$$

Для произвольного разбиения T и любого выбора точек ξ_i интегральная сумма данной функции имеет вид:

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$$

Поскольку функция f возрастает, справедлива оценка

$$I_1 \leq \sigma(f, T, \xi) \leq I_2, \tag{6.9}$$

где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$. Тогда при любом разбиении T с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
I_1 =& \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \\
=& - x_0^2 + x_0 x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 + x_2 x_3 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n = \\
=& - \frac{1}{2} x_0^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 - \ldots - \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{2} x_n^2 = \\
=& \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_0^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta x_i \geq \\
\geq& \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}\Delta \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}(b-a)\Delta > \\
>& \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}(b-a)\delta = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогично выводим оценку $I_2 < \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \varepsilon$. Из этих оценок и неравенства (6.9) получаем

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < \frac{b^2 - a^2}{2} + \varepsilon,$$

или

$$\left|\sigma(f, T, \xi) - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| < \varepsilon. \tag{6.10}$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T, параметр которого удовлетворяет условию $\Delta < \delta$ при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство (6.5). В соответствии с определениями 6.3 и 6.4 функция $f(x) = x$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Теорема 6.1. *Если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что функция f неограничена на сегменте $[a, b]$. Тогда для каждого разбиения T она будет неограниченной хотя бы на одном из частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$. Поэтому, за счет выбора точки ξ_k на этом сегменте, слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$, а следовательно, и всю сумму $\sigma(f, T, \xi)$ можно сделать сколь угодно большими. В таком случае, очевидно, не может быть и речи о конечном пределе интегральных сумм. Таким образом, $f \notin R[a, b]$, что противоречит условию. ■

Однако не каждая ограниченная на сегменте функция интегрируема на нем.

Пример 6.3. *Покажем, что функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \textit{если } x \in \mathbb{J}, \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком сегменте $[a, b]$.

Возьмем любой сегмент $[a, b]$ и произвольное его разбиение T. На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ выберем одну рациональную точку ξ_i' и одну иррациональную точку ξ_i''. Составим интегральные суммы $\sigma(D, T, \xi')$ и $\sigma(D, T, \xi'')$, где $\xi' = \left\{\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'\right\}$, $\xi'' = \left\{\xi_1'', \xi_2'', \ldots, \xi_n''\right\}$. Находим

$$\sigma(D, T, \xi') = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

$$\sigma(D, T, \xi'') = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i'')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Следовательно, интегральные суммы функции Дирихле предела не имеют. Поэтому эта функция не интегрируема на сегменте $[a, b]$.

6.3 Суммы Дарбу

Пусть функция f ограничена на сегменте $[a, b]$, а T — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Введем обозначения:

$$M_i = \sup\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, \quad m_i = \inf\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}. \tag{6.11}$$

Определение 6.5. *Числа*

$$S = S(f, T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = s(f, T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{6.12}$$

называются соответственно верхней и нижней интегральными суммами или верхней и нижней суммами Дарбу функции f для данного разбиения T сегмента $[a, b]$.

Очевидно, что

$$s(f, T) \leq S(f, T), \tag{6.13}$$

так как $m_i \leq M_i$ для каждого i. Более того, поскольку на каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ справедливы неравенства $m_i \leq f(x) \leq M_i$, то любая интегральная сумма $\sigma\{T, \xi\}$ данного разбиения T сегмента $[a, b]$ заключена между верхней и нижней суммами Дарбу S и s этого разбиения, то есть

$$s(f, T) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq S(f, T). \tag{6.14}$$

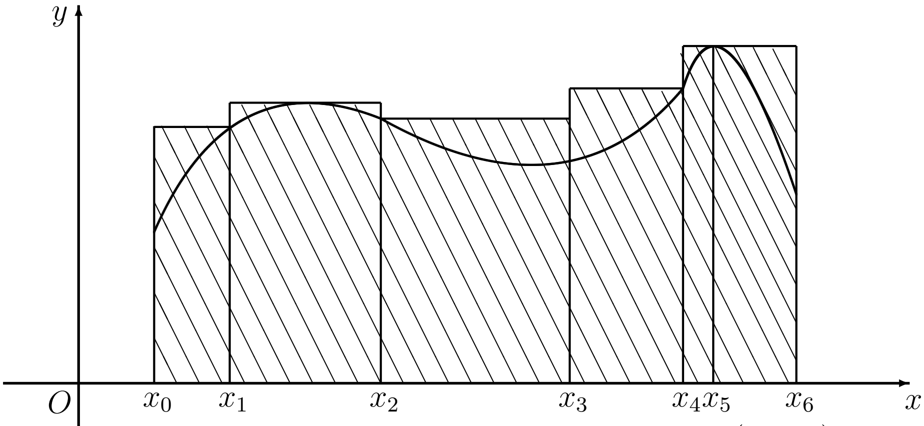

Рис. 6: Верхняя сумма Дарбу ($n = 6$).

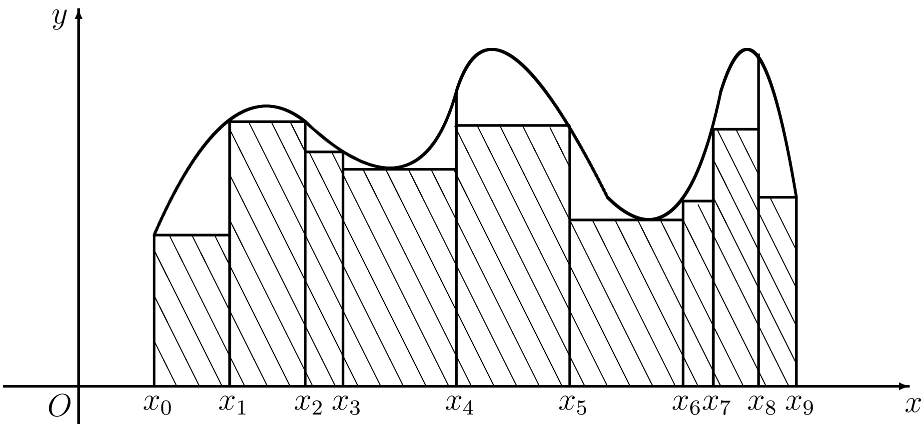

Рис. 7: Нижняя сумма Дарбу ($n = 9$).

Выясним геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу. Рассмотрим криволинейную трапецию, отвечающую непрерывной и неотрицательной функции f, заданной на сегменте $[a, b]$. Тогда верхняя сумма Дарбу равна площади ступенчатой фигуры, содержащей криволинейную трапецию (рис. 6).

Аналогично, нижняя сумма Дарбу равна площади ступенчатой фигуры, содержащейся в криволинейной трапеции (рис. 7).

Таким образом, верхняя и нижняя суммы Дарбу приближают площадь криволинейной трапеции с избытком и с недостатком. Поэтому для существования площади криволинейной трапеции, скорее всего, должно выполняться предельное равенство

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0.$$

Позже мы докажем справедливость этого предположения для непрерывных и некоторых разрывных функций, а пока перейдем к изучению свойств верхних и нижних сумм Дарбу функции f.

Свойство 1. *Для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ верхняя сумма Дарбу является точной верхней гранью, а нижняя сумма Дарбу — точной нижней гранью множества всех интегральных сумм $\sigma(f, T, \xi)$.*

Доказательство. Покажем, что $S(f, T) = \sup\{\sigma(f, T, \xi)\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. По определению точной верхней грани при каждом i для числа M_i найдется $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ такое, что

$$M_i - \frac{\varepsilon}{b - a} < f(\xi_i) \le M_i.$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\sigma\left(f,T,\xi\right),\quad \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=S(f,T),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=S(f,T)-\varepsilon,$$

имеем оценку

$$S(f,T)-\varepsilon<\sigma\left(f,T,\xi\right)\leq S(f,T),$$

из которой следует, что $S(f,T)=\sup\left\{\sigma\left(f,T,\xi\right)\right\}$. Вторая часть свойства доказывается аналогично. ■

Свойство 2. *Если разбиение T' является продолжением разбиения T сегмента $[a,b]$, то $S\left(f,T'\right)\leq S\left(f,T\right)$, а $s\left(f,T'\right)\geq s\left(f,T\right)$.*

Говоря другими словами, при измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу может только уменьшиться, а нижняя — только увеличиться.
Доказательство. Разбиение T' можно получить из разбиения T путем последовательного добавления новых узлов к узлам x_i разбиения T. Поэтому достаточно доказать свойство для случая, когда разбиение T' имеет по сравнению с T лишь один новый узел x'. Пусть $x'\in\left(x_{k-1},x_k\right)$. Тогда в суммах $S\left(f,T\right)$ и $S\left(f,T'\right)$ все слагаемые будут одинаковыми за исключением следующих: слагаемое $M_k\Delta x_k$, имеющееся в сумме $S\left(f,T\right)$, в сумме $S\left(f,T'\right)$ заменится суммой двух слагаемых $M_k'\Delta x_k'+M_k''\Delta x_k''$, где

$$M_k'=\sup\Big\{f(x):x\in\left[x_{k-1},x'\right]\Big\},\quad \Delta x_k'=x'-x_{k-1},$$

$$M_k''=\sup\Big\{f(x):x\in\left[x',x_k\right]\Big\},\quad \Delta x_k''=x_k-x'.$$

Но так как $M_k'\leq M_k$ и $M_k''\leq M_k$, то и

$$M_k'\Delta x_k'+M_k''\Delta x_k''\leq M_k\Delta x_k'+M_k\Delta x_k''=M_k\left(\Delta x_k'+\Delta x_k''\right)=M_k\Delta x_k.$$

Отсюда следует оценка $S\left(f,T'\right)\leq S\left(f,T\right)$. Аналогичные рассуждения приводят и к неравенству $s\left(f,T'\right)\geq s\left(f,T\right)$. ■

Свойство 3. *Для любых разбиений T' и T'' сегмента $[a,b]$ справедливо неравенство $s\left(f,T'\right)\leq S\left(f,T''\right)$.*

Доказательство. Построим разбиение T сегмента $[a,b]$, являющееся продолжением и разбиения T' и разбиения T'' (взяв, например, в качестве узлов разбиения T узлы обоих разбиений T' и T''). Тогда, учитывая свойство 2 и (6.13), получаем:

$$s\left(f,T'\right)\leq s\left(f,T\right)\leq S\left(f,T\right)\leq S\left(f,T''\right).$$

■

Непосредственным следствием свойства 3 является

Свойство 4. *Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу функции f по всевозможным разбиениям сегмента $[a, b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.*

На основании этого свойства и теоремы о существовании точных граней определены числа

$$\underline{I} := \sup\{s(f, T)\}, \quad \overline{I} := \inf\{S(f, T)\},$$

где точные грани берутся по всевозможным разбиениям T сегмента $[a, b]$.

Определение 6.6. *Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции f.*

Свойство 5. $\underline{I} \leq \overline{I}$.

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь разбиение T' сегмента $[a, b]$. По свойству 3 для каждого разбиения T сегмента $[a, b]$ справедлива оценка $s(f, T') \leq S(f, T)$. Следовательно, число $s(f, T')$ является нижней гранью множества $\{S(f, T)\}$ верхних сумм Дарбу функции f по всевозможным разбиениям T сегмента $[a, b]$. Поэтому

$$s(f, T') \leq \inf\{S(f, T)\} = \overline{I}. \tag{6.15}$$

Поскольку в качестве T' можно взять любое разбиение T сегмента $[a, b]$, то (6.15) означает, что $\overline{I}$ есть верхняя грань множества $\{s(f, T)\}$. Отсюда следует, что $\underline{I} = \sup\{s(f, T)\} \leq \overline{I}$. ■

Вычислим интегралы Дарбу от функции Дирихле на сегменте $[a, b]$. Поскольку

$$m_i = \inf\Big\{D(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\Big\} = 0, \ M_i = \sup\Big\{D(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\Big\} = 1$$

для каждого разбиения T сегмента $[a, b]$, то

$$s(D, T) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad S(D, T) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Поэтому $\underline{I} = 0$, $\overline{I} = b - a$.

Как видим, бывают ограниченные функции, у которых $\underline{I} < \overline{I}$.

Определение 6.7. *Будем говорить, что разность верхних и нижних сумм Дарбу функции f стремится к нулю при стремлении к нулю параметра разбиения, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ выполняется неравенство*

$$|S(f, T) - s(f, T)| < \varepsilon.$$

Теорема 6.2. (**Критерий интегрируемости**) *Для того, чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0. \tag{6.16}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f \in R\,[a,b]$. Тогда (см. определения 6.3 и 6.4) существует число I, для которого по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a,b]$, с параметром $\Delta < \delta$, и при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|\sigma\,(f,T,\xi) - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ или

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma\,(f,T,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.17}$$

Но в силу свойства 6.2 нижняя и верхняя суммы Дарбу являются точными верхней и нижней гранями интегральных сумм $\sigma\,(f,T,\xi)$. Поэтому из (6.17) и (6.13) следует, что

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \le s(f,T) \le S(f,T) \le I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда выводим оценку

$$0 \le S(f,T) - s(f,T) \le \left(I + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

А это означает, что имеет место (6.16).

Достаточность. Пусть (6.16) выполняется. Докажем равенство верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

По определению 6.6 верхнего и нижнего интегралов Дарбу и свойству 5 для любого разбиения T сегмента $[a,b]$ имеем:

$$s(f,T) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(f,T).$$

Отсюда следует, что

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S(f,T) - s(f,T).$$

По условию предел при $\Delta \to 0$ правой части этого неравенства равен нулю. Поэтому и разность $\overline{I} - \underline{I} = 0$, или $\underline{I} = \overline{I}$.

Обозначим общее значение интегралов Дарбу $\overline{I}$ и $\underline{I}$ буквой I и докажем, что I есть предел интегральных сумм при стремлении к нулю параметра разбиения.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании (6.16) для выбранного ε найдем $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a,b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство

$$S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon. \tag{6.18}$$

Пусть T — любое разбиение сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$ и ξ_i — произвольные точки частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$. Поскольку

$$s(f,T) \le \sigma\,(f,T,\xi) \le S(f,T), \quad s(f,T) \le I \le S(f,T),$$

то, вычитая из первого неравенства переписанное в обратном порядке второе, получаем:

$$-\left(S(f,T) - s(f,T)\right) \le \sigma\,(f,T,\xi) - I \le S(f,T) - s(f,T).$$

Отсюда и (6.18) следует, что

$$|\sigma\,(f,T,\xi) - I| \le S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора ε, согласно определениям 6.3 и 6.4, функция $f \in R\,[a,b]$ и $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I.$ ■

Дарбу назвал функцию интегрируемой, если $\overline{I} = \underline{I}$. Как мы видим, это определение интегрируемости эквивалентно определению Римана.

Определение 6.8. *Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Колебанием функции f на сегменте $[a,b]$ называют число $\omega = M - m$, где M и m — точные грани f на сегменте $[a,b]$.*

Предложение 6.1. *Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда ее колебание ω на сегменте $[a,b]$ можно вычислить по формуле*

$$\omega = \sup\left\{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [a,b] \right\}. \tag{6.19}$$

Доказательство. Пусть M и m — точные грани функции f на сегменте $[a,b]$.

Если колебание функции f на рассматриваемом сегменте равно нулю, то $M = m$, а это означает, что функция f на этом сегменте постоянна и её значения равны M. Но тогда формула (6.19) верна, поскольку при любых x', $x'' \in [a,b]$ имеем

$$f(x') - f(x'') = M - M = 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда колебание функции f на сегменте $[a,b]$ положительно.

Возьмем произвольные x', $x'' \in [a,b]$. Из очевидных неравенств

$$m \le f(x') \le M, \quad m \le f(x'') \le M,$$

получаем

$$-\omega = -(M-m) \le f(x') - f(x'') \le M - m = \omega$$

или

$$|f(x') - f(x'')| \le \omega.$$

Это означает, что ω есть верхняя грань множества

$$L = \left\{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [a,b] \right\}.$$

Докажем, что ω — точная верхняя грань множества L. С этой целью, возьмем положительное ε, не превосходящее числа ω. По определению точных граней, найдутся $x', x'' \in [a,b]$ такие, что

$$f(x') > M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x'') < m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вычитая из первого неравенства второе, получаем

$$f(x') - f(x'') > (M-m) - \varepsilon = \omega - \varepsilon \ge 0.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора ε, следует доказываемое равенство (6.19). ■

Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, T — разбиение сегмента $[a,b]$, $\omega_i = \omega_i(f,T)$ — колебание функции f на i-ом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Поэтому условие интегрируемости (6.16) может быть записано в виде

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0, \tag{6.20}$$

что на языке "$\varepsilon - \delta$ " означает: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении T сегмента $[a,b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon. \tag{6.21}$$

6.4 Классы интегрируемых функций

Теорема 6.3. *Если $f \in C\,[a,b]$, то $f \in R\,[a,b]$ (то есть любая непрерывная на сегменте функция интегрируема на нем).*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора (теорема 3.37) функция f равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$, поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедлива оценка

$$|f\,(x') - f\,(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{6.22}$$

Рассмотрим произвольное разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$. Из оценки (6.22) и предложения 6.1 следует, что

$$\omega_i = \omega_i(f,T) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем условие интегрируемости (6.21)

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Теорема доказана. ∎

Теорема 6.4. *Пусть функция f ограничена на сегменте $[a,b]$. Если для любого $\sigma > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих множество точек разрыва функции f, сумма длин которых меньше σ, то $f \in R\,[a,b]$.*

Доказательство. Ввиду ограниченности функции f найдутся постоянные M и m такие, что

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a,b]\,. \tag{6.23}$$

Мы предполагаем, что функция f имеет хотя бы одну точку разрыва на сегменте $[a,b]$. Но тогда $M > m$, так как иначе функция f постоянна и, следовательно, непрерывна на указанном сегменте.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{4(M-m)}$. По условию, найдется конечное число интервалов (α_j, β_j), $j = 1, 2, \ldots, l$, покрывающих все точки разрыва функции f, таких что

$$\sum_{j=1}^{l} (\beta_j - \alpha_j) < \sigma. \tag{6.24}$$

Множество X точек сегмента $[a,b]$, не принадлежащих выбранным интервалам, состоит из конечного числа попарно непересекающихся сегментов. На каждом из этих сегментов функция f непрерывна, а по теореме Кантора и равномерно непрерывна. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что для любых x', x'', принадлежащих одному из сегментов, образующих множество X, справедлива оценка

$$|f\,(x') - f\,(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{6.25}$$

как только $|x' - x''| < \delta$.
Поскольку при уменьшении δ оценка (6.25) не ухудшится, можем предполагать, что

$$\delta < \frac{\varepsilon}{8l\,(M-m)}. \tag{6.26}$$

Теперь возьмём любое разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$. Для этого разбиения слагаемые суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ разделим на три группы:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = {\sum}' \omega_i \Delta x_i + {\sum}'' \omega_i \Delta x_i + {\sum}''' \omega_i \Delta x_i. \tag{6.27}$$

В сумму ${\sum}' \omega_i \Delta x_i$ включены те слагаемые, для которых сегменты $[x_{i-1}, x_i] \subset X$. Ввиду (6.25), колебание функции f на каждом из этих сегментов меньше $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Поэтому

$${\sum}' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} {\sum}' \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.28}$$

Во вторую сумму ${\sum}'' \omega_i \Delta x_i$ включены те слагаемые, которые отвечают частичным сегментам $[x_{i-1}, x_i]$, целиком содержащимся в объединении сегментов $[\alpha_j, \beta_j]$ по всем $j = 1, 2, \ldots, l$. Для этих сегментов $\omega_i \leq M - m$, поэтому, учитывая (6.24) и выбор σ, имеем

$${\sum}'' \omega_i \Delta x_i \leq (M-m) {\sum}'' \Delta x_i \leq (M-m) \sum_{j=1}^{l} (\beta_j - \alpha_j) < (M-m)\,\sigma = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.29}$$

В третьей сумме ${\sum}''' \omega_i \Delta x_i$ остались слагаемые, отвечающие частичным сегментам $[x_{i-1}, x_i]$, не попадающим целиком ни в объединение сегментов $[\alpha_j, \beta_j]$, ни в X. Учитывая, что этих слагаемых не более, чем $2l$, и принимая во внимание (6.26), получаем:

$${\sum}''' \omega_i \Delta x_i \leq (M-m) {\sum}''' \Delta x_i < (M-m)\, 2l\delta < (M-m)\ 2l\, \frac{\varepsilon}{8l\,(M-m)} = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.30}$$

Используя в (6.27) оценки (6.28) — (6.30), получаем условие интегрируемости (6.21). ■

Определение 6.9. *Функция f называется кусочно непрерывной на сегменте $[a,b]$, если она имеет на этом сегменте лишь конечное число точек разрыва и только первого рода.*

Заметим, что кусочно непрерывная на сегменте функция ограничена на нем.

Следствие 6.1. *Ограниченная на сегменте функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. В частности, кусочно непрерывная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. Пусть l — число точек разрыва функции. Возьмем любое $\sigma > 0$ и заключим каждую точку разрыва в интервал, длина которого меньше $\dfrac{\sigma}{l}$. Тогда сумма длин всех интервалов, покрывающих точки разрыва, будет меньше σ.

■

Приведем пример интегрируемой функции, имеющей *бесконечное* множество точек разрыва.

Рассмотрим функцию $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой (рис. 8)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{если} \quad x \in \left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{6.31}$$

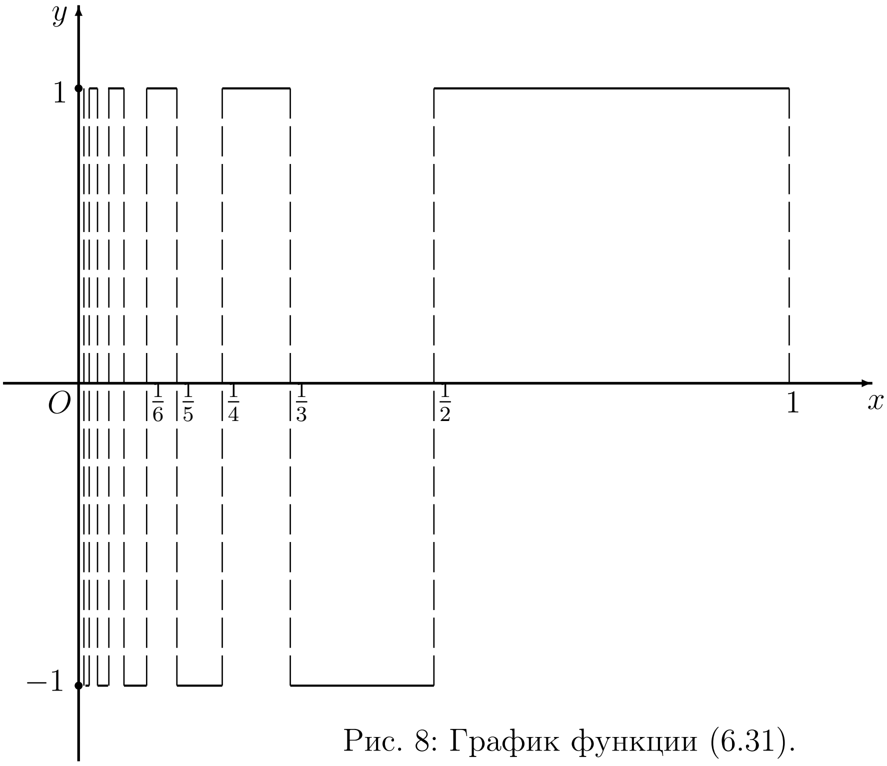

Рис. 8: График функции (6.31).

Функция f имеет разрывы в точках $x_0 = 0$ и $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное положительное число σ и интервал $\left(-\dfrac{\sigma}{4}, \dfrac{\sigma}{4}\right)$. В этот интервал попали либо все точки x_n, $n = 0, 1, \ldots$, либо точка x_0 и все точки x_n с номерами большими $m = \left[\dfrac{4}{\sigma}\right]$. Если в указанный интервал не попали точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, заключим каждую из них в интервал длины, меньшей $\dfrac{\sigma}{2m}$. В любом случае, сумма длин интервалов, покрывающих все точки разрыва, меньше σ. Следовательно, выполняются условия теоремы 6.4. Поэтому $f \in R\,[a, b]$.

Теорема 6.5. *Если функция* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *монотонна, то* $f \in R\,[a, b]$.

Доказательство. Пусть, например, f не убывает на сегменте $[a, b]$ (в случае, когда f не возрастает, доказательство аналогично).

Возьмем произвольное разбиение T сегмента $[a, b]$. Пусть Δ — параметр этого разбиения. Тогда для любого частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ имеем:

$$\omega_i = M_i - m_i = f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right).$$

Умножая это равенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \Delta \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Delta \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right) = \Delta \left(f(b) - f(a)\right).$$

Отсюда следует (6.20). По теореме 6.2 функция $f \in R\,[a, b]$. ■

6.5 Свойства определенного интеграла

Свойство 6.1. *Будем считать по определению, что*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{6.32}$$

для любой функции f, определенной в точке $x = a$.

Часто приходится рассматривать $\int\limits_b^a f(x)\,dx$, где $a < b$.

Свойство 6.2. *Если*

$a < b$ и $f \in R\,[a,b]$, то будем полагать, что

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx := -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{6.33}$$

Следующие два свойства показывают, что интеграл является линейной функцией на множестве $R\,[a,b]$.

Свойство 6.3. *Если $f \in R\,[a,b]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha f \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{6.34}$$

Интегральные суммы функций αf и f отличаются лишь на постоянный множитель α,

$$\sigma\left(\alpha f, T, \xi\right) = \alpha\sigma\left(f, T, \xi\right).$$

Устремим Δ к нулю. Из существования предела правой части следует существование предела левой и равенство (6.34).

Свойство 6.4. *Пусть $f, g \in R\,[a,b]$. Тогда $f + g \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{6.35}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sigma\left(f + g, T, \xi\right) = \sigma\left(f, T, \xi\right) + \sigma\left(g, T, \xi\right). \tag{6.36}$$

А поскольку при $\Delta \longrightarrow 0$ предел правой части (6.36) существует, то существует и предел левой части. Поэтому, осуществляя в (6.36) предельный переход, получаем равенство (6.35). ■

К свойствам 6.3 и 6.4 примыкает утверждение об интегрируемости произведения интегрируемых функций.

Свойство 6.5. *Если $f, g \in R\,[a,b]$, то $f \cdot g \in R\,[a,b]$.*

Доказательство. Поскольку интегрируемые на сегменте функции ограничены на нем, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M, \quad x \in [a,b]. \tag{6.37}$$

Зафиксируем разбиение T сегмента $[a,b]$ и докажем, что

$$\omega_i(fg, T) \leq M\left(\omega_i(f, T) + \omega_i(g, T)\right). \tag{6.38}$$

Для этого на i-ом частичном сегменте возьмем две произвольные точки x' и x''. Тогда, используя (6.37) и предложение 6.1, выводим

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \le$$
$$\le |f(x')|\,|g(x') - g(x'')| + |g(x'')|\,|f(x') - f(x'')| \le M\left(\omega_i(f,T) + \omega_i(g,T)\right).$$

Следовательно, ввиду (6.19), получаем (6.38).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f, g \in R\,[a,b]$, найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$ выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f,T)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g,T)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Теперь, используя (6.38), легко получаем следующую оценку:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg,T)\Delta x_i \le M\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f,T)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g,T)\Delta x_i\right) < \varepsilon,$$

то есть условие интегрируемости функции fg. ■

Следствие 6.2. *Квадрат* (*и вообще любая натуральная степень*) *интегрируемой на сегменте* $[a,b]$ *функции интегрируем на* $[a,b]$.

Обратное утверждение неверно: из интегрируемости квадрата функции не следует, вообще говоря, интегрируемость самой функции. Например, функция f, заданная на $[a,b]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{J}, \end{cases} \tag{6.39}$$

не интегрируема на $[a,b]$, хотя функция $f^2(x) \equiv 1$ интегрируема на этом сегменте.

Свойство 6.6. *Если* $f \in R\,[a,b]$ *и* $[c,d] \subset [a,b]$, *то* $f \in R\,[c,d]$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R\,[a,b]$, найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$ справедлива оценка (6.21).

Возьмем произвольное разбиение T' сегмента $[c,d]$ с параметром $\Delta' < \delta$ и дополним его до разбиения T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$.

Пусть разбиение T' имеет $k+1$ узел, $\Delta x'_j$ обозначает длину j-го частичного сегмента разбиения T', а $\omega'_j\,(f,T')$ — колебание функции f на этом частичном сегменте.

Поскольку колебание функции на сегменте и длина частичного сегмента неотрицательны, то, используя (6.21), выводим оценку:

$$\sum_{j=1}^{k} \omega'_j\,(f,T')\,\Delta x'_j = \sum_{i:[x_{i-1},x_i]\subset[c,d]} \omega_i\,(f,T)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,(f,T)\,\Delta x_i < \varepsilon,$$

которая означает, что $f \in R\,[c,d]$. ■

Свойство 6.7. *Если* $f \in R\,[a,b]$ *и* $c \in (a,b)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{6.40}$$

Доказательство. Заметим, что существование каждого из интегралов, стоящих в правой части (6.40), вытекает из предыдущего свойства.

Возьмем произвольные разбиения T' и T'' сегментов $[a,c]$ и $[c,b]$ и любые, соответствующие им, интегральные суммы $\sigma\left(f,T',\xi'\right)$ и $\sigma\left(f,T'',\xi''\right)$. Пусть T — разбиение сегмента $[a,b]$, узлами которого являются все узлы разбиений T' и T''. Тогда интегральная сумма $\sigma\left(f,T,\xi\right)$, соответствующая разбиению T сегмента $[a,b]$, равна сумме интегральных сумм $\sigma\left(f,T',\xi'\right)$ и $\sigma\left(f,T'',\xi''\right)$, то есть

$$\sigma\left(f,T,\xi\right)=\sigma\left(f,T',\xi'\right)+\sigma\left(f,T'',\xi''\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta\longrightarrow 0$, получаем (6.40). ■

Справедливо и обратное утверждение.

Свойство 6.8. *Пусть $c\in(a,b)$ и $f\in R\,[a,c]$, $f\in R\,[c,b]$. Тогда $f\in R\,[a,b]$ и справедливо равенство (6.40).*

Доказательство. Так как $f\in R\,[a,c]$ и $f\in R\,[c,b]$, то f ограничена на каждом из сегментов $[a,c]$ и $[c,b]$, следовательно, и на сегменте $[a,b]$. Поэтому найдётся положительное число M такое, что

$$|f(x)|\le M,\quad x\in[a,b]. \tag{6.41}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Из интегрируемости функции f на сегментах $[a,c]$ и $[c,b]$ следует существование положительного числа δ такого, что для любых разбиений T' сегмента $[a,c]$ и T'' сегмента $[c,b]$ с параметрами разбиений, меньшими δ, справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{r}\omega_j(f,T')\Delta x'_j<\frac{\varepsilon}{4},\quad \sum_{k=1}^{s}\omega_k(f,T'')\Delta x''_k<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.42}$$

Будем считать, что

$$\delta<\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{6.43}$$

Теперь возьмем произвольное разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром разбиения, меньшим δ. Пусть $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ — узлы разбиения T.

Если $x=c$ является узлом разбиения T, то T можно рассматривать как объединение разбиений T' сегмента $[a,c]$ и T'' сегмента $[c,b]$ с параметрами разбиений меньшими δ. Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f,T)\Delta x_i=\sum_{j=1}^{r}\omega_j(f,T')\Delta x'_j+\sum_{k=1}^{s}\omega_k(f,T'')\Delta x''_k. \tag{6.44}$$

Отсюда, ввиду (6.42), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f,T)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.45}$$

Если же $x=c$ не является узлом разбиения T, то продолжим разбиение T, добавив к его узлам точку $x=c$. Получим разбиение $\widetilde{T}$. Пусть $c\in(x_{l-1},x_l)$. Поскольку параметр разбиения $\widetilde{T}$ меньше δ, по доказанному выше для разбиения $\widetilde{T}$ выполняется оценка, подобная (6.45), и, тем более, следующая оценка

$$\sum_{i\ne l}\omega_i(f,T)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.46}$$

Используя (6.46) и (6.43), выводим

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f,T)\Delta x_i = \sum_{i\neq l} \omega_i(f,T)\Delta x_i + \omega_k(f,T)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta < \varepsilon. \qquad (6.47)$$

Из оценок (6.45) или (6.47), получаем условие интегрируемости (6.21). Следовательно, $f \in R\,[a,b]$ и по свойству 6.7 выполняется равенство (6.40). ■

Заметим, что свойство остаётся верным, если c лежит вне сегмента $[a,b]$. Действительно, пусть, например, $c < a$. Тогда, по свойству 6.7 (поскольку a находится между c и b), имеем

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда, применяя свойство 6.2, выводим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Случай $c > b$ аналогичен предыдущему.

Следующие шесть свойств выражаются неравенствами.

Свойство 6.9. *Если $f \in R\,[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \qquad (6.48)$$

Доказательство. Действительно, каждая интегральная сумма $\sigma\,(f,T,\xi)$ неотрицательна, следовательно, и предел $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma\,(f,T,\xi)$ неотрицателен. ■

Свойство 6.10. *Если $f, g \in R\,[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ всюду на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (6.49)$$

Доказательство. Так как $g(x) - f(x) \geq 0$, то (6.49) следует из свойств 6.9, 6.4 и 6.3. ■

Свойство 6.11. *Если $f \in R\,[a,b]$ и удовлетворяет на нем неравенствам $m \leq f(x) \leq M$, то*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \qquad (6.50)$$

Доказательство. Определим функцию $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая $g(x) \equiv m$. Поскольку $f(x) \geq g(x)$ всюду на $[a,b]$ и по свойству 6.10, с учётом примера 6.1, получаем левую часть неравенства (6.50)

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b m\,dx = m(b-a).$$

Правая часть неравенства (6.50) доказывается аналогично. ■

Свойство 6.12. *Если $f \in C\,[a,b]$, неотрицательна и не равна тождественно нулю, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{6.51}$$

Доказательство. Функция f интегрируема на $[a,b]$, поскольку она непрерывна на нем. А так как f неотрицательна и не равна тождественно нулю, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f\,(\xi) = 2k > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции найдется сегмент $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, содержащий точку ξ, в пределах которого значения функции f будут не меньше числа k. Теперь, применяя свойства 6.6, 6.7, 6.11 и 6.9, выводим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^\alpha f(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\beta^b f(x)\,dx \geq \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq k(\beta-\alpha) > 0.$$

■

Следствие 6.3. *Если функция f непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a,b]$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.*

Свойство 6.13. *Если $f \in R\,[a,b]$, то $|f| \in R\,[a,b]$ и справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\;dx. \tag{6.52}$$

Доказательство. Сначала докажем интегрируемость функции $|f|$. Возьмем произвольное разбиение T сегмента $[a,b]$. Пусть $\omega_i(f,T)$ и $\omega_i(|f|,T)$ — колебания функций f и $|f|$ на частичном сегменте $[x_{i-1},x_i]$. Поскольку для любых $x^{'}, x^{''} \in [x_{i-1},x_i]$ справедлива оценка

$$\Big|\big|f(x^{'})\big| - \big|f(x^{''})\big|\Big| \leq \big|f(x^{'}) - f(x^{''})\big|$$

(свойство модуля вещественного числа), то

$$\omega_i(|f|,T) \leq \omega_i(f,T). \tag{6.53}$$

Умножая обе части (6.53) на Δx_i и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(|f|,T)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f,T)\Delta x_i. \tag{6.54}$$

Поскольку $f \in R\,[a,b]$, то, переходя в (6.54) к пределу при $\Delta \to 0$, приходим к равенству

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n \omega_i(|f|,T)\Delta x_i = 0.$$

Следовательно, $|f| \in R\,[a,b]$.

Теперь получим оценку (6.52). Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, то по свойству 6.10 получаем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

что равносильно (6.52). ■

Замечание. Следует помнить, что из интегрируемости модуля функции, вообще говоря, не следует интегрируемость самой функции. Такой функцией, например, является функция, заданная формулой (6.39).

Свойство 6.14. *Если $f, g \in R\,[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ и $g(x) \geq 0$ всюду на $[a,b]$, то*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.55}$$

Доказательство. Справедливость этой оценки вытекает из очевидных неравенств $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ и свойств 6.5, 6.10 и 6.3. ■

Следующие три свойства называются теоремами о среднем значении.

Свойство 6.15. (**Первая теорема о среднем значении**) *Пусть $f \in R\,[a,b]$ и пусть m и M — точные грани функции f на сегменте $[a,b]$. Тогда найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)\,. \tag{6.56}$$

Доказательство. По свойству 6.11 справедливы оценки (6.50), из которых следует, что

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Полагая $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, получаем формулу (6.56). ■

Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется *средним значением функции f на сегменте* $[a,b]$.

Следствие 6.4. *Если $f \in C\,[a,b]$, то найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\,(\xi)\,(b-a)\,. \tag{6.57}$$

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса на сегменте $[a,b]$ найдутся точки α и β, в которых достигаются точные грани функции f, то есть такие, что

$$f(\alpha) = m = \inf\Big\{f(x) : x \in [a,b]\Big\}, \quad f(\beta) = M = \sup\Big\{f(x) : x \in [a,b]\Big\}.$$

Тогда, по теореме о промежуточном значении (теорема 3.22), на сегменте $[\alpha, \beta]$ ($[\beta, \alpha]$), а следовательно, и на сегменте $[a, b]$, найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$. Заменив в (6.56) μ на $f(\xi)$, получим (6.57). ■

Формулу (6.57), а иногда и формулу (6.56), называют *первой формулой среднего значения*.

Свойство 6.16. *Пусть $f, g \in R[a, b]$ и пусть m и M — точные грани функции f на сегменте $[a, b]$. Пусть, кроме того, функция g неотрицательна (или неположительна) на всем сегменте $[a, b]$. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{6.58}$$

В частности, если $f \in C[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{6.59}$$

Формула (6.59) называется *первой обобщенной формулой среднего значения*.

Доказательство. Начнем с доказательства формулы (6.58). Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то, в силу (6.55), имеем: $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Поэтому в качестве μ можно взять любое число, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$.

Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$. Разделив все части неравенств (6.55) на число $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, получим

$$m \leq \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Bigg/ \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right) \leq M.$$

Отсюда, полагая $\mu = \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Bigg/ \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$, выводим формулу (6.58).

Если же функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, то, как показано при доказательстве следствия 6.4, на указанном сегменте найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$, и поэтому формула (6.58) принимает вид (6.59). ■

Свойство 6.17. (**Вторая теорема о среднем значении**) *Пусть f интегрируема, а g монотонна на $[a, b]$. Тогда на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{6.60}$$

Формула (6.60) называется *второй формулой среднего значения* или формулой Бонне.

Доказательство этого утверждения можно найти в большинстве учебников (см., например, [3], стр. 385–389; [1], стр. 351–352; [5], стр. 117–119 и т. д.).

В заключение приведем несколько свойств, часто применяемых в процессе вычисления интегралов.

Свойство 6.18. *Если четная функция $f \in R[-a, a]$, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{6.61}$$

Доказательство. По свойству 6.6 функция f интегрируема на отрезках $[-a, 0]$ и $[0, a]$. Так как предел интегральных сумм не зависит от способа разбиения сегмента и выбора точек ξ_i, то будем рассматривать разбиения T сегмента $[-a, a]$, симметричные относительно нуля, именно:

$$-a = x_{-n} < x_{-n+1} < \ldots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = a,$$

где $x_{-i} = -x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Точки ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ тоже выберем симметричными относительно нуля, то есть если $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то $\xi_{-i} = -\xi_i$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 2\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, придём к (6.61).

■

Аналогичные рассуждения для нечетной функции приводят к следующему утверждению.

Свойство 6.19. *Если нечетная функция $f \in R[-a, a]$, то* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Свойство 6.20. *Если функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет период τ и интегрируема на сегменте $[0, \tau]$, то она интегрируема на любом сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Покажем сначала, что функция f интегрируема на $[\tau, 2\tau]$ и имеет место равенство

$$\int_{\tau}^{2\tau} f(x)\,dx = \int_{0}^{\tau} f(x)\,dx. \tag{6.62}$$

Пусть T — любое разбиение сегмента $[\tau, 2\tau]$ с узлами x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — любые точки. Построим разбиение T' сегмента $[0, \tau]$ с узлами $x'_i = x_i - \tau$ и выберем на частичных сегментах $[x'_{i-1}, x'_i]$ точки $\xi'_i = \xi_i - \tau$. Тогда, ввиду того,что f имеет период τ,

$$\sigma(f, T, \xi) = \sigma(f, T', \xi').$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получаем интегрируемость f на $[\tau, 2\tau]$ и равенство (6.62).

Совершенно аналогичным образом доказывается интегрируемость f на сегменте $[-\tau, 0]$ и по индукции интегрируемость её на любом сегменте $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k \in \mathbb{Z}$, а следовательно, в силу свойства 6.8, и на любом сегменте $[l\tau, m\tau]$, $l, m \in \mathbb{Z}$ $(l < m)$.

Так как любой сегмент $[a,b]$ можно заключить в сегмент вида $[(k-1)\tau, k\tau]$, то по свойству 6.6 функция f интегрируема на любом сегменте $[a,b]$. ■
Замечание. Аналогично (6.62) доказывается равенство

$$\int\limits_{\tau}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Свойство 6.21. *Если периодическая функция $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ с периодом τ интегрируема на сегменте $[0,\tau]$, то для любого $a\in\mathbb{R}$*

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx. \tag{6.63}$$

Доказательство. По свойству 6.20 функция f интегрируема на сегменте $[0,a+\tau]$. Используя свойство 6.7, представим $\int\limits_{0}^{a+\tau} f(x)\,dx$ в виде суммы двух интегралов двумя способами:

$$\int\limits_{0}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx + \int\limits_{\tau}^{a+\tau} f(x)\,dx; \quad \int\limits_{0}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx.$$

На основании последнего замечания из этих равенств и следует (6.63). ■

6.6 Формула Ньютона-Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f\in R\,[a,b]$. Зафиксируем какую-нибудь точку $c\in[a,b]$. Тогда, по свойству 6.6 интеграла, $f\in R\,[c,x]$ при любом $x\in[a,b]$. Поэтому можно рассмотреть функцию $F:[a,b]\longrightarrow R$, задаваемую формулой

$$F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(t)\,dt, \tag{6.64}$$

которую называют *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 6.6. *Если функция $f\in R\,[a,b]$, то функция F, заданная равенством (6.64), непрерывна на сегменте $[a,b]$.*

Доказательство. Так как $f\in R\,[a,b]$, то она ограничена на сегменте $[a,b]$. Следовательно, существует постоянная $M>0$ такая, что $|f(x)|\leq M$ при всех $x\in[a,b]$. Возьмём произвольную точку $x_0\in[a,b]$ и докажем непрерывность функции F в этой точке.

Для любого $x\in[a,b]$ имеем:

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \leq M\,|x-x_0|\,.$$

Отсюда следует, что $F(x)\to F(x_0)$, когда $x\to x_0$. Это означает, что функция F непрерывна в точке x_0.

Из произвольности выбора точки x_0 заключаем, что $F\in C\,[a,b]$. ■

Следствие 6.5. *Если функция f определена на интервале (a,b) и интегрируема на любом сегменте $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, то при любом $c\in(a,b)$ функция $F:(a,b)\to\mathbb{R}$, заданная формулой (6.64), непрерывна на интервале (a,b).*

Доказательство. Действительно, возьмем любые две точки c, $x_0\in(a,b)$ и любой сегмент $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, содержащий эти точки. По теореме 6.6 функция F непрерывна на сегменте $[\alpha,\beta]$, а следовательно, и в точке x_0. ■

Существование первообразной для непрерывной функции

Теорема 6.7. (**Основная теорема интегрального исчисления**) *Если $f\in R[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0\in[a,b]$, то функция F, заданная формулой (6.64), дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0)=f(x_0)$.*

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0). \tag{6.65}$$

Ввиду непрерывности функции f в точке x_0, для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $x\in[a,b]\cap\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ справедливо неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{6.66}$$

Считая $|x-x_0|<\delta$, оценим $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|$. Так как

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^x f(t)\,dt-\int_c^{x_0} f(t)\,dt\right)=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

а

$$f(x_0)=f(x_0)\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x dt=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt,$$

то, применяя (6.66), выводим

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))\,dt\right|<\frac{1}{|x-x_0|}\,\varepsilon\,|x-x_0|=\varepsilon.$$

Из полученной оценки по определению предела функции следует (6.65). ■

Следствие 6.6. *Любая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция f имеет на этом сегменте первообразную. Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом* (6.64).

Доказательство. Согласно теореме 6.6, функция F непрерывна на сегменте $[a,b]$, а согласно теореме 6.7, она дифференцируема в каждой точке этого сегмента (поскольку f непрерывна на нем). Поэтому F — первообразная функции f на сегменте $[a,b]$. ■

Основная формула интегрального исчисления

Теорема 6.8. *Если $f \in C\,[a,b]$, а Φ — произвольная первообразная функции f на сегменте $[a,b]$, то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{6.67}$$

Формула (6.67) называется основной формулой интегрального исчисления или *формулой Ньютона-Лейбница*.

Доказательство. В силу следствия 6.6 можно утверждать, что любая первообразная Φ функции f на сегменте $[a,b]$ имеет вид

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \tag{6.68}$$

где C — некоторая постоянная.

Принимая во внимание равенство $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ (см. свойство 6.1), находим: $C = \Phi(a)$. Таким образом, из (6.68) получаем формулу

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \Phi(a). \tag{6.69}$$

Полагая здесь $x = b$, приходим к формуле (6.67). ■

Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ обычно изображают символом $\Phi(x)\,\Big|_a^b$ и формулу (6.67) пишут в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\,\Big|_a^b.$$

Замечание 6.1. *Формулу* (6.69) *после замены* $\Phi(x)$ *на* $f(x)$ *и* $f(x)$ *на* $f'(x)$ *можно переписать в следующем часто используемом при восстановлении функции по её производной виде:*

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt. \tag{6.70}$$

Пример 6.4. *Найти следующие определенные интегралы:*

$$a)\quad \int\limits_3^6 x^2\,dx; \quad b)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx; \quad c)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, находим:

$$a)\quad \int\limits_3^6 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 72 - 9 = 63;$$

$$b)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\,\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1;$$

$$c)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,\bigg|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 6.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx$.

Так как подынтегральная функция $f(x) = |x|$ — четная, то, используя свойство 6.18 и применяя основную формулу интегрального исчисления, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int\limits_0^1 |x|\,dx = 2\int\limits_0^1 x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1.$$

6.7 Основные методы вычисления определённых интегралов

1. Метод разложения. Пусть функция $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ представлена в виде линейной комбинации $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x)$ функций $f_j \in R\,[a,b]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которых интегралы $\int\limits_a^b f_j(x)\,dx$ легко находятся или известны. Тогда по свойствам 6.4 и 6.3 функция $f \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int\limits_a^b f_j(x)\,dx. \tag{6.71}$$

Пример 6.6. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(5x)\,dx$.

Так как $\sin(3x)\cos(5x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(8x) - \sin(2x)\right)$, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(8x) - \sin(2x)\big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. Замена переменной в интеграле Римана (метод подстановки).

Теорема 6.9. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ — непрерывно-дифференцируема (то есть имеет непрерывную производную) на сегменте $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) функция $f \in C\,[a, b]$.

При этих условиях справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6.72}$$

Формула (6.72) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Доказательство. Пусть F — какая-нибудь первообразная функции f на сегменте $[a, b]$. Тогда $\Phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\Phi(t) = F\left(\varphi(t)\right)$ — первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, определенной на сегменте $[\alpha, \beta]$, так как по теореме о дифференцировании сложной функции $\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. По свойствам непрерывных функций сложная функция $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница (6.67), выводим

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Замечание 6.2. *В формулировке теоремы 6.9 не обязательно требовать, чтобы значения функции φ не выходили за пределы сегмента $[a, b]$, но тогда функция f должна быть определена и непрерывна на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$, на котором расположены все значения функции φ.*

Замечание 6.3. *При замене переменной в определенном интеграле после нахождения первообразной нет надобности возвращаться к старой переменной, как в неопределенном интеграле. Действительно, если вычислен один из интегралов в формуле (6.72), представляющий собой число, то тем самым вычислен и другой.*

Пример 6.7. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Положим $x = a \sin t$. Тогда $dx = a \cos t\,dt$. При $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ множество значений функции $\varphi(t) = a \sin t$ заполняет сегмент $[0, a]$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a$. Следовательно, все условия теоремы 6.9 выполнены, поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 6.8. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$.

Сделаем замену переменной, положив $x = \pi - t$. Тогда при изменении x от 0 до π переменная t изменяется от π до 0 и $dx = -dt$. По теореме 6.9 имеем

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - I.$$

Решая это уравнение, получаем $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$. Теперь сделаем замену $\tau = \cos t$. Тогда $d\tau = -\sin t\,dt$, $\tau = 1$ при $t = 0$ и $\tau = -1$ при $t = \pi$. Поэтому

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\int\limits_1^{-1} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int\limits_0^{1} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \pi \operatorname{arctg}\tau\,\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. Интегрирование по частям.

Теорема 6.10. *Пусть функции $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a,b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{6.73}$$

Так как $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$, эту формулу записывают ещё в следующем виде:

$$\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{6.74}$$

Доказательство. Функция uv является первообразной для функции $(uv)' = uv' + u'v$. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^b \big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\big)\,dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b.$$

Отсюда, используя свойство 6.4, получаем доказываемую формулу (6.73). ■

Пример 6.9. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

Положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = -\cos x$ и

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\,\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x\,\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Пример 6.10. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$.

Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, находим: $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 6.11. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\pi e^x \cos x\, dx$.

Положим $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$. Тогда $du = e^x\, dx$, $v = \sin x$ и

$$\int\limits_0^\pi e^x \cos x\, dx = e^x \sin x \,\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi e^x \sin x\, dx = -\int\limits_0^\pi e^x \sin x\, dx.$$

Еще раз проинтегрируем по частям, полагая $u = e^x$, $dv = -\sin x\, dx$. Тогда $du = e^x\, dx$, $v = \cos x$ и

$$\int\limits_0^\pi e^x \cos x\, dx = e^x \cos x \,\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi e^x \cos\, dx = -e^\pi - 1 - \int\limits_0^\pi e^x \cos\, dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\pi e^x \cos x\, dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$

7 Несобственные интегралы

Мы уже познакомились с понятием определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ для случая сегмента $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и ограниченной функции f. Но иногда приходится иметь дело либо с интегралами по неограниченному промежутку, либо с интегралами от неограниченных функций. Такие интегралы называются *несобственными*. Сначала определим интеграл на неограниченном промежутке (таковыми являются полупрямые $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ и вся прямая $\mathbb{R}$), а затем введём понятие интеграла от неограниченной функции на ограниченном промежутке.

7.1 Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция f определена на полупрямой $[a, +\infty)$ и интегрируема (по Риману) на любом сегменте $[a, A] \subset [a, +\infty)$. Формальное выражение

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{7.1}$$

назовём несобственным интегралом первого рода.

Определение 7.1. *Несобственный интеграл первого рода назовём сходящимся, если существует*

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Если интеграл (7.1) сходится, то будем полагать его значение равным этому пределу и будем писать

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Аналогично определяются несобственные интегралы по полупрямой $(-\infty, b]$ и по всей прямой $\mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A''\to+\infty}}\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx.$$

Замечание 1. Если $b > a$, то наряду с интегралом (7.1) можно рассматривать интеграл $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Очевидно, что из сходимости одного из указанных интегралов следует сходимость другого и справедливо равенство

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

При вычислении несобственного интеграла от функции f, непрерывной на промежутке $[a, +\infty)$, справедлива основная формула интегрального исчисления.

Теорема 7.1. *Если функция* $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна на полупрямой* $[a, +\infty)$*, а* $F : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *— одна из её первообразных, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда существует (конечный)*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty). \tag{7.2}$$

В случае сходимости

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^{+\infty}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на сегменте $[a, A]$ при каждом $A \geq a$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^A = F(A) - F(a).$$

Предел левой части этого равенства при $A \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда существует предел правой части. Переходя в этом равенстве к пределу при $A \to +\infty$ и учитывая (7.2), получаем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} (F(A) - F(a)) = F(+\infty) - F(a).$$

■

Пример 7.1. *Доказать сходимость и вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Так как

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \,\Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2},$$

то исследуемый интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 7.2. *Доказать сходимость и вычислить*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}. \tag{7.4}$$

Сначала найдем какую-нибудь первообразную функцию для $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ на полупрямой $[1, +\infty)$. Так как

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

то одной из первообразных функции f на полупрямой $[1, +\infty)$ является функция

$$F(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Найдем предел (если он существует) $F(x)$ при $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0.$$

Следовательно, $F(+\infty) = 0$, а поскольку $F(1) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln 2$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = F(+\infty) - F(1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 7.3. *Исследовать, при каких значениях p сходится несобственный интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{7.5}$$

Так как функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ непрерывна на полупрямой $[1, +\infty)$, то она интегрируема на любом сегменте $[1, A] \subset [1, +\infty)$, причем

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^A = \dfrac{A^{1-p}-1}{1-p} & \text{при} \quad p \neq 1, \\ \ln x \Bigg|_1^A = \ln A & \text{при} \quad p = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_1^A \dfrac{dx}{x^p}$ существует и равен $\dfrac{1}{p-1}$ только при $p > 1$. Следовательно, при $p > 1$ интеграл (7.5) сходится и равен $\dfrac{1}{p-1}$, а при остальных значениях p он расходится.

Несобственные интегралы первого рода, так же, как и собственные определенные интегралы, можно вычислять путем замены переменной и по частям.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция* $\varphi : [\alpha, +\infty) \longrightarrow [a, +\infty)$ *— непрерывно-дифференцируема и возрастает на полупрямой* $[\alpha, +\infty)$*;*

2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ *;*

3) *функция* $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *— непрерывна.*

При этих условиях из сходимости одного из следующих несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \int\limits_\alpha^{+\infty} f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt \tag{7.6}$$

вытекает сходимость другого и их равенство.

Доказательство. Возьмем произвольное $B > \alpha$. Поскольку функция φ возрастает и непрерывна на сегменте $[\alpha, B]$, этому сегменту соответствует сегмент $[a, A]$ такой, что при изменении аргумента функции φ на сегменте $[\alpha, B]$ ее значения заполняют сегмент $[a, A]$, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(B) = A$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 6.9 о замене переменной под знаком определенного интеграла. Поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_a^A f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^B f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt. \tag{7.7}$$

В силу возрастания функции φ, $A \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $B \to +\infty$. Поэтому из формулы (7.7) следует справедливость доказываемой теоремы. ∎

Пример 7.4. *Доказать сходимость и вычислить*

$$\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx. \tag{7.8}$$

Положим $x^2 = t$. Тогда $2xdx = dt$, $xdx = \dfrac{dt}{2}$ и, если $x = 0$, то $t = 0$, а если $x = +\infty$, то и $t = +\infty$. Так как функции $f(x) = xe^{-x^2}$ и $\varphi(t) = \sqrt{t}$, рассматриваемые на промежутке $[0; +\infty)$ каждая, удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(-e^{-t}\right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл (7.8) сходится и равен $\dfrac{1}{2}$.

Теорема 7.3. *Пусть функции u и v имеют непрерывные производные на полупрямой $[a, +\infty)$. Тогда из существования двух из трех выражений*

$$\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x), \quad \int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\, dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\, dx$$

следует существование третьего и справедливость равенства

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\, dx. \tag{7.9}$$

Формула (7.9) называется формулой интегрирования по частям.

Доказательство. Рассмотрим произвольный сегмент $[a, A]$ $(A > a)$. На этом сегменте функции u и v удовлетворяют всем условиям теоремы 6.10. Поэтому

$$\int\limits_a^{A} u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) \Big|_a^{A} - \int\limits_a^{A} u'(x)v(x)\, dx. \tag{7.10}$$

Равенство (7.9) получается отсюда путем предельного перехода при $A \longrightarrow +\infty$. ■

Пример 7.5. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx.$

Будем интегрировать по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = \dfrac{x\, dx}{\left(1+x^2\right)^2}$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}. \tag{7.11}$$

Введем обозначение: $g(x) = \dfrac{\ln x}{2(1+x^2)}$. Применяя правило Лопиталя, вычисляем

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{2(1+x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

А так как $g(1) = 0$, то, учитывая результат примера 7.2, окончательно получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = \frac{1}{4} \ln 2.$$

Часто нас интересует не само значение несобственного интеграла, а лишь его сходимость. Но согласно определению 7.1 вопрос о сходимости несобственного интеграла (7.1) эквивалентен вопросу о существовании предела функции $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$, то есть интеграл сходится тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$. Напишем для функции $F(A)$ условие Коши существования предела при $A \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 (> a) : \forall A', A'' > A_0 \implies |F(A'') - F(A')| < \varepsilon.$$

Поскольку $F(A'') - F(A') = \int\limits_a^{A''} f(x)dx - \int\limits_a^{A'} f(x)dx = \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx$, то справедлива следующая

Теорема 7.4 (Критерий Коши). *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится в том и только том случае, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся число* $A_0 > a$ *такое, что при любых* $A', A'' > A_0$

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Если использовать определение предела функции по Гейне, то можно сформулировать

Предложение 7.1. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности* $A_n \to +\infty$ *последовательность интегралов* $\int\limits_a^{A_n} f(x)dx$ *сходится.*

Пример 7.6. *Доказать, что* $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin x\, dx$ *при* $p \geq 0$ *расходится.*

Зафиксируем $\varepsilon \in (0; 2]$, возьмем произвольное число $A_0 > 1$, выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2n\pi > A_0$ и оценим снизу $\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^p \sin x\, dx$.

Подынтегральная функция является произведением функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \sin x$. Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют условиям первой обобщенной теоремы о среднем значении (свойство 6.16 определенного интеграла). По этой теореме на сегменте $[2n\pi; (2n+1)\pi]$ найдется точка ξ такая, что

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^p \sin x\, dx = f(\xi) \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\, dx \geq 2f(\xi) \geq 2,$$

так как $\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\, dx = 2$, а $f(\xi) \geq 1$. По критерию Коши исходный интеграл расходится.

Несобственный интеграл, как и римановский (собственный) обладает свойством линейности.

Теорема 7.5. *Если сходятся интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, *то при любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx. \qquad (7.12)$$

Доказательство. По свойствам интеграла Римана при любом $A \geq a$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{A} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int\limits_a^{A} f(x)dx + \mu \int\limits_a^{A} g(x)dx. \qquad (7.13)$$

Из сходимости интегралов от функций f и g на $[a, +\infty)$ вытекает, что при $A \to +\infty$ правая часть равенства (7.13) имеет (конечный) предел. Следовательно, такой же предел имеет и левая часть этого равенства. Это означает, что интеграл от функции $\lambda f + \mu g$ на полупрямой $[a, +\infty)$ сходится, а равенство (7.12) является результатом предельного перехода в равенстве (7.13). ■

Определение 7.2. *Назовём интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Теорема 7.6. *Если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Так как интеграл сходится абсолютно, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0 > a$ такое, что при любых $A', A'' > A_0$ $(A'' > A')$ справедлива оценка

$$\int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon$$

при тех же A' и A''. По критерию Коши интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ■

Теорема 7.7. (Вейерштрасс) *Пусть функции* $f, g : [a;\, +\infty) \to \mathbb{R}$ *интегрируемы по Риману на* $[a; A]$ *при любом* $A > a$, $|f(x)| \leq g(x)$ *для всех* $x \in [a;\, +\infty)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится. Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится и притом абсолютно.*

Доказательство. Так как $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по критерию Коши для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0 > a$ такое, что при всех $A', A'' > A_0$ $(A'' > A')$ справедлива оценка

$$\int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \le \int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|dx \le \int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx < \varepsilon.$$

Из полученной оценки, в силу критерия Коши, вытекает и сходимость, и абсолютная сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. ■

Пример 7.7. *Применяя признак Вейерштрасса, докажем, что при $p > 1$ интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ сходятся.*

Так как $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится (пример 7.3), то и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ сходится, и притом абсолютно.

Второй интеграл рассматривается аналогично.

Пример 7.8. *Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx$.*

Фиксируем произвольное положительное число ε. Поскольку $\ln x$ при $x \to +\infty$ возрастает медленнее,чем x^ε, то найдется постоянная $A_0 = A_0(\varepsilon) \ge 1$ такая, что

$$\ln x \le x^\varepsilon, \quad x \ge A_0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\ln x}{x^p} \le \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}, \quad x \ge A_0.$$

А так как $\int\limits_{A_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\, dx$ сходится тогда и только тогда, когда $p - \varepsilon > 1$ (смотрите пример 7.3 и замечание 1), то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_{A_0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx$, а в силу замечания 1 и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx$, сходится при условии $p - \varepsilon > 1$. Ввиду произвольности выбора числа ε интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx$, сходится при всех $p > 1$.

Если же $p \leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится. А так как $\frac{\ln x}{x^p} \geq \frac{1}{x^p}$ при $x \geq e$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ также расходится, иначе, по признаку Вейерштрасса и замечанию 1, должен сходиться и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Теорема 7.8. (Дирихле) *Пусть $f, g : [a;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, функция f интегрируема по Риману на $[a; A]$ при любом $A > a$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, если выполнены следующие два условия:*

1) *функция $F(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx$ ограничена на $[a;\ +\infty)$;*
2) *$g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.*

Доказательство. На основании условия, теоремы 6.5 и свойства 6.5 определенных интегралов произведение функций f и g интегрируемо на любом сегменте $[a; A]$ $(A > a)$.

Докажем теперь сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

По первому условию существует постоянная M такая, что $\left|\int\limits_a^{A} f(x)dx\right| \leq M$ при любом $A > a$. По второму условию функцию g можно считать неотрицательной. По второму же условию для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0 > a$ такое, что при любом $A > A_0$ будет выполняться неравенство $|g(A)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Возьмём $A', A'' > A_0$ $(A' < A'')$ и применим к интегралу $\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx$ вторую теорему о среднем значении (формулу Бонне), согласно которой найдётся A $(A' < A < A'')$ такое, что

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A') \int\limits_{A'}^{A} f(x)dx + g(A'') \int\limits_{A}^{A''} f(x)dx.$$

Но тогда, поскольку

$$\left|\int\limits_{A'}^{A} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{A} f(x)dx - \int\limits_{a}^{A'} f(x)dx\right| \leq \left|\int\limits_{a}^{A} f(x)dx\right| + \left|\int\limits_{a}^{A'} f(x)dx\right| \leq 2M$$

и

$$\left|\int\limits_{A}^{A''} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{A''} f(x)dx - \int\limits_{a}^{A} f(x)dx\right| \leq \left|\int\limits_{a}^{A''} f(x)dx\right| + \left|\int\limits_{a}^{A} f(x)dx\right| \leq 2M,$$

для любых $A', A'' > A_0$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \leq \left|g(A') \int\limits_{A'}^{A} f(x)dx\right| + \left|g(A'') \int\limits_{A}^{A''} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл сходится. ■

Пример 7.9. *Исследовать сходимость интегралов* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ *и* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ $(p > 0)$.

По признаку Дирихле эти интегралы сходятся, поскольку функция $\frac{1}{x^p} \downarrow 0$ при $x \to +\infty$, а интегралы $\int\limits_1^A \sin x dx$, $\int\limits_1^A \cos x dx$, очевидно, ограничены.

Теорема 7.9. (Абель) *Пусть функции* $f, g : [a;\ +\infty) \to \mathbb{R}$*, функция* f *интегрируема по Риману на* $[a; A]$ *при любом* $A > a$*. Тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится, если выполнены следующие два условия:*

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится;*

2) функция g *монотонна и ограничена на* $[a;\ +\infty)$*.*

Доказательство. В силу второго условия существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = B$. Поскольку разность $(g(x) - B)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,(g(x) - B)\,dx$ сходится по признаку Дирихле. Представим исходный интеграл в виде суммы двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,(g(x) - B + B)\ dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,(g(x) - B)\ dx + B\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ следует теперь из теоремы 7.5. ■

Пример 7.10. *Исследовать сходимость интеграла* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x dx$*.*

Этот интеграл сходится по признаку Абеля. Действительно, сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ доказана в предыдущем примере, а функция $\operatorname{arctg} x$ монотонна и ограничена.

Определение 7.3. *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *будем называть условно сходящимся, если он сходится, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *расходится.*

Приведем пример условно сходящегося интеграла.

Из примеров 7.6, 7.9 и 7.7 вытекает, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ при $p \leq 0$ расходится, а при $p > 0$ сходится, причем при $p > 1$ сходится абсолютно.

Пример 7.11. *Покажем, что при* $0 < p \leq 1$ *интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ *сходится условно.*

Для этого докажем, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$ расходится.

Очевидно, что при всех $x \geq 1$

$$\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{x^p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p} - \frac{\cos(2x)}{x^p}\right).$$

Так как $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ расходится (пример 7.3), а $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^p}\,dx$ сходится (пример 7.9), то $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$ расходится. Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ следует, что при $0 < p \leq 1$ исходный интеграл сходится условно.

7.2 Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f : (a;\ b] \to \mathbb{R}$ при любом $0 < \delta < b - a$ неограничена на интервале $(a;\ a + \delta)$, но интегрируема на сегменте $[a + \delta,\ b]$.

Формальное выражение

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \tag{7.14}$$

называют *несобственным интегралом второго рода*, а точку a — *особой точкой* подынтегральной функции или интеграла.

Определение 7.4. *Несобственный интеграл второго рода (7.14) назовём сходящимся, если существует*

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx = I.$$

В этом случае будем говорить, что число I является значением интеграла и писать

$$I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если же указанный предел равен бесконечности или вовсе не существует, то будем говорить, что интеграл расходится.

Аналогично определяется

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx,$$

если функция f определена и неограничена на $[a;\ b)$, но интегрируема на $[a;\ b - \delta]$ при любом $0 < \delta < b - a$.

Если же функция f определена и неограничена на $[a;\ b]\backslash\{c\}$, $a < c < b$, но интегрируема на отрезках $[a;\ c-\delta]$ и $[c+\delta;\ b]$ при любом допустимом положительном δ, то по определению полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1,\delta_2\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta_2}^b f(x)dx\right).$$

Пример 7.12. *Определить, при каких значениях параметра p сходится интеграл*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}. \tag{7.15}$$

Этот интеграл является несобственным при $p > 0$, и $x = b$ — особая точка подынтегральной функции f. А так как функция f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$, она интегрируема на любом сегменте $[a, b-\delta]$ и

$$\int\limits_a^{b-\delta} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b-\delta} = \dfrac{(b-a)^{1-p} - \delta^{1-p}}{1-p} & \text{при} \quad p \neq 1, \\ -\ln(b-x)\Bigg|_a^{b-\delta} = \ln\dfrac{b-a}{\delta} & \text{при} \quad p = 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{\delta\to+0}\int\limits_a^{b-\delta} \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ существует и равен $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ при $p < 1$ и не существует при $p \geq 1$. Это означает, что рассматриваемый несобственный интеграл при $0 < p < 1$ сходится, а при $p \geq 1$ расходится.

Теорема 7.10 (Критерий Коши)**.** *Если $f:\ (a;\ b] \to \mathbb{R}$, a — особая точка и $f \in R[a+\delta,\ b]$ при любом $0 < \delta < b-a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $a', a'':\ a < a', a'' < a+\delta$ будет выполняться условие*

$$\left|\int\limits_{a'}^{a''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Это утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение для несобственных интегралов первого рода.

Так же вводится понятие абсолютной и условной сходимости и устанавливается соотношение между ними. Так же формулируется и доказывается признак сходимости Вейерштрасса.

Рекомендуем читателям проделать эту работу самостоятельно.

Пример 7.13. *Исследовать сходимость интеграла* $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln\frac{1}{x}}{x^p}\,dx.$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку при $x \to +0$ функция $\ln\dfrac{1}{x}$ имеет меньший порядок роста по сравнению с $\dfrac{1}{x^\varepsilon}$, то найдется $\delta \in (0;1)$ такое, что

$$\ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^\varepsilon}, \quad 0 < x \leq 1-\delta.$$

Отсюда следует, что
$$\frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p} \le \frac{1}{x^{p+\varepsilon}}, \quad 0 < x \le 1-\delta.$$

Учитывая, что интеграл $\int\limits_0^{1-\delta} \frac{1}{x^{p+\varepsilon}}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $p+\varepsilon < 1$ (смотрите пример 7.12), то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^{1-\delta} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p}\,dx$, а вмести с ним и интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p}\,dx$, сходится, если $p+\varepsilon < 1$. Ввиду произвольности выбора числа ε, интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p}\,dx$ сходится при всех $p < 1$.

Если же $p \ge 1$, то интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ расходится. И поскольку
$$\frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p} \ge \frac{1}{x^p}, \quad 0 < x \le \frac{1}{e},$$
то интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x^p}\,dx$ также расходится, так как в противном случае по признаку Вейерштрасса следовала бы сходимость интеграла $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$.

Связь между несобственными интегралами первого и второго рода

При некоторых ограничениях на подынтегральные функции с помощью замены переменной можно от несобственных интегралов одного рода переходить к несобственным интегралам другого рода. Например, справедливо следующее

Предложение 7.2. *Пусть функция $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна на полусегменте $[a,b)$ и b — особая точка этой функции. Тогда из сходимости одного из интегралов*
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$
следует сходимость другого и их равенство.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta \in (0, b-a]$. В интеграле $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ произведем замену переменной, полагая $x = b - \dfrac{1}{t}$. Тогда $dx = \dfrac{dt}{t^2}$, переменная x пробегает сегмент $[a, b-\delta]$ тогда и только тогда, когда переменная t пробегает сегмент $\left[\dfrac{1}{b-a}, \dfrac{1}{\delta}\right]$, причем точка a переходит в точку $\dfrac{1}{b-a}$, а точка $(b-\delta)$ — в точку $\dfrac{1}{\delta}$. Следовательно, по теореме о замене переменной в определенном интеграле (теорема 6.9), имеем

$$\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\delta}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Это равенство показывает, что из существования одного из пределов

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\delta}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует существование другого и их равенство, чем и завершается доказательство предложения (7.2). ■

Пример 7.14. *Преобразовать несобственный интеграл второго рода*

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$$

в несобственный интеграл первого рода.

Подынтегральная функция непрерывна на полусегменте $[0,2)$ и неограничена в окрестности точки $x=2$, то есть $x=2$ — ее особая точка. Поэтому, полагая $x = 2-\dfrac{1}{t}$, находим

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}.$$

7.3 Главное значение несобственного интеграла

Введем еще одно понятие сходимости несобственного интеграла — сходимости в смысле главного значения. Начнем с несобственного интеграла первого рода.

Определение 7.5. *Пусть функция $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману на каждом сегменте, принадлежащем $\mathbb{R}$. Тогда, если существует $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$, то он называется главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ или интегралом в смысле главного значения от функции f и обозначается символом $(v.\ p.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. При этом функция f называется интегрируемой по Коши.*

Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то есть существует конечный $\lim\limits_{\substack{A'\to-\infty\\ A''\to+\infty}}\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$, то тогда существует и $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$, то есть главное значение этого интеграла, при этом

$$(v.\ p.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Аналогично вводится понятие сходимости в смысле главного значения для несобственных интегралов второго рода.

Определение 7.6. *Пусть функция* $f : [a;\ b]\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, *неограничена в окрестности точки* c, *интегрируема по Риману на отрезках* $[a;\ c-\delta]$ *и* $[c+\delta;\ b]$ *при любом* $\delta > 0$. *Тогда, если существует* $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right)$, *то он называется главным значением интеграла* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *или интегралом в смысле главного значения и обозначается символом* $(v.\ p.)\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Для несобственных интегралов второго рода так же, как и для несобственных интегралов первого рода, из сходимости $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ следует существование его главного значения и равенство

$$(v.\ p.)\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Поэтому наибольший интерес понятие главного значения представляет для расходящихся несобственных интегралов как первого, так и второго рода.

Пример 7.15. *Рассмотрим* $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x}$.

Это — расходящийся интеграл второго рода, поскольку показатель степени $p = 1$. Однако

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(\ln(-x)\Big|_{-1}^{-\delta} + \ln x\Big|_{\delta}^{1}\right) = \lim_{\delta\to 0}(\ln\delta - \ln 1 + \ln 1 - \ln\delta) = 0.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл существует в смысле главного значения и

$$(v.\ p.)\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Используя свойства 6.18 и 6.19 интеграла Римана, легко доказать следующее утверждение.

Предложение 7.3. *Если функция* $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *нечетна и интегрируема по Риману на каждом сегменте, то она интегрируема по Коши и* $(v.p.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

Если же функция f *четна и интегрируема по Риману на каждом сегменте, то она интегрируема по Коши тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл* $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$. *В случае существования главного значения справедливо равенство*

$$(v.\ p.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пример 7.16. *Рассмотрим* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

Этот интеграл расходится, так как при $x \to \infty$ подынтегральная функция $f(x) \sim \frac{1}{x}$. Но по предложению 7.3, ввиду нечетности подынтегральной функции, главное значение интеграла существует и равно нулю.

Заметим, что любую функцию $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде суммы двух функций: **четной и нечетной**, $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Следовательно, главное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx$, при этом

$$(v.\ p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Пример 7.17. *Рассмотрим* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{1+x^2}\,dx$.

Подынтегральная функция $f(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to \infty)$ поэтому этот интеграл расходится. Но поскольку $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, а $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$ $\left(\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\right)$, то $(v.\ p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен π.

Пример 7.18. *Рассмотрим* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\cos x}{1+x^2}\,dx$.

И в этом примере подынтегральная функция $f(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to \infty)$, поэтому и этот интеграл расходится, а $\varphi(x) = \frac{\cos x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, поэтому интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится. Следовательно, главное значение исходного интеграла существует. В дальнейшем, изучая интегралы, зависящие от параметра, мы покажем, что

$$(v.\ p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\cos x}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

8 Геометрические приложения определенного интеграла

8.1 Длина дуги кривой

Многие выдающиеся ученые занимались изучением кривых. Многие годы жизни они посвятили решению задач, которые современные студенты, применяя интегральное исчисление, решают теперь на практических занятиях. Например, изучение циклоиды связано с именами Галилея, Торричелли, Вивиани.

В различных разделах математики термин кривая, абстрагирующий наше обыденное представление о кривой линии, определяется по разному, в зависимости от целей и методов исследования. В математическом анализе кривую определяют заданием её параметрических уравнений.

Определение 8.1. *Пусть функции φ и $\psi \in C\,[\alpha, \beta]$. Кривой (плоской кривой) будем называть множество точек плоскости, координаты которых задаются уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\,. \tag{8.1}$$

При этом точку $A\,(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ назовем началом кривой, а точку $B\,(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ — концом.

Переменную t называют *параметром*, а уравнения (8.1) — *параметрическими уравнениями кривой*, сам способ задания кривой, приведенный в определении, — параметрическим.

Если параметр t интерпретировать как время, то кривую, заданную уравнениями (8.1), можно рассматривать как траекторию (след) движения точки на плоскости. Это соображение делает приведенное определение кривой вполне естественным.

Отметим, что одна и та же кривая может быть задана (параметризована) бесчисленным множеством способов путем представления параметра t в виде непрерывной строго монотонной функции $g : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ некоторого другого параметра τ. Тогда уравнения

$$x = \varphi\left(g(\tau)\right), \quad y = \psi\left(g(\tau)\right), \quad \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$$

задают ту же кривую, что и уравнения (8.1).

Заметим также, что наше прежнее представление о кривой как графике непрерывной функции $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ является частным случаем определения 8.1. Действительно, полагая $x = t$, $y = f(t)$, получаем параметрические уравнения графика функции f.

Определение 8.2. *Кривая L, определяемая уравнениями (8.1), называется простой, если из того, что $t_1 \neq t_2$ (t_1,$t_2 \in [\alpha, \beta]$), следует, что $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.*

Таким образом, каждой точке простой кривой отвечает только одно значение параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$.

В дальнейшем мы будем изучать только такие кривые, определяемые уравнениями (8.1), для каждой из которых существует разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

на такие частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для любого из которых кривая

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

является простой (Рис. 9).

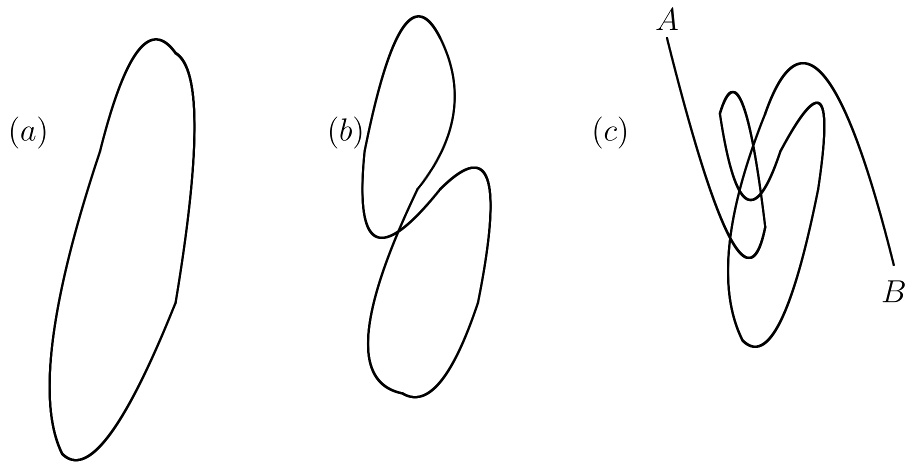

Рис. 9: Примеры кривых.

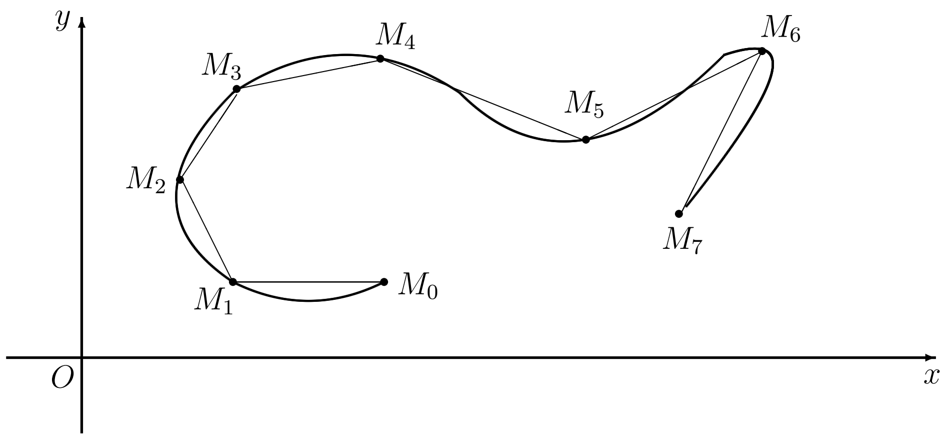

Рис. 10: Ломаная, вписанная в простую кривую ($n = 7$).

Определение 8.3. *Кривая L называется замкнутой, если ее конец совпадает с ее началом.*

Определение 8.4. *Простую замкнутую кривую будем называть контуром.*

На рисунке 9 изображены кривые: (a) — контур, (b) — замкнутая, но не простая, (c) не замкнутая и не простая.

Пусть L — простая кривая, определяемая уравнениями (8.1). Возьмем произвольное разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Пусть M_0,M_1,..., M_n — точки кривой L, отвечающие значениям параметра $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Соединим последовательно точки M_0,M_1,..., M_n отрезками. Ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$ назовем *ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей данному разбиению T сегмента* $[\alpha, \beta]$ (рис. 10).

Так как длина $\overline{\ell}_i(T)$ звена $M_{i-1}M_i$ этой ломаной находится по формуле

$$\overline{\ell}_i(T) = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i-1}\right)^2} = \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}\,, \qquad (8.2)$$

то длина $\overline{\ell}\,(T)$ всей ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей данному разбиению T определяется формулой

$$\overline{\ell}\,(T)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\ell}_i\,(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big)^2+\big(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\big)^2}\,. \tag{8.3}$$

Определение 8.5. *Кривая L называется спрямляемой, если множество $\left\{\overline{\ell}(T)\right\}$ длин вписанных в неё ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha,\beta]$, ограничено. При этом точная верхняя грань ℓ множества $\left\{\overline{\ell}(T)\right\}$, то есть число*

$$\ell=\sup\left\{\overline{\ell}(T)\right\}, \tag{8.4}$$

называется длиной дуги кривой L.

Лемма 8.1. *Пусть простая кривая L определяется уравнениями (8.1), T и T^* — произвольные разбиения сегмента $[\alpha,\beta]$, $\overline{\ell}(T)$ и $\overline{\ell}(T^*)$ — длины ломаных, вписанных в кривую L и отвечающих разбиениям T и T^* соответственно. Если разбиение T^* является продолжением разбиения T, то $\overline{\ell}(T)\le\overline{\ell}(T^*)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда разбиение T^* получено из разбиения T добавлением лишь одного нового узла t^*. Пусть значению параметра t^* на кривой L соответствует точка M^*, расположенная между точками M_{k-1} и M_k. Ломаная, отвечающая разбиению T^*, отличается от ломаной, отвечающей разбиению T, лишь тем, что одно звено $M_{k-1}M_k$ заменено двумя звеньями $M_{k-1}M^*$ и M^*M_k. Так как длина стороны $M_{k-1}M_k$ треугольника $M_{k-1}M^*M_k$ не превосходит суммы длин двух других его сторон $M_{k-1}M^*$ и M^*M_k, то $\overline{\ell}(T)\le\overline{\ell}(T^*)$. ■

Теорема 8.1. *Если функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[\alpha,\beta]$, то кривая L, определяемая параметрическими уравнениями (8.1), спрямляема и длина ℓ её дуги может быть вычислена по формуле*

$$\ell=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\,. \tag{8.5}$$

Доказательство. Сначала докажем, что кривая L спрямляема. Для этого преобразуем выражение (8.3) длины $\overline{\ell}(T)$ ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей произвольному разбиению T сегмента $[\alpha,\beta]$. Из условия теоремы следует, что для каждой из функций φ и ψ на каждом частичном сегменте $[t_{i-1},t_i]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Поэтому для каждого $i=1,2,\ldots,n$ найдутся точки τ_i, $\tau_i^*\in(t_{i-1},t_i)$ такие, что

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i,\quad \psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\tau_i^*)\Delta t_i. \tag{8.6}$$

Тогда, формула (8.3) принимает вид

$$\overline{\ell}\,(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2+\big(\psi'(\tau_i^*)\big)^2}\,\Delta t_i. \tag{8.7}$$

По условию функции φ и ψ имеют на сегменте $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные. По первой теореме Вейерштрасса эти производные ограничены. Поэтому найдётся число $M>0$ такое, что

$$|\varphi'(t)|\le M,\quad |\psi'(t)|\le M,\quad t\in[\alpha,\beta]\,.$$

Теперь, используя представление (8.7), для любого разбиения T получаем:

$$\overline{\ell}\,(T) \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{M^2 + M^2}\,\Delta t_i = M\sqrt{2}\,\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = M\sqrt{2}\,(\beta - \alpha).$$

По определению 8.5 кривая L спрямляема.

Теперь докажем формулу (8.5). Так как подынтегральная функция в (8.5) непрерывна, то интеграл существует. Введем обозначение

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\bigl(\varphi'(t)\bigr)^2 + \bigl(\psi'(t)\bigr)^2}\,dt \tag{8.8}$$

и докажем, что $\ell = I$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению ℓ найдется такое разбиение T' сегмента $[\alpha, \beta]$, для которого выполняется неравенство

$$0 \le \ell - \overline{\ell}\,(T') < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.9}$$

По определению интеграла найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta_1$ и при любом выборе точек τ_i на частичных сегментах $[t_{i-1}, t_i]$ справедлива оценка

$$\bigl|I - \sigma\,(\Phi, T, \tau)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{8.10}$$

где $\Phi(t) = \sqrt{\bigl(\varphi'(t)\bigr)^2 + \bigl(\psi'(t)\bigr)^2}$.

Функция ψ' непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$ (теорема 3.37 (Кантора)), поэтому найдется $\delta_2 > 0$ такое, что для любых $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ и удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta_2$ будет выполняться

$$|\psi'\,(t') - \psi'\,(t'')| < \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)}. \tag{8.11}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Наконец, заметим, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \le |b - c|\,. \tag{8.12}$$

В самом деле, если $b = c$, то неравенство превращается в тождество $0 = 0$.

Пусть $b \ne c$. Тогда

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} \le \frac{|b + c| \cdot |b - c|}{|b| + |c|} \le |b - c|\,.$$

Пусть теперь T — разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$, являющееся продолжением разбиения T'. Тогда по лемме 8.1

$$0 \le \ell - \overline{\ell}\,(T) \le \ell - \overline{\ell}\,(T') < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.13}$$

Оценим разность $\ell - I$.

$$|\ell - I| \le \bigl|\ell - \overline{\ell}\,(T)\bigr| + \bigl|\overline{\ell}\,(T) - \sigma\,(\Phi, T, \tau)\bigr| + |\sigma\,(\Phi, T, \tau) - I|\,. \tag{8.14}$$

Первое слагаемое в (8.14) меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$ в силу (8.13), последнее меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$ в силу выбора параметра разбиения Δ независимо от выбора $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$. Выберем точки $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ так, как это сделано при написании равенства (8.6) и оценим среднее слагаемое в (8.14), используя неравенства (8.11), (8.12):

$$\left|\bar{\ell}\,(T) - \sigma\,(\Phi, T, \tau)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_i^*)\big)^2}\,\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_i)\big)^2}\,\Delta t_i\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_i^*)\big)^2} - \sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_i)\big)^2}\right| \Delta t_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)\right| \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, каждое слагаемое в правой части (8.14) меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$, поэтому $|\ell - I| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора ε отсюда следует, что $\ell = I$. Теорема доказана. ■

Выражение

$$d\ell = \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt \qquad (8.15)$$

называется дифференциалом дуги. С учетом этого обозначения, формула (8.5) длины дуги кривой может быть записана в виде

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} d\ell\,. \qquad (8.16)$$

Следствие 8.1. *Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ функции f, то кривая L спрямляема и длина ее дуги ℓ может быть найдена по формуле*

$$\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \big(f'\,(x)\big)^2}\,dx\,. \qquad (8.17)$$

Действительно, как уже отмечалось, график функции можно рассматривать как кривую, определяемую параметрическими уравнениями

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b]\,.$$

Нетрудно проверить, что при таком задании кривой L все условия теоремы 8.1 выполняются.

При задании уравнения кривой в полярных координатах имеет место следующее

Следствие 8.2. *Если неотрицательная функция r непрерывно дифференцируема на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая L, определяемая уравнением*

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]\,,$$

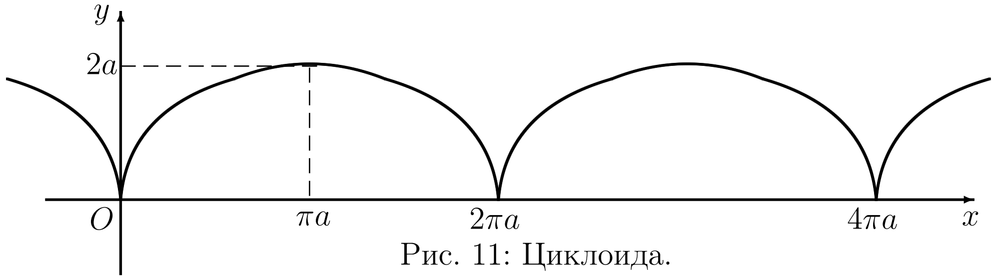

Рис. 11: Циклоида.

заданным в полярной системе координат, спрямляема и

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi\,. \tag{8.18}$$

Доказательство. Перейдём от полярной системы координат к декартовой прямоугольной системе координат. Тогда кривая L будет задаваться уравнениями

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta]\,.$$

Рассматривая переменную φ как параметр, находим

$$\begin{aligned}
\big(x'_\varphi\big)^2 + \big(y'_\varphi\big)^2 =& \big(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\big)^2 + \big(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\big)^2 = \\
=& \big(r'(\varphi)\big)^2\cos^2\varphi - 2r(\varphi)r'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi + \\
+& \big(r'(\varphi)\big)^2\sin^2\varphi + 2r(\varphi)r'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + r^2(\varphi)\cos^2\varphi = \\
=& \big(r'(\varphi)\big)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2(\varphi)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \big(r'(\varphi)\big)^2 + r^2(\varphi).
\end{aligned}$$

Отсюда следует (8.18). ■

Пример 8.1. *Вычислить длину одной арки циклоиды (рис. 11)*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Вычислим $d\ell$. Находим

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,.$$

Так как $\sin\dfrac{t}{2} \geq 0$ при $0 \leq t \leq 2\pi$, то $d\ell = 2a\sin\dfrac{t}{2}\,dt$. Поэтому

$$\ell = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\,\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Пример 8.2. *Найти длину дуги цепной линии $y = a\,ch\dfrac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(a, a\,ch 1)$ (рис. 12).*

Дифференциал дуги находим по формуле (8.17):

$$d\ell = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\,dx.$$

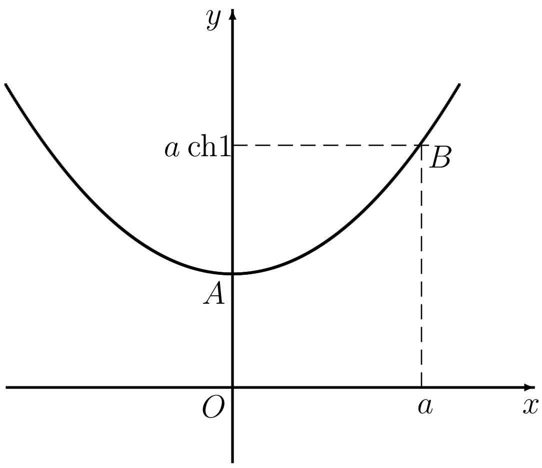

Рис. 12: Цепная линия

Теперь вычисляем длину дуги.

$$\ell = \int_0^a d\ell = \int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^a = a\operatorname{sh}1 = a\,\frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{a\,(e^2-1)}{2e}.$$

Пример 8.3. *Вычислить длину дуги кривой L, определяемой уравнением $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$, $a > 0$, (рис. 13).*

Функция $\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ — периодическая с периодом 4π. Поэтому длина промежутка изменения аргумента φ равна 4π. А поскольку функция $\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ — ещё и чётная, то кривая L симметрична относительно полярной оси и поэтому удобно рассматривать аргумент φ на сегменте $[-2\pi, 2\pi]$. При изменении φ от 0 до 2π функция r возрастает от 0 до a, то же происходит и при изменении φ от 0 до -2π. Поэтому при изменении φ от -2π до 2π получается замкнутая кривая, изображенная на рисунке 13.

Рассматриваемая кривая не является простой, но сегмент $[-2\pi, 2\pi]$ можно разбить на четыре сегмента $[-2\pi, -\pi]$, $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, на каждом из которых кривая L будет простой. Следовательно, длина дуги всей кривой равна сумме длин дуг составляющих её частей, то есть

$$\ell = \int_{-2\pi}^{-\pi} d\ell + \int_{-\pi}^{0} d\ell + \int_{0}^{\pi} d\ell + \int_{\pi}^{2\pi} d\ell = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\ell = 2\int_0^{2\pi} d\ell$$

ввиду чётности. Найдём дифференциал $d\ell$ по формуле (8.18). Так как

$$r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2 = a^2\left(\sin^8\frac{\varphi}{4} + \sin^6\frac{\varphi}{4}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{4}\right) = a^2\sin^6\frac{\varphi}{4},$$

то

$$d\ell = \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi = a\left|\sin^3\frac{\varphi}{4}\right|\,d\varphi = a\sin^3\frac{\varphi}{4}\,d\varphi$$

в силу положительности $\sin^3\dfrac{\varphi}{4}$ на $[0, 2\pi]$.
Поэтому

$$\ell = 2a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}\,d\varphi = -8a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\,d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right) = -8a\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3}a.$$

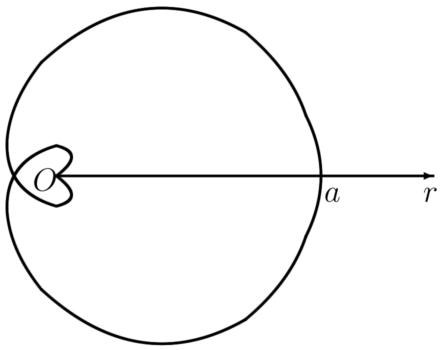

Рис. 13: $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$

Понятие пространственной кривой

Пространственная кривая (кривая в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$) определяется в полной аналогии с плоской кривой.

Пространственной кривой называют множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, координаты которых задаются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\,, \tag{8.19}$$

где функции φ, ψ и χ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Отметим, что вся терминология, введенная для плоских кривых, естественным образом переносится на пространственные кривые. Достаточные условия спрямляемости пространственной кривой формулируются и доказываются подобно случаю плоской кривой.

Теорема 8.2. *Если функции φ, ψ и χ — непрерывно дифференцируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая L, определяемая параметрическими уравнениями (8.19), спрямляема и длина ℓ её дуги может быть вычислена по формуле*

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt\,. \tag{8.20}$$

Пример 8.4. *Вычислить длину дуги части винтовой линии (рис. 14)*

$$x = a\,\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \le t \le t_0.$$

$$\ell = \int\limits_0^{t_0} d\ell = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2\,\sin^2 t + a^2\,\cos^2 t + b^2}\, dt = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, t_0.$$

8.2 Площадь плоской фигуры

Площадь принадлежит к наиболее известным математическим понятиям. Практическое знакомство с площадями сделало это понятие для нас естественным. Из курса элементарной математики известно понятие площади для простых геометрических фигур, например, для многоугольников. Под многоугольником мы подразумеваем часть плоскости (необязательно связную) ограниченную одной или несколькими замкнутыми ломаными.

Определение 8.6. *Плоской фигурой* (*или просто фигурой*) *называется часть плоскости (необязательно связная), ограниченная одной или несколькими замкнутыми кривыми. Эти кривые называют границей фигуры.*

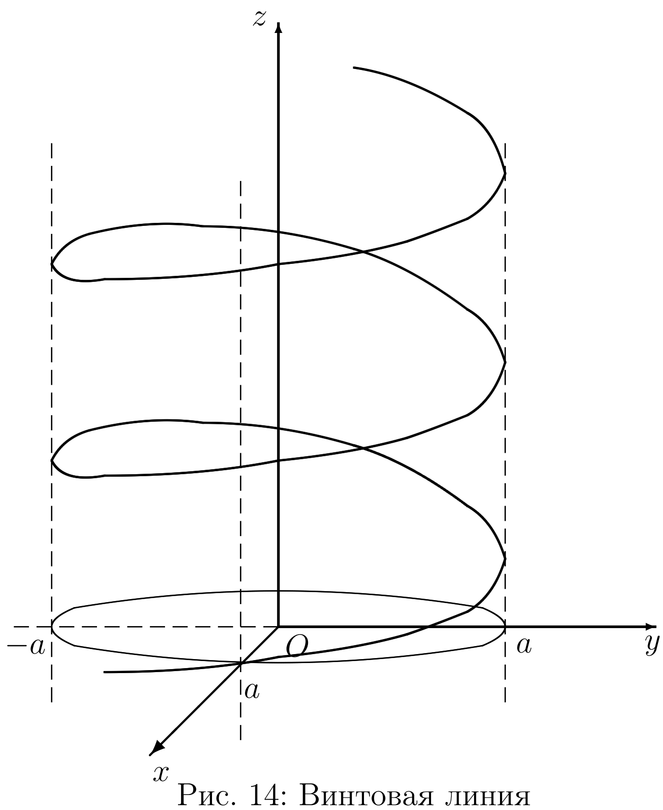

Рис. 14: Винтовая линия

Отметим, что часть точек границы может принадлежать фигуре, а другая — не принадлежать.

А что такое "площадь" фигуры? В элементарной геометрии не дается определения площади фигуры. Точное определение площади представляет значительные логические трудности.

Долгое время в математике господствовала точка зрения, что площадь — первичное понятие, не подлежащее определению. Математики на протяжении многих столетий вычисляли площади различных фигур. Очевидно, что такие вычисления (площадь прямоугольника, треугольника, трапеции, круга и т. д.) должны были опираться на некоторые принципы, свойства площади, заменяющие определение. Перечислим основные из этих свойств.

1. Площадь фигуры неотрицательна.

2. Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур без общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.

3. Равные фигуры имеют равные площади.

4. Площадь единичного квадрата (квадрата со стороной, равной единице) равна единице.

Методы, позволяющие вычислять площади фигур на основании этих свойств, в своих основных чертах были разработаны еще в древности. Сначала было установлено, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту и что для вычисления площади произвольного многоугольника его можно разбить на треугольники без общих внутренних точек и сложить площади этих треугольников.

Понятие площади многоугольника, введенное в курсе элементарной математики, является основным для определения понятия квадрируемости (существования площади) плоской фигуры.

Для вычисления "площади $S(P)$" произвольной фигуры P рассматривались многоугольник Q_B, содержащийся в P, и многоугольник Q_O, содержащий P.

Говорят, что фигура Q_1 *содержится* в фигуре Q_2 (или фигура Q_2 *содержит* фигуру Q_1), если каждая точка фигуры Q_1 принадлежит фигуре Q_2.

В силу монотонности площади справедливо неравенство:

$$S\left(Q_B\right) \leq S\left(P\right) \leq S\left(Q_O\right).$$

Таким образом, площади многоугольников Q_B и Q_O служат приближенными значениями "площади" фигуры P с недостатком и с избытком. Погрешность обоих приближений не превышает разности $S(Q_O)-S(Q_B)$. Но всегда ли можно сделать эту разность сколь угодно малой?

Пусть $\{S_B\}$ — множество площадей многоугольников, содержащихся в плоской фигуре Q, а $\{S_O\}$ — множество площадей многоугольников, содержащих фигуру Q. Ясно, что множество $\{S_B\}$ ограничено сверху (площадью любого многоугольника, содержащего фигуру Q), а множество $\{S_O\}$ ограничено снизу (например, числом ноль). Следовательно, существуют числа

$$\underline{S} = \underline{S}\left\{Q\right\} = \sup\left\{S_B\right\}, \quad \overline{S} = \overline{S}\left\{Q\right\} = \inf\left\{S_O\right\}.$$

Определение 8.7. *Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называются соответственно внутренней и внешней площадями фигуры Q.*

Предложение 8.1. *Для каждой плоской фигуры справедливо неравенство $\underline{S} \leq \overline{S}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольный многоугольник Q_O, содержащий фигуру Q. Так как каждый многоугольник Q_B, содержащийся в фигуре Q, содержится и в многоугольнике Q_O. Поэтому $S(Q_B) \leq S(Q_O)$. Следовательно, число $S(Q_O)$ является верхней гранью множества площадей многоугольников, содержащихся в фигуре Q. Это означает, что точная верхняя грань множества $\{S_B\}$ не превосходит числа $S(Q_O)$, то есть справедлива оценка

$$\underline{S} \leq S(Q_O). \tag{8.21}$$

Но в силу произвольности выбора многоугольника Q_O, содержащего фигуру Q, оценка (8.21) в свою очередь означает, что число $\underline{S}$ является нижней гранью множества площадей многоугольников, содержащих фигуру Q. Поэтому $\underline{S} \leq \inf\left\{S_O\right\} = \overline{S}$, что и требовалось доказать. ■

Определение 8.8. *Плоская фигура Q называется квадрируемой, если внешняя площадь $\overline{S}$ этой фигуры совпадает с её внутренней площадью $\underline{S}$. При этом их общее значение, то есть число $S = \overline{S} = \underline{S}$, называют площадью фигуры Q.*

Теорема 8.3. *Для того чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать многоугольники Q_O, содержащий Q, и Q_B, содержащийся в Q, такие, чтобы выполнялось условие*

$$S_O - S_B < \varepsilon. \tag{8.22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть фигура Q квадрируема, то есть $\overline{S} = \underline{S} = S$. Из определения чисел $\overline{S}$ и $\underline{S}$ как точных граней соответствующих множеств, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такой многоугольник Q_B, содержащийся в фигуре Q, с площадью S_B и многоугольник Q_O, содержащий фигуру Q, с площадью S_O такие, что

$$\underline{S} - S_B < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_O - \overline{S} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $\overline{S} = \underline{S}$, получаем (8.22).

Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, существуют многоугольник Q_B, содержащийся в фигуре Q, с площадью S_B и многоугольник Q_O, содержащий фигуру Q, с площадью S_O такие, что выполняется неравенство (8.22). Из этого неравенства и из неравенств

$$S_B \leq \underline{S}, \quad \overline{S} \leq S_O$$

получаем $0 \leq \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε отсюда следует равенство $\overline{S} = \underline{S}$. По определению 8.8 фигура Q квадрируема. ■

Площадь криволинейной трапеции. Если строгим определением понятия площади заинтересовались только в XVII веке, то проблемой вычисления площадей конкретных фигур математики занимались многие столетия и даже тысячелетия. Вычисления длин дуг кривых, площадей фигур, объемов тел оставались важнейшими математическими проблемами до знаменитых работ Ньютона и Лейбница, заложивших основы математического анализа. Интегральное исчисление дает исключительно простой способ решения таких задач.

Напомним, что криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком функции, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a, b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Зная, что всякая непрерывная на сегменте функция интегрируема на нем, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Криволинейная трапеция P представляет собой квадрируемую фигуру, площадь $S(P)$ которой может быть найдена по формуле*

$$S(P) = \int\limits_a^b f(x)\ dx. \tag{8.23}$$

Доказательство. Так как $f \in C\,[a, b]$, то $f \in R\,[a, b]$. Пусть I обозначает $\int\limits_a^b f(x)\ dx$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ выполняется неравенство

$$S - s < \varepsilon, \tag{8.24}$$

где S и s — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f, отвечающие разбиению T. Но S и s равны соответственно площадям S_O и S_B ступенчатых фигур (многоугольников), первая из которых содержит криволинейную трапецию, а вторая содержится в криволинейной трапеции (рис.15).

По теореме 8.3, ввиду (8.24), криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой. Пусть $S(P)$ обозначает ее площадь. Из неравенств

$$s = S_B \leq S(P) \leq S_O = S, \quad s \leq I \leq S,$$

снова используя (8.24), выводим

$$|S(P) - I| \leq S - s < \varepsilon.$$

А это, в силу произвольности выбора ε, означает, что $S(P) = I$. ■

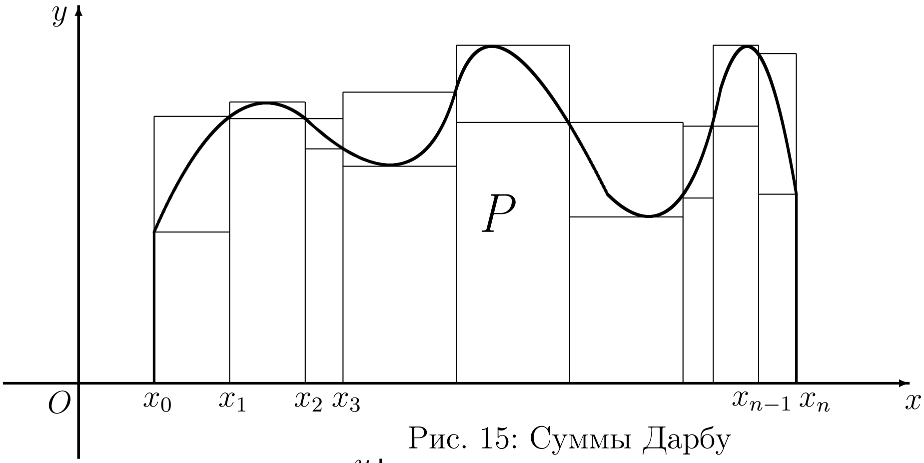

Рис. 15: Суммы Дарбу

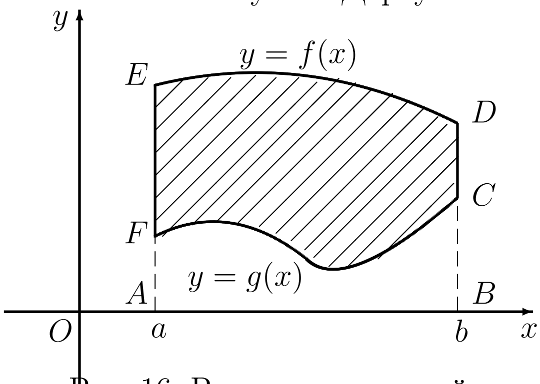

Рис. 16: Разность площадей

Пусть функции $f, g \in C\,[a,b]$, причем $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию более общего вида, то есть фигуру ограниченную сверху графиком функции f, снизу — графиком функции g и отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 16). Ее площадь может быть вычислена как разность площадей криволинейных трапеций $ABDE$ и $ABCF$, то есть

$$S = \int\limits_a^b f(x)\ dx - \int\limits_a^b g(x)\ dx = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ dx. \tag{8.25}$$

Заметим, что расположение графиков функций f и g относительно оси Ox не имеет никакого значения, поскольку фигуру $FCDE$ всегда можно поднять вертикально вверх настолько, чтобы она расположилась над осью Ox, и вычислить ее площадь. Очевидно, что при сдвиге рассматриваемой фигуры ее площадь не меняется и последняя часть формулы (8.25) не претерпевает изменений.

На рисунке 17 изображена фигура, ограниченная слева графиком непрерывной функции $x = \psi(y)$, справа — графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, сверху — отрезком прямой $y = d$, а снизу — отрезком прямой $y = c$. Ввиду равноправия осей Ox и Oy, площадь этой фигуры может быть найдена по формуле

$$S = \int\limits_c^d \big(\varphi\,(y) - \psi\,(y)\big)\,dy. \tag{8.26}$$

Пример 8.5. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

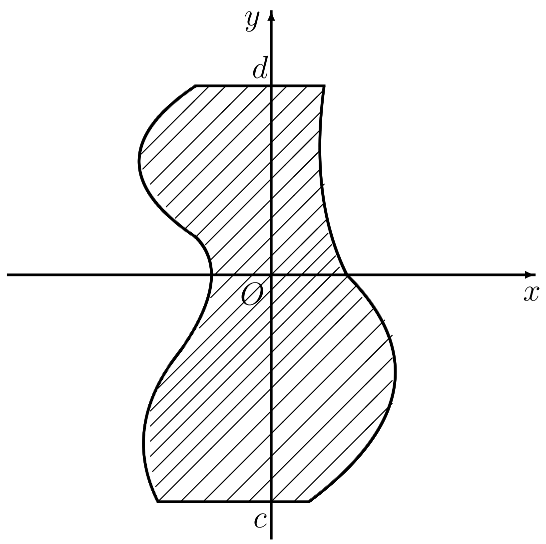

Рис. 17: Площадь фигуры

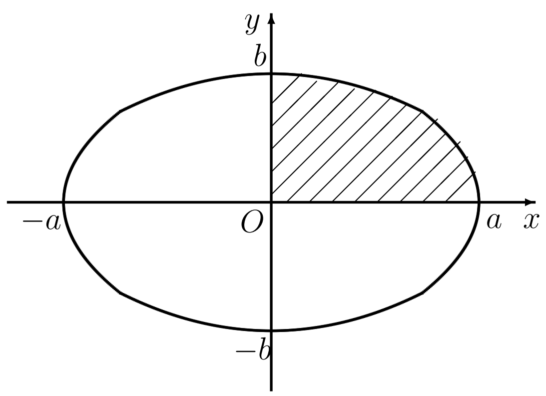

Рис. 18: Эллипс

Так как эллипс симметричен относительно координатных осей, то площадь фигуры будет равна учетверённой площади криволинейной трапеции, выделенной на рисунке 18.

Выражая y из уравнения эллипса, находим

$$S = 4\,\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Делая замену переменной $x = a\sin t$, получаем

$$S = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Замечание. При $a = b = r$ получаем площадь круга $S = \pi r^2$.

Пример 8.6. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной ветвями гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *и прямыми* $y = \pm\ell$ *(рис. 19).*

Ввиду симметрии фигуры относительно координатных осей, искомая площадь равна учетверенной площади части фигуры, расположенной в первом квадранте. Разрешив уравнение гиперболы относительно x, получим $x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$. Применяя формулу (8.26),

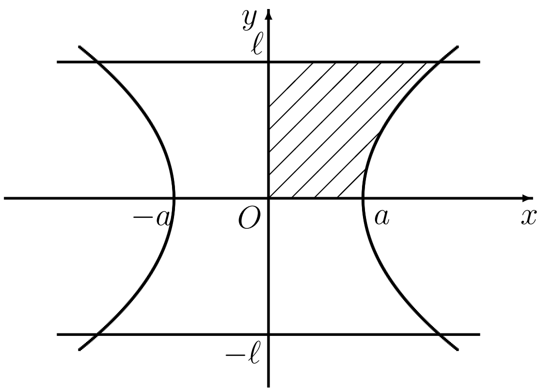

Рис. 19:

имеем

$$S = 4 \cdot \frac{a}{b} \int\limits_0^\ell \sqrt{b^2 + y^2}\, dy. \tag{8.27}$$

Пусть I обозначает $\int\limits_0^\ell \sqrt{b^2+y^2}\,dy$. Домножив и разделив подынтегральную функцию на $\sqrt{b^2+y^2}$, представим интеграл I в следующем виде:

$$I = \int\limits_0^\ell \sqrt{b^2+y^2}\,dy = \int\limits_0^\ell \frac{b^2+y^2}{\sqrt{b^2+y^2}}\,dy = b^2 \int\limits_0^\ell \frac{dy}{\sqrt{b^2+y^2}} + \int\limits_0^\ell y \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2+y^2}}. \tag{8.28}$$

Интеграл $\int\limits_0^\ell \frac{dy}{\sqrt{b^2+y^2}}$ — табличный. Вычислим его.

$$\int\limits_0^\ell \frac{dy}{\sqrt{b^2+y^2}} = \ln\left(y + \sqrt{b^2+y^2}\right)\Big|_0^\ell = \ln\left(\ell + \sqrt{b^2+\ell^2}\right) - \ln b = \ln\frac{\ell+\sqrt{b^2+\ell^2}}{b}. \tag{8.29}$$

К интегралу $\int\limits_0^\ell y \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2+y^2}}$ применим метод интегрирования по частям. Положим $u = y$, $dv = \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2+y^2}}$. Тогда $du = dy$, $v = \sqrt{b^2+y^2}$ и потому

$$\int\limits_0^\ell y \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2+y^2}} = y\sqrt{b^2+y^2}\,\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell \sqrt{b^2+y^2}\,dy = \ell \cdot \sqrt{b^2+\ell^2} - I. \tag{8.30}$$

Из (8.28), (8.29) и (8.30), находим

$$I = \frac{1}{2} \cdot b^2 \left(\ln\left(\ell + \sqrt{b^2+\ell^2}\right) - \ln b\right) + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \sqrt{b^2+\ell^2}.$$

Подставляя найденное значение интеграла I в (8.27), получаем

$$S = 2ab \ln\frac{\ell+\sqrt{b^2+\ell^2}}{b} + \frac{2a\ell}{b}\sqrt{b^2+\ell^2}.$$

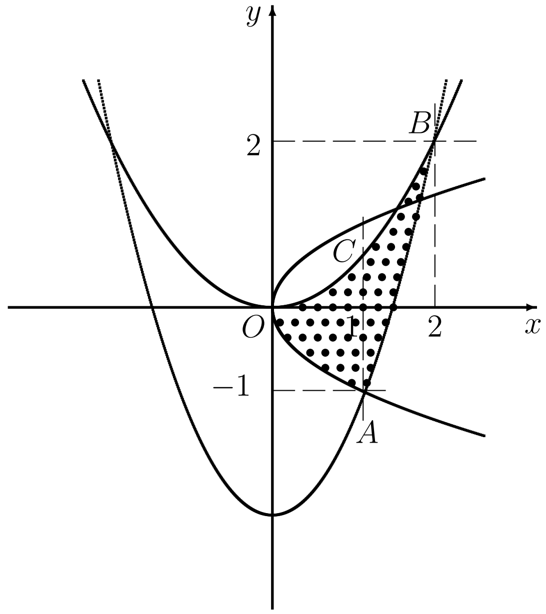

Рис. 20:

Пример 8.7. *Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного правыми ветвями парабол* $y = x^2 - 2$, $2y = x^2$ *и нижней ветвью параболы* $y^2 = x$ *(рис. 20).*

Для вычисления будем использовать формулу (8.23), поэтому сначала определим абсциссы вершин криволинейного треугольника.

Решая три системы уравнений

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}, \tag{8.31}$$

находим

$$x_O = 0, \quad x_A = 1, \quad x_B = 2.$$

Криволинейный треугольник OAB сверху ограничен ветвью параболы $2y = x^2$, а снизу, от точки O до точки A — ветвью параболы $y^2 = x$ и от точки A до точки B — ветвью параболы $y = x^2 - 2$. Разобьем треугольник OAB на две части отрезком AC прямой $x = 1$. Площадь каждого из образовавшихся криволинейных треугольников OAC и ABC может быть вычислена по формуле (8.23). Итак, получаем:

$$S = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \left(-\sqrt{x}\right)\right)\, dx + \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \left(x^2 - 2\right)\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}\right)\, dx + \int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right)\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{8}{6} + 4 + \frac{1}{6} - 2 = \frac{5}{3}\,.$$

Заметим, что для вычисления площади треугольника OAB можно было использовать и формулу (8.26), но все равно этот треугольник пришлось бы разбить на два треугольника осью абсцисс. На рисунке 20 отмечены ординаты точек A и B, необходимые при вычислениях.

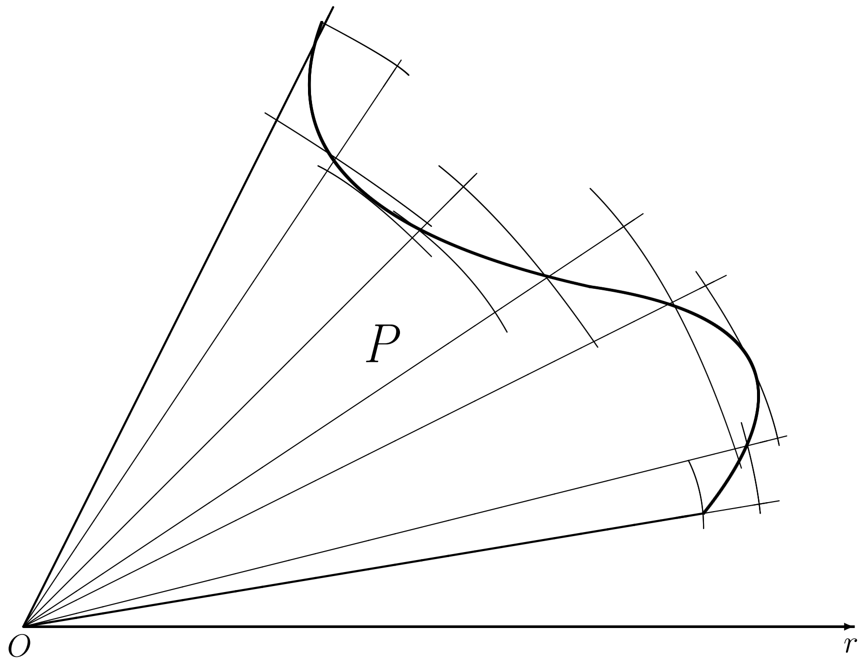

Рис. 21: Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора.

Напомним, что *круговым сектором* называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, проведенными к концам этой дуги.

Пусть φ — радианное измерение этой дуги окружности, а R — радиус окружности. Из школьного курса математики известно, что площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{S_{кр}}{2\pi} \cdot \varphi = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \varphi = \frac{1}{2} R^2 \varphi. \tag{8.32}$$

Опираясь на эти знания, докажем квадрируемость криволинейного сектора.

Определение 8.9. *Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением*

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta], \tag{8.33}$$

где функция $r : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и непрерывна.

Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная кривой L и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (лучами, составляющими с полярной осью углы α и β).

Теорема 8.5. *Криволинейный сектор P представляет собой квадрируемую фигуру, площадь $S(P)$ которой может быть вычислена по формуле*

$$S(P) = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{8.34}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию функция $r \in C[\alpha, \beta]$, следовательно, и функция $r^2 \in C[\alpha, \beta]$, а поэтому $r^2 \in R[\alpha, \beta]$. По критерию интегрируемости (теорема 6.2) найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta$$

с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{8.35}$$

где S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $\dfrac{r^2}{2}$, соответствующие разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$.

По определению сумм Дарбу имеем

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 \Delta\varphi_i, \quad s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i,$$

где

$$R_i = \sup\left\{r(\varphi) : \varphi \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\right\},\ r_i = \inf\left\{r(\varphi) : \varphi \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\right\}.$$

Разобьем криволинейный сектор P на n криволинейных секторов лучами $\varphi = \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Очевидно, что суммы S и s равны площадям веерообразных фигур соответственно содержащей криволинейный сектор и содержащейся в криволинейном секторе и состоящих из круговых секторов (рис. 21). Поскольку круговой сектор является квадрируемой фигурой, найдутся многоугольник $Q_{В}$ содержащийся в веерообразной фигуре, площадь которого $S_{В}$ отличается от s меньше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{4}$, и многоугольник $Q_{О}$, содержащий веерообразную фигуру, площадь которого $S_{О}$ отличается от S меньше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{4}$, то есть

$$s - S_{В} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad S_{О} - S < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{8.36}$$

По построению многоугольник $Q_{В}$ содержится в криволинейном секторе, а многоугольник $Q_{О}$ содержит криволинейный сектор. Но оценки (8.36) и (8.35) влекут оценку

$$S_{О} - S_{В} < \varepsilon. \tag{8.37}$$

Следовательно, по критерию квадрируемости (теорема 8.3) криволинейный сектор P квадрируем. Пусть $S(P)$ — его площадь. Из очевидных неравенств

$$S_{В} \le S(P) \le S_{О}, \quad S_{В} \le s \le \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi \le S \le S_{О}$$

и из оценки (8.37) выводим

$$\left| S(P) - \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности выбора ε, следует равенство (8.34). ■

Пример 8.8. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой* $r = a\,(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ *(рис. 22).*

Так как функция $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ — 2π-периодическая, то длина промежутка изменения аргумента φ равна 2π. А так как эта функция — четная, то её график симметричен

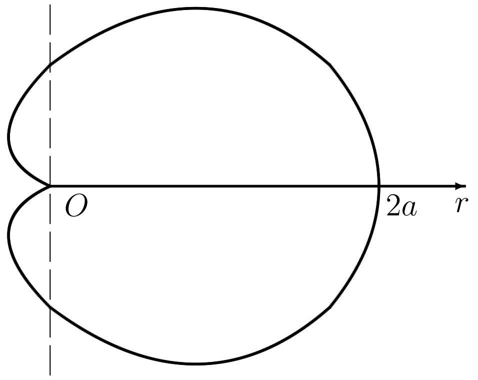

Рис. 22: Кардиоида

относительно полярной оси. Поэтому

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi = 2\cdot\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3\varphi}{2}+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Приведем определения двух важных видов кривых.

Лемнискатой Бернулли называют плоскую алгебраическую кривую 4-го порядка, уравнение которой имеет вид (в декартовых прямоугольных координатах)

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right);$$

(в полярных координатах)

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Розами называют плоские кривые, уравнения которых в полярных координатах имеют вид

$$r = a\sin b\varphi,$$

где a и b — положительные постоянные, $\varphi\in\left[\frac{2k\pi}{b},\frac{(2k+1)\pi}{b}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 8.9. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, двухлепестковой розой $r = 2a\cos 2\varphi$ и содержащую: a) точку $A(a,0)$; b) точку $B(a\sqrt{3},0)$ (рис. 23).*

Сначала выразим r из уравнения лемнискаты. Получим $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Очевидно, что обе функции $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ и $r = 2a\cos 2\varphi$ определены лишь для тех значений φ при которых $\cos 2\varphi\ge 0$. Решая это неравенство, находим

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

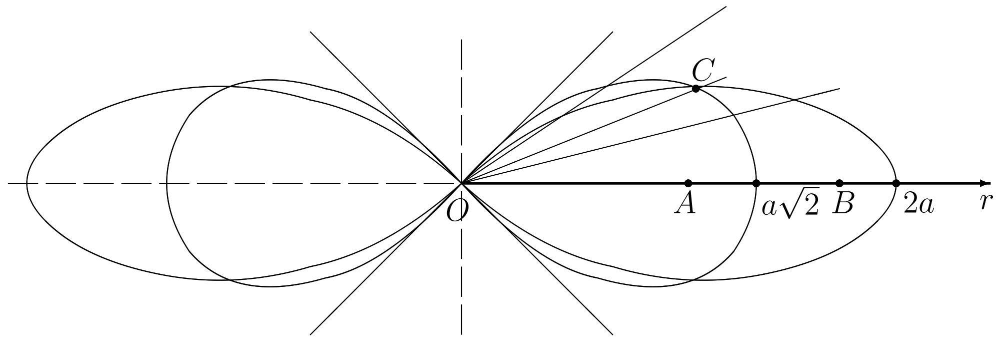

Рис. 23:

Но поскольку обе функции π-периодические, то достаточно рассмотреть два последовательных значения k, например, $k = 0$ и $k = 1$. Тогда аргумент φ меняется в пределах

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Ввиду π-периодичности и чётности обеих функций достаточно построить обе кривые только при изменении аргумента φ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, затем отобразить симметрично полярной оси, а потом продолжить их периодически на сегмент $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

При изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ функция $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ убывает от $a\sqrt{2}$ до 0, и функция $r = 2a\cos 2\varphi$ тоже убывает, но от $2a$ до 0. Выясним, пересекаются ли кривые, определяемые этими уравнениями, когда $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ r = 2a\cos 2\varphi \end{cases}$$

Исключая r, получаем уравнение

$$\cos 2\varphi\,(2\cos 2\varphi - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет (на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$) два решения $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, при этих значениях φ кривые пересекаются. Теперь можем построить обе эти кривые (см. рис. 23). Кривые пересекаются в точках O и C.

Рассмотрим задачу а). Нетрудно видеть, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$ радиус-вектор r меняется от нуля до лемнискаты, а при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{4}$ — от нуля до розы. Поэтому, учитывая симметрию фигуры относительно полярной оси получаем

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2a^2\cos 2\varphi\, d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4a^2\cos^2 2\varphi\, d\varphi\right) = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\varphi\, d\varphi +$$

$$+2a^2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\varphi)\;d\varphi = 2a^2\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{3\sqrt{3}+2\pi}{12}\,a^2\,.$$

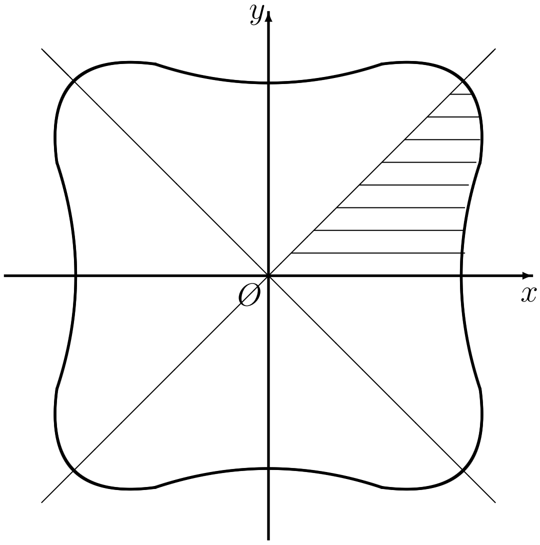

Рис. 24:

Теперь рассмотрим задачу b). Очевидно, что φ изменяется в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{6}$, при этом радиус-вектор меняется от лемнискаты до розы. Поэтому

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4a^2\cos^2 2\varphi - 2a^2\cos 2\varphi\right)\,d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 4\varphi - \cos 2\varphi\right)\,d\varphi =$$
$$= 2a^2\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\,a^2\,.$$

Пример 8.10. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой*

$$x^4 + y^4 = a^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Перейдем к полярной системе координат, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Уравнение кривой после соответствующих преобразований примет вид:

$$r^2 = \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\varphi}\,.$$

Так как фигура имеет четыре оси симметрии, достаточно вычислить площадь заштрихованной части фигуры (см. рис. 24) и умножить ее на восемь.

Итак, $S = 8a^2\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{2-\sin^2 2\varphi}$. Сделаем в этом интеграле замену переменной $t = \operatorname{tg} 2\varphi$. Тогда

$$S = 4a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2} = 2a^2\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\,\Bigg|_0^{+\infty} = \pi a^2\sqrt{2}\,.$$

8.3 Задачи

1. При каком $\delta > 0$ из неравенства $\max\{\Delta x_k : \; k = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$ следует оценка

$$\left| \int\limits_0^{\pi} \sin x dx - \sum_{k=1}^{n} \sin \xi_k \Delta x_k \right| < 0.001?$$

2. С помощью определённых интегралов доказать равенства

$$a) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2;$$

$$b) \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. С помощью определённых интегралов найти пределы следующих числовых последовательностей:

$$a) \quad s_n = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$$

$$b) \quad s_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right);$$

$$c) \quad s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2};$$

$$d) \quad s_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \text{ (найдите } \lim_{n\to\infty} \ln s_n);$$

$$e) \quad s_n = \frac{3^3}{n^4} + \frac{7^3}{n^4} + \ldots + \frac{(4n-1)^3}{n^4};$$

$$f) \quad s_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}};$$

$$g) \quad s_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}};$$

$$h) \quad s_n = \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

4. Применяя теорему о среднем значении, оценить интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{10} \sqrt[3]{1 + x^7} dx.$$

5. Исходя из определения интеграла, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x dx.$

6. Пусть узлы $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 4$ образуют геометрическую прогрессию. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ как предел интегральных сумм, выбирая в качестве ξ_i

   а) левые концы частичных сегментов;

   б) правые концы частичных сегментов;

   в) середины частичных сегментов.

7. Пусть $0 \le a < b < +\infty$. Опираясь на определение определенного интеграла, доказать, что если f — чётная интегрируемая на сегменте $[a;b]$ функция, то f интегрируема и на $[-b;-a]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

8. Пусть $0 \le a < b < +\infty$. Опираясь на определение определенного интеграла, доказать, что если f — нечётная интегрируемая на сегменте $[a;b]$ функция, то f интегрируема и на $[-b;-a]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

9. Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a;b]$ и $\alpha \in (a;b)$. Доказать, что функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \ge \alpha, \\ 0, & \text{если } x < \alpha \end{cases}$$

   интегрируема на сегменте $[a;b]$.

10. В интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ сделаем замену $x = \sin t$. Можно ли в качестве пределов изменения t взять числа π и $\dfrac{\pi}{2}$?

11. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5 - 2\cos x}$ сделать замену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$?

12. Найти производную функции:

$$a)\ F(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \ (x > 0); \quad b)\ F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt \ (x > 0).$$

13. Найти производную $y_x^{'}$ функции y, заданной параметрически:

$$x = \int\limits_1^{t^3} \sqrt[3]{\tau}\ln\tau d\tau,\ y = \int\limits_{\sqrt{t}}^3 \tau^2\ln\tau d\tau,\ t > 0.$$

14. Найти стационарные точки функции:

$$a)\ F(x) = \int\limits_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt,\ x \in \mathbb{R}; \qquad b)\ F(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

15. Не вычисляя интеграла, найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int\limits_0^{x} (t-1)(t-2)^2 dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

16. Найти пределы:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}; \quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}; \quad c)\ \lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\, dt};$$

$$d)\ \lim_{x\to\pm 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3}; \quad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2} dt}.$$

17. Не вычисляя интеграла, доказать, что функция F, заданная на $(1;+\infty)$ интегралом $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$, обладает свойствами:

$$F(x_1 \cdot x_2) = F(x_1) + F(x_2), \qquad F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = F(x_1) - F(x_2).$$

18. Доказать, что площади $S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,$ ограниченные осью Ox и полуволнами кривой $y = e^{-\alpha x}\sin\beta x$ $(x > 0)$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{-\alpha\pi/\beta}$.

19. Доказать, что если функция f непрерывна на сегменте $[a;b]$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ для всякого сегмента $[\alpha;\beta]$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$, то $f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a;b]$.

20. Доказать, исходя из геометрических соображений, что если неотрицательная функция f возрастает и выпукла на сегменте $[a;b]$, то

$$(b-a)f(a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

21. Доказать, что в равенстве $\int\limits_a^b e^{2x}dx = e^{2\xi}(b-a)$ число $\xi > \dfrac{a+b}{2}$.

22. Исходя из геометрических соображений, доказать, что $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$.

23. Пусть f'' непрерывна на сегменте $[a;b]$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b xf''(x)dx = \Big(bf'(b) - f(b)\Big) - \Big(af'(a) - f(a)\Big).$$

24. Не вычисляя интегралы $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx$ и $\int\limits_0^1 x^3 dx$, установить, какой из них больше.

25. Доказать равенства:

$$a)\ \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx,$$

если f непрерывна на сегменте $[0;1]$;

$$b)\ \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx,$$

если f непрерывна на сегменте $[a;b]$;

$$c)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m dx \qquad (m > 0).$$

26. Пусть функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a;b]$ и существует такая точка $x_0 \in [a;b]$, для которой $f(x_0) < g(x_0)$. Доказать, что если обе функции f и g непрерывны в точке x_0, то $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b g(x)dx$.

27. Будет ли функция интегрируемой на отрезке, если на этом отрезке интегрируема её абсолютная величина?

28. Если функция f интегрируема на некотором отрезке и не обращается на нём в нуль, то будет ли функция $\dfrac{1}{f}$ интегрируемой на этом отрезке?

29. Доказать, что если функция f убывает на отрезке $[0;1]$, то для любого $\theta \in (0;1)$ выполняется неравенство $\theta\int\limits_0^1 f(x)dx \le \int\limits_0^{\theta} f(x)dx$.

30. Пусть функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ имеет на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную второго порядка. Известно, что касательная к графику функции f в точке с абсциссой $x = a$ составляет угол $\dfrac{\pi}{3}$, а в точке с абсциссой $x = b$ составляет угол $\dfrac{\pi}{4}$. Вычислить $\int\limits_a^b f''(x)dx$.

31. Доказать, что если интегрируемая на отрезке $[a; b]$ функция f в точках, симметричных относительно точки $\xi = \dfrac{a+b}{2}$, принимает равные значения, то
$$\int\limits_a^b f(x)dx = 2\int\limits_a^\xi f(x)dx.$$

32. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то
$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)dx.$$

33. Доказать, что для непрерывной при $x \geq 0$ функции f справедливо равенство
$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)dx, \ a > 0.$$

34. Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Доказать, что функция $F(y) = \int\limits_y^{+\infty} f(xy)dx$ непрерывна на $(0; +\infty)$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0$.

9 Метрические пространства

Основной операцией анализа является операция предельного перехода. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние между любыми двумя точками. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, на котором введено расстояние между его элементами, мы приходим к понятию *метрического пространства.*

9.1 Определение и примеры

Пусть X — множество элементов любой природы.

Определение 9.1. *Метрическим пространством называют пару* (X, ρ)*, состоящую из множества* X *и неотрицательной функции* $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < +\infty\}$*, удовлетворяющей следующим условиям* (*называемым аксиомами метрического пространства*) :

1) $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ (*аксиома тождества*);

2) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ *для любых* $x, y \in X$ (*аксиома симметрии*);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *для любых* $x, y, z \in X$ (*аксиома* (*или неравенство*) *треугольника*).

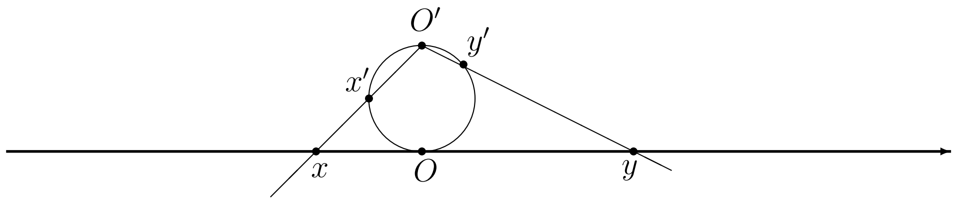

Рис. 25: $\dot{\mathbb{R}}$

Элементы множества X называют *элементами* или *точками метрического пространства* (X, ρ), функцию ρ — *метрикой*, число $\rho\,(x, y)$ — *расстоянием* между точками x и y.

В случаях, когда недоразумения исключены, мы будем обозначать метрическое пространство (X, ρ) тем же символом, что и множество его элементов, просто X.

Лемма 9.1. *В метрическом пространстве* (X, ρ) *для любых* $x, y, z \in X$ *справедливо неравенство*

$$|\rho(x, z) - \rho(z, y)| \le \rho(x, y). \tag{9.1}$$

Доказательство. Применяя аксиомы метрики, получаем

$$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, y) + \rho(z, y).$$

Отсюда выводим

$$\rho(x, z) - \rho(z, y) \le \rho(x, y). \tag{9.2}$$

Аналогично выводим

$$\rho(z, y) - \rho(x, z) \le \rho(x, y). \tag{9.3}$$

Объединяя (9.2) и (9.3), получаем (9.1). ■

Примеры метрических пространств.

1) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho\,(x, y) = |x - y|$ является метрическим пространством.

2) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с метрикой

$$\rho_{\mathrm{arctg}}(x, y) = |\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y|$$

также является метрическим пространством. Будем обозначать это пространство символом $\mathbb{R}_{\mathrm{arctg}}$.

3) Метрическим пространством является и множество $\overline{\mathbb{R}}$ (множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, пополненное символами $-\infty$ и $+\infty$), если метрику ρ определить по правилу

$$\rho\,(x, y) = |\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y|\,,$$

полагая $\mathrm{arctg}\,(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \mathrm{arctg}\,(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Это пространство будем обозначать символом $\overline{\mathbb{R}}_{\mathrm{arctg}}$.

4) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, пополненное символом ∞ (множество $\dot{\mathbb{R}}$) становится метрическим пространством, если расстояние $\rho\,(x, y)$ между точками x и y положить равным длине меньшей дуги $x'y'$ (см. рис. 25). (На рисунке 25 радиус окружности может быть любым положительным.)

5) Интервал (a, b) является метрическим пространством с метрикой $\rho\,(x, y) = |x - y|$.

6) Множество Q рациональных чисел становится метрическим пространством, если метрику задать формулой $\rho\,(x, y) = |x - y|$.

В приведенных примерах проверка выполнения аксиом метрического пространства не представляет труда.

7) Множество $\mathbb{R}^n$ упорядоченных групп из n действительных чисел

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

называется *n-мерным координатным пространством*. $\mathbb{R}^n$ станет метрическим пространством, если определить расстояние $\rho(x, y)$ от элемента $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ до элемента $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\eta_k - \xi_k)^2}\,. \tag{9.4}$$

Справедливость аксиом тождества и симметрии очевидна. Прежде чем установить выполнение аксиомы треугольника, докажем неравенства Коши-Буняковского и Минковского.

Предложение 9.1. *Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{9.5}$$

называемое неравенством Коши-Буняковского для сумм.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, заданную равенством

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Очевидно, что эта функция неотрицательна. Преобразуем формулу, определяющую функцию φ, раскрыв скобки и собрав члены с одинаковыми степенями t:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) t + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Из полученного выражения видно, что функция φ является квадратным трёхчленом. А поскольку функция φ неотрицательна, дискриминант D этого трёхчлена неположителен, то есть

$$D = 4\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\right) \le 0.$$

Отсюда легко получаем неравенство (9.5). ■

Предложение 9.2. *Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\,, \tag{9.6}$$

называемое неравенством Минковского.

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Буняковского, выводим

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получим неравенство (9.6). ■

Докажем теперь выполнение аксиомы треугольника. Пусть x, y и z — произвольные элементы пространства $\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)$. Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\rho(x,z)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\xi_k)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\big((\eta_k-\xi_k)+(\zeta_k-\eta_k)\big)^2}\le$$
$$\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\eta_k-\xi_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\eta_k-\zeta_k)^2}=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Множество $\mathbb{R}^n$ с метрикой (9.4) в дальнейшем будем называть n-мерным евклидовым пространством и обозначать тем же символом $\mathbb{R}^n$.

Введём на множестве $\mathbb{R}^n$ ещё две метрики:

$$\rho_1(x,y)=\max\{|\xi_k-\eta_k|:k=1,2,\dots,n\},$$
$$\rho_2(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|.$$

Проверка аксиом 1 и 2 в обоих случаях тривиальна. Докажем выполнение аксиомы 3. Зафиксируем любой номер $k=1,2,\dots,n$. Из известного арифметического неравенства — *модуль суммы не превосходит суммы модулей* — следует, что

$$|\xi_k-\zeta_k|\le|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|.$$

На основании этого неравенства получаем:

$$|\xi_k-\zeta_k|\le\max\{|\xi_i-\eta_i|:i=1,2,\dots,n\}+$$
$$+\max\{|\eta_i-\zeta_i|:i=1,2,\dots,n\}=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).$$

Так как эта оценка справедлива при любом $k=1,2,\dots,n$, то справедлива и оценка

$$\rho_1(x,z)=\max\{|\xi_k-\zeta_k|:k=1,2,\dots,n\}\le\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).$$

Следовательно, ρ_1 действительно является метрикой.

Теперь выведем неравенство треугольника для метрики ρ_2.

$$\rho_2(x,z)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\zeta_k|\le\sum_{k=1}^{n}\big(|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|\big)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|+\sum_{k=1}^{n}|\eta_k-\zeta_k|=\rho_2(x,y)+\rho_2(y,z).$$

Метрические пространства $(\mathbb{R}^n,\rho_1)$, $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$ будем обозначать соответственно символами $\mathbb{R}^n_1$ и $\mathbb{R}^n_2$.

Замечание 9.1. *Метрику ρ, введённую в примере 7 с помощью формулы 9.4, иногда, в частности при совместном использовании наряду с остальными метриками на $\mathbb{R}^n$, будем обозначать символом ρ_0.*

8) Множество $C\,[a,b]$ непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций становится метрическим пространством, если метрику определить по правилу

$$\rho\,(x,y)=\max\left\{|x(t)-y(t)|:t\in[a,b]\right\}.$$

Справедливость аксиом 1 и 2 очевидна. Докажем выполнение аксиомы 3.

Пусть $x,y,z\in C\,[a,b]$. Тогда

$$|x(t)-y(t)|=|(x(t)-z(t))+(z(t)-y(t))|\leq|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\,,\quad t\in[a,b]\,. \tag{9.7}$$

Отсюда, фиксируя любое $t\in[a,b]$, получаем

$$\begin{aligned}|x(t)-z(t)|\leq&\max\left\{|x(\tau)-y(\tau)|:\tau\in[a,b]\right\}+\\&+\max\left\{|y(\tau)-z(\tau)|:\tau\in[a,b]\right\}=\rho\,(x,y)+\rho\,(y,z)\,.\end{aligned}$$

Ввиду произвольности выбора t, эта оценка влечет неравенство треугольника.

Так как всякая непрерывная на сегменте функция интегрируема на нем, на $C\,[a,b]$ можно определить метрику по правилу

$$\rho_1\,(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\;dt.$$

Проверка выполнения аксиом метрического пространства не составляет труда, если воспользоваться свойствами определенного интеграла.

9) Множество $\mathbb{C}=\{z=x+iy:x,y\in\mathbb{R}\}$ всех комплексных чисел является метрическим пространством с метрикой ρ, заданной формулой

$$\rho\,(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Здесь $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$.

Определим отображение $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, полагая $f(z)=f(x+iy)=(x,y)$. Очевидно, что отображение f биективно. Из определения метрик в пространствах $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ следует, что

$$\rho\,(z_1,z_2)=\rho\,((x_1,y_1),(x_2,y_2))\,, \tag{9.8}$$

где $\rho\,(z_1,z_2)$ — расстояние между точками z_1 и z_2 в пространстве $\mathbb{C}$, а $\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)$ — расстояние между точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2) в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Определение 9.2. *Биективное отображение f метрического пространства (X,ρ) на метрическое пространство $\left(\widetilde{X},\widetilde{\rho}\right)$ называется изометрическим, если*

$$\rho\,(x_1,x_2)=\widetilde{\rho}\big(f(x_1),f(x_2)\big)$$

для любых $x_1,x_2\in X$. А пространства (X,ρ) и $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$, между которыми можно установить изометрическое соответствие, называются изометричными.

Ввиду (9.8), пространства $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ с метрикой ρ_0 — изометричны.

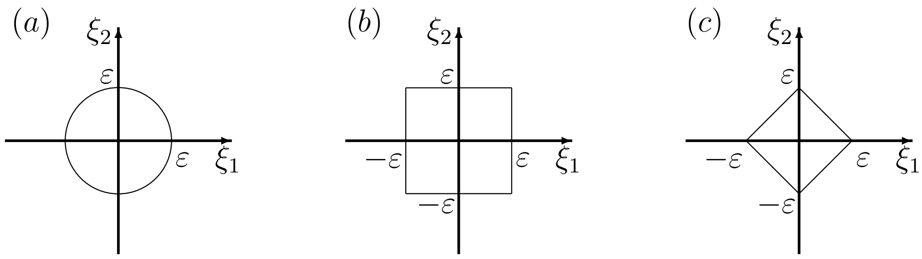

Рис. 26: Окрестности в $\mathbb{R}^2$

9.2 Сходимость в метрических пространствах

Окрестности

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 9.3. *Открытым шаром $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве (X, ρ) называют совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < r$, то есть*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Точка x_0 называется центром, а число $r > 0$ — радиусом этого шара.

Определение 9.4. *Замкнутым шаром с центром в точке x_0 и радиуса r в метрическом пространстве (X, ρ) называют множество*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

Определение 9.5. *Окрестностью (ε-окрестностью) точки $x_0 \in X$ называют открытый шар $B(x_0, \varepsilon)$.*

Определение 9.6. *Проколотой ε-окрестностью (проколотой окрестностью) точки x_0 в X называют множество*

$$\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) = B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

Приведем примеры окрестностей в некоторых метрических пространствах.

1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$. На рисунке 26 изображены ε-окрестности нуля: (a) в метрике $\rho_0 = \rho$, (b) в метрике ρ_1, (c) в метрике ρ_2.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любое число $\varepsilon > 0$. Пусть $B_0(x_0, \varepsilon)$, $B_1(x_0, \varepsilon)$, $B_2(x_0, \varepsilon)$ — ε-окрестности точки x_0 соответственно в метриках ρ_0, ρ_1 и ρ_2.

Предложение 9.3. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ для любой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ каждого вида существует окрестность любого другого вида, как содержащаяся в данной, так и содержащая её, то есть*

$$\forall k, l = 0, 1, 2\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : \ B_k(x_0, \varepsilon_1) \subset B_l(x_0, \varepsilon) \subset B_k(x_0, \varepsilon_2). \tag{9.9}$$

Доказательство. Так как все три метрики инвариантны относительно сдвига, то достаточно доказать утверждение для случая, когда центр окрестности x_0 совпадает с началом координат 0, то есть достаточно доказать следующие включения:

$$B_0(0, \varepsilon) \subset B_2\left(0, \varepsilon\sqrt{n}\right), \tag{9.10}$$
$$B_2(0, \varepsilon) \subset B_1(0, \varepsilon), \tag{9.11}$$
$$B_1(0, \varepsilon) \subset B_0\left(0, \varepsilon\sqrt{n}\right). \tag{9.12}$$

Возьмем произвольный элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in B_0\,(0, \varepsilon)$. Тогда

$$\rho_0(0, x) = \rho(0, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2} < \varepsilon.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, выводим

$$\rho_2(0, x) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot 1 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} < \varepsilon\sqrt{n}.$$

Следовательно, $x \in B_2\,(0, \varepsilon\sqrt{n})$, то есть (9.10) выполняется.

Теперь возьмем произвольный элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in B_2\,(0, \varepsilon)$. Так как

$$\rho_2(0, x) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| < \varepsilon,$$

то $|\xi_i| < \varepsilon$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому и

$$\rho_1(0, x) = \max\{|\xi_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} < \varepsilon.$$

Следовательно, $x \in B_1\,(0, \varepsilon)$. Таким образом, включение (9.11) доказано.

Пусть теперь $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ есть элемент шара $B_1\,(0, \varepsilon)$. Из условия

$$\rho_1(0, x) = \max\{|\xi_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} < \varepsilon$$

следует, что $|\xi_i| < \varepsilon$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Благодаря этой оценке, получаем

$$\rho_0(0, x) = \rho(0, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{\varepsilon^2 n} = \varepsilon\sqrt{n}.$$

Следовательно, $x \in B_0\,(0, \varepsilon\sqrt{n})$. Этим доказано включение (9.12).

Из (9.10) – (9.12) легко получаем цепочку (9.9). ∎

2. В пространстве $C[a, b]$ ε-окрестностью точки $x_0 \in C[a, b]$ является шар

$$B(x_0, \varepsilon) = \left\{x \in C[a, b] : \max_{a \le t \le b} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon\right\},$$

то есть множество непрерывных функций $x = x(t)$, графики которых лежат в "коридоре" между графиками $x_0(t) - \varepsilon$ и $x_0(t) + \varepsilon$ (см. рис. 27).

Предел последовательности

Так же, как и для числовых множеств, важную роль в метрических пространствах играют последовательности их элементов.

Определение 9.7. *Последовательностью в метрическом пространстве X называется всякая функция $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, то есть всякая функция натурального аргумента со значениями в X.*

Полагая $f(k) = x_k$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность будем записывать в виде $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, или просто (x_k).

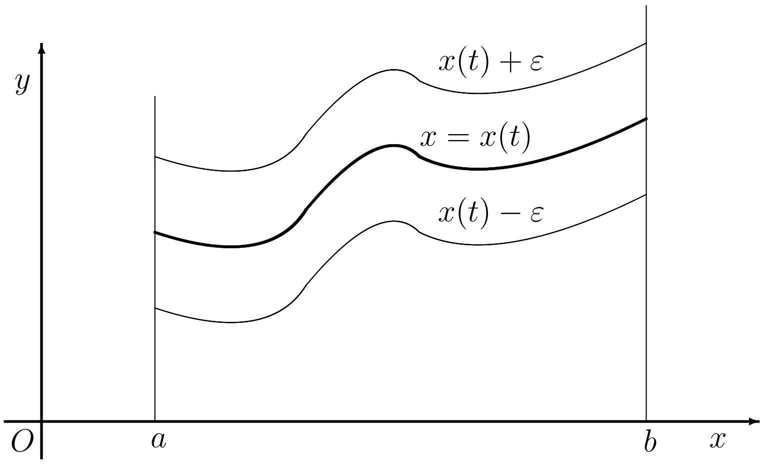

Рис. 27: ε-окрестность в $C\,[a,b]$

Определение 9.8. *Пусть (x_k) — последовательность точек в метрическом пространстве X. Говорят, что она сходится к точке $x \in X$, если $\rho(x_k, x) \to 0$ при $k \to \infty$, то есть если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер m такой, что при $k \geq m$ выполняется неравенство $\rho(x_k, x) < \varepsilon$.*

Точку x называют пределом последовательности (x_k) и пишут

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x$$

или

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x.$$

Сходимость последовательности (x_k) к x означает, что каждая ε-окрестность $B(x,\varepsilon)$ точки x содержит все точки x_k, начиная с некоторого номера m.

Непосредственно из определения вытекают следующие утверждения.

Предложение 9.4. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Предложение 9.5. *Если последовательность сходится к x, то и любая ее подпоследовательность сходится к x.*

Доказательства этих двух предложений дословно повторяют доказательства аналогичных утверждений для числовых последовательностей.

Ввиду предложения 9.3 справедливо следующее

Предложение 9.6. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательности (x_k) к элементу x по одной из трех метрик влечет сходимость этой последовательности к x по остальным двум.*

Определение 9.9. *Пусть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть $x_k = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность (x_k) сходится к $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ покоординатно, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ числовая последовательность $\left(\xi_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к ξ_i.*

Теорема 9.1. (**Критерий сходимости последовательности в пространстве** $\mathbb{R}^n$) *Пусть* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, *— последовательность элементов пространства* $\mathbb{R}^n$. *Для того чтобы последовательность* (x_k) *сходилась к* $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы она сходилась к* x *покоординатно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность (x_k) сходится к элементу $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Возьмем произвольное положительное число ε. По определению предела (и предложению 9.6) найдется номер m такой, что

$$\rho_1(x_k, x) = \max\left\{\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| : i = 1, 2, \ldots, n\right\} < \varepsilon, \quad k \geq m.$$

Отсюда следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| < \varepsilon, \quad k \geq m.$$

Последнее означает, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ числовая последовательность $\left(\xi_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к ξ_i.

Достаточность. Пусть последовательность (x_k) сходится к $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ покоординатно. Докажем, что она сходится к x (по метрике).

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению предела числовой последовательности для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ найдется номер m_i такой, что

$$\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| < \varepsilon, \quad k \geq m_i.$$

Следовательно, при всех $k \geq m = \max\{m_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ справедлива оценка

$$\rho_1(x_k, x) = \max\left\{\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| : i = 1, 2, \ldots, n\right\} < \varepsilon.$$

По определению 9.8 последовательность (x_k) сходится к x. ■

Поскольку пространства $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ изометричны между собой, справедливо следующее утверждение.

Следствие 9.1. (*Критерий сходимости последовательности комплексных чисел*) *Пусть* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *где* $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{N}$, *— последовательность элементов пространства* $\mathbb{C}$. *Последовательность* (z_k) *сходится к* $c = a + ib$ *тогда и только тогда, когда* (x_k) *сходится к* a, (y_k) *сходится к* b.

Ограниченные множества

Определение 9.10. *Пусть* X *— метрическое пространство. Множество* $M \subset X$ *называется ограниченным , если в пространстве* X *найдется замкнутый шар* $\overline{B}(a, r)$ *такой, что* $M \subset \overline{B}(a, r)$.

Лемма 9.2. *Если множество* M *ограничено в пространстве* X, *то для любой точки* $b \in X$ *найдется число* r_b *такое, что* $M \subset \overline{B}(b, r_b)$.

Доказательство. Так как множество M ограничено, найдется замкнутый шар $\overline{B}(a, r)$ такой, что $M \subset \overline{B}(a, r)$.

Возьмём произвольную точку $b \in X$ и положим $r_b = r + \rho(a, b)$. Тогда для любого элемента $x \in M$ справедлива оценка

$$\rho(x, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) \leq r + \rho(a, b) = r_b.$$

Это и означает, что $M \subset \overline{B}(b, r_b)$. ■

Определение 9.11. *Последовательность элементов метрического пространства X называется ограниченной, если в X найдется замкнутый шар, содержащий все элементы этой последовательности.*

Теорема 9.2. *Сходящаяся последовательность элементов метрического пространства ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_k) элементов пространства (X, ρ) сходится к x. Тогда найдется номер m такой, что $\rho(x_k, x) < 1$ при всех $k \geq m$. Нетрудно убедиться в том, что при

$$r = \max\{\rho(x_1, x), \rho(x_2, x), \ldots, \rho(x_{m-1}, x), 1\}$$

шар $\overline{B}(x, r)$ содержит в себе все точки x_k. ■

Теорема 9.3. (**Больцано-Вейерштрасса**) *Из любой ограниченной последовательности элементов пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Для простоты изложения ограничимся случаем $n = 2$. Пусть последовательность $x_k = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}\right)$ ограничена. По определению ограниченности существует такой замкнутый шар

$$\overline{B}_1(0, r) = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \rho_1(x, 0) \leq r\right\},$$

что $x_k \in \overline{B}_1(0, r)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то есть найдется число r такое, что

$$\rho_1(x_k, 0) = \max\left\{\left|\xi_1^{(k)}\right|, \left|\xi_2^{(k)}\right|\right\} \leq r, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует ограниченность числовых последовательностей $\left(\xi_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\left(\xi_2^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Но тогда, по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей, из последовательности $\left(\xi_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(\xi_1^{(k_l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$.

Теперь рассмотрим последовательность $\left(\xi_2^{(k_l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Она ограничена, поскольку является подпоследовательностью ограниченной последовательности $\left(\xi_2^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. В силу той же теоремы из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(\xi_2^{(k_{l_m})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$.

Учитывая, что $\left(\xi_1^{(k_{l_m})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\left(\xi_1^{(k_l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, получаем что обе подпоследовательности $\left(\xi_1^{(k_{l_m})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ и $\left(\xi_2^{(k_{l_m})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ сходятся. Но тогда по критерию сходимости в пространстве $\mathbb{R}^n$ подпоследовательность $\left(x_{k_{l_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ последовательности (x_k) тоже сходится. ■

Открытые и замкнутые множества

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, M — множество в X.

Определение 9.12. *Точка $x_0 \in X$ называется точкой прикосновения множества M, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества M, то есть если для любого $\varepsilon > 0$ множество $B(x_0, \varepsilon) \cap M$ не пусто.*

Теорема 9.4. *Для того чтобы точка $x_0 \in X$ была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность точек, сходящаяся к x_0.*

Доказательство. Достаточность этого утверждения очевидна.
Необходимость. По определению точки прикосновения для каждого $k \in \mathbb{N}$ в M найдется точка x_k такая, что $\rho(x_k, x_0) < \dfrac{1}{k}$. Согласно определению 9.8 последовательность (x_k) сходится к x_0. ■

Определение 9.13. *Совокупность всех точек прикосновения множества M называют замыканием множества M (в пространстве X) и обозначают $\overline{M}$.*

Определение 9.14. *Множество M называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.*

Простейшими примерами замкнутых множеств являются пустое множество, всё метрическое пространство X, всякое конечное подмножество пространства X.

Предложение 9.7. *Замкнутый шар — замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть b — точка прикосновения шара $\overline{B}(a,r)$. Докажем, что $b \in \overline{B}(a,r)$.

По теореме 9.4 в $\overline{B}(a,r)$ найдётся последовательность точек (x_k) сходящаяся к b. Оценим расстояние между точками b и a:

$$\rho(b,a) \le \rho(b,x_k) + \rho(x_k,a) \le \rho(b,x_k) + r, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В этом неравенстве перейдём к пределу при $k \to \infty$. Получим $\rho(b,a) \le r$. Это показывает, что точка b принадлежит шару $\overline{B}(a,r)$. По определениям 9.13 и 9.14 шар $\overline{B}(a,r)$ замкнут. ■

Определение 9.15. *Точка $x_0 \in M$ называется внутренней точкой множества M, если найдется окрестность этой точки, содержащаяся во множестве M.*

Совокупность всех внутренних точек множества M обычно обозначают $\mathrm{int}M$.

Определение 9.16. *Множество M называется открытым, если все его точки внутренние.*

Предложение 9.8. *Множество M открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus M$ замкнуто.*

Доказательство этого утверждения такое же как и в случае, когда $X = \mathbb{R}$.

Примерами открытых множеств являются пустое множество, всё метрическое пространство.

Предложение 9.9. *Открытый шар — открытое множество.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in B(a,r)$ и докажем, что она является внутренней точкой шара $B(a,r)$.

Поскольку расстояние между точками x и a меньше r, число $\varepsilon = r - \rho(x,a)$ положительное. Покажем, что ε-окрестность $B(x,\varepsilon)$ точки x лежит в шаре $B(a,r)$.

Действительно, для любой точки $y \in B(x,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\rho(y,a) \le \rho(y,x) + \rho(x,a) < \varepsilon + \rho(x,a) = r.$$

Следовательно, $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$. По определению 9.15 точка x есть внутренняя точка шара $B(a,r)$, а по определению 9.16 шар $B(a,r)$ открыт. ■

Определение 9.17. *Точка $x_0 \in X$ называется предельной точкой множества M, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x_0, то есть если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap M$ не пусто.*

Предложение 9.10. *Для того чтобы точка $x_0 \in X$ была предельной точкой множества M, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x_0.*

Достаточность этого утверждения очевидна, а необходимость доказывается точно так же, как для числовых множеств.

Множество предельных точек множества M принято обозначать символом M'.

Определение 9.18. *Точка $x_0 \in M$ называется изолированной точкой множества M, если найдется окрестность этой точки, в которой нет точек множества M, отличных от x_0.*

Определение 9.19. *Пусть M — множество в метрическом пространстве X. Границей множества M называется множество ∂M всех точек пространства X, обладающих следующим свойством: любая окрестность каждой из них содержит как точки из M, так и точки из его дополнения CM.*

Кроме обозначения ∂M имеются и другие общепринятые обозначения границы множества M, например, "гр M" , "$Fr\ M$" , "$Fr_X\ M$".

Пример 9.1. *Для множества M в пространстве X найти множество его предельных точек M', замыкание $\overline{M}$, множество внутренних точек $\mathrm{int}M$ и границу ∂M, если*

1. $M = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$, $X = \mathbb{R}$;
2. $M = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $X = \mathbb{R}$;
3. $M = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $X = \mathbb{R}$;
4. $M = \{x \in Q : a \le x \le b\}$, $X = \mathbb{R}$;
5. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y = 0\}$, $X = \mathbb{R}^2$;
6. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 + D(x)\}$, $X = \mathbb{R}^2$,

где D — функция Дирихле.

1. Нетрудно проверить, что $M' = [a, b] = M$, $\overline{M} = [a, b] = M$, $\mathrm{int}M = (a, b)$, $\partial M = \{a, b\}$.
2. $M' = [a, b]$, $\overline{M} = [a, b]$, $\mathrm{int}M = (a, b) = M$, $\partial M = \{a, b\}$.
3. $M' = [a, b]$, $\overline{M} = [a, b]$, $\mathrm{int}M = (a, b)$, $\partial M = \{a, b\}$.
4. Поскольку в любой окрестности каждой точки $x \in [a, b]$ содержатся как рациональные так и иррациональные точки, то $M' = [a, b]$, $\overline{M} = [a, b]$, $\mathrm{int}M = \varnothing$, $\partial M = [a, b]$;
5. Так как в этом примере окрестностью точки является круг, а множество M — отрезок, то в любой ε-окрестности каждой точки $(x, 0) \in M$ содержатся как точки принадлежащие множеству M, но отличные от $(x, 0)$, так и точки, не принадлежащие M, то есть точки, принадлежащие CM (например, точка $(x, \varepsilon/2)$). Поэтому $M' = M$, $\overline{M} = M$, $\mathrm{int}M = \varnothing$, $\partial M = M$.
6. Проверка того, что

$$M' = \overline{M} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\big\}$$

не составляет большого труда.

Рассмотрим шесть попарно непересекающихся множеств

$$
\begin{aligned}
&M_1 = \left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<1\right\}, \quad M_2 = \left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\right\},\\
&M_3 = \left\{(1,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<1\right\}, \quad M_4 = \left\{(x,1)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\right\},\\
&M_5 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ 0<y<1\right\},\\
&M_6 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 1<y\le 2\right\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что каждая точка $M_5 \subset \mathrm{Int}M$, а $M_1\cup M_2\cup M_3 \subset \partial M$. И поскольку в каждой ε-окрестности любой точки $(x,y)\in M_4\cup M_6$ содержатся как точки принадлежащие множеству M, так и точки не принадлежащие M, то $M_4\cup M_6\subset \partial M$. Таким образом, получаем $\mathrm{Int}M = M_5$, $\partial M = M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_6$.

Теорема 9.5. *Любое объединение и любое конечное пересечение открытых множеств метрического пространства — открытые множества.*

Доказательство. Пусть X — метрическое пространство, $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторая совокупность открытых множеств пространства X, множество индексов Λ — любое. Пусть $G = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Докажем, что G — открытое множество. Для этого возьмём произвольную точку $a\in G$ и покажем, что a является внутренней точкой множества G.

Действительно, из определения множества G следует существование индекса $\lambda_a\in\Lambda$ такого, что $a\in G_{\lambda_a}$. А так как множество G_{λ_a} открыто, то точка a является его внутренней точкой. По определению 9.15 существует окрестность $B(a,\varepsilon)$ точки a, содержащаяся в G_{λ_a}. Но $G_{\lambda_a}\subset G$, поэтому $B(a,\varepsilon)\subset G_{\lambda_a}\subset G$. По определению 9.15 точка a является внутренней точкой множества G. Ввиду произвольности выбора точки a в G это означает, что все точки множества G внутренние, то есть G открыто. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь Λ — конечное множество и $G = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Для доказательства открытости множества G возьмем произвольную точку $a\in G$ и покажем, что она является внутренней точкой этого множества.

Из определения множества G следует, что $a\in G_\lambda$ при любом λ из Λ. Следовательно, точка a является внутренней точкой каждого множества G_λ. Поэтому для каждого $\lambda\in\Lambda$ найдётся положительное число ε_λ такое, что окрестность $B(a,\varepsilon_\lambda)$ точки a содержится в G_λ. А так как набор множеств G_λ конечен, из чисел ε_λ можно выбрать наименьшее, которое обозначим буквой ε. Тогда, очевидно, окрестность $B(a,\varepsilon)$ точки a содержится в каждой окрестности $B(a,\varepsilon_\lambda)$, а поэтому и в каждом множестве G_λ. Следовательно, $B(a,\varepsilon)$ содержится и во множестве G. Это означает, что a является внутренней точкой множества G. ■

Далее нам понадобится принцип двойственности, состоящий из двух утверждений. Напомним его.

Пусть X и Λ — произвольные множества, $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторая совокупность подмножеств множества X. Справедливы следующие утверждения:

1. Дополнение объединения равно пересечению дополнений, то есть

$$C\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(CG_\lambda).$$

2. Дополнение пересечения равно объединению дополнений, то есть

$$C\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(CG_\lambda).$$

Из теоремы 9.5, на основании принципа двойственности, вытекает утверждение, двойственное теореме 9.5.

Теорема 9.6. *Любое пересечение и любое конечное объединение замкнутых множеств метрического пространства — замкнутые множества.*

9.3 Полные пространства

Важную роль в анализе играет свойство числовой прямой: всякая фундаментальная числовая последовательность сходится к некоторому вещественному числу. Числовая прямая представляет собой простейший пример так называемых *полных* метрических пространств.

Определение 9.20. *Последовательность* (x_k) *элементов метрического пространства* (X, ρ) *называется фундаментальной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* m *такой, что*

$$\rho\left(x_k, x_l\right) < \varepsilon, \quad k, l \geq m.$$

Непосредственно из аксиомы треугольника выводим следующее утверждение.

Предложение 9.11. *Всякая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства фундаментальна.*

Доказательство. Действительно, пусть последовательность (x_k) сходится к x. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению сходимости найдется номер m такой, что $\rho(x_k, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $k \geq m$. Тогда $\rho(x_k, x_l) \leq \rho(x_k, x) + \rho(x, x_l) < \varepsilon$ для любых $k, l \geq m$. ■

Определение 9.21. *Метрическое пространство* X *называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности, метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ есть полное пространство.

2. Пространство $(\mathbb{Q}, \rho)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ — неполное пространство.

Действительно, возьмем иррациональное число $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ и определим последовательность рациональных чисел x_k, полагая $x_k = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_k 00 \ldots$.

Не составляет труда убедиться, что последовательность (x_k) фундаментальная, но не имеет предела в $\mathbb{Q}$.

Приведем еще одно доказательство неполноты пространства $(\mathbb{Q}, \rho)$. Рассмотрим последовательность $x_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$. Эта последовательность сходится в $(\mathbb{R}, \rho)$ к числу e. По предложению 9.11 она фундаментальна в $(\mathbb{R}, \rho)$, поэтому фундаментальна и в (Q, ρ). Но она не имеет предела в $(\mathbb{Q}, \rho)$, так как e не является рациональным числом.

3. Пространство $\mathbb{R}_{\mathrm{arctg}}$ — неполное. Например, последовательность (x_k), где $x_k = k$, $k \in \mathbb{N}$, является фундаментальной. Но она не имеет предела в $\mathbb{R}_{\mathrm{arctg}}$.

Теорема 9.7. *Метрическое пространство* $(\mathbb{R}^n, \rho_j)$ $(j = 0, 1, 2)$ *— полное.*

Доказательство. Возьмем в пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho_j)$ произвольную фундаментальную последовательность $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и любое $\varepsilon > 0$. Пусть $x_k = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. По определению фундаментальной последовательности найдется номер m такой, что

$$\rho_j\left(x_k, x_l\right) < \varepsilon, \quad k, l \geq m.$$

Отсюда следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(l)}\right| < \varepsilon, \quad k, l \geq m.$$

Следовательно, при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ числовая последовательность $\left(\xi_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. В силу критерия Коши каждая последовательность $\left(\xi_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сходится. По теореме 9.1 последовательность (x_k) сходится по метрике ρ_1. Ввиду предложения 9.6 последовательность (x_k) сходится в каждой метрике ρ, ρ_1, ρ_2. ■

Из приведенных выше примеров видно, что существуют неполные метрические пространства, то есть пространства, содержащие фундаментальные, но расходящиеся последовательности.

Докажем одно свойство фундаментальной последовательности, которое часто облегчает проверку полноты метрического пространства.

Лемма 9.3. *Если фундаментальная последовательность (x_k) элементов метрического пространства X содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.*

Доказательство. Пусть (x_{k_l}) — сходящаяся подпоследовательность последовательности (x_k) и $x\,(\in X)$ — ее предел.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (x_k) фундаментальна, то найдется номер m такой, что $\rho\,(x_k, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $k, n \geq m$. Но тогда для x_k и x_{k_l} с номерами $k, k_l \geq m$ выполняется неравенство

$$\rho\,(x_k, x_{k_l}) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{9.13}$$

Поскольку $x_{k_l} \to x$ при $l \to \infty$, то, переходя в (9.13) к пределу по l, получаем неравенство

$$\rho\,(x_k, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

справедливое при всех $k \geq m$. Следовательно, $x_k \to x$ при $k \to \infty$. ■

На множестве вещественных чисел важную роль играет утверждение о стягивающейся последовательности сегментов. В теории метрических пространств аналогичную роль играет следующая теорема, называемая *принципом вложенных шаров*.

Теорема 9.8. *Для того чтобы метрическое пространство (X, ρ) было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела и притом единственную общую точку.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство (X, ρ) полно и пусть $\left(\overline{B}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, где $\overline{B}_k = \overline{B}\,(x_k, r_k)$ — произвольная последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю.

Покажем, что последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю, найдется номер m такой, что

$$r_m < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.14}$$

А поскольку $\overline{B}_k \subset \overline{B}_m$ при всех $k \geq m$, то при всех $k \geq m$ справедливо неравенство

$$\rho\,(x_k, x_m) \leq r_m. \tag{9.15}$$

Из (9.14), (9.15) выводим

$$\rho\left(x_k, x_l\right) \leq \rho\left(x_k, x_m\right) + \rho\left(x_m, x_l\right) \leq 2r_m < \varepsilon$$

при всех $k, l \geq m$. Фундаментальность последовательности (x_k) доказана. В силу полноты пространства (X, ρ) последовательность (x_k) сходится к некоторому элементу $x \in X$.

Покажем, что x принадлежит каждому шару $\overline{B}_m$. Действительно, любой шар $\overline{B}_m$ содержит все точки последовательности (x_k) с номерами $k \geq m$. Следовательно, точка x является предельной точкой шара $\overline{B}_m$. Но по предложению 9.7 множество $\overline{B}_m$ замкнуто и поэтому содержит все свои предельные точки. В частности, оно содержит и точку x. Таким образом, $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{B}_m$, то есть $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{B}_m \neq \varnothing$.

Докажем, что x есть единственная общая точка всех шаров $\overline{B}_k$. Предположим, что и точка $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{B}_k$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho\left(x, y\right) \leq 2r_k. \tag{9.16}$$

Но так как $\rho\left(x, y\right) \geq 0$, а $r_k \to 0$, из (9.16) следует, что $\rho\left(x, y\right) = 0$. Таким образом, по аксиоме тождества $y = x$.

Достаточность. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность. Докажем ее сходимость. В силу фундаментальности найдется номер k_1 такой, что

$$\rho\left(x_k, x_{k_1}\right) < \frac{1}{2}, \quad k \geq k_1.$$

После этого выберем номер $k_2 > k_1$ так, чтобы

$$\rho\left(x_k, x_{k_2}\right) < \frac{1}{2^2}, \quad k \geq k_2.$$

Продолжая этот процесс, выберем возрастающую последовательность номеров (k_l) такую, что

$$\rho\left(x_k, x_{k_l}\right) < \frac{1}{2^l}, \quad k \geq k_l.$$

Теперь рассмотрим последовательность замкнутых шаров $\left(\overline{B}_l\right)_{l \in \mathbb{N}}$, где $\overline{B}_l = \overline{B}\left(x_{k_l}, \dfrac{1}{2^{l-1}}\right)$.

Покажем, что для любого l шар $\overline{B}_l$ содержит шар $\overline{B}_{l+1}$. Действительно, по построению шаров для любого $x \in \overline{B}_{l+1}$ получаем

$$\rho\left(x, x_{k_l}\right) \leq \rho\left(x, x_{k_{l+1}}\right) + \rho\left(x_{k_{l+1}}, x_{k_l}\right) \leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l-1}}.$$

Следовательно, $x \in \overline{B}_l$. Поэтому $\overline{B}_{l+1} \subset \overline{B}_l$. Таким образом, $\left(\overline{B}_l\right)$ есть последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю.

По предположению последовательность $\left(\overline{B}_l\right)_{l \in \mathbb{N}}$ имеет и притом единственную общую точку a. Тогда для каждого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho\left(a, x_{k_l}\right) \leq \frac{1}{2^{l-1}}.$$

Отсюда следует, что $x_{k_l} \to a$ при $l \to \infty$. Но так как (x_{k_l}) — подпоследовательность фундаментальной последовательности (x_k), то по лемме 9.3 последовательность (x_k) сходится. Это означает, что пространство (X, ρ) полное. ■

Предложение 9.12. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Если Y — замкнутое подмножество множества X, то (Y, ρ) есть полное метрическое пространство.*

Доказательство. Действительно, каждая последовательность, фундаментальная в пространстве (Y, ρ), фундаментальна и в пространстве (X, ρ). В силу полноты последнего, она сходится к некоторому элементу $x \in X$. Очевидно, что x является предельной точкой замкнутого множества Y, поэтому $x \in Y$. Следовательно, (Y, ρ) полно. ■

Следствие 9.2. *Замкнутый шар $\overline{B}(a, r)$ в полном метрическом пространстве является полным метрическим пространством.*

9.4 Компактные множества

Мы рассмотрим два определения компактности множеств в метрических пространствах (в терминах последовательностей и в терминах открытых покрытий) и покажем, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ эти определения эквивалентны.

Компактность в терминах последовательностей

Чешский математик Б. Больцано доказал, что всякое ограниченное бесконечное множество точек числовой прямой имеет хотя бы одну предельную точку, и обратил внимание на важность этого утверждения для строгого обоснования математического анализа. Идея выделения сходящейся последовательности из некоторых множеств, состоящих уже не из чисел, а, например, из функций или кривых, привела к понятию компактности множества.

Определение 9.22. *Множество K метрического пространства X называется относительно компактным, если из любой последовательности (x_k) точек множества K можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определение 9.23. *Множество K метрического пространства X называется компактным, если из любой последовательности (x_k) точек множества K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу этого множества.*

Из определения следует, что компактное множество замкнуто.

Нетрудно видеть, что замкнутое подмножество компактного множества является компактным.

Справедливость следующего утверждения очевидна.

Теорема 9.9. *Для того чтобы множество в метрическом пространстве было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно компактным и замкнутым.*

Теорема 9.10. *Относительно компактное множество K метрического пространства (X, ρ) ограничено.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что множество K не является ограниченным. Тогда K не содержится ни в одном замкнутом шаре, следовательно, для любых $a \in X$ и $r > 0$ множество $K \setminus \overline{B}(a, r) \neq \varnothing$. Основывая свои рассуждения на этом факте, выберем последовательность (x_k) элементов множества K, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем $x_1 \in K$ и $r_1 = 1$. По предположению $K_1 = K \setminus \overline{B}(a, r_1) \neq \varnothing$. Возьмём любой элемент $x_2 \in K_1$. Тогда $\rho(x_2, x_1) > 1$.

Положим $r_2 = \rho(x_2, x_1) + 1$. По предположению $K_2 = K \setminus \overline{B}(a, r_2) \neq \varnothing$. В качестве x_3 возьмем любой элемент множества K_2. Тогда

$$\rho(x_3, x_1) > r_2 > \rho(x_2, x_1), \quad \rho(x_3, x_2) \geq \rho(x_3, x_1) - \rho(x_2, x_1) > 1.$$

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность (x_k) элементов множества K, обладающую следующими свойствами:

$$\rho(x_k, x_1) > r_{k-1} > \rho(x_{k-1}, x_1), \quad \rho(x_k, x_{k-1}) > 1, \quad k \geq 2. \tag{9.17}$$

Покажем, что из последовательности (x_k) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Возьмем любые два неравных между собой номера k и l. Для определенности будем предполагать, что $k > l$. Используя (9.17), заключаем

$$\rho(x_k, a) > \rho(x_{k-1}, a) > \ldots > \rho(x_{l+1}, a).$$

Применяя теперь лемму 9.1, получаем

$$\rho(x_k, x_l) \geq \rho(x_k, a) - \rho(x_l, a) \geq \rho(x_{l+1}, a) - \rho(x_l, a) > 1.$$

Следовательно, последовательность (x_k) не содержит ни одной фундаментальной подпоследовательности, а по предложению 9.11, и ни одной сходящейся подпоследовательности. Но это противоречит относительной компактности множества K. Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы 9.10. ■

Следствие 9.3. *Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{R}^n$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Необходимость этого утверждения составляет доказанная теорема, а достаточность — теорема Больцано-Вейерштрасса (теорема 9.3).

Следствие 9.4. *Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{R}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Однако не в любом метрическом пространстве каждое ограниченное замкнутое множество является компактным.

Пример 9.2. *В пространстве $C[-\pi, \pi]$ замкнутый шар $\overline{B}(0, 1)$ не является компактным множеством.*

Доказательство. Возьмем последовательность (x_k), состоящую из функций

$$x_k = x_k(t) = \sin kt, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $x_k \in \overline{B}(0, 1)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.

Докажем, что из последовательности (x_k) невозможно выделить сходящуюся подпоследовательность. Возьмем произвольные $k, l \in \mathbb{N}$ $(k \neq l)$ и оценим $\rho(x_k, x_l)$. Нетрудно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(x_k(t) - x_l(t)\big)^2 \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kt - \sin lt)^2 \, dt = 2\pi.$$

Применяя теперь свойства определенного интеграла, выводим

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \big(x_k(t) - x_l(t)\big)^2 \, dt \leq 2\pi \cdot \left(\max_{-\pi \leq t \leq \pi} |x_k(t) - x_l(t)|\right)^2 = 2\pi \rho^2(x_k, x_l).$$

Отсюда получаем оценку
$$\rho(x_k, x_l) \geq 1.$$

Значит, последовательность (x_k) не содержит ни одной фундаментальной, а тем более сходящейся подпоследовательности. А это означает, что множество $\overline{B}\,(0,1)$ не является относительно компактным, следовательно, компактным. ■

Компактность в терминах покрытий

Определение 9.24. *Пусть K — некоторое множество элементов метрического пространства X. Говорят, что система множеств $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ образует покрытие множества K, если для каждого элемента $x \in K$ найдется G_λ такое, что $x \in G_\lambda$.*

Очевидно, что система множеств $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ образует покрытие множества K тогда и только тогда, когда $K \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

Определение 9.25. *Пусть система множеств $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ образует покрытие множества K. Любую систему множеств $\left\{G_{\lambda_\mu}\right\}_{\mu\in M}$, также образующую покрытие множества K, будем называть подпокрытием (множества K).*

Определение 9.26. *Покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ множества K называется открытым, если каждое множество G_λ открыто.*

Определение 9.27. *Множество K называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Очевидно, что всякое конечное множество в метрическом пространстве компактно.

Теорема 9.11. *Всякое бесконечное подмножество M компактного множества K имеет предельную точку, принадлежащую K.*

Доказательство. Так как множество K компактно, то из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие множества K, а следовательно, и множества M, поскольку $M \subset K$.

Предположим теперь, что множество K не содержит ни одной предельной точки множества M. Тогда для каждого x из K найдется $\varepsilon_x > 0$ такое, что проколотая окрестность $\overset{\circ}{B}\,(x, \varepsilon_x)$ точки x не содержит точек множества M. Но тогда каждая окрестность $B(x, \varepsilon_x)$ точки x содержит не более одной точки множества M, а именно точку x, если $x \in M$. Очевидно, что совокупность окрестностей $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x\in K}$ образует открытое покрытие множества K. Но по построению никакой конечный набор окрестностей $B(x, \varepsilon_x)$ не покрывает множество M, что противоречит сказанному выше. ■

Следствие 9.5. *В метрическом пространстве X компактное (в смысле покрытий) множество K относительно компактно, то есть из любой последовательности элементов множества K можно выделить сходящуюся в X подпоследовательность.*

Отсюда и из теоремы 9.10 получаем следующее утверждение.

Теорема 9.12. *Компактное (в смысле покрытий) множество ограничено.*

Приведем и непосредственное прямое доказательство этого утверждения.

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, K — компактное множество в нем. Ясно, что совокупность множеств $\{B(x,1)\}_{x\in K}$ образует открытое покрытие множества K. Так как K компактно, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то есть можно указать элементы $x_1, x_2, \ldots, x_l \in K$ такие, что

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(x_j, 1). \tag{9.18}$$

Теперь возьмем произвольную точку $a \in X$ и определим число r по формуле

$$r = \max\{\rho(x_1, a), \rho(x_2, a), \ldots, \rho(x_l, a)\} + 1.$$

Покажем, что

$$K \subset \overline{B}(a, r). \tag{9.19}$$

Для этого возьмем любой элемент $x \in K$ и оценим расстояние между точками x и a. Ввиду (9.18), существует номер j_0 такой, что $x \in B(x_{j_0}, 1)$. Следовательно, $\rho(x, x_{j_0}) < 1$. Поэтому

$$\rho(x, a) \le \rho(x, x_{j_0}) + \rho(x_{j_0}, a) < 1 + \rho(x_{j_0}, a) \le r.$$

Отсюда следует (9.19). ■

Теорема 9.13. *Компактное множество замкнуто.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, K — компактное множество в нем. Возьмем произвольную точку $a \in X \setminus K$ и докажем, что она не является предельной точкой множества K.

Для каждого $x \in K$ определим число δ_x по формуле $\delta_x = \dfrac{1}{2}\,\rho(x, a)$. Так как $a \notin K$, все числа δ_x положительны, при этом

$$B(x, \delta_x) \bigcap B(a, \delta_x) = \varnothing. \tag{9.20}$$

Так как совокупность множеств $\{B(x, \delta_x)\}_{x\in K}$ образует открытое покрытие компактного множества K, найдется конечный набор элементов x_1, x_2, …, $x_l \in K$ таких, что

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B\left(x_j, \delta_{x_j}\right). \tag{9.21}$$

Положим $\delta = \min\left\{\delta_{x_j} : j = 1, 2, \ldots, l\right\}$. Очевидно, что при таком выборе числа δ справедливо включение

$$B(a, \delta) \subset B\left(a, \delta_{x_j}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

А так как, ввиду (9.20),

$$B\left(a, \delta_{x_j}\right) \bigcap B\left(x_j, \delta_{x_j}\right) = \varnothing, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

то и

$$B(a, \delta) \bigcap B\left(x_j, \delta_{x_j}\right) = \varnothing, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Отсюда и (9.21) заключаем, что $B(a, \delta) \bigcap K = \varnothing$. А это означает, что a не является предельной точкой множества K. Таким образом, множество K содержит все свои предельные точки. Следовательно, оно замкнуто. ■

Объединяя следствие 9.12 и теорему 9.13 получаем следующее утверждение:

В метрическом пространстве компактное множество ограничено и замкнуто.
Но, как мы знаем, в пространстве $\mathbb{R}$ справедливо и обратное утверждение. Следовательно, справедлив следующий критерий:

Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{R}$ было компактным необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто.

Покажем, что такой же критерий имеет место и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лемма 9.4 (Гейне, Борель)**.** *В пространстве $\mathbb{R}^n$ замкнутый шар*

$$\overline{B}_1(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_1(x, x_0) \leq r\}$$

компактен.

Доказательство. Предположим противное, то есть что в $\mathbb{R}^n$ есть некомпактный шар $\overline{B} = \overline{B}_1(x_0, r)$. Это означает, что существует открытое покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ этого шара, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Пусть $x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\right)$. Разобьем шар $\overline{B}$ плоскостями $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, параллельными координатным плоскостям, на 2^n замкнутых шаров. Среди этих шаров имеется по крайней мере один шар, для которого из покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ невозможно выделить конечное подпокрытие. Обозначим его $\overline{B}_1 = \overline{B}_1(x_1, r_1)$. По построению, $r_1 = \dfrac{r}{2}$.

Пусть $x_1 = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}\right)$. Шар $\overline{B}_1$ разобьем плоскостями $\xi_i = \xi_i^{(1)}$ на 2^n замкнутых шаров. И среди этих шаров найдется хотя бы один шар, для которого не существует конечного подпокрытия покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Обозначим этот шар $\overline{B}_2 = \overline{B}_1(x_2, r_2)$. Очевидно, что $r_2 = \dfrac{r_1}{2} = \dfrac{r}{2^2}$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность замкнутых вложенных шаров $\left(\overline{B}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$, радиусы которых стремятся к нулю.

Поскольку пространство $\mathbb{R}^n$ полное (теорема 9.7), у шаров $\overline{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$, существует единственная общая точка a. Следовательно, $a \in \overline{B}$ и, поэтому, существует $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $a \in G_{\lambda_0}$. Так как множество G_{λ_0} открыто, точка a имеет окрестность $B_1(a, \varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$. Учитывая, что радиусы r_k шаров $\overline{B}_k$ стремятся к нулю, начиная с некоторого номера все шары $\overline{B}_k$ попадают в окрестность $B_1(a, \varepsilon)$ точки a, следовательно, и во множество G_{λ_0}. Но это противоречит построению шаров $\overline{B}_k$. Таким образом, сделанное предположение неверно. ■

Теорема 9.14 (Гейне, Борель)**.** *Ограниченное замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ компактно.*

Доказательство. Пусть K — ограниченное замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольное открытое покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ этого множества. Так как множество K ограничено, существует замкнутый шар $\overline{B} = \overline{B}_1(a, r)$, содержащий это множество. Пусть $\widetilde{G}$ обозначает дополнение множества K до всего пространства $\mathbb{R}^n$, то есть $\widetilde{G} = \mathbb{R}^n \setminus K$. Поскольку множество K замкнуто, множество $\widetilde{G}$ открыто.

Нетрудно убедиться, что совокупность множеств $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ вместе с множеством $\widetilde{G}$ образует открытое покрытие шара $\overline{B}$. По лемме, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то есть найти $\lambda_j \in \Lambda$, $j = 1, 2, \ldots, l$, такие, что

$$K \subset \overline{B} \subset \widetilde{G} \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{l} G_{\lambda_j}\right). \tag{9.22}$$

Но поскольку $K \cap \widetilde{G} = \varnothing$, из (9.22) следует, что $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} G_{\lambda_j}$. Таким образом, конечное подпокрытие покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ множества K выделено. ■

Следствие 9.6. *Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{R}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Это утверждение не может быть распространено на любое метрическое пространство, потому что, как показано в примере 9.2, замкнутый шар $\overline{B}\,(0,1)$ не является компактным множеством в пространстве $C[-\pi,\pi]$ в терминах последовательностей. В силу теоремы теоремы 9.11 он не является компактным множеством и в терминах покрытий.

Отображения

Напомним определение отображения.

Определение 9.28. *Пусть D и G — два произвольных множества. Говорят, что определено отображение f из D в G (пишут $f : D \longrightarrow G$), если определен закон f, по которому каждому элементу x из D поставлен в соответствие один и только один элемент y из G. При этом пишут $y = f(x)$.*

Слово *отображение* является синонимом слова *функция*, поэтому вместо "отображение" часто говорят "функция". В частности, если D и G — числовые множества, то обычно употребляют термин функция.

Определение 9.29. *Пусть D — произвольное множество. Отображение $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ обычно называют скалярной функцией или просто функцией.*

В случае, когда $D \subset \mathbb{R}^n$, то функцию $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ называют скалярной функцией n действительных (вещественных) переменных и пишут

$$y = f(x) = f\left(\xi_1, \xi_2,\ \dots\ , \xi_n\right),$$

где $x = (\xi_1, \xi_2,\ \dots\ , \xi_n)$.

Скалярные функции нескольких (двух, трех и более) действительных переменных нам приходилось рассматривать еще в курсе элементарной математики.

Например, площадь S прямоугольника находится по формуле $S = a\cdot b$, где a и b — длины сторон прямоугольника. Здесь S является функцией двух вещественных переменных a и b.

Для вычисления объема V цилиндра с радиусом основания r и высотой h применяется формула $V = \pi r^2 h$ (V — функция переменных r и h).

Объем V усеченного конуса с радиусами оснований R, r и высотой H является функцией трех независимых переменных: $V = \dfrac{\pi H}{3}\,(R^2 + rR + r^2)$.

Не составляет труда привести примеры функций и большего числа независимых переменных.

Определение 9.30. *Пусть D — произвольное множество. Отображение $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называют m-мерной вектор-функцией или просто вектор-функцией и пишут*

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\right).$$

Если $D \subset \mathbb{R}^n$, то отображение $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называют m-мерной вектор-функцией n действительных переменных.

Функции f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, называют координатными функциями. Очевидно, что каждая координатная функция является скалярной функцией. В частности, если f является m-мерной вектор-функцией n действительных переменных, то

$$\begin{aligned} y =& (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = \\ &= (f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, f_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \, . \end{aligned}$$

9.5 Линейные нормированные пространства

Определение 9.31. *Пусть X — линейное пространство. Нормой на X называется функция $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами (аксиомами нормы):*

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (однородность нормы);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Определение 9.32. *Линейное пространство, на котором задана норма, называется нормированным пространством.*

Рассмотрим несколько примеров нормированных пространств.

1) Пространство $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$ является нормированным пространством.

2) Пространство $\mathbb{R}^n$ является нормированным пространством, если норму задать любой из следующих формул:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}, \quad \|x\|_1 = \max \{|\xi_k| : k = 1, 2, \dots, n\} \, , \quad \|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \, .$$

3) Пространство $\mathbb{C}$ становится нормированным пространством, если положить

$$\|z\| = |z|.$$

4) Пространство $C\,[a, b]$ является нормированным пространством с нормой

$$\|x\| = \max \{|x(t)| : t \in [a, b]\} \, .$$

Справедливость аксиом нормы проверяется так же, как проверялась справедливость аксиом метрики.

Нормированное пространство $(X, \| \cdot \|)$ становится метрическим, если задать метрику ρ формулой

$$\rho\,(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Справедливость аксиом метрического пространства непосредственно вытекает из свойств 1) — 3) нормы.

Понятно, что для нормированных пространств справедливы все утверждения, доказанные для метрических пространств.

Определение 9.33. *Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (или пространством Банаха).*

Эвклидовы пространства

Важный класс нормированных пространств составляют пространства со скалярным произведением.

Определение 9.34. *Пусть X — линейное пространство над полем вещественных чисел. Скалярным произведением на X называют действительную функцию $(\cdot,\cdot) : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами (аксиомами скалярного произведения):*

1) $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in X$;

2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall x,y,z \in X$;

3) $(\lambda x,y) = \lambda\,(x,y) \quad \forall x,y \in X$;

4) $(x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

Определение 9.35. *Линейное пространство X, на котором определено скалярное произведение, называют евклидовым пространством.*

Предложение 9.13. *В евклидовом пространстве для любых $x,y \in X$ справедливо неравенство*

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}, \tag{9.23}$$

называемое неравенством Коши-Буняковского.

Доказательство. В пространстве X возьмем произвольные элементы x, y и рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, заданную равенством

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)\,.$$

Из аксиомы 4 следует, что функция φ неотрицательна в области определения.

Применяя аксиомы 1 – 3 скалярного произведения, выводим

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) =& (\lambda x + y, \lambda x + y) = (\lambda x + y, \lambda x) + (\lambda x + y, y) = (\lambda x, \lambda x + y) + (y, \lambda x + y) = \\ =&\lambda\,(x, \lambda x + y) + (y, \lambda x) + (y,y) = \lambda\,(x, \lambda x) + \lambda\,(x,y) + (\lambda x, y) + (y,y) = \\ =&\lambda\,(\lambda x, x) + \lambda\,(x,y) + \lambda\,(x,y) + (y,y) = \lambda^2\,(x,x) + 2\lambda\,(x,y) + (y,y)\,.\end{aligned}$$

Следовательно, функция φ представляет собой неотрицательный квадратный трёхчлен. Поэтому его дискриминант неположителен, то есть справедливо неравенство

$$4(x,y)^2 - 4\,(x,x)\cdot(y,y) \leq 0.$$

Отсюда легко получается (9.23). ■

Евклидово пространство X становится нормированным, если положить

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}. \tag{9.24}$$

Все аксиомы нормы (см. определение 9.31) выполнены. Действительно, выполнение первых двух аксиом нормы очевидно, а третья аксиома (неравенство треугольника) следует из неравенства Коши-Буняковского, которое принимает следующий вид:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{9.25}$$

Из рассмотренных нами примеров линейных пространств евклидовыми являются:

пространство R со скалярным произведением $(x,y) = xy$;

пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, \tag{9.26}$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$;

пространство $C[a,b]$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением (9.26) называют n-мерным евклидовым пространством.

9.6 Линейные операторы

Одним из важнейших и наиболее хорошо изученных классов отображений является класс линейных отображений (линейных операторов).

Определение 9.36. *Пусть X и $\widetilde{X}$ — линейные пространства. Назовём отображение $A : X \longrightarrow \widetilde{X}$ линейным, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*
1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$ (*свойство аддитивности*);
2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ (*свойство однородности*).

Выполнение свойств 1 и 2 равносильно выполнению следующего равенства:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y),\ x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что линейное отображение A нулевой элемент пространства X переводит в нулевой элемент пространства $\widetilde{X}$, то есть $A(0) = 0$.

Для линейного отображения A обычно пишут Ax вместо $A(x)$. Линейное отображение называют также *линейным оператором*. Множество всех линейных операторов, отображающих X в $\widetilde{X}$, будем обозначать $L(X, \widetilde{X})$.

Нетрудно проверить, что множество $L(X, \widetilde{X})$ является линейным пространством, если положить

$$(A+B)\,x = Ax + Bx, \quad x \in E, \quad A, B \in L(X, \widetilde{X}),$$
$$(\lambda A)\,x = \lambda Ax, \quad x \in X, \quad A \in L(X, \widetilde{X}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Приведем примеры линейных операторов.

1) Пусть X — линейное пространство. Зададим оператор $A : X \longrightarrow X$ равенством

$$Ax = x,\ x \in X.$$

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, называется *единичным* (*тождественным*) *оператором* и обозначается буквами E или I.

2) Пусть X и $\widetilde{X}$ — линейные пространства и оператор $O : X \longrightarrow \widetilde{X}$ задан равенством

$$Ox = 0,\ x \in X.$$

Оператор O называется *нулевым оператором*.

3) Из свойств интеграла следует, что оператор $A : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданный равенством

$$Ax = \int\limits_a^b x(t)\,dt,$$

(оператор интегрирования) является линейным.

4) Применяя свойства интеграла, легко проверить, что оператор $A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$, заданный равенством

$$Ax = \int\limits_a^t x(\tau)\, d\tau,$$

(интеграл с переменным верхним пределом) является линейным.

5) Пусть

$$C^1[a,b] = \{x \in C[a,b] : x' \in C[a,b]\}\,.$$

Из свойств дифференцируемых функций следует, что $C^1[a,b]$ является линейным подмножеством пространства $C[a,b]$. По этой же причине оператор $D : C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b]$, заданный равенством $Dx = x'$, оператор дифференцирования, является линейным.

6) Из курса алгебры известно, что линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ определяется матрицей $\widetilde{A} = (a_{ij})$ размера $m \times n$ следующим образом: если $x = (\xi_1, \xi_2, \ \ldots \ , \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, то $y = (\eta_1, \eta_2, \ \ldots \ , \eta_m) = Ax$ задается равенством

$$y = \widetilde{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}\xi_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j}\xi_j \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{m,j}\xi_j \end{pmatrix}. \qquad (9.27)$$

Пусть X и $\widetilde{X}$ — линейные нормированные пространства.

Определение 9.37. *Линейный оператор $A : X \longrightarrow \widetilde{X}$ называется ограниченным, если существует постоянная M такая, что для любого $x \in X$*

$$\|Ax\| \le M\,\|x\|\,, \qquad (9.28)$$

где $\|x\|$ — норма в пространстве X, а $\|Ax\|$ — норма в пространстве $\widetilde{X}$.

Из рассмотренных выше примеров линейных операторов только оператор дифференцирования из примера 5 является неограниченным. Ограниченность операторов из примеров 1 — 4 устанавливается тривиально. Докажем ограниченность матричного оператора из примера 6 и неограниченность оператора дифференцирования из примера 5.

Предложение 9.14. *Каждый линейный оператор $A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ ограничен.*

Доказательство. Ввиду (9.27) имеем

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} {\eta_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right)^2}\,. \qquad (9.29)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \|x\|.$$

Отсюда и из (9.29) выводим

$$\|Ax\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \|x\| .$$

Полагая теперь $M = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$, получаем (9.28), то есть ограниченность оператора A. ■

Предложение 9.15. *Оператор дифференцирования $D : C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ неограничен.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность (x_k), где $x_k(t) = \sin kt$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что

$$\|x_k\| = \max\{|\sin kt| : t \in [a,b]\} \le 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

А так как $Dx_k = x_k' = k\cos kt$, то при $k > \dfrac{\pi}{b-a}$ получаем

$$\|Dx_k\| = \max\{k|\cos kt| : t \in [a,b]\} = k.$$

Отсюда следует, что не существует постоянной $M > 0$ такой, чтобы оценка

$$\|Dx_k\| \le M\,\|x_k\|$$

выполнялась для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, оператор D не является ограниченным. ■

Определение 9.38. *Пусть линейный оператор $A : X \longrightarrow \widetilde{X}$ ограничен. Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющих неравенству (9.28), называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.*

Из определения нормы оператора вытекает, что число $\|A\|$ обладает следующими двумя свойствами:

1) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in X$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in X : \ \|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|$.

Применяя эти свойства, выведем формулу для вычисления нормы оператора.

Предложение 9.16. *Пусть X и $\widetilde{X}$ — линейные нормированные пространства, оператор $A : X \longrightarrow \widetilde{X}$ линеен и ограничен. Тогда*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \le 1\}. \tag{9.30}$$

Доказательство. Из определения нормы оператора следует, что $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = O$ — нулевой оператор. Для нулевого оператора формула (9.30), очевидно, справедлива. Поэтому проведём доказательство, считая, что $A \ne O$, то есть что $\|A\| > 0$.

Пусть $\|x\| \le 1$. Тогда по первому свойству нормы имеем:

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \le \|A\| .$$

Следовательно, и

$$\sup\{\|Ax\| : \|x\| \le 1\} \le \|A\| . \tag{9.31}$$

Теперь возьмем любое ε такое, что $0 < \varepsilon < \|A\|$. По второму свойству нормы найдется $x_\varepsilon \in X$ такой, что

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\| . \tag{9.32}$$

Очевидно, что $x_\varepsilon \neq 0$, так как в противном случае обе части неравенства (9.32) равнялись бы нулю. Возьмем $y_\varepsilon = \dfrac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$. Ясно, что $\|y_\varepsilon\| = 1$. Используя неравенство (9.32), выводим оценку

$$\|Ay_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Ax_\varepsilon\| > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| = \|A\| - \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что $\|y_\varepsilon\| = 1$, получаем

$$\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} \geq \|Ay_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора ε

$$\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} \geq \|A\|. \tag{9.33}$$

Из неравенств (9.31) и (9.33) следует равенство (9.30). ■

Следствие 9.7. *Пусть X и $\widetilde{X}$ — линейные нормированные пространства, $A : X \longrightarrow \widetilde{X}$ — ограниченный линейный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}. \tag{9.34}$$

9.7 Предел и непрерывность отображений

Пусть (X, ρ) и $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}\right)$ — метрические (нормированные) пространства, D — множество в X, a — предельная точка множества D.

Определение 9.39 (Коши)**.** *Элемент $b \in \widetilde{X}$ называется пределом (или предельным значением) отображения $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in D$ и удовлетворяющих условию*

$$0 < \rho(x, a) < \delta \quad (0 < \|x - a\| < \delta) \tag{9.35}$$

выполняется неравенство

$$\widetilde{\rho}(f(x), b) < \varepsilon \quad (\|f(x) - b\| < \varepsilon). \tag{9.36}$$

Сформулируем это определение на языке окрестностей.

Определение 9.40. *Элемент $b \in \widetilde{X}$ называется пределом (или предельным значением) отображения $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ при $x \to a$, если для произвольной ε-окрестности $B(b, \varepsilon) \subset \widetilde{X}$ точки b найдётся проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{B}(a, \delta) \subset X$ точки a такая, что*

$$f\left(\overset{\circ}{B}(a, \delta) \cap D\right) \subset B(b, \varepsilon).$$

Определение 9.41 (Гейне)**.** *Элемент $b \in \widetilde{X}$ называется пределом (или предельным значением) отображения $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ при $x \to a$, если для любой последовательности (x_k) элементов из D, такой что $x_k \to a$, $x_k \neq a$ $(k \in \mathbb{N})$, последовательность $\big(f(x_k)\big)$ сходится к b.*

Теорема 9.15. *Определения предела отображения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Пусть b является пределом отображения f при $x \to a$ по Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По предположению существует $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in D$ и удовлетворяющих условию (9.35) выполняется неравенство (9.36). Возьмем произвольную последовательность $(x_k) \subset D$: $x_k \to a$, $x_k \neq a$ $(k \in \mathbb{N})$. Так как последовательность $x_k \to a$, по δ найдётся номер m такой, что при всех $k \geq m$ будет выполняться неравенство $\rho(x_k, a) < \delta$. Учитывая, что $x_k \neq a$, $k \in \mathbb{N}$, заключаем, что при каждом $k \geq m$ выполняется (9.35), а следовательно, и (9.36) с $x = x_k$. Последнее означает, что последовательность $f(x_k) \to b$, поэтому b является пределом отображения f при $x \to a$ и по Гейне.

Пусть теперь b является пределом отображения f при $x \to a$ по Гейне. Требуется доказать, что b является пределом f при $x \to a$ по Коши. Предположим противное, то есть, что b не является пределом f при $x \to a$ по Коши. Это означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\delta > 0$ найдётся $x \in D$, $x \neq a$, удовлетворяющий (9.35), но не удовлетворяющий (9.36) с $\varepsilon = \varepsilon_0$. Возьмём последовательность положительных чисел (δ_k), сходящуюся к нулю. Так как a — предельная точка D, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдётся $x_k \in D$, отличный от a, удовлетворяющий условию

$$\rho(x_k, a) < \delta_k, \tag{9.37}$$

но такой, что

$$\widetilde{\rho}\,(f(x_k), b) \geq \varepsilon_0. \tag{9.38}$$

Так как неравенства (9.37) и (9.38) выполняются при всех $k \in \mathbb{N}$, то (9.37) означает, что $x_k \to a$, а (9.38), что $f(x_k) \not\to b$. Но это противоречит тому, что b есть предел отображения f при $x \to a$ по Гейне. Следовательно, сделанное предположение неверно. Таким образом, b является пределом f при $x \to a$ и по Коши. Теорема доказана. ■

Тот факт, что b является пределом f при $x \to a$ (по Коши или по Гейне) будем записывать, как обычно, в виде

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

или говорить, что $f(x)$ сходится к b при $x \to a$ и писать

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b.$$

Пусть (X, ρ) и $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}\right)$ — метрические пространства, D — множество в X, $a \in D$.

Определение 9.42. *Отображение $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ называется непрерывным в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует и равен $f(a)$.*

Сформулируем это определение, используя определения Коши и Гейне предельного значения отображения.

Определение 9.43 (Коши)**.** *Отображение $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ называется непрерывным в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) < \delta$, справедливо неравенство $\widetilde{\rho}\,(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Определение 9.44 (Гейне)**.** *Отображение $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ называется непрерывным в точке a, если для каждой последовательности $(x_k) \subset D$, сходящейся к a, последовательность $(f(x_k))$ сходится к $f(a)$.*

Определение 9.45. *Отображение $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ называется непрерывным на множестве D, если оно непрерывно в каждой точке $x \in D$.*

Теорема 9.16 (Непрерывность суперпозиции)**.** *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, D, G — множества, содержащиеся в пространствах X и Y соответственно. Если отображение $f : D \longrightarrow Y$ непрерывно в точке $a \in D$ и $f(D) \subset G$, а отображение $g : G \longrightarrow Z$ непрерывно в точке $b = f(a)$, то сложное отображение $F : D \longrightarrow Z$, заданное равенством $F(x) = g(f(x))$, непрерывно в точке a.*

Доказательство. Воспользуемся определением непрерывности по Гейне. Возьмем произвольную последовательность $(x_k) \subset D$, сходящуюся к a. Так как отображение f непрерывно в точке a, то по определению 9.44 последовательность $(y_k) = (f(x_k))$ сходится к $b = f(a)$. Снова по определению 9.44, ввиду непрерывности отображения g в точке b, последовательность $\big(g(y_k)\big)$ сходится к $g(b)$. Но $g(y_k) = g(f(x_k)) = F(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, а $g(b) = g(f(a)) = F(a)$. Следовательно, для любой последовательности (x_k), сходящейся к a, последовательность $(F(x_k))$ сходится к $F(a)$. По тому же определению 9.44 сложная функция F непрерывна в точке a. ■

Теорема 9.17. *Пусть X — метрическое пространство, D — множество в X и $\widetilde{X}$ — линейное нормированное пространство. Если отображения $f, g : D \longrightarrow \widetilde{X}$ непрерывны в точке $a \in D$, то отображения $f + g : D \longrightarrow \widetilde{X}$ и $\lambda f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ непрерывны в точке a.*

Доказательство. Докажем непрерывность суммы отображений. Пусть $(x_k) \subset D$ — произвольная последовательность, сходящаяся к a. Тогда, по определению 9.44, последовательности $(f(x_k))$ и $(g(x_k))$ сходятся к $f(a)$ и $g(a)$ соответственно. Следовательно,

$$\|f(x_k) - f(a)\| \to 0, \quad \|g(x_k) - g(a)\| \to 0,$$

когда $k \to \infty$. Поэтому

$$\begin{gathered}\|(f+g)(x_k) - (f+g)(a)\| = \|f(x_k) + g(x_k) - f(a) - g(a)\| = \\ = \|(f(x_k) - f(a)) + (g(x_k) - g(a))\| \le \|f(x_k) - f(a)\| + \|g(x_k) - g(a)\| \to 0,\end{gathered}$$

когда $k \to \infty$. А это означает, что $(f + g)(x_k) \to (f + g)(a)$ при $k \to \infty$. По определению 9.44, отображение $f + g$ непрерывно в точке a.

Непрерывность отображения λf доказывается аналогично. ■

Определение 9.46. *Пусть (X, ρ) и $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}\right)$ — метрические пространства, D — множество в X. Отображение $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$ называется равномерно непрерывным на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x', $x'' \in D$ и удовлетворяющих условию $\rho(x', x'') < \delta$ выполняется неравенство*

$$\widetilde{\rho}\big(f(x'), f(x'')\big) < \varepsilon.$$

Теорема 9.18 (Кантор)**.** *Пусть (X, ρ) и $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}\right)$ — метрические пространства, K — компактное множество в X. Если отображение $f : K \longrightarrow \widetilde{X}$ непрерывно на K, то оно и равномерно непрерывно на нём.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что существует отображение f, непрерывное на K, но не являющееся равномерно непрерывным на нём. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого положительного числа δ найдутся $x', x'' \in K$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, но $\widetilde{\rho}(f(x'), f(x'')) \ge \varepsilon_0$. Возьмем последовательность (δ_k), сходящуюся к нулю. Тогда, как сказано выше, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся $x'_k, x''_k \in K$ такие, что

$$\rho(x'_k, x''_k) < \delta_k, \tag{9.39}$$

но
$$\widetilde{\rho}\left(f\left(x_k'\right), f\left(x_k''\right)\right) \geq \varepsilon_0. \tag{9.40}$$
Последовательность $(x_k') \subset K$. По следствию 9.5 и теореме 9.13 из последовательности (x_k') можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{k_j}'\right)$, предел которой $a \in K$. Покажем, что последовательность $\left(x_{k_j}''\right)$ также сходится к a. Действительно, учитывая (9.39), выводим
$$\rho\left(x_{k_j}'', a\right) \leq \rho\left(x_{k_j}'', x_{k_j}'\right) + \rho\left(x_{k_j}', a\right) < \delta_{k_j} + \rho\left(x_{k_j}', a\right).$$
А так как $\delta_{k_j} \to 0$ и $\rho\left(x_{k_j}', a\right) \to 0$, то и $\rho\left(x_{k_j}'', a\right) \to 0$. А это означает, что $x_{k_j}'' \to a$.

Ввиду непрерывности отображения f имеем:
$$f\left(x_{k_j}'\right) \to f(a), \quad f\left(x_{k_j}''\right) \to f(a). \tag{9.41}$$
Поскольку
$$\widetilde{\rho}\left(f\left(x_{k_j}'\right), f\left(x_{k_j}''\right)\right) \leq \widetilde{\rho}\left(f\left(x_{k_j}'\right), f(a)\right) + \widetilde{\rho}\left(f\left(x_{k_j}''\right), f(a)\right),$$
то отсюда и из (9.41) следует, что $\widetilde{\rho}\left(f\left(x_{k_j}'\right), f\left(x_{k_j}''\right)\right) \to 0$ при $j \to \infty$, но это противоречит (9.40).

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Теорема 9.19. *Пусть X — метрическое пространство, D — множество в X. Если функции $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in D$, то функция $f \cdot g$, а если $g(x) \neq 0$ для всех $x \in D$, то и функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке a.*

Доказательство. Пусть $(x_k) \subset D$ — произвольная сходящаяся к a последовательность. Тогда, по определению 9.44, имеем
$$f(x_k) \to f(a), \quad g(x_k) \to g(a).$$
Но так как $(f(x_k))$ и $(g(x_k))$ — числовые последовательности, то
$$(f \cdot g)(x_k) = f(x_k) \cdot g(x_k) \to f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_k) = \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$
По определению 9.44, функции $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке a. ■

Теорема 9.20. (**Об устойчивости знака непрерывной функции**) *Пусть D — множество в метрическом пространстве X, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, непрерывная в точке $a \in D$. Тогда, если $f(a) \neq 0$, то найдётся окрестность точки a, в пределах которой функция f имеет знак, совпадающий со знаком $f(a)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = |f(a)|$. Так как $f(a) \neq 0$, то $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна в точке a, то, согласно определению 9.43, найдется $\delta > 0$ такое, что при всех

$x \in D$ и удовлетворяющих условию $\rho(x,a) < \delta$, справедлива оценка $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$f(a) - |f(a)| < f(x) < f(a) + |f(a)|, \quad x \in B(a,\delta) \cap D. \tag{9.42}$$

Поэтому, если $f(a) > 0$, то $f(a) - |f(a)| = 0$, и из (9.42) выводим: $f(x) > 0$ для всех $x \in B(a,\delta)$.

Если же $f(a) < 0$, то $f(a) + |f(a)| = 0$. Теперь из (9.42) следует, что $f(x) < 0$ для всех $x \in B(a,\delta)$. ■

Теорема 9.21. (**Вейерштрасс, 1-я**) *Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве X. Если функция $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на K, то она ограничена на нем, то есть существует число $M > 0$ такое, что для всех $x \in K$*

$$|f(x)| \leq M.$$

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существует непрерывная, но неограниченная на K функция f. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется элемент $x_k \in K$ такой, что $|f(x_k)| > k$.

Так как множество K компактно, то по следствию 9.5 и теореме 9.13 из последовательности (x_k) можно выделить подпоследовательность $\left(x_{k_j}\right)$, сходящуюся к некоторому $a \in K$. Ввиду непрерывности функции f на множестве K, подпоследовательность $\left(f\left(x_{k_j}\right)\right)$ сходится к $f(a)$, следовательно, она ограничена.

Но, с другой стороны, поскольку $\left|f\left(x_{k_j}\right)\right| > k_j$, подпоследовательность $\left(f\left(x_{k_j}\right)\right)$ является бесконечно большой, что противоречит её ограниченности. Полученное противоречие доказывает, что на множестве K функция f ограничена. ■

Теорема 9.22. (**Вейерштрасс, 2-я**) *Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве X. Если функция $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на K, то она достигает на K своих точных верхней и нижней граней, то есть найдутся $a, b \in K$ такие, что*

$$f(a) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \quad f(b) = \inf\{f(x) : x \in K\}.$$

Доказательство. Докажем первое из этих утверждений, второе доказывается аналогично.

Итак, пусть $\alpha = \sup\{f(x) : x \in K\}$. По свойствам точной верхней грани, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется элемент $x_k \in K$ такой, что

$$\alpha - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq \alpha. \tag{9.43}$$

Учитывая компактность множества K, из последовательности (x_k) можно выделить подпоследовательность $\left(x_{k_j}\right)$, сходящуюся к некоторому $a \in K$ (по следствию 9.5 и теореме 9.13). Ввиду непрерывности f на K, последовательность $\left(f\left(x_{k_j}\right)\right)$ сходится к $f(a)$. Но из (9.43) следует, что

$$\alpha - \frac{1}{k_j} < f\left(x_{k_j}\right) \leq \alpha, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получаем: $f(a) = \alpha$.

Теорема доказана. ■

Теорема 9.23. *Пусть X — метрическое пространство, D — множество в X, отображение $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Для того чтобы вектор-функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ была непрерывной в точке $a \in D$, необходимо и достаточно, чтобы каждая координатная функция f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, была непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $(x_k) \subset D$, $x_k \to a$. Справедливость следующей цепочки утверждений очевидна:

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4),$$

где
(1) — вектор-функция f непрерывна в точке a;
(2) — $f(x_k) \to f(a)$;
(3) — $f_i(x_k) \to f_i(a)$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$;
(4) — при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ координатная функция f_i непрерывна в точке a. ■

Теорема 9.24. *Пусть X — метрическое пространство, D — множество в X. Если вектор-функции $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, непрерывны в точке $a \in D$, то и скалярное произведение $(f, g) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, заданное равенством*

$$(f, g)(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) g_i(x),$$

непрерывно в точке a.

Справедливость этой теоремы следует из теорем 9.23, 9.19 и 9.17.

Определение 9.47. *Пусть X — метрическое пространство. Кривой L называется образ непрерывного отображения φ сегмента $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в X, а точки $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$ называют началом и концом кривой L.*

Определение 9.48. *Пусть X — метрическое пространство. Множество $D \subset X$ называется связным, если любые две его точки могут быть соединены некоторой кривой, лежащей в D.*

Определение 9.49. *Областью в метрическом пространстве называется открытое связное множество элементов этого пространства.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. Множество $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ — область, поскольку оно открыто и связно.

2. Множество $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ хотя и является открытым, но оно несвязно. Поэтому D_2 не является областью.

3. Множество $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$ тоже не является областью, так как оно хотя и связно, но замкнуто.

Теорема 9.25. (**О промежуточном значении**) *Пусть X — метрическое пространство, D — связное множество в X, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $a, b \in D$ — произвольные точки. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдётся точка $c \in D$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Так как D — связное множество, существует кривая L, соединяющая точки a и b и лежащая в D, то есть существует непрерывное отображение $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$ такое, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

По теореме 9.16 о непрерывности суперпозиции скалярная функция $F : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством $F(t) = f(\varphi(t))$, непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$ и

$$F(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(a), \ F(\beta) = f(\varphi(\beta) =) f(b).$$

По теореме о промежуточном значении для функций одной вещественной переменной найдется точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$ такая, что $F(\gamma) = C$. Полагая $c = \varphi(\gamma)$, получаем

$$f(c) = f(\varphi(\gamma)) = F(\gamma) = C.$$

■

Определение 9.50. *Пусть (X, ρ) и $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}\right)$ — метрические пространства, D — область в X, $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$, L — кривая в X с началом в точке a. Элемент $b \in \widetilde{X}$ называют пределом отображения f в точке a вдоль кривой L (пишут $b = \lim\limits_{x \xrightarrow{L} a} f(x)$), если:*

(Коши) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in L,\ 0 < \rho(x, a) < \delta \implies \widetilde{\rho}(f(x), b) < \varepsilon$;

(Гейне) $\forall\ (x_k) \subset L : x_k \to a,\ x_k \neq a \implies f(x_k) \to b$.

Предложение 9.17. *Определения Коши и Гейне предела вдоль кривой эквивалентны.*

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 9.15.

Пусть X — нормированное пространство, $a \in X$, $h \in X$ — единичный вектор, то есть такой элемент пространства X, что $\|h\| = 1$.

Множества

$$\{x \in X : x = a + th,\ t \geq 0\}, \quad \{x \in X : x = a + th,\ t \in \mathbb{R}\}$$

называют, соответственно, лучом, выходящим из точки a, с направляющим вектором h и прямой, проходящей через точку a, с направляющим вектором h.

Пусть в определении 9.50 пространство X — линейное нормированное и L — луч, выходящий из точки a, с направляющим вектором h. Тогда говорят, что $b \in \widetilde{X}$ есть предел отображения f в точке a по направлению вектора h. В этом случае $x \xrightarrow{L} a$ тогда и только тогда, когда $t \to +0$. Поэтому

$$\lim_{x \xrightarrow{L} a} f(x) = \lim_{t \to +0} f(a + th).$$

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 9.18. *Пусть X и $\widetilde{X}$ — метрические пространства, D — область в X, $f : D \longrightarrow \widetilde{X}$. Если существует предел b отображения f в точке $a \in D$, то в точке a существует предел отображения f вдоль любой кривой L, начинающейся в этой точке, и он равен b.*

В частности, если X — нормированное пространство, то в точке a существует предел отображения f по любому направлению.

Из этого предложения следует, что если некоторое отображение f в точке a имеет разные пределы по двум различным кривым (в частности, по двум различным направлениям), то f в точке a предела не имеет.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9.3. *Покажем, что функция $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$, в точке $(0, 0)$ имеет предел по любому направлению, но не имеет предела в этой точке.*

Зафиксируем угол $\varphi \in [0; 2\pi)$, рассмотрим луч L, выходящий из начала координат, с направляющим вектором $h = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ и найдем предел функции $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ в точке $(0, 0)$ по направлению вектора h:

$$\lim_{(x,y)\overset{L}{\to}(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to+0} \frac{2t^2 \cos\varphi \sin\varphi}{t^2 \cos^2\varphi + t^2 \sin^2\varphi} = \sin(2\varphi).$$

Следовательно, предел в точке $(0, 0)$ по любому направлению существует, но его значение меняется с изменением направления. Поэтому $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не существует.

Пример 9.4. *Покажем, что в точке* $(0, 0)$ *функция* $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $x^2 + y^2 \neq 0$, *по любому направлению имеет один и тот же предел* (*равный нулю*), *но не имеет предела в этой точке.*

Функция f на луче, выходящем из начала координат, с направляющим вектором $h = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ принимает вид

$$f(x, y) = f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{t^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{t^2 \cos^2\varphi + t^4 \sin^4\varphi} = \frac{t\cos\varphi \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + t^2 \sin^4\varphi}.$$

Поэтому, если $\cos\varphi \neq 0$, то $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = 0$, а если $\cos\varphi = 0$, то всюду на луче $f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = 0$ и, соответственно, $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = 0$.

Следовательно, предел функции f в точке $(0, 0)$ по любому направлению существует и равен нулю.

Пусть теперь L — любая ветвь параболы $x = y^2$. На этой кривой, за исключением точки $(0, 0)$, функция f имеет вид

$$f(x, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{(x,y)\overset{L}{\to}(0,0)} f(x, y) = \lim_{y\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{(x,y)\overset{\varphi}{\to}(0,0)} f(x, y).$$

Следовательно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не существует.

Повторные пределы

Для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нескольких переменных можно определить понятие предельного значения по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных. В связи с этим возникает понятие *повторного предельного значения*. Уясним это понятие на примере функции $u = f(x, y)$ двух переменных x и y.

Пусть

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - x_0| < d,\ 0 < |y - y_0| < d\Big\}$$

и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Пусть для каждого y, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < d$, в точке x_0 существует предел функции $u = f(x, y)$ по переменной x:

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y),$$

и пусть в точке y_0 существует предел функции $\varphi(y)$:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b.$$

В этом случае говорят, что существует *повторный* предел b функции $u = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и пишут:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b.$$

Аналогично определяется второй повторный предел

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9.5. *Найдем пределы и повторные пределы, если они существуют, в точке* $(0, 0)$ *следующих функций:*

$$a)\, f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0); \quad b)\, f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \quad (x \neq 0,\ y \neq 0);$$

$$c)\, f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \quad (x + y \neq 0); \quad d)\, f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

a) Мы уже выяснили, что $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует (см. пример 9.3). Но при любом y, отличном от нуля, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ равен нулю. Поэтому равен нулю и повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. Поскольку $f(x, y) = f(y, x)$, то и повторный предел $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ существует и равен нулю.

b) Докажем, что $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ существует и равен нулю. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда, учитывая ограниченность функции синус, для любого элемента $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего условию $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, имеем $|f(x, y)| < \delta^2 = \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$.

Теперь зафиксируем любой $y \neq 0$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{xy}$ не существует, а $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + y^2) = y^2$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ не существует. Поэтому не существует и повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$.

Очевидно, что не существует и второй повторный предел $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$.

c) Так как $f(x, 0) = 1$, а $f(0, y) = -1$, то $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует.

С другой стороны, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = -1$ при каждом фиксированном $y \neq 0$. Поэтому повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ существует и равен -1. Аналогично, повторный предел $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ существует, но равен 1.

d) Поскольку при любом $y \neq 0$ справедливо неравенство $|f(x, y)| \leq |x| \leq \|(x, y)\|$, то $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ существует и равен 0.

Также при каждом y, отличном от нуля, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. Поэтому повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ существует и равен 0. Но второй повторный предел $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ не существует, поскольку при любом фиксированном $x \neq 0$ не существует предел $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$.

Докажем следующее достаточное условие существования повторного предела.

Теорема 9.26. *Пусть* $D = \overset{\circ}{B}_1 \left((x_0, y_0), d\right)$ *представляет собой проколотую окрестность точки* (x_0, y_0) *в пространстве* $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$*, функция* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеет предел в точке* (x_0, y_0)*, равный* b*. И пусть для любого* y*, удовлетворяющего условию* $0 < |y - y_0| < d$*, в точке* x_0 *существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Тогда существует повторный предел

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

и он равен b*.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела найдётся $\delta > 0$ $(\delta < d)$ такое, что для всех $(x, y) \in \overset{\circ}{B}_1 \big((x_0, y_0), \delta\big)$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.44}$$

Зафиксируем любой элемент y, удовлетворяющий условию $0 < |y - y_0| < \delta$ и в неравенстве (9.44) перейдём к пределу при $x \to x_0$. Получим

$$|\varphi(y) - b| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

А это означает, что $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$ существует и равен b. Таким образом имеем

$$b = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

■

Следствие 9.8. *Пусть* $D = \overset{\circ}{B}_1 \left((x_0, y_0), d\right)$ *представляет собой проколотую окрестность точки* (x_0, y_0) *в пространстве* $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$*, функция* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеет предел в точке* (x_0, y_0)*, равный* b*. И пусть для любого* y*, удовлетворяющего условию* $0 < |y - y_0| < d$*, в точке* x_0 *существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y),$$

а для любого x*, удовлетворяющего условию* $0 < |x - x_0| < d$*, в точке* y_0 *существует предел*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \psi(x).$$

Тогда повторные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ *и* $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ *существуют и равны* b*.*

9.8 Задачи

1. Доказать, что функция $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$, является метрикой на $\mathbb{R}$.

2. Пусть X —множество сегментов на вещественной оси $\mathbb{R}$. Доказать, что X становится метрическим пространством, если метрику на нём определить равенством

$$\rho\left([a, b], [c, d]\right) = |a - c| + |b - d|.$$

3. Пусть $\mathcal{P}_{[0,1]}$ — множество алгебраических многочленов, рассматриваемых на сегменте $[0,1]$. Доказать, что $\mathcal{P}_{[0,1]}$ становится метрическим пространством, если метрику на нём определить равенством:

$$a)\ \rho\,(P,Q) = \max\left\{|P(x)-Q(x)| : x\in[0,1]\right\}; \quad b)\ \rho\,(P,Q) = \int\limits_0^1 |P(x)-Q(x)|\ dx.$$

4. Найти предел последовательности (x_m) :

$$a)\ x_m = \left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m};\frac{m-1}{m};\ \frac{2m^2-1}{m^2};\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right);$$

$$b)\ x_m = \left(\frac{\cos\dfrac{7m\pi}{3}}{m+1};\ \frac{\sin\dfrac{5m\pi}{4}}{m+2}\right).$$

5. Доказать, что последовательность (x_m) расходится:

$$a)\ x_m = \left(\frac{(-1)^m}{m};\ (-1)^m\right); \quad b)\ x_m = \left(m\cos\frac{\pi}{m^2}\ ; m^3\sin\frac{\pi}{m^3}\right).$$

6. Пусть $\delta>0$. Доказать, что множество

$$E = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a,\delta) = \{x\in\mathbb{R}^n : \parallel x-a \parallel > \delta\}$$

открыто в $\mathbb{R}^n$.

7. Является ли открытым в $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ множество

$$E = \{x\in\mathbb{R}^n :\ x_1^2+x_2^2<1,\ x_3=x_4=\ldots=x_n=0\}?$$

8. Является ли открытым в $\mathbb{R}$ множество:

$$a)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(4-\frac{1}{k},5+\frac{1}{k}\right); \quad b)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right);$$

$$c)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right]; \quad d)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right]?$$

Для каждого из этих множеств найти M', $\overline{M}$, $Int\,M$, ∂M.

9. Является ли замкнутым в $\mathbb{R}$ множество:

$$a)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(4-\frac{1}{k},5+\frac{1}{k}\right); \quad b)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right);$$

$$c)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right]; \quad d)\ M = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[3-\frac{1}{k},5+\frac{1}{2k}\right]?$$

10. Является ли открытым в $\mathbb{R}^2$ множество:

$$a)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2>1\};\quad b)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2-x_2^2<1\};$$
$$c)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2=1\};\quad d)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2\neq 1\};$$
$$e)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2-x_2^2\neq 1\};\quad f)\ E=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2\leq 1\}?$$

11. Является ли открытым в $\mathbb{R}^2$ множество:

$$a)\ M=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1-\frac{1}{2^k}<x<\frac{1}{k},\ -\frac{1}{2k}+3<y<8+\frac{1}{3^k}\right\};$$

$$b)\ M=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:3-\frac{1}{2^k}\leq x<5+\frac{1}{k},\ -\frac{1}{2k}+3<y\leq 8+\frac{1}{3^k}\right\}?$$

Для каждого из этих множеств найти M', $\overline{M}$, $Int\,M$, ∂M.

12. Является ли замкнутым в $\mathbb{R}^2$ множество:

$$a)\ M=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1-\frac{1}{2^k}<x<\frac{1}{k},\ -\frac{1}{2k}+3<y<8+\frac{1}{3^k}\right\};$$

$$b)\ M=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:3-\frac{1}{2^k}\leq x<5+\frac{1}{k},\ -\frac{1}{2k}+3<y\leq 8+\frac{1}{3^k}\right\}?$$

13. Является ли открытым в $\mathbb{R}^3$ множество:

$$a)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+2x_2^2+3x_3^2<4\};\quad b)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+x_2^2-x_3^2<1\};$$
$$c)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+x_2^2>x_3^2\};\quad d)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+x_2^2+1<x_3^2\};$$
$$e)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+x_2^2<1,\ x_3>1\};\quad f)\quad E=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1^2+x_2^2<x_3^2\}?$$

14. Доказать неполноту метрического пространства $(\mathbb{R},\rho)$ с метрикой, заданной равенством $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$.

15. Пусть $X=\{[a;b]:\ a,b\in\mathbb{R},a<b\}$ — множество сегментов на вещественной оси $\mathbb{R}$. Доказать неполноту метрического пространства (X,ρ) с метрикой, заданной равенством

$$\rho\left([a,b],[c,d]\right)=|a-c|+|b-d|\,.$$

16. Пусть $\mathcal{P}_{[0,1]}$ — множество алгебраических многочленов, рассматриваемых на сегменте $[0,1]$. Доказать неполноту метрического пространства $\left(\mathcal{P}_{[0,1]},\rho\right)$ с метрикой заданной равенством:

$$a)\,\rho\left(P,Q\right)=\max\left\{|P(x)-Q(x)|:x\in[0,1]\right\};\qquad b)\,\rho\left(P,Q\right)=\int\limits_0^1|P(x)-Q(x)|\,dx.$$

17. Найти повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$:

$$a)f(x,y)=\frac{x^3-y}{x^3+y};\quad b)\,f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2};\quad c)\,f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{x^2+xy+y^2};$$
$$d)f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad e)\,f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2};\quad f)\,f(x,y)=\frac{y}{x}\,\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}.$$

18. Найти $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$:

$$a)\ f(x,y) = x + y\sin\frac{1}{x};\quad b)\ f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}.$$

19. Найти предел функции $u = x^2 e^{y-x^2}$ по лучу

$$x = t\cos\varphi,\quad y = t\sin\varphi,\quad \varphi\in[0;2\pi),\quad t\to+\infty.$$

20. Найти предел функции $u = e^{\frac{yx^2}{x^2+y^2}}$ по лучу

$$x = t\cos\varphi,\quad y = t\sin\varphi,\quad \varphi\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right),\quad t\to+\infty.$$

21. Найти предел функции $u = e^{x+y}\ln|x+y|$ по лучу

$$x = t\cos\varphi,\quad y = t\sin\varphi,\quad \varphi\in\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right),\quad t\to+\infty.$$

22. Найти предел:

$$a)\ \lim_{(x;y)\to(2;1)}\frac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y};\quad b)\ \lim_{(x;y)\to(0;2)}\frac{\sin xy}{x};\quad c)\ \lim_{(x;y)\to(\infty;\infty)} xy\sin\frac{\pi}{xy}.$$

23. Выяснить, является ли функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;0)$: a) непрерывной по x; b) непрерывной по y; c) непрерывной.

24. Найти значение a, при котором функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ a, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;0)$ является: a) непрерывной по x; b) непрерывной по y; c) непрерывной.

25. Найти значения a и b, при которых функция

$$u = \begin{cases} a, & \text{если } x^2+y^2\le 4,\\ \sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2-4}, & \text{если } 4 < x^2+y^2\le 9,\\ b, & \text{если } x^2+y^2 > 9, \end{cases}$$

непрерывна в $\mathbb{R}^2$.

26. Доказать, что функция:

$$a)\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n}|x_k|,\qquad b)\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \max_k|x_k|$$

непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$.

27. Показать, что если (a_{ij}) – матрица линейного оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ в некотором базисе, то справедливы следующие оценки:

$$\max_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}\le\|A\|\le\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}}\le\sqrt{n}\,\|A\|.$$

10 Дифференциальное исчисление функций нескольких вещественных переменных

10.1 Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Зададим функцию $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ равенством $\varphi(t) = f(a + th)$. Заметим, что поскольку D — область, то a — её внутренняя точка. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что окрестность $B(a, \delta)$ точки a содержится в области D. Поэтому для любого $t \in (-\delta, \delta)$ точка $a + th \in D$.

Определение 10.1. *Если существует производная функции φ в точке 0, то есть $\varphi'(0)$, то ее называют производной функции f в точке a в направлении вектора h и обозначают $f'_h(a)$.*

Таким образом,

$$f'_h(a) \overset{def}{=} \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}. \tag{10.1}$$

Пример 10.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, h — единичный вектор в пространстве $\mathbb{R}^2$. Найдем f'_h в точке $(0, 0)$, если*

$a)$ $f(x, y) = \sin(2x+y)$, $\quad b)$ $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{R},\ 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$ $\quad c)$ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Единичный вектор h в пространстве $\mathbb{R}^2$ задается равенством: $h = (\cos\theta, \sin\theta)$, где $\theta \in [0; 2\pi)$. Поэтому $\varphi(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$.

$a)$ Так как $\varphi(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \sin(2t\cos\theta + t\sin\theta)$, то

$$\varphi'(t) = \cos(2t\cos\theta + t\sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta).$$

Поэтому $f'_h(0, 0) = 2\cos\theta + \sin\theta$.

$b)$ Из определения функции f следует, что для каждого $\theta \in [0; 2\pi)$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $|t| < \delta$ справедливо равенство $\varphi(t) = 0$. Поэтому $\varphi'(0) = 0$ при каждом $\theta \in [0; 2\pi)$. По определению 10.1 получаем $f'_h(0, 0) = 0$.

$c)$ На основании определения функции f имеем $\varphi(t) = \sqrt{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = |t|$ для каждого $\theta \in [0; 2\pi)$. А так как эта функция в точке ноль не дифференцируема, то $f'_h(0, 0)$ не существует.

Как видим, производная в точке по направлению может принимать различные значения по разным направлениям, может быть одинаковой по всем направлениям, а может и не существовать.

Теорема 10.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| = 1$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Если существуют $f'_h(a)$ и $g'_h(a)$, то существуют и:*

1) $(cf)'_h(a)$ *и* $(cf)'_h(a) = cf'_h(a)$, $c \in \mathbb{R}$;

2) $(f \pm g)'_h(a)$ *и* $(f \pm g)'_h(a) = f'_h(a) \pm g'_h(a)$;

3) $(f \cdot g)'_h(a)$ *и* $(f \cdot g)'_h(a) = f'_h(a)g(a) + f(a)g'_h(a)$;

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'_h(a)$ *и* $\left(\frac{f}{g}\right)'_h(a) = \frac{f'_h(a)g(a) - f(a)g'_h(a)}{g^2(a)}$, *если* $g(a) \neq 0$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(a+th)$, $\psi(t) = g(a+th)$. Из условий теоремы следует, что функции φ и ψ удовлетворяют всем требованиям теоремы об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями одной вещественной переменной, из которой и вытекает справедливость утверждений доказываемой теоремы. ■

Определение 10.2. *Пусть X — нормированное пространство, a и b — его элементы. Множество*
$$\{x \in X : x = (1-t)a + tb,\ 0 \le t \le 1\}$$
называют отрезком и обозначают $[a, b]$.

Теорема 10.2. **(Лагранж)** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $[a,b] \subset D$, $h = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$. Если функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и в любой точке $x \in (a,b)$ существует $f'_h(x)$, то найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что*
$$f(b) - f(a) = f'_h(c)\,\|b-a\|\,. \tag{10.2}$$

Доказательство. Положим $\alpha = \|b-a\|$ и определим функцию $\varphi : [0,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\varphi(t) = f(a+th)$. Легко проверить, что когда аргумент t функции φ пробегает сегмент $[0,\alpha]$, аргумент $a+th$ функции f пробегает отрезок $[a,b]$. По этой причине функция φ непрерывна на сегменте $[0,\alpha]$, как суперпозиция непрерывных функций, и поскольку при $t \in (0,\alpha)$
$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{f(a+(t+\tau)h)-f(a+th)}{\tau} = \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{f((a+th)+\tau h)-f(a+th)}{\tau} = f'_h(a+th),\end{aligned}$$
то φ и дифференцируема в интервале $(0,\alpha)$.

По теореме Лагранжа для функций одной вещественной переменной найдется число $\xi \in (0,\alpha)$ такое, что
$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)\alpha.$$
Отсюда, полагая $c = a + \xi h$ и учитывая, что $\varphi'(\xi) = f'_h(c)$, получаем (10.2). ■

Определение 10.3. *Производную функции f в точке a в направлении i-го координатного орта e_i называют частной производной функции f в точке a по переменной x_i и обозначают $f'_{e_i}(a)$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, или $f'_{x_i}(a)$.*

Таким образом, если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то по определению 10.1, получаем
$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \\ = &\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{t} = \\ = &\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{x_i-a_i}.\end{aligned} \tag{10.3}$$

Нетрудно видеть, что формула (10.3) для нахождения частной производной ничем не отличается от известной формулы для нахождения производной функции одной вещественной переменной. Поэтому правила нахождения частных производных остаются теми же, что и для функций одной переменной. Нужно лишь помнить, что при дифференцировании по x_i остальные переменные остаются постоянными.

Дифференциал и полная производная

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — m-мерная вектор-функция. Возьмем произвольную точку $a \in D$ и $\delta > 0$ такое, чтобы δ-окрестность $B(a, \delta)$ точки a содержалась в области D.

Возьмем любой отличный от нулевого вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ с нормой, меньшей δ. Тогда точка $a + h \in B(a, \delta)$, следовательно, $a + h \in D$.

В дальнейшем вектор h будем называть приращением аргумента вектор-функции f в точке a, а вектор $\Delta f(a)(h) = f(a + h) - f(a)$ — приращением вектор-функции f в точке a, соответствующим приращению аргумента h.

Определение 10.4. *Вектор-функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемой в точке a, если существует линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0. \tag{10.4}$$

Соотношение (10.4) можно переписать в виде

$$\Delta f(a)(h) = Ah + r(h), \tag{10.5}$$

где $r(h) = o\big(\|h\|\big)$ при $h \to 0$, то есть

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{10.6}$$

При $h = 0$ функция r неопределена, поэтому далее будем предполагать, что $r(0) = 0$.

Ввиду (10.6) равенство (10.5) можно еще записать в виде

$$\Delta f(a)(h) = Ah + o\big(\|h\|\big). \tag{10.7}$$

Предложение 10.1. *Условие дифференцируемости (10.4) может быть записано в следующей форме:*

$$\Delta f(a)(h) = Ah + \alpha(h)h, \tag{10.8}$$

где $\alpha(h) = (\alpha_{ij}(h))$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ — матрица, каждый элемент которой есть бесконечно малая при $h \to 0$.

Доказательство. Пусть условие дифференцируемости записано в виде (10.5). В этой записи $r(h)$ есть m-мерный вектор, то есть

$$r(h) = (r_1(h), r_2(h), \dots, r_m(h)) \in \mathbb{R}^m.$$

Преобразуем каждую его координату $r_i(h)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$:

$$r_i(h) = \frac{r_i(h)}{\|h\|^2}\|h\|^2 = \frac{r_i(h)}{\|h\|^2}\sum_{j=1}^{n} h_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_i(h)}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}h_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(h)h_j,$$

где

$$\alpha_{ij}(h) = \frac{r_i(h)}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{10.9}$$

Из соотношения (10.6) следует, что первый сомножитель в правой части (10.9) стремится к нулю, когда $h \to 0$. А поскольку второй сомножитель в той же части (10.9) ограничен (по абсолютной величине он не превосходит единицы), то $\alpha_{ij}(h) \to 0$ при $h \to 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, представление (10.8) справедливо.

Обратно, пусть имеет место (10.8). Определим вектор $r(h) = (r_1(h), r_2(h), \ldots, r_m(h))$, полагая

$$r_i(h) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(h) h_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ справедлива оценка

$$\frac{|r_i(h)|}{\|h\|} = \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(h) \frac{h_j}{\|h\|} \right| \le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}(h)| \frac{|h_j|}{\|h\|} \le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}(h)|.$$

На основании этой оценки и учитывая, что конечная сумма бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой величиной, заключаем, что $\dfrac{|r_i(h)|}{\|h\|} \to 0$, когда $h \to 0$, при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует, что $r(h) = o(\|h\|)$. Это означает, что вектор-функция f дифференцируема в точке x. Утверждение доказано. ■

Докажем теперь, что оператор, участвующий в условии дифференцируемости (10.4), определяется единственным образом.

Теорема 10.3. *Пусть D и f — те же, что в определении 10.4, и равенство (10.4) выполняется с $A = A_1$ и с $A = A_2$. Тогда $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Пусть $B = A_1 - A_2$. Тогда неравенство

$$\|Bh\| \le \|f(x+h) - f(x) - A_1 h\| + \|f(x+h) - f(x) - A_2 h\|$$

показывает, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|Bh\|}{\|h\|} = 0. \tag{10.10}$$

Возьмем произвольный отличный от нуля элемент $y \in \mathbb{R}^n$ и положим $h = ty$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $h \to 0$ тогда и только тогда, когда $t \to 0$. Поэтому из (10.10) следует, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|B(ty)\|}{\|ty\|} = 0. \tag{10.11}$$

Но так как оператор B — линейный, то

$$\frac{\|B(ty)\|}{\|ty\|} = \frac{\|t(By)\|}{\|ty\|} = \frac{|t|\,\|By\|}{|t|\,\|y\|} = \frac{\|By\|}{\|y\|},$$

то есть отношение $\dfrac{\|B(ty)\|}{\|ty\|}$ не зависит от t. Поэтому из (10.11) получаем

$$\frac{\|By\|}{\|y\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\|B(ty)\|}{\|ty\|} = 0.$$

Следовательно, $\|By\| = 0$, а поэтому и $By = 0$. Это означает, что B является нулевым оператором, что влечет равенство $A_1 = A_2$. ■

Пусть m-мерная вектор-функция f дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда для её приращения в точке a выполняется условие (10.5).

Определение 10.5. *Дифференциалом (полным дифференциалом) вектор-функции f в точке a называют первое слагаемое в правой части (10.5) и обозначают его символом $df(a)(h)$.*

Следовательно,

$$df(a)(h) = Ah.$$

Таким образом, дифференциал функции в точке является главной, линейной относительно приращения аргумента, частью приращения функции в этой точке.

Определение 10.6. *Матрицу $\widetilde{A}$ оператора A, удовлетворяющего условию (10.4), называют полной производной или просто производной вектор-функции f в точке a и обозначают $f'(a)$.*

Таким образом, имеем

$$f'(a) = \widetilde{A},$$

$$df(a)(h) = Ah = \widetilde{A} \cdot h = f'(a) \cdot h, \tag{10.12}$$

а также

$$\Delta f(a)(h) = f'(a) \cdot h + r(h), \tag{10.13}$$

где $r(h) = o\big(\|h\|\big)$ при $h \to 0$.

Пример 10.2. *Найдём производную и дифференциал функции $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, заданной равенством $f(x) = c$.*

Возьмём произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любой, отличный от нуля, вектор $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\Delta f(x)(h) = f(x+h) - f(x) = c - c = Oh + r(h),$$

где O — нулевая матрица размера $1 \times n$, $r(h) \equiv 0$.

Следовательно, $f'(x) = (0, 0, \ldots, 0)$, $df(x)(h) = f'(x)h \equiv 0$.

Пример 10.3. *Найдём производную и дифференциал функции $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, заданной равенством*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Возьмём произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$ и любой ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\Delta f(x)(h) = f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i + h_i) - \sum_{i=1}^{n} c_ix_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_ih_i = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix} + r(h),$$

где $r(h) \equiv 0$.

Следовательно, $f'(x) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $df(x)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_ih_i$.

Пример 10.4. *Найдём производную вектор-функции $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданной равенством*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 - x_2^2\right).$$

Возьмём произвольную точку $x \in \mathbb{R}^2$, любое отличное от нуля приращение аргумента $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ и найдём приращение $\Delta f(x)(h)$ вектор-функции f в точке x, соответствующее приращению аргумента h. Имеем:

$$\begin{aligned} &\Delta f(x)(h) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \\ &= \big((x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2,\ (x_1 + h_1)^2 - (x_2 + h_2)^2\big) - \big(x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 - x_2^2\big) = \\ &= \big(2x_1h_1 + 2x_2h_2 + h_1^2 + h_2^2, 2x_1h_1 - 2x_2h_2 + h_1^2 - h_2^2\big) = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \big(h_1^2 + h_2^2,\ h_1^2 - h_2^2\big)\,. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Оценим норму вектора $r(h) = (h_1^2 + h_2^2, h_1^2 - h_2^2)$. Так как каждая координата этого вектора не превосходит $\|h\|^2$, то

$$\|r(h)\| \le \|h\|^2\sqrt{2} = o(\|h\|).$$

Отсюда и из представления (10.14) заключаем, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 10.4. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Если вектор-функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in D$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке x, то согласно (10.5) её приращение $\Delta f(x)(h)$ может быть представлено в виде (10.5)

Так как $r(h) = o\big(\|h\|\big)$, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех h с $\|h\| < \delta_1$ справедливо неравенство

$$\|r(h)\| < \|h\|\,. \tag{10.15}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положительное δ, удовлетворяющее условию

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{\|A\| + 1}, \delta_1\right\}.$$

Возьмём любой, отличный от нуля, вектор $h \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию $\|h\| < \delta$. Теперь, используя (10.15) и ограниченность оператора A (предложение 9.14), выводим

$$\begin{aligned} \|\Delta f(x)(h)\| = \|Ah + r(h)\| \le \|Ah\| + \|r(h)\| \le \\ \le \|A\|\,\|h\| + \|h\| = (\|A\| + 1)\,\|h\| < (\|A\| + 1)\,\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Последнее означает, что f непрерывна в точке x. ■

Обратное утверждение неверно, то есть функция f может быть непрерывной в точке x, но не дифференцируемой в ней.

Пример 10.5. *Функция $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, непрерывна, но не дифференцируема в точке* $(0, 0)$.

Предположим противное, то есть что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$. Тогда существует линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\Delta f\left((0,0)\right)(h) = f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = \sqrt{|h_1h_2|} = A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right). \tag{10.16}$$

Сначала покажем, что A есть нулевой оператор. Пусть $\widetilde{A} = (a_1\ a_2)$ — матрица оператора A. Тогда равенство (10.16) можно записать в следующем виде:

$$\Delta f\left((0,0)\right)(h) = a_1h_1 + a_2h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right). \tag{10.17}$$

Положив в этом равенстве $h_2 = 0$, получаем $a_1h_1 + o\left(|h_1|\right) = 0$ или $a_1 = \dfrac{o\left(|h_1|\right)}{h_1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $h_1 \to 0$ заключаем, что $a_1 = 0$. Аналогично получаем, что $a_2 = 0$. Поэтому, оператор A является нулевым оператором.

Таким образом, (10.17) имеет следующий вид:

$$\Delta f\left((0,0)\right)(h) = o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right).$$

Но это равенство неверно, поскольку, например, при $h_2 = h_1$ оно преобразуется в невыполнимое равенство $|h_1| = o\left(|h_1|\right)$. А это означает, что сделанное нами предположение о дифференцируемости функции f в точке $(0,0)$ неверно. Следовательно, функция f в точке $(0,0)$ не дифференцируема.

Теорема 10.5. (**Необходимое условие дифференцируемости**) *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Если вектор-функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in D$, то в точке x существуют частные производные всех координатных функций по всем переменным $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и*

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке x, то существует

$$f'(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и приращение f в этой точке имеет вид

$$f(x+h) - f(x) = \left(f_1(x+h) - f_1(x),\ f_2(x+h) - f_2(x),\ \ldots\ ,\ f_m(x+h) - f_m(x)\right) =$$

$$= f'(x)h + r(h) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(h) \\ r_2(h) \\ \ldots \\ r_m(h) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}h_j + r_1(h),\quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j}h_j + r_2(h),\quad \ldots\ ,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{mj}h_j + r_m(h)\right).$$

Таким образом, имеем

$$f_i(x+h)-f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_j+r_i(h),\quad i=1,2,\ldots,m. \tag{10.19}$$

Теперь возьмём орт e_j, $j=1,2,\ldots,n$, и положим $h=te_j$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$. Тогда (10.19) примет вид

$$f_i(x+te_j)-f_i(x)=a_{ij}t+r_i(te_j),\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Разделим обе части этого равенства на t, а затем перейдем к пределу при $t\to 0$. В результате получаем

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t}=a_{ij}+\lim_{t\to 0}\frac{r_i(te_j)}{t}=a_{ij}$$

для всех $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,n$. ■

Производную отображения f в точке x, то есть матрицу (10.18), называют *матрицей Остроградского-Якоби* или *матрицей Якоби*.

Если f — скалярная функция, то матрица Остроградского-Якоби состоит из одной строки. Наряду с матрицей $f'(x)$ в этом случае рассматривают ещё вектор, составленный из частных производных функции f, называемый градиентом функции f и обозначаемый символами $\mathrm{grad} f(x)$ (градиент $f(x)$) или $\nabla f(x)$ (набла $f(x)$). Таким образом, если функция $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x\in D$, то

$$\mathrm{grad} f(x)=\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right). \tag{10.20}$$

В случае, когда $m=n$, определитель матрицы (10.18) называют *определителем Якоби* или *якобианом* отображения f в точке x и обозначают

$$J(x)=\frac{\mathcal{D}\left(f_1,f_2,\ldots,f_n\right)}{\mathcal{D}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}(x).$$

Теорема 10.6. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Если скалярная функция $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x\in D$, то она имеет в этой точке производную по любому направлению h. При этом*

$$f'_h(x)=\left(\nabla f(x),h\right). \tag{10.21}$$

Доказательство. Используя (10.1), (10.5), (10.6) и (10.20), выводим

$$\begin{aligned}f'_h(x)=&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{A(th)+r(th)}{t}=\\=&\lim_{t\to 0}\frac{A(th)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{r(th)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\,(Ah)}{t}=Ah=f'(x)h=\left(\mathrm{grad} f(x),h\right).\end{aligned}$$

■

Выражая скалярное произведение, стоящее в правой части (10.21) через координаты перемножаемых векторов, получаем следующее утверждение.

Следствие 10.1. *Пусть выполняются условия теоремы 10.6. Тогда по любому направлению h*

$$f'_h(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j, \tag{10.22}$$

где $h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$.

Аналогично, исходя из равенства (10.12) и учитывая (10.18), (10.20), получаем следующее утверждение.

Следствие 10.2. *Пусть выполняются условия теоремы 10.6. Тогда для каждого, отличного от нулевого, вектора $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление*

$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j. \tag{10.23}$$

Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Косинус угла α_i между вектором h и координатной осью Ox_i или, что то же самое, вектором h и вектором e_i может быть вычислен по формуле

$$\cos \alpha_i = \frac{(h, e_i)}{\|h\| \, \|e_i\|} = \frac{h_i}{\|h\|}.$$

Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора h и, как нетрудно проверить

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

Таким образом,

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = \|h\| (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \ldots, \cos \alpha_n).$$

В частности, если h — единичный вектор, то $h = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \ldots, \cos \alpha_n)$.

Принимая во внимание сделанное замечание, формулы (10.22), (10.23) можно переписть в виде

$$f'_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cos \alpha_j, \tag{10.24}$$

$$df(x)(h) = \|h\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cos \alpha_j. \tag{10.25}$$

Сравнивая правые части (10.24) и (10.25), получаем равенство

$$df(x)(h) = \|h\| f'_g(x), \ g = \frac{h}{\|h\|}. \tag{10.26}$$

Теорема 10.7. (**Достаточное условие дифференцируемости**) *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывная на D вектор-функция и пусть в некоторой окрестности точки $x \in D$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ всех координатных функций по всем переменным, каждая из которых непрерывна в самой точке x. Тогда вектор-функция f дифференцируема в точке x.*

Доказательство. Пусть $B(x, \delta_0) \subset D$ — окрестность точки x в которой существуют частные производные всех координатных функций f_i по всем переменным x_j.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как все $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в точке x, найдется $\delta > 0$ ($\delta \le \delta_0$) такое, что для всех $y \in B(x, \delta)$ при любых $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}}. \tag{10.27}$$

Возьмем произвольный, неравный нулю, вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, но такой, чтобы $x + h \in B(x, \delta)$, и определим векторы v_j, $j = 0, 1, \dots, n$, полагая

$$v_0 = 0,\ v_j = v_{j-1} + h_j e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где e_j — j-ый координатный орт в $\mathbb{R}^n$. Так как $x + h \in B(x, \delta)$, то $x + v_j \in B(x, \delta)$ при любом $j = 0, 1, \dots, n$.

Теперь возьмем произвольный номер $i = 1, 2, \dots, m$ и покажем, что

$$f_i(x+h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \Big(f_i(x + v_j) - f_i(x + v_{j-1}) \Big). \tag{10.28}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f_i(x+h) - f_i(x) =& f_i(x + v_n) - f_i(x + v_0) = \\ = \Big(f_i(x + v_n) - f_i(x + v_{n-1}) \Big) &+ \Big(f_i(x + v_{n-1}) - f_i(x + v_{n-2}) \Big) + \ldots + \\ + \Big(f_i(x + v_2) - f_i(x + v_1) \Big) &+ \Big(f_i(x + v_1) - f_i(x + v_0) \Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(f_i(x + v_j) - f_i(x + v_{j-1}) \Big). \end{aligned}$$

Возьмём произвольный номер $j = 1, 2, \dots, n$ и рассмотрим функцию $\varphi : [0; h_j] \to \mathbb{R}$, определённую равенством $\varphi(t) = f_i(x + v_{j-1} + te_j)$. В силу условий теоремы функция φ непрерывна на отрезке $[0; h_j]$ и дифференцируема в интервале $(0; h_j)$, так как для любого $t \in (0; h_j)$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi(t + \tau) - \varphi(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f_i(x + v_{j-1} + te_j + \tau e_j) - f_i(x + v_{j-1} + te_j)}{t} = \\ = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + te_j). \end{aligned}$$

Следовательно, функция φ на $[0; h_j]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.13 (Лагранжа), согласно которой найдётся $\theta_j \in (0; 1)$ такое, что

$$\varphi(h_j) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_j h_j) h_j.$$

Учитывая определение функции φ, имеем:

$$f_i(x + v_j) - f_i(x + v_{j-1}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j\big) h_j.$$

Отсюда и из (10.28) получаем

$$\begin{aligned} f_i(x+h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j) h_j = \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) h_j. \end{aligned} \tag{10.29}$$

Поскольку $x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j \in B(x, \delta)$ при каждом $j = 1, 2, \dots, n$, из (10.27) следует, что

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}}.$$

Используя это неравенство и неравенство Коши-Буняковского, из (10.29) выводим

$$\begin{aligned} \left| f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j \right| &< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}} \left| h_j \right| = \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}} \left| h_j \right| \cdot 1 &\le \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} h_j^2} \cdot \sqrt{n} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \left\| h \right\|, \end{aligned} \tag{10.30}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть A обозначает оператор, заданный матрицей Остроградского-Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$. Применяя (10.30), выводим

$$\begin{aligned} \left\| f(x+h) - f(x) - Ah \right\| &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \\ &< \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon \left\| h \right\|}{\sqrt{m}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \left\| h \right\|. \end{aligned}$$

Последнее означает, что f дифференцируема в точке x. ■

Пример 10.6. *Найдем производную вектор-функции $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданной равенством*

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2, x^2 - y^2\right).$$

Возьмем любую точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и найдем частные производные обеих координатных функций $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ и $f_2(x, y) = x^2 - y^2$. Получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = -2y.$$

Очевидно, что функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 10.7. Следовательно, функция f дифференцируема в точке (x, y), а согласно теореме 10.5

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

Сравните полученный результат с результатом примера 10.4.

Теорема 10.8. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Вектор-функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in D$ тогда и только тогда, когда каждая её координатная функция дифференцируема в точке x.*

Доказательство. Необходимость. Так как вектор-функция f дифференцируема в точке $x \in D$, то, согласно (10.13), имеет место равенство

$$\Delta f(x)(h) = f'(x)h + r(h),$$

где $r(h) = o\left(\|h\|\right)$ при $h \to 0$. Учитывая (10.18), распишем это векторное равенство покоординатно. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$\Delta f_i(x)(h) = A_i h + r_i(h), \tag{10.31}$$

где A_i — линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, матрицей которого является i-я строка матрицы $f'(x)$. Поскольку вектор $r(h) = o\left(\|h\|\right)$, то и любая его координата представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $\|h\|$ при $h \to 0$. Поэтому равенства (10.31) означают, что каждая координатная функция f_i дифференцируема в точке x.
Достаточность. Так как каждая координатная функция f_i дифференцируема в точке x, то имеют место равенства (10.31) с $r_i(h) = o\left(\|h\|\right)$. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица определяет линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\Delta f(x)(h) = Ah + r(h),$$

где $r(h) = (r_1(h), r_2(h), \ldots, r_1(m))$.

Из условия $r_i(h) = o\left(\|h\|\right)$ следует, что и $r(h) = o\left(\|h\|\right)$ при $h \to 0$. Поэтому, согласно определению 10.4, вектор-функция f дифференцируема в точке x. ■

Геометрическая интерпретация дифференцируемости скалярной функции

Часто бывает полезна геометрическая интерпретация того или иного понятия. Например, как было выяснено раннее, в случае функции $y = f(x)$ одной переменной, дифференцируемость функции f в точке x_0 влечет существование касательной к графику функции f в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$. Мы покажем, что подобный факт имеет место и в случае скалярной функции двух переменных.

Итак, пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, f — скалярная функция, определенная на D, то есть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, и L — поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, то есть

$$L = \left\{(x, y, z) :\ (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\right\}.$$

Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$. Этой точке на поверхности L соответствует точка $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Определение 10.7. *Плоскость* Π, *проходящую через точку* N_0 *поверхности* L, *называют касательной плоскостью к поверхности* L *в точке* N_0, *если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку* N_0 *и любую точку* N *поверхности* L, *стремится к нулю, когда точка* N, *оставаясь на поверхности, стремится к точке* N_0.

Заметим, что если в точке N_0 поверхности L существует касательная плоскость Π, то касательная к любой кривой, расположенной на поверхности L и проходящей через точку N_0, лежит в плоскости Π.

Предложение 10.2. *Пусть область D, функция f, поверхность L, точки M_0 и N_0 определены выше. Если функция f дифференцируема в точке M_0, то в точке N_0 существует касательная плоскость к поверхности L. При этом её уравнение имеет вид*

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_{0)}, \tag{10.32}$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{10.33}$$

Доказательство. Возьмем произвольное отличное от нуля приращение $h = (\Delta x, \Delta y)$ аргумента функции f, но такое, чтобы точка (x, y), где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, лежала в области D. Этому приращению аргумента соответствует приращение

$$\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

функции f. Так как функция f дифференцируема в точке M_0, то её приращение Δz можно записать в следующем виде:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\|h\|), \tag{10.34}$$

где, в силу необходимых условий дифференцируемости, A и B определяются равенствами (10.33), а $\|h\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Теперь рассмотрим плоскость Π, заданную уравнением (10.32). Очевидно, что эта плоскость проходит через точку N_0 и имеет нормальный вектор $\mathbf{n} = \{A, B, -1\}$.

Докажем, что плоскость Π является касательной плоскостью к поверхности L в точке N_0. Ввиду произвольности выбора вектора h, для этого нужно показать, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точки N_0 и $N(x, y, z)$ (здесь $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$) поверхности L, стремится к нулю, когда точка N стремится к точке N_0.

Очевидно, что угол γ между плоскостью Π и секущей, проходящей через точки N_0 и N стремится к нулю тогда и только тогда, когда угол φ между вектором $\mathbf{n}$ и секущей N_0N к стремится $\pi/2$.

Заметим, что поскольку функция f дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в ней. Следовательно, её приращение Δz стремится к нулю, когда $h \longrightarrow 0$. Отсюда вытекает, что точка N стремится к точке N_0 тогда и только тогда, когда $h \longrightarrow 0$. Поэтому далее будем устремлять к нулю приращение $h = (\Delta x, \Delta y)$ аргумента функции f, а не точку N к точке N_0.

Вычислим теперь косинус угла φ, как косинус угла между векторами $\mathbf{n}$ и $\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$. Находим

$$\cos\varphi = \frac{A\Delta x + B\Delta y - \Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}\,.$$

Отсюда, используя (10.34), получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta z}{\|h\|}\right)^2}} \cdot \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}.$$

Так как второй множитель стремится к нулю при $h \to 0$, а первый не превосходит единицы, то $\lim\limits_{h\to 0} \cos\varphi = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Ввиду произвольности выбора вектора h (приращения аргумента функции f), последнее равенство означает, что плоскость Π является касательной плоскостью к поверхности L в точке N_0. ■

Пример 10.7. *Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой*

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}\,.$$

Так как касательная плоскость **перпендикулярна** к прямой, то направляющий вектор $\mathbf{a} = \{2, 1, -1\}$ этой прямой является нормальным вектором касательной плоскости.

Пусть касательная плоскость к поверхности $z = xy$ проходит через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на этой поверхности. Тогда нормальный вектор касательной плоскости имеет вид

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\} = \{y_0, x_0, -1\}\,.$$

Сравнивая координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$, получаем $y_0 = 2$, $x_0 = 1$. Поскольку точка N_0 лежит на поверхности, то $z_0 = x_0 y_0 = 2$. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$z - 2 = 2(x-1) + (y-2),$$

или

$$2x + y - z - 2 = 0.$$

Теорема 10.9. (**Дифференцирование сложной функции**) *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, дифференцируемая в точке $x_0 \in D$, G — область в $\mathbb{R}^m$, содержащая $f(D)$, $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ — вектор-функция, дифференцируемая в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$, определенная равенством $F(x) = g\left(f(x)\right)$, дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0). \tag{10.35}$$

Доказательство. Так как функции f и g дифференцируемы соответственно в точках x_0 и y_0, то их приращения в этих точках могут быть представлены в виде

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + u(x), \quad g(y) - g(y_0) = g'(y_0)\cdot(y - y_0) + v(y), \tag{10.36}$$

где

$$u(x) = o\left(\|x - x_0\|\right), \quad x \to x_0, \tag{10.37}$$

$$v(y) = o\left(\|y - y_0\|\right), \quad y \to y_0. \tag{10.38}$$

Нужно доказать, что

$$F(x) - F(x_0) = F'(x_0)\cdot(x - x_0) + r(x),$$

где $F'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$, а $r(x) = o(\|x - x_0\|)$, $x \to x_0$, или, что то же самое,

$$r(x) = F(x) - F(x_0) - g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot(x - x_0) = o(\|x - x_0\|),\ x \to x_0. \tag{10.39}$$

Преобразуем (10.39), пользуясь определением функции F и равенствами (10.36).

$$\begin{aligned} r(x) = g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(y_0)\cdot(f(x)-f(x_0)) + \\ + g'(y_0)\cdot(f(x)-f(x_0)) - g'(y_0)\cdot f'(x_0)(x-x_0) = \\ = (g(y) - g(y_0) - g'(y_0)\cdot(y-y_0)) + g'(y_0)\,(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)) = \\ = v(y) + g'(y_0)\cdot u(x). \quad (10.40) \end{aligned}$$

Остаётся исследовать поведение при $x \to x_0$ каждого слагаемого в правой части формулы (10.40). Займёмся сначала $v(y)$. Так как, ввиду (10.37), $u(x) = o(\|x-x_0\|)$, то найдётся такая окрестность точки x_0, в которой будет выполняться неравенство $\|u(x)\| \le \|x-x_0\|$. Но тогда в этой окрестности, используя первое из равенств (10.36), получаем оценку

$$\|y-y_0\| = \|f(x)-f(x_0)\| \le \|f'(x_0)\|\cdot\|x-x_0\| + \|x-x_0\| = (\|f'(x_0)\|+1)\cdot\|x-x_0\|,$$

из которой вытекает, что $\|y-y_0\| = O(\|x-x_0\|)$ при $x \to x_0$, следовательно,

$$v(y) = o(\|y-y_0\|) = o(O(\|x-x_0\|)) = o(\|x-x_0\|),\ x \to x_0. \quad (10.41)$$

Займёмся теперь вторым слагаемым. Так как $g'(y_0)$ — числовая матрица, а компоненты вектора $u(x)$ есть величины порядка $o(\|x-x_0\|)$, то и компоненты вектора $g'(y_0)\cdot u(x)$, как конечные линейные комбинации величин порядка $o(\|x-x_0\|)$, также будут величинами порядка $o(\|x-x_0\|)$. Следовательно,

$$g'(y_0)\cdot u(x) = o(\|x-x_0\|),\ x \to x_0. \quad (10.42)$$

Из (10.41) и (10.42) следует (10.39). ■

Следствие 10.3. *При выполнении условий теоремы 10.9 частные производные* $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$ *координатных функций вектор-функции* $F = g\circ f$ *в точке* x *находятся по формулам*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(y)\cdot\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(x), \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad j = 1,2,\ldots,n. \quad (10.43)$$

Доказательство. По теореме 10.9 функция F дифференцируема в точке x и ее производная находится по формуле (10.35). Частная производная $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$ находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы $F'(x)$. Поэтому, используя формулу (10.18), находим $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$ как произведение i-ой строки матрицы $g'(y)$ на j-ый столбец матрицы $f'(x)$:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_1}(y), \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(y), \ldots, \frac{\partial g_i}{\partial y_m}(y)\right)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial y_l}(y)\cdot\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(x).$$

■

Справедливость следующего утверждения вытекает из правила умножения определителей.

Следствие 10.4. *Если выполнены условия теоремы 10.9 и $k = m = n$, то*

$$\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x) = \frac{\mathcal{D}(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(y) \cdot \frac{\mathcal{D}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x),$$

то есть якобиан суперпозиции двух дифференцируемых отображений равен произведению якобианов этих отображений.

Пример 10.8. *Найдем производную сложной функции $F = g \circ f$, если $f(x, y) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$, $g(u, v) = u^2 + v$.*

Возьмем любую точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такую, что $y \neq 0$. Для нахождения производной функции F будем применять теорему 10.9 о производной сложной функции. Поэтому нужно убедиться, что функция f дифференцируема в выбранной точке (x, y), а функция g — в точке (u, v), где $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Поскольку

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 1,$$

то нетрудно убедиться в том, что каждая из функций f и g удовлетворяет всем условиям теоремы 10.7, согласно которой обе эти функции дифференцируемы в соответствующих точках и, следовательно, удовлетворяют условиям теоремы 10.9.

Найдем частные производные функции F. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) =& \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2uy + \frac{1}{y} = 2xy^2 + \frac{1}{y};\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) =& \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2ux + \frac{1}{y} = 2x^2y - \frac{x}{y^2}.\end{aligned}$$

По теореме 10.5 находим

$$F'(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right) = \left(2xy^2 + \frac{1}{y}, 2x^2y - \frac{x}{y^2}\right).$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, дифференцируемая в точке $x \in D$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, отличный от нулевого. Договоримся называть дифференциалом dx_j независимой переменной x_j приращение h_j этой переменной, то есть полагать

$$dx_j = h_j.$$

Тогда, полагая $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, имеем

$$df(x)(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j = f'(x) \cdot dx. \tag{10.44}$$

Докажем свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Предложение 10.3. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^m$, $\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — функция, дифференцируемая в точке $t \in G$, D — область в $\mathbb{R}^n$, содержащая $\psi(G)$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, дифференцируемая в точке $x = \psi(t)$. Тогда дифференциал суперпозиции $F = f \circ \psi$ имеет вид*

$$dF(t)(dt) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j = f'(x) \cdot dx,$$

где $dx_j = d\psi_j(dt)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$.

Доказательство. Ввиду (10.44),

$$d\psi_j(t)(dt) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_i}(t) dt_i, \tag{10.45}$$

$$dF(t)(dt) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial t_i}(t) dt_i. \tag{10.46}$$

По следствию 10.3 (формулы 10.43)

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial t_i}(t).$$

Подставляя это представление частной производной в (10.46) и учитывая (10.45), получаем

$$dF(t)(dt) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial t_i}(t) dt_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_i}(t) dt_i \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d\psi_j(t)(dt) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j = f'(x) \cdot dx.$$

■

Далее мы будем доказывать теорему Лагранжа для m-мерной вектор-функции n переменных. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 10.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, дифференцируемая в точке $a \in D$, $v \in \mathbb{R}^m$ — фиксированный элемент. Тогда отображение $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $g(x) = (f(x), v)$, дифференцируемо в точке a и справедливо равенство*

$$dg(a)(h) = (df(a)(h), v). \tag{10.47}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемое равенством $\varphi(u) = (u, v)$. В силу свойств скалярного произведения отображение φ линейно и, как показано в примере 10.3, линейное отображение дифференцируемо во всех точках пространства $\mathbb{R}^m$ и $\varphi'(u) = v$. Поэтому, ввиду (10.12), имеем

$$d\varphi(u)(h) = \varphi'(u) \cdot h = v \cdot h = (h, v) = \varphi(h).$$

Из определений отображений g и φ видно, что для всех $x \in D$

$$g(x) = \varphi(f(x)) = (\varphi \circ f)(x).$$

А поскольку вектор-функция f дифференцируема в точке $a \in D$, а функция φ дифференцируема в каждой точке пространства $\mathbb{R}^m$, в частности, в точке $f(a)$, то по теореме

10.9 отображение g дифференцируемо в точке a. Поэтому, ввиду инвариантности формы дифференциала первого порядка, имеем

$$dg(a)(h) = d(\varphi \circ f)(a)(h) = d\varphi(f(a))(df(a)(h)) = \varphi(df(a)(h)) = (df(a)(h), v).$$

■

Теорема 10.10. **(Лагранж)** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $[a,b] \subset D$. Если отображение f непрерывно на сегменте $[a,b]$ и дифференцируемо в интервале (a,b), то найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \|f'(c)(b-a)\|. \tag{10.48}$$

Доказательство. Если $f(b) = f(a)$, то формула (10.48) верна при любом $c \in (a,b)$, поэтому будем считать, что $f(b) \ne f(a)$. Тогда $f(b) - f(a) \ne 0$ и $\|f(b) - f(a)\| > 0$.

Определим функцию $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая $g(x) = (f(x), f(b) - f(a))$. Функция g, очевидно, непрерывна на сегменте $[a,b]$, и по лемме 10.1 дифференцируема в интервале (a,b). Применим к функции g и вектору $h = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$ теорему Лагранжа для скалярной функции (теорема 10.2). По этой теореме найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$g(b) - g(a) = g'_h(c)\,\|b-a\|. \tag{10.49}$$

По следствиям 10.1 и 10.2 (формулы (10.22) и (10.23)), имеем

$$g'_h(c) = dg(c)(h) = \frac{1}{\|b-a\|} dg(c)(b-a).$$

Поэтому формула Лагранжа (10.49) может быть записана в следующем виде:

$$g(b) - g(a) = dg(c)(b-a), \quad c \in (a,b).$$

Используя теперь равенство (10.47), получаем:

$$g(b) - g(a) = (df(c)(b-a), f(b) - f(a)). \tag{10.50}$$

С другой стороны, на основании определения функции g, имеем

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= (f(b), f(b) - f(a)) - (f(a), f(b) - f(a)) = \\ &= (f(b) - f(a), f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|^2. \end{aligned} \tag{10.51}$$

Сравнивая (10.50) и (10.51), получаем:

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \big(df(c)(b-a), f(b) - f(a)\big).$$

К правой части этого равенства применим неравенство Коши-Буняковского (9.25). Тогда,

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \le \|df(c)(b-a)\|\,\|f(b) - f(a)\|.$$

Сократим обе части этого неравенства на положительный множитель $\|f(b) - f(a)\|$ и получим (10.48). ■

10.2 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f имеет в области D производную по направлению h, если она имеет её в каждой точке области D.

Пусть h и g два направления (не обязательно различных) и функция f имеет в области D производную по направлению h.

Определение 10.8. *Производную функции f'_h в точке $a \in D$ по направлению g (если она существует) будем называть производной второго порядка функции f в точке a по направлениям h и g и обозначать одним из следующих символов:*

$$f''_{hg}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial g \partial h}(a), \quad \partial^2_{hg} f(a).$$

В частности, если $h = e_i$ и $g = e_j$, соответственно i-ый и j-ый координатные орты, то $f''_{hg}(a)$ называют частной производной второго порядка функции f в точке a и обозначают символами

$$f''_{e_i e_j}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \partial^2_{x_i x_j} f(a), \quad f''_{x_i x_j}(a).$$

При $j = i$ пишут

$$f''_{e_i^2}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a), \quad \partial^2_{x_i^2} f(a), \quad f''_{x_i^2}(a).$$

Если $j \neq i$, то частную производную второго порядка функции f в точке a называют смешанной частной производной.

По индукции вводятся понятия производной третьего порядка по трем направлениям, затем четвертого порядка по четырем направлениям и т. д.

Пусть выбрано m направлений: $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Предположим, что функция f имеет в области D производную $f^{(m-1)}_{h_1 h_2 \ldots h_{m-1}}$. Производную функции $f^{(m-1)}_{h_1 h_2 \ldots h_{m-1}}$ в точке $a \in D$ по направлению h_m (если она существует) будем называть m-ой производной (или производной m-го порядка) функции f в точке a по направлениям $h_1, h_2, \ldots, h_m$, то есть

$$f^{(m)}_{h_1 h_2 \ldots h_{m-1} h_m}(a) = \left(f^{(m-1)}_{h_1 h_2 \ldots h_{m-1}}(x) \right)'_{h_m} \Bigg|_{x=a}.$$

Если для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ в качестве вектора направления h_k взят координатный орт e_{i_k}, то производную $f^{(m)}_{e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{m-1}} e_{i_m}}$ называют частной производной m-го порядка функции f по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_{m-1}}, x_{i_m}$ и обозначают

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \partial x_{m-1} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}. \tag{10.52}$$

Если среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ есть не совпадающие между собой, частная производная (10.52) называют *смешанной* частной производной m-го порядка.

Пример 10.9. *Найдём все частные производные второго порядка функции $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ в области её существования.*

Возьмём любую точку (x, y) принадлежащую области определения функции u.

Сначала найдём частные производные первого порядка функции u в точке (x, y). Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Теперь найдём частные производные второго порядка функции u в этой же точке (x, y).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

Мы видим, что для смешанных частных производных второго порядка рассматриваемой функции в области её существования справедливо равенство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Поэтому сразу же возникает вопрос: если в точке a определены $f''_{hg}(a)$ и $f''_{gh}(a)$, то будут ли они равны между собой? Покажем, что равенство $f''_{hg}(a) = f''_{gh}(a)$ выполняется не всегда. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 10.10. *Найдём смешанные частные производные второго порядка функции*

$$u(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \textit{если } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \textit{если } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

в точке $(0,0)$.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)}{y}, \tag{10.53}$$

то сначала нужно найти частную производную первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ функции u. Пусть $(x,y) \neq (0,0)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \ = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

откуда $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = -y$.

Так как $u(x,0) = 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Теперь, согласно формуле (10.53), получаем $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y-0}{y} = -1$.

Рассуждая аналогично, сначала находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \ = \ \begin{cases} \dfrac{y\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{если } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

После чего $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. Следовательно, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Рассмотрим одно из достаточных условий независимости значений производных функции по разным направлениям от порядка дифференцирования.

Теорема 10.11. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, h, g — единичные векторы в $\mathbb{R}^n$, причём $h \neq g$. Если в некоторой окрестности $B(a, \delta)$ точки a определены производные f''_{hg} и f''_{gh} и обе эти производные непрерывны в самой точке a, то справедливо равенство $f''_{hg}(a) = f''_{gh}(a)$.*

Доказательство. Пусть r и s — любые числа, отличные от нуля и удовлетворяющие условию $|r| < \delta/2$, $|s| < \delta/2$. Тогда, очевидно, при всех $t \in [0, r]$ и $\tau \in [0, s]$ точка $x = a + th + \tau g$ находится в окрестности $B(a, \delta)$ точки a. Рассмотрим функцию

$$W(r, s) = f(a + rh + sg) - f(a + rh) - f(a + sg) + f(a).$$

Определим вспомогательную функцию $\Phi : [0, s] \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$\Phi(\tau) = f(a + rh + \tau g) - f(a + \tau g).$$

Тогда функцию $W(r, s)$ можно рассматривать как разность значений функции Φ в точках s и 0, то есть

$$W(r, s) = \Phi(s) - \Phi(0). \tag{10.54}$$

Но поскольку в δ-окрестности $B(a, \delta)$ точки a существует производная f'_g, то функция Φ дифференцируема на сегменте $[0, s]$ и её производная Φ' находится по формуле

$$\Phi'(\tau) = f'_g(a + rh + \tau g) - f'_g(a + \tau g). \tag{10.55}$$

Поэтому на сегменте $[0, s]$ функция Φ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, по которой найдется $\widetilde{\tau} \in (0, s)$ такое, что

$$\Phi(s) - \Phi(0) = \Phi'(\widetilde{\tau})s.$$

Ввиду (10.54) и (10.55), это равенство может быть записано в следующем виде:

$$W(r, s) = \Big(f'_g(a + rh + \widetilde{\tau} g) - f'_g(a + \widetilde{\tau} g)\Big)\, s. \tag{10.56}$$

Определим ещё одну вспомогательную функцию $\varphi : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу: $\varphi(t) = f'_g(a + th + \widetilde{\tau} g)$. Так как в $B(a, \delta)$ существует производная f''_{gh}, то функция φ дифференцируема на сегменте $[0, r]$ и

$$\varphi'(t) = f''_{gh}(a + th + \widetilde{\tau} g). \tag{10.57}$$

Итак, на сегменте $[0, r]$ функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому найдется $\widetilde{t} \in (0, r)$ такое, что

$$\varphi(r) - \varphi(0) = \varphi'(\widetilde{t})r. \tag{10.58}$$

Учитывая, что $\varphi(r) - \varphi(0) = f'_g(a + rh + \widetilde{\tau} g) - f'_g(a + \widetilde{\tau} g)$, из (10.56) — (10.58) выводим

$$W(r, s) = (\varphi(r) - \varphi(0))\, s = \varphi'(\widetilde{t})rs = f''_{gh}(a + \widetilde{t}h + \widetilde{\tau} g)rs. \tag{10.59}$$

Поскольку задание функции W симметрично относительно векторов h и g, то, вводя вспомогательную функцию $\Psi : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$\Psi(\tau) = f(a + th + sg) - f(a + th),$$

представим функцию W в следующем виде: $W(r,s) = \Psi(r) - \Psi(0)$. Используя это равенство, получим

$$W(r,s) = f''_{hg}(a + \widehat{t}h + \widehat{\tau}g)rs. \tag{10.60}$$

Из равенств (10.59) и (10.60), имеем

$$f''_{gh}(a + \widetilde{t}h + \widetilde{\tau}g) = f''_{hg}(a + \widehat{t}h + \widehat{\tau}g). \tag{10.61}$$

Из определений $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{t}$, $\widehat{\tau}$, $\widehat{t}$ следует, что $\widetilde{\tau} \to 0$, $\widehat{\tau} \to 0$, $\widetilde{t} \to 0$, $\widehat{t} \to 0$ когда $r \to 0$, $s \to 0$.

По условию производные f''_{hg} и f''_{gh} непрерывны в точке a. Поэтому, переходя в (10.61) к пределу при $r \to 0$ и $s \to 0$, получаем доказываемое равенство $f''_{hg}(a) = f''_{gh}(a)$. ■

Следствие 10.5. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Если две смешанные частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$ определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в точке a, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Пусть скалярная функция f определена в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в ней (или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $a \in D$). Тогда в области D (в окрестности точки a) определены все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ функции f.

Определение 10.9. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в D (или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $a \in D$). Функция f называется дважды дифференцируемой в точке a, если все её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\dots,n$, дифференцируемы в точке a.*

Если функция f дважды дифференцируема в точке a, то по теореме 10.4 все её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке a непрерывны, а по теореме 10.5 в точке a каждая частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ имеет частные производные по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, другими словами, функция f в точке a имеет все частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

По индукции определение 10.9 обобщается на случай любого натурального m.

Определение 10.10. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $m-1$ раз в D (или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $a \in D$). Функция f называется m раз дифференцируемой в точке a, если все её частные производные порядка $m-1$ дифференцируемы в точке a.*

Как и выше, используя теоремы 10.4, 10.5, делаем вывод, что если функция f дифференцируема m раз в точке a области D, то она имеет в этой точке все частные производные порядка m, все частные производные порядка $m-1$ непрерывны в точке a, а производные порядка $m-2$ непрерывны в области D (или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки a).

Определение 10.11. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ называется m раз дифференцируемой в области D, если она m раз дифференцируема в каждой точке этой области.*

Теорема 10.12. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $a \in D$, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.62}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 10.11. Если $i = j$, то равенство (10.62) превращается в очевидное тождество. Итак, пусть $i \neq j$, e_i и e_j — соответствующие орты в $\mathbb{R}^n$, а $B_1(a, \delta)$ — окрестность точки a, в которой существуют все частные производные первого порядка функции f. Как и при доказательстве теоремы 10.11 возьмем два отличных от нуля числа r и s, удовлетворяющих условию $|r| < \delta/2$, $|s| < \delta/2$ и рассмотрим функцию

$$W(r, s) = f(a + re_i + se_j) - f(a + re_i) - f(a + se_j) + f(a).$$

Определим вспомогательную функцию

$$\Phi(\tau) = f(a + re_i + \tau e_j) - f(a + \tau e_j).$$

Тогда

$$W(r, s) = \Phi(s) - \Phi(0). \tag{10.63}$$

Из существования в $B(a, \delta)$ частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ следует, что к правой части (10.63) можно применить теорему о Лагранжа. По этой теореме найдется $\widetilde{\tau} \in (0, s)$ такое, что

$$\begin{aligned} W(r, s) =& \Phi(s) - \Phi(0) = \Phi^{'}(\widetilde{\tau})s = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + re_i + \widetilde{\tau}e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \widetilde{\tau}e_j)\right) s = \\ &= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + re_i + \widetilde{\tau}e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \widetilde{\tau}e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)\right) s. \end{aligned} \tag{10.64}$$

Так функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ дифференцируема в точке a, то, используя формулы (10.13) и (10.18), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + re_i + \widetilde{\tau}e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)r + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\widetilde{\tau} + o\left(\|re_i + \widetilde{\tau}e_j\|\right), \tag{10.65}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \widetilde{\tau}e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\widetilde{\tau} + o\left(\|\widetilde{\tau}e_j\|\right). \tag{10.66}$$

Введем обозначение: $h = re_i + se_j$. Подставляя представления (10.65) и (10.66) в (10.64) и учитывая, что

$$o\left(\|re_i + \widetilde{\tau}e_j\|\right) = o\left(\|h\|\right), \quad o\left(\|\widetilde{\tau}e_j\|\right) = o\left(\|h\|\right), \quad |s| < \|h\|,$$

получаем

$$W(r, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)rs + o\left(\|h\|^2\right). \tag{10.67}$$

Аналогичные рассуждения со вспомогательной функцией

$$\Psi(\tau) = f(a + te_i + se_j) - f(a + te_i)$$

приводят к следующему равенству:

$$W(r, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) rs + o\left(\|h\|^2\right). \tag{10.68}$$

Сравнивая (10.67) и (10.68), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) rs + o\left(\|h\|^2\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) rs + o\left(\|h\|^2\right).$$

Так как в последнем равенстве числа r и s произвольны, то положим в нем $s = r$ и разделим обе части на r^2. Получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \frac{o\left(\|h\|^2\right)}{r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) + \frac{o\left(\|h\|^2\right)}{r^2}. \tag{10.69}$$

Принимая во внимание, что $\|h\|^2 = 2r^2$, видим, что отношение $o\left(\|h\|^2\right)/r^2$ является бесконечно малым при $r \to 0$. Поэтому после предельного перехода в (10.69) получаем равенство (10.62). ■

Следствие 10.6. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в точке $a \in D$, то в этой точке значение любой смешанной частной производной m-го порядка не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.*

Доказательство. Сначала покажем, что можно поменять порядок дифференцирования по любым двум соседним переменным, то есть

$$\frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}. \tag{10.70}$$

Для этого применяем теорему 10.12 к функции $\dfrac{\partial^{k-2} f(x)}{\partial x_{i_{k-2}} \partial x_{i_{k-3}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$, дифференцируемой в точке a, если $k = m$, и в некоторой окрестности $B(a, \delta)$ точки a, если $k < m$, не менее двух раз. Получаем равенство

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-2}} \partial x_{i_{k-3}} \ldots \partial x_{i_1}}(x),$$

где $x = a$, если $k = m$, и $x \in B(a, \delta)$, если $k < m$.

В случае $k < m$ продифференцируем это равенство по оставшимся переменным $x_{i_{k+1}}$, $x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_m}$ и получим равенство (10.70).

Пусть теперь x_{i_p} и x_{i_q} — любая пара переменных. Меняя порядок дифференцирования по соседним переменным (что, как только что доказано, возможно), будем смещать переменную x_{i_q} до тех пор, пока она не займет место переменной x_{i_p}, а затем, таким же способом, переменную x_{i_p} сместим на исходное место переменной x_{i_q}.

Ввиду произвольности выбора пары переменных, доказательство утверждения завершено. ■

Доказанное следствие позволяет применить следующую форму записи для частной производной m-го порядка:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_l}^{\alpha_l}\partial x_{i_{l-1}}^{\alpha_{l-1}}\ldots\partial x_{i_2}^{\alpha_2}\partial x_{i_1}^{\alpha_1}}(a),\quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l=m,$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ — неотрицательные целые числа.

Определение 10.12. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, а функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $a \in D$. Производной второго порядка (второй производной) функции f в точке a называют матрицу*

$$f''(a)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(a)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(a) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 10.12 матрица $f''(a)$ — симметрическая.

Определение 10.13. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в точке $a \in D$. Производной порядка m функции f в точке a называют m-мерную матрицу*

$$f^{(m)}(a)=\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_1}}(a)\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}.$$

Предложение 10.4. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в точке $a \in D$. Тогда существует производная m-го порядка функции f по любым m направлениям $h^{(k)}=\left(h_1^{(k)},h_2^{(k)},\ldots,h_n^{(k)}\right)$, $k=1,2,\ldots,m$, и справедливо представление*

$$f^{(m)}_{h^{(1)}h^{(2)}\ldots h^{(m)}}(a)=\sum_{i_m,\ldots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}^{(1)}h_{i_2}^{(2)}\ldots h_{i_m}^{(m)}. \tag{10.71}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $k=1$ формула (10.71) справедлива по следствию 10.1.

Пусть формула (10.71) справедлива при $k=m-1\geq 1$. Докажем, что она справедлива и при $k=m$. Поскольку функция f дифференцируема m раз в точке a, то она $(m-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B(a,\delta)$ точки a. Тогда по индуктивному предположению формула (10.71) справедлива при $k=m-1$ во всей окрестности $B(a,\delta)$. Следовательно, для каждого $x\in B(a,\delta)$ имеем

$$f^{(m-1)}_{h^{(1)}h^{(2)}\ldots h^{(m-1)}}(x)=\sum_{i_{m-1},\ldots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}}\ldots\partial x_{i_1}}(x)h_{i_1}^{(1)}h_{i_2}^{(2)}\ldots h_{i_{m-1}}^{(m-1)}.$$

Теперь, применяя (10.22), выводим

$$f^{(m)}_{h^{(1)}h^{(2)}\dots h^{(m)}}(a)=\sum_{i_m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(f^{(m-1)}_{h^{(1)}h^{(2)}\dots h^{(m-1)}}(x)\right)\right)\Bigg|_{x=a}h^{(m)}_{i_m}=$$

$$=\sum_{i_m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\sum_{i_{m-1},\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_{m-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x)h^{(1)}_{i_1}h^{(2)}_{i_2}\dots h^{(m-1)}_{i_{m-1}}\right)\right)\Bigg|_{x=a}h^{(m)}_{i_m}=$$

$$=\sum_{i_m,\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\dots\partial x_{i_1}}(a)h^{(1)}_{i_1}h^{(2)}_{i_2}\dots h^{(m)}_{i_m}.$$

■

Заметим, что если заданы направляющие косинусы векторов направлений, то есть, если $h^{(k)}=\left(\cos\alpha^{(k)}_1,\cos\alpha^{(k)}_2,\dots,\cos\alpha^{(k)}_n\right)$, $k=1,2,\dots,m$, то формула (10.71) принимает вид

$$f^{(m)}_{h^{(1)}h^{(2)}\dots h^{(m)}}(a)=\sum_{i_m,\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\dots\partial x_{i_1}}(a)\cos\alpha^{(1)}_{i_1}\cos\alpha^{(2)}_{i_2}\dots\cos\alpha^{(m)}_{i_m}.$$

В частности, если

$$h^{(1)}=h^{(2)}=\dots=h^{(m)}=h=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\dots,\cos\alpha_n),$$

то

$$f^{(m)}_{h^m}(a)=f^{(m)}_{hh\dots h}(a)=\sum_{i_m,\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\dots\partial x_{i_1}}(a)\cos\alpha_{i_1}\cos\alpha_{i_2}\dots\cos\alpha_{i_m}. \qquad (10.72)$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, а функция $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $a\in D$. Тогда в некоторой окрестности точки a определен дифференциал $df(x)(dx)$, являющийся функцией переменной x, дифференцируемой в точке a в силу представлений (10.23) или (10.44) и дифференцируемости в точке a всех частных производных первого порядка функции f.

Определение 10.14. *Дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) функции f в точке a называют дифференциал от дифференциала первого порядка, вычисленный в точке a при том же приращении dx аргумента x.*

Для дифференциала второго порядка функции f в точке a принято следующее обозначение: $d^2f(a)(dx)$. Таким образом, имеем

$$d^2f(a)(dx)=d\big(df(x)(dx)\big)\Bigg|_{x=a}(dx).$$

Дифференциал m-го порядка скалярной функции n переменных вводится по индукции. Предположим, что уже введено понятие дифференциала $(m-1)$-го порядка m раз дифференцируемой в точке a скалярной функции f.

Определение 10.15. *Дифференциалом m-го порядка функции f в точке a называют дифференциал от дифференциала $(m-1)$-го порядка, вычисленный в точке a при том же приращении аргумента, то есть*

$$d^mf(a)(dx)=d\left(d^{m-1}f(x)(dx)\right)\Bigg|_{x=a}(dx).$$

В отличие от дифференциалов первого порядка, форма дифференциалов второго и последующих порядков различна в случаях, когда аргумент x является независимой переменной и когда он является функцией другой переменной.

Действительно, используя представление (10.44), получаем

$$\begin{aligned} d^2f(a)(dx) &= d\left(df(x)(dx)\right)\Big|_{x=a}(dx) = \\ &= d\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j\right)\Bigg|_{x=a}(dx) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j\right)\Bigg|_{x=a}(dx) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)\Bigg|_{x=a}(dx)dx_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d\left(dx_j\right)\Big|_{x=a}(dx). \end{aligned} \tag{10.73}$$

Фиксируем номер $j = 1, 2, \ldots, n$. Сначала рассмотрим дифференциал $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)\Big|_{x=a}$ (dx). Используя (10.44), получаем

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)\Bigg|_{x=a}(dx) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)\Bigg|_{x=a}dx_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)dx_k. \tag{10.74}$$

Теперь рассмотрим дифференциал $d\left(dx_j\right)\Big|_{x=a}(dx)$. Если x — независимая переменная, то, согласно договоренности, дифференциал $dx_j = h_j$ не зависит от x. Поэтому, используя (10.44), выводим

$$d\left(dx_j\right)\Big|_{x=a}(dx) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\left(dx_j\right)}{\partial x_k}\Bigg|_{x=a}dx_k = 0. \tag{10.75}$$

Если же x — зависимая переменная, то по определению 10.14, имеем

$$d\left(dx_j\right)\Big|_{x=a}(dx) = d^2x_j. \tag{10.76}$$

Поэтому, в случае независимой переменной x из (10.73), учитывая (10.74) и (10.75), получаем

$$d^2f(a)(dx) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)dx_k dx_j = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)dx_k dx_j, \tag{10.77}$$

а в противном случае, используя (10.74) и (10.76), таким же путем получаем

$$d^2f(a)(dx) = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)dx_k dx_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)d^2x_j. \tag{10.78}$$

Сравнивая представления (10.78) и (10.77), видим, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы. И тем более не обладают свойством инвариантности формы и все дифференциалы последующих порядков.

Предложение 10.5. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в точке $a \in D$, причем аргумент x функции f является независимой переменной. Тогда*

$$d^m f(a)(dx) = \sum_{i_m,\ldots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_1}}(a)dx_{i_1}\ldots dx_{i_m}. \tag{10.79}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Как показывают представления (10.44) и (10.77), при $k = 1, 2$ формула (10.79) верна.

Предположим, что она верна для $k = m - 1 \geq 2$, то есть справедливо равенство

$$d^{m-1}f(a)(dx) = \sum_{i_{m-1},\dots,i_1=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) dx_{i_1} \dots dx_{i_{m-1}}\,.$$

Докажем, что формула (10.79) верна и при $k = m$. Основываясь на определении дифференциала m-го порядка и сделанном предположении, выводим

$$\begin{aligned}
d^m f(a)(dx) =& d\left(d^{m-1}f(x)(dx)\right)\Big|_{x=a}(dx) = \sum_{i_m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(d^{m-1}f(x)(dx)\right)\right)\Big|_{x=a} dx_{i_m} = \\
&= \sum_{i_m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\sum_{i_{m-1},\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x) dx_{i_1}\dots dx_{i_{m-1}}\right)\right)\Big|_{x=a} dx_{i_m} = \\
&= \sum_{i_m=1}^{n}\sum_{i_{m-1},\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m-1}}\dots\partial x_{i_1}}(a) dx_{i_1}\dots dx_{i_{m-1}}dx_{i_m} = \\
&= \sum_{i_m,i_{m-1},\dots,i_1=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m-1}}\dots\partial x_{i_1}}(a) dx_{i_1}\dots dx_{i_{m-1}}dx_{i_m}.
\end{aligned}$$

■

В пространстве $\mathbb{R}^n$ возьмем произвольный вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \neq 0$. Пусть $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n$ — его направляющие косинусы. Тогда $h_i = \|h\| \cos\alpha_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому формула (10.79) может быть переписана в следующем виде:

$$d^m f(a)(h) = \|h\|^m \sum_{i_m,\dots,i_1=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\dots\partial x_{i_1}}(a) \cos\alpha_{i_1}\cos\alpha_{i_2}\dots\cos\alpha_{i_m}\,. \tag{10.80}$$

Определим вектор $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$, полагая $g_i = \dfrac{h_i}{\|h\|}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда g есть единичный вектор с координатами $g_i = \cos\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Сравнивая равенства (10.80) и (10.72), заключаем, что

$$d^m f(a)(h) = \|h\|^m f^{(m)}_{g^m}(a)\,. \tag{10.81}$$

10.3 Формула Тейлора

Как и в случае функций одной переменной, важную роль при изучении поведения функций многих переменных в окрестности фиксированной точки играет формула Тейлора.

Теорема 10.13. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$ и функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $(m+1)$ раз в некоторой δ-окрестности точки a. Тогда для любого $x \in \overset{\circ}{B}(a, \delta)$ найдется $0 < \theta < 1$ такое, что для $f(x)$ справедливо представление (здесь $h = x - a$)*

$$f(x) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(h) + \dots + \\ + \frac{1}{m!}d^m f(a)(h) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(a+\theta h)(h), \tag{10.82}$$

называемое формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Зафиксируем $x \in \overset{\circ}{B}(a,\delta)$ и положим $h = x - a$,

$$g = \frac{h}{\|h\|} = \left(\frac{h_1}{\|h\|}, \frac{h_2}{\|h\|}, \ldots, \frac{h_n}{\|h\|}\right) = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)\,.$$

Определим функцию $\varphi : (-\delta,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\varphi(t) = f(a+tg)$. Поскольку функция f в окрестности $B(a,\delta)$ дифференцируема $(m+1)$ раз, то и функция φ в интервале $(-\delta,\delta)$ дифференцируема $(m+1)$ раз, при этом, очевидно,

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}_{g^k}(a+tg), \quad k = 1,2,\ldots,m+1.$$

Следовательно, функция φ в интервале $(-\delta,\delta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Тейлора, согласно которой в этом интервале её можно представить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)t^m + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta t)t^{m+1}, \tag{10.83}$$

где $\theta \in (0,1)$.

Положим теперь $t = \|h\|$. Тогда

$$\varphi(t) = \varphi(\|h\|) = f(a + \|h\|\,g) = f(a+h) = f(x). \tag{10.84}$$

Таким образом, левая часть (10.83) является значением функции f в точке x. Теперь преобразуем слагаемые (или их части) стоящие в правой части (10.83). Очевидно, что

$$\varphi(0) = f(a). \tag{10.85}$$

Применяя (10.81), выводим

$$\varphi^{(k)}(0)\|h\|^k = f^{(k)}_{g^k}(a)\|h\|^k = d^k f(a)(h), \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{10.86}$$

$$\varphi^{(m+1)}(\theta\,\|h\|)\|h\|^{m+1} = f^{(m+1)}_{g^{m+1}}(a+\theta h)\|h\|^{m+1} = d^{m+1} f(a+\theta h)(h). \tag{10.87}$$

Подставив в (10.83) выражения полученные в (10.84) — (10.87), придем к (10.82). ■

Замечание. Если в формуле Тейлора (10.82) положить $m = 0$, $x = b$, $h = b-a$, $a+\theta h = c$, $g = \dfrac{h}{\|h\|}$ и использовать (10.26), то получим формулу Лагранжа (формула (10.2))

$$f(b) - f(a) = df(c)(h) = f'_g(c)\,\|h\| = f'_g(c)\,\|b-a\|\,.$$

Теорема 10.14. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$ и функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в некоторой δ-окрестности точки a, причем $d^m f(x)(h)$ $(h = x - a)$ непрерывен в точке a. Тогда для любого $x \in \overset{\circ}{B}(a,\delta)$ справедливо представление*

$$f(x) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(h) + \ldots + \frac{1}{m!}d^m f(a)(h) + o\left(\|h\|^m\right), \tag{10.88}$$

называемое формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \overset{\circ}{B}(a,\delta)$. По предыдущей теореме найдется $\theta = \theta(x) \in (0,1)$ такое, что

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + df(a)(h) &+ \frac{1}{2!}d^2 f(a)(h) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1} f(a)(h) + \frac{1}{(m)!}d^m f(a+\theta h)(h). \end{aligned} \tag{10.89}$$

По условию, дифференциал m-го порядка непрерывен в точке a, что равносильно непрерывности в точке a всех частных производных порядка m. Поэтому для каждого набора индексов $i_1, i_2 \ldots, i_m$, такого, что $1 \leq i_k \leq n$, справедливо равенство

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}(x) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}(a) + \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h),$$

где $\beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h)$ — бесконечно малая при $h \to 0$. Тогда, применяя (10.79), выводим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m!} d^m f(a+\theta h)(h) &= \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}(a+\theta h) h_{i_1} \ldots h_{i_m} = \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}(a) + \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h) \right) h_{i_1} \ldots h_{i_m} = \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} \ldots h_{i_m} + \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h) h_{i_1} \ldots h_{i_m} = \\
&= \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h) h_{i_1} \ldots h_{i_m} = \\
&= \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \frac{\|h\|^m}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h) \cos\alpha_{i_1} \ldots \cos\alpha_{i_m} = \\
&= \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \beta(h) \|h\|^m,
\end{aligned}$$

где $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_m$ — направляющие косинусы вектора h,

$$\beta(h) = \frac{1}{m!} \sum_{i_m, \ldots, i_1 = 1}^{n} \beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h) \cos\alpha_{i_1} \ldots \cos\alpha_{i_m}.$$

Поскольку $\beta(h)$ представляет собой конечную сумму величин $\beta_{i_1, i_2 \ldots, i_m}(h)$, бесконечно малых при $h \to 0$, то $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Но тогда $\beta(h)\|h\|^m = o\left(\|h\|^m\right)$ при $h \to 0$. Поэтому окончательно имеем

$$\frac{1}{m!} d^m f(a+\theta h)(h) = \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + o\left(\|h\|^m\right). \tag{10.90}$$

Подставив в (10.89) вместо последнего слагаемого правую часть (10.90), получим (10.88). Теорема доказана. ■

10.4 Экстремум скалярных функций нескольких переменных

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная в D функция, $a \in D$.

Определение 10.16. *Говорят, что функция f имеет в точке a локальный максимум (минимум), если существует окрестность $B(a, \delta)$ точки a, содержащаяся в D, такая, что для всех $x \in B(a, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Если для всех $x \in \overset{\circ}{B}(a, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$, то говорят, что f имеет в точке a строгий локальный максимум (минимум).

Как и в случае одного переменного, понятия локального максимума и локального минимума объединяются в одно понятие (безусловного локального) экстремума.

Определение 10.17. *Будем говорить, что функция f имеет в точке a локальный экстремум, если она имеет в этой точке или локальный максимум, или локальный минимум.*

Очевидно, что если функция f имеет в точке a экстремум, то она имеет в этой точке экстремум по любому направлению. Иначе говоря, если функция f имеет в точке a экстремум и h — произвольное направление, то функция $\varphi(t) = f(a+th)$ имеет экстремум в точке $t = 0$. Обратное утверждение неверно: функция f может иметь в точке a экстремум по любому направлению и не иметь экстремума в этой точке.

Пример 10.11. *Покажем, что функция $u = (x-y^2)(2x-y^2)$ имеет в точке $O(0,0)$ минимум по любому направлению, но не имеет экстремума в этой точке.*

Пусть $h = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — произвольное направление. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(t) = u(a+th) = u(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \\ = \left(t\cos\alpha - t^2\sin^2\alpha\right)\left(2t\cos\alpha - t^2\sin^2\alpha\right) = t^2\left(\cos\alpha - t\sin^2\alpha\right)\left(2\cos\alpha - t\sin^2\alpha\right).\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha \neq 0$, поэтому $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $t = 0$.

Если же $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\varphi(t) = t^4$, и снова $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ при $t \neq 0$.

Таким образом, по любому направлению функция u в точке $O(0,0)$ имеет локальный минимум.

Пусть теперь $B(O,\delta)$ — любая окрестность точки O. Если возьмем в этой окрестности точку $(x,0)$ $(x \neq 0)$, то $u(x,0) = 2x^2 > 0$. Если же возьмем в этой окрестности точку $\left(\dfrac{2}{3}t^2, t\right)$ $(t \neq 0)$, то получим

$$u\left(\frac{2}{3}t^2, t\right) = \left(\frac{2}{3}t^2 - t^2\right)\left(\frac{4}{3}t^2 - t^2\right) = -\frac{1}{9}t^4 < 0.$$

А так как $u(0,0) = 0$, то, как видим, в точке $O(0,0)$ функция u экстремума не имеет.

Теорема 10.15. (**Необходимое условие экстремума**) *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в D, $a \in D$ и f имеет экстремум в точке a. Тогда, если в точке a определена производная функции f по некоторому направлению h, то она равна нулю.*

Доказательство. Поскольку функция f имеет экстремум в точке a, то, как было отмечено выше, функция $\varphi(t) = f(a+th)$ имеет экстремум в точке $t = 0$. Но функция φ дифференцируема в точке $t = 0$, так как $\varphi'(0) = f'_h(a)$, и по необходимому условию экстремума для функции одной переменной (теорема 4.25) $\varphi'(0) = 0$. Следовательно, и $f'_h(a) = 0$. Теорема доказана. ■

Следствие 10.7. *Если функция f имеет в точке a экстремум и в этой точке определены все её частные производные, то*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.91}$$

Точки, в которых все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ обращаются в ноль, называются *стационарными*.

Отметим, что функция может иметь экстремумы не только в стационарных точках, но в тех точках области, в которых у неё не существует хотя бы одной частной производной первого порядка. Пример будет приведён позже. Точки, в которых некоторые из частных производных не существуют, а остальные равны нулю, будем называть *критическими* точками.

Следствие 10.8. *Если функция f дифференцируема в точке a и имеет в этой точке экстремум, то*

$$df(a)(dx) = 0. \tag{10.92}$$

Как и для функции одной переменной, при выполнении условий (10.91) или (10.92) функция f в точке a может иметь экстремум, а может и не иметь.

Пример 10.12. *Покажем, что для функции $z = x^2+y^2$ в точке $(0,0)$ выполняются условия (10.91) и (10.92) и функция z имеет в этой точке экстремум (локальный минимум).*

В любой точке области определения

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Следовательно, условия (10.91) или (10.92) выполняются.

Так как $z(0,0) = 0$, а в любой другой точке $z(x,y) > 0$, то функция z имеет в точке $(0,0)$ строгий локальный минимум.

Пример 10.13. *Покажем, что для функции $z = x^2 - y^2$ в точке $(0,0)$ выполняются условия (10.91) или (10.92), но она в этой точке экстремума не имеет.*

Снова $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$, однако функция $z(x,y)$ в точке $(0,0)$ экстремума не имеет, поскольку $z(0,0) = 0$, $z(x,0) > 0$ при $x \neq 0$, $z(0,y) < 0$ при $y \neq 0$.

Приведенные примеры показывают, что необходимо иметь достаточные условия экстремума, то есть такие условия, выполнение которых гарантировало бы наличие или отсутствие экстремума в рассматриваемой точке. Но для формулировки таких условий нам потребуются некоторые сведения, традиционно излагаемые в курсе алгебры.

Квадратичные формы

Пусть имеется симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 10.18. *Функция $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ вида*

$$\Phi = \Phi(x) = \Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

называется квадратичной формой.

Матрица A называется матрицей квадратичной формы, а определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

называются *угловыми минорами* матрицы A.

Определение 10.19. *Квадратичная форма Φ называется:*

а) положительно определенной, если $\Phi(x) > 0$ при всех $x \neq 0$;

б) отрицательно определенной, если $\Phi(x) < 0$ при всех $x \neq 0$;

в) полуопределенной, если $\Phi(x) \geq 0$ (или $\Phi(x) \leq 0$) при всех x и существует $x \neq 0$ такой, что $\Phi(x) = 0$;

г) неопределенной, если существуют x_1 и x_2 такие, что $\Phi(x_1) < 0$, а $\Phi(x_2) > 0$.

Замечание. Квадратичная форма есть однородная функция второго порядка, то есть $\Phi(tx) = t^2\Phi(x)$. Поэтому, если $\Phi(x_0) > 0$ (< 0) в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то $\Phi(x) > 0$ (< 0) и на всём луче $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = tx_0, \ t \geq 0\}$, проходящем через точку x_0. Это означает, в частности, что если квадратичная форма Φ является полуопределенной, то в любой проколотой окрестности точки ноль найдется x такой, что $\Phi(x) = 0$, а если квадратичная форма Φ является неопределенной, то в любой окрестности точки ноль она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы часто называют знакоопределёнными квадратичными формами, неопределенные — знакопеременными, а полуопределённые — квазизнакоопределёнными.

Теорема 10.16. (**Сильвестр**) *Для того чтобы квадратичная форма Φ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры её матрицы были положительны.*

Следствие 10.9. *Для того чтобы квадратичная форма Φ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки её угловых миноров чередовались, начиная с минуса, то есть чтобы выполнялось условие $(-1)^k\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Назовем *главными минорами* матрицы A определители следующего вида:

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pp+1} & \ldots & a_{pq} \\ a_{p+1p} & a_{p+1p+1} & \ldots & a_{p+1q} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{qp} & a_{qp+1} & \ldots & a_{qq} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq p \leq q \leq n.$$

Теорема 10.17. *Для того чтобы квадратичная форма Φ была полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A или матрицы $-A$ были неотрицательны, причём хотя бы один из них равнялся нулю.*

Используя приведённые сведения из алгебры, сформулируем достаточные условия экстремума. Напомним, что одно из достаточных условий экстремума функции одной переменной было сформулировано в терминах второй производной. Аналогичную роль в формулировании достаточных условий экстремума функции нескольких переменных играет дифференциал второго порядка.

Пусть, как и прежде, D — область в $\mathbb{R}^n$, а функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $a \in D$. Тогда по теореме 10.12 матрица $f''(a)$ есть симметрическая матрица, а дифференциал второго порядка функции f в точке a (см. 10.77) представляет собой квадратичную форму относительно дифференциала $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$.

Теорема 10.18. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая в некоторой окрестности $B(a, \delta)$ $(\subset D)$ точки a функция, причем в точке a дифференциал второго порядка $d^2 f(x)(dx)$ непрерывен, а дифференциал первого порядка $df(a)(dx)$ тождественно равен нулю. Тогда, если в точке a дифференциал второго порядка $d^2 f(a)(dx)$ относительно дифференциала $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ представляет собой:*

а) *положительно определенную квадратичную форму, то в точке a функция f имеет строгий локальный минимум;*

б) *отрицательно определенную квадратичную форму, то в точке a функция f имеет строгий локальный максимум;*

в) *неопределенную квадратичную форму, то в точке a функция f экстремума не имеет.*

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 10.14, разложим функцию f в окрестности $\overset{\circ}{B}(a, \delta)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h) + r(h),$$

где $h = dx = x - a$ и $r(h) = o\left(\|h\|^2\right)$.

Так как по условию $df(a)(h) = 0$, то, перенеся $f(a)$ в левую часть, получим:

$$\Delta f(a)(h) = \frac{1}{2} d^2 f(a)(h) + r(h). \tag{10.93}$$

Принимая во внимание представление (10.77) для дифференциала второго порядка и обозначая $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, приведем (10.93) к следующему виду:

$$\Delta f(a)(h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j + r(h). \tag{10.94}$$

Положим $g_i = h_i / \|h\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $h_i = \|h\| \, g_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и (10.94) примет вид

$$\Delta f(a)(h) = \frac{1}{2} \|h\|^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} g_i g_j + \alpha(h) \right), \tag{10.95}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Заметим, что норма вектора $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ равна единице.

а) Пусть $d^2 f(a)(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ — положительно определенная квадратичная форма. Как многочлен второго порядка, эта квадратичная форма непрерывна всюду в $\mathbb{R}^n$, в частности, на сфере единичного радиуса $S = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$. Эта сфера есть, очевидно, замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда по следствию 9.3, она компактна. Но в таком случае по теореме 9.22 (вторая теорема Вейерштрасса) квадратичная форма $d^2 f(a)(h)$ достигает на S своей точной нижней грани

$$\beta = \inf\left\{d^2 f(a)(h) : h \in S\right\}.$$

Так как квадратичная форма $d^2 f(a)(h)$ положительно определена, то $\beta > 0$. А по определению точной нижней грани, для всех $h \in S$ справедлива оценка $d^2 f(a)(h) \geq \beta$.

Поскольку $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, то найдется $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \delta$) такое, что для всех h с $\|h\| < \delta_1$ справедлива оценка $|\alpha(h)| < \beta$. Но тогда из (10.95) следует, что для всех h с $0 < \|h\| < \delta_1$ приращение $\Delta f(a)(h) > 0$, или $f(x) > f(a)$ при всех x, расположенных в проколотой δ_1-окрестности точки a. Следовательно, в точке a функция f имеет строгий локальный минимум.

б) Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

в) Пусть $d^2 f(a)(h)$ — неопределенная квадратичная форма. Тогда, в силу замечания, следующего за определением 10.19, на сфере S найдутся две точки $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ такие, что $d^2 f(a)(g^{(1)}) = \gamma_1 > 0$, $d^2 f(a)(g^{(2)}) = \gamma_2 < 0$. Выберем $\delta_0 > 0$ ($\delta_0 < \delta$) так, чтобы при всех h с $\|h\| < \delta_0$ выполнялась оценка $|\alpha(h)| < \min\{\gamma_1, -\gamma_2\}$. Теперь зафиксируем любое $\delta_1 < \delta_0$ и положим $h^{(1)} = \dfrac{1}{2}\delta_1 g^{(1)}$, $h^{(2)} = \dfrac{1}{2}\delta_1 g^{(2)}$. Тогда из (10.95) получаем

$$\Delta f(a)(h^{(1)}) = \frac{1}{8}\delta_1^2\left(\gamma_1 + \alpha(h^{(1)})\right) > 0, \quad \Delta f(a)(h^{(2)}) = \frac{1}{8}\delta_1^2\left(\gamma_2 + \alpha(h^{(2)})\right) < 0.$$

■

В случае $n = 2$ достаточные условия экстремума принимают совсем простой вид.

Следствие 10.10. *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда:*

а) если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то в точке a экстремума нет;

б) если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то при $a_{11} > 0$ точка a — точка локального минимума, при $a_{11} < 0$ — точка локального максимума.

Доказательство. В случае а) квадратичная форма

$$d^2 f(a)(h) = a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2$$

не удовлетворяет ни критерию Сильвестра, ни теореме 10.17, поэтому является отрицательно определённой.

В случае б) коэффициент $a_{11} \neq 0$, поэтому либо $a_{11} > 0$ и по критерию Сильвестра квадратичная форма $d^2 f(a)(h)$ положительно определена, либо $a_{11} < 0$, и тогда по следствию из критерия Сильвестра она определена отрицательно. ■

Замечание 10.1. *Если дифференциал второго порядка $d^2 f(a)(h)$ функции f в точке a представляет собой полуопределённую квадратичную форму , то вопрос о наличии или отсутствии экстремума у функции f в точке a остается открытым.*

Приведем примеры, показывающие, что в этом случае экстремум функции f в точке a может быть (как строгий, так и нестрогий), а может и не быть.

Пример 10.14. *Рассмотрим функции:*

$$a)\ u(x,y) = x^2 + y^4, \quad b)\ u(x,y) = x^2, \quad c)\ u(x,y) = x^2 + y^3.$$

У всех трёх функций точка $O(0,0)$ — подозрительная на экстремум. У всех трёх функций дифференциал второго порядка в точке O имеет вид

$$d^2u(0,0)(dx,dy) = 2dx^2 = 2x^2$$

(в точке $x_0 = 0$ дифференциал $dx = x - x_0 = x$) и является полуопределённой квадратичной формой, так как всегда $d^2u(0,0)(dx,dy) \geq 0$, однако при $dx = 0$ и $dy \neq 0$ имеем: $d^2u(0,0)(0,dy) = 0$.

Однако первая из функций имеет в точке O строгий локальный максимум, так как $u(0,0) = 0$, а во всех остальных точках $u(x,y) > 0$; вторая функция имеет в точке O нестрогий локальный максимум, так как $u(x,y) \geq 0$, но $u(x,y) = 0$ на всей прямой $x = 0$; третья же функция в точке O экстремума не имеет, так как $u(0,0) = 0$, а $u(0,y)$ больше нуля при любом $y > 0$ и меньше нуля при любом $y < 0$.

Пример 10.15. *Исследуем на экстремум функцию $u = x^3 + xy^2 + 6xy$.*

Функция u определена и дифференцируема во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Следовательно, подозрительными на экстремум точками могут быть только стационарные точки. Найдем их. Для этого сначала найдем частные производные первого порядка функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 6y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 6x.$$

Теперь приравняем каждую из них к нулю и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ 2xy + 6x = 0. \end{cases}$$

Решая её, находим стационарные точки: $O(0,0)$, $A(0,-6)$, $B(-\sqrt{3},-3)$ и $C(\sqrt{3},-3)$.

Для проверки достаточных условий экстремума необходимо знать частные производные второго порядка функции u. Находим их:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y + 6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x.$$

Проверим на экстремум точку $O(0,0)$. Находим: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 6$, $D = -36 < 0$. По следствию 10.10, в точке $O(0,0)$ функция u экстремума не имеет.

Проверим на экстремум точку $A(0,-6)$. Вычисляем: $a_{11} = 0$, $a_{12} = -6$, $D = -36 < 0$. По следствию 10.10, и в этой точке функция u экстремума не имеет.

Проверим на экстремум точку $B(-\sqrt{3},-3)$. Имеем: $a_{11} = -6\sqrt{3}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -2\sqrt{3}$, $D = 36$. Поскольку $D > 0$ и $a_{11} < 0$, то, согласно следствию 10.10, в точке $B(-\sqrt{3},-3)$ функция u имеет локальный максимум:

$$u_{\max} = u(-\sqrt{3},-3) = 6\sqrt{3}.$$

Осталось проверить на экстремум точку $C(\sqrt{3},-3)$. Имеем:

$$a_{11} = 6\sqrt{3},\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 2\sqrt{3},\ D = 36.$$

Поскольку $D > 0$ и $a_{11} > 0$, то, по следствию 10.10, в точке $C(\sqrt{3},-3)$ функция u имеет локальный минимум:

$$u_{\min} = u(\sqrt{3},-3) = -6\sqrt{3}.$$

Пример 10.16. *Исследуем на экстремум функцию $u(x,y,z) = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2$.*

Для определения точек, подозрительных на экстремум, найдём частные производные первого порядка функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2yz - 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xz - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xy - 2z,$$

приравняем их к нулю и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} yz = x, \\ xz = y, \\ xy = z. \end{cases} \tag{10.96}$$

Отсюда, после перемножения всех трех уравнений, находим:

$$(xyz)^2 = xyz.$$

Следовательно, произведение xyz равно или нулю, или единице.

Если $xyz = 0$, то из (10.96) следует, что $x = y = z = 0$. Таким образом, одной из точек подозрительных на экстремум является точка $O\,(0,0,0)$.

Если же $xyz = 1$, то, умножая первое из уравнений системы (10.96) на x, а затем заменяя в нем произведение xyz на единицу, находим, что $x^2 = 1$, или $x = \pm 1$.

Поступая аналогично со вторым и третьим уравнениями, получаем $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. Подбирая теперь знаки так, чтобы уравнения системы (10.96) превратились в тождества, получаем еще четыре решения системы (10.96): $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$.

Итак, экстремум возможен в точках $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,1,1)$, $B\,(1,-1,-1)$, $C\,(-1,1,-1)$, $D\,(-1,-1,1)$.

Для проверки достаточных условий экстремума найдём частные производные второго порядка функции u.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2.$$

Составим дифференциал второго порядка функции u:

$$d^2u = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4zdxdy + 4ydxdz + 4xdydz.$$

1) Проверим на экстремум точку $O\,(0,0,0)$. Находим дифференциал второго порядка функции u в точке $O\,(0,0,0)$:

$$d^2u\,(0,0,0) = -2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

Очевидно, что дифференциал второго порядка $d^2u\,(0,0,0)$ является отрицательно определенной квадратичной формой относительно дифференциала (dx, dy, dz). Следовательно, в точке $O\,(0,0,0)$ функция u имеет локальный максимум:

$$u_{\max} = u\,(0,0,0) = 0.$$

2) Теперь проверим на экстремум точку $A\,(1,1,1)$. Дифференциал d^2u в точке $A\,(1,1,1)$ имеет следующий вид:

$$d^2u\,(1,1,1) = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4dxdy + 4dxdz + 4dydz.$$

Матрица квадратичной формы, стоящей в правой части этого равенства, будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем её угловые миноры:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Теперь легко видеть, что дифференциал второго порядка $d^2u\,(1,1,1)$ является квадратичной формой, которая не удовлетворяет ни условиям критерия Сильвестра (теорема 10.16), ни условиям теоремы 10.17. Следовательно, дифференциал второго порядка $d^2u\,(1,1,1)$ относительно дифференциала (dx, dy, dz) представляет собой неопределенную квадратичную форму. Согласно теореме 10.18, функция u в точке $O\,(1,1,1)$ экстремума не имеет.

Поскольку при перемене знаков любых двух переменных функция u не меняется, то нет экстремума и в точках B, C, D.

Пример 10.17. *Исследуем на экстремум функцию* $u = 7 + \sqrt[4]{x^2 + y^4}$.

Функция u определена и непрерывна во всем пространстве $\mathbb{R}^2$, но в точке $O(0,0)$ не имеет частных производных первого порядка, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{7 + \sqrt[4]{x^2} - 7}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x} = \infty,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{7 + \sqrt[4]{y^4} - 7}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y},$$

но, как известно, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{|y|}{y}$ не существует.

В остальных точках пространства $\mathbb{R}^2$ частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+y^4)^3}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^3}{\sqrt[4]{(x^2+y^4)^3}}$$

в ноль не обращаются. Следовательно, стационарных точек функция u не имеет.

Но точка $O(0,0)$ является критической, поэтому исследуем её на экстремум. Поскольку $u(0,0) = 7$, а в любой другой точке (x,y) значение функции u больше семи, то $\Delta u(0,0) > 0$. Следовательно, в точке $O(0,0)$ функция u имеет локальный минимум и $u_{\min} = u(0,0) = 7$.

10.5 Неявные отображения

В математике и в различных её приложениях возникают зависимости между переменными, описываемые функциональными уравнениями.

Точнее, пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{R}^m$, $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Уравнение

$$F\,(x,y) = 0 \tag{10.97}$$

задает некоторую зависимость (неявную связь) между переменными $x \in D$ и $y \in G$. Если зафиксировать конкретное значение $x \in D$, то y находится как решение уравнения (10.97). При этом множество решений этого уравнения может оказаться пустым, конечным (в частности, единственным) или бесконечным. Поясним это на примерах.

Пусть $D = G = \mathbb{R}$ и функции $F_1, F_2, F_3, F_4 : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}$, заданы равенствами:

$$\begin{aligned} &F_1(x,y) = x^2 - y, && F_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \\ &F_3(x,y) = (x^2 - 1)\,y, && F_4(x,y) = x^2 + y^2 + 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение $F_1(x, y) = 0$. Очевидно, что при любом $x \in D$ это уравнение имеет единственное решение $y = x^2$.

Обратимся теперь к уравнению $F_2(x, y) = 0$. Для любого $x \in (-1, 1)$ это уравнение имеет два решения $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$. Если $x = -1$ или 1, то уравнение имеет единственное решение $y = 0$. При $|x| > 1$ уравнение решений не имеет.

Уравнение $F_3(x, y) = 0$ при $x \neq \pm 1$ имеет единственное решение $y = 0$, а при $x = \pm 1$ имеет их бесконечное множество (всё множество G).

А вот уравнение $F_4(x, y) = 0$, как легко установить, решений вообще не имеет.

Далее будем рассматривать лишь такие функции $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}^m$, для которых уравнение (10.97) имеет решение хотя бы при одном значении $x \in D$, то есть будем предполагать, что $0 \in F\,(D \times G)$.

Естественно, возникает ряд вопросов. Каково множество элементов области D, для которых уравнение (10.97) разрешимо относительно y? При каких условиях это уравнение имеет единственное (единственное непрерывное, единственное дифференцируемое) решение $y = \varphi(x)$?

Определение 10.20. *Если существуют множества $E_1 \subset D$, $E_2 \subset G$ и непрерывное отображение $f : E_1 \longrightarrow E_2$ такое, что*

$$F\,(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in E_1, \tag{10.98}$$

то f называют неявным отображением, определяемым уравнением (10.97).

Теперь конкретизируем нашу задачу. Так как $0 \in F\,(D \times G)$, то существуют $a \in D$ и $b \in G$ такие, что $F\,(a, b) = 0$. Выясним, при каких условиях можно указать множество $E_1 \subset D$, содержащее точку a, множество $E_2 \subset G$, содержащее точку b, и *единственное* непрерывное отображение $f : E_1 \longrightarrow E_2$, удовлетворяющее тождеству (10.98) и такое, что

$$f(a) = b. \tag{10.99}$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, рассмотрим ещё несколько примеров.

Пусть дано уравнение

$$F(x, y) = y^2 - \left(x^2 - 1\right)^2 = 0. \tag{10.100}$$

Существует восемь непрерывных функций $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих этому уравнению, при этом график каждой из них проходит через точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ (см. рис. 28). Легко убедиться в том, что ни в какой окрестности этих точек нельзя выделить единственную непрерывную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую уравнению (10.100). Такие точки называют *критическими*. Напротив, если взять точку (a, b), удовлетворяющую уравнению (10.100) и не являющуюся критической, то можно указать такую её окрестность, в которой найдется единственная непрерывная кривая $y = f(x)$, проходящая через точку (a, b) и удовлетворяющая уравнению (10.100). При этом размеры окрестности зависят от близости точки (a, b) к критическим точкам.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{10.101}$$

Существуют две непрерывные на $\mathbb{R}^2$ функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, удовлетворяющие данному уравнению. Через каждую точку (a_1, a_2, b), координаты которой удовлетворяют уравнению (10.101), но отличную от точки $(0, 0, 0)$, проходит график только

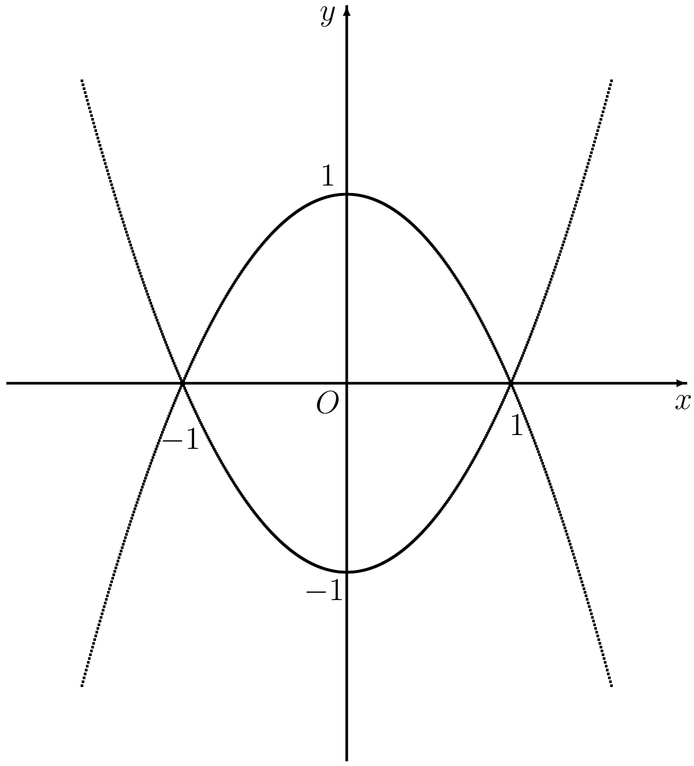

Рис. 28: $y^2 - (x^2 - 1)^2 = 0$.

одной из них. Через точку же $(0, 0, 0)$ проходят графики обеих этих функций. Следовательно, ни в какой окрестности точки $(0, 0, 0)$ нельзя выделить единственное непрерывное решение уравнения (10.101). Точка $(0, 0, 0)$ является критической.

Рассмотрим ещё уравнение

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad (R > 0)\,. \tag{10.102}$$

Это уравнение имеет два непрерывных на круге

$$K = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

решения: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Легко видеть, что все точки (a_1, a_2, b), координаты которых удовлетворяют условиям $a_1^2 + a_2^2 = R^2$ и $b = 0$, являются критическими. Для остальных точек, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению (10.102), можно указать окрестность, в которой существует единственное непрерывное решение.

Эти примеры показывают, что условия, обеспечивающие непрерывное и удовлетворяющее (10.99) решение задачи (10.97), могут носить только локальный характер.

Приступая к решению поставленной задачи, для начала рассмотрим частный случай $m = 1$.

Теорема 10.19. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{R}$, $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на $D \times G$ функция и*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) : x \in D,\ y \in G,\ F(x, y) = 0\} \ne \varnothing.$$

Если F имеет в $D \times G$ частную производную F'_y, непрерывную и отличную от нуля в точке (a, b), то найдутся окрестности $U = U(a) \subset D$, $V = V(b) \subset G$ и единственная непрерывная функция $\varphi : U \longrightarrow V$ такая, что $F\,(x, \varphi\,(x)) \equiv 0$ $(x \in U)$ и $\varphi\,(a) = b$.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что частная производная F'_y в точке (a,b) положительна.

Докажем сначала существование окрестностей U, V и функции φ. Так как функция F'_y непрерывна в точке (a,b), то по теореме 9.20 об устойчивости знака непрерывной функции найдется окрестность W точки (a,b), в которой $F'_y(x,y) > 0$.

Выберем $r > 0$ так, чтобы точки $(a, b-r)$ и $(a, b+r)$ принадлежали окрестности W. На сегменте $[b-r, b+r]$ рассмотрим функцию одной вещественной переменной $F(a,y)$. Так как $F'_y(a,y) > 0$ при $y \in [b-r, b+r]$, то эта функция на сегменте $[b-r, b+r]$ возрастает. Но поскольку она непрерывна на сегменте $[b-r, b+r]$ и $F(a,b) = 0$, то $F(a, b-r) < 0$, а $F(a, b+r) > 0$.

Теперь воспользуемся непрерывностью функции $F(x, b-r)$. Поскольку $F(a, b-r) < 0$, то по теореме 9.20 найдется окрестность $U_1 = B\,(a, q_1)$ такая, что $U_1 \times [b-r, b+r] \subset W$ и $F(x, b-r) < 0$ при всех $x \in U_1$. Рассуждая аналогично, найдем окрестность $U_2 = B\,(a, q_2)$ такую, что $U_2 \times [b-r, b+r] \subset W$ и $F(x, b+r) > 0$ при всех $x \in U_2$. Положим $U = B\,(a, q)$, где $q = \min\{q_1, q_2\}$. Тогда, имеем:

$$F(x, b-r) < 0, \quad F(x, b+r) > 0, \quad x \in U. \tag{10.103}$$

Так как $U \times [b-r, b+r] \subset W$ и $F'_y(x,y) > 0$ при $(x,y) \in W$, то

$$F'_y(x,y) > 0$$

для всех $(x,y) \in U \times [b-r, b+r]$.

Покажем, что для каждого $x \in U$ существует единственный $y \in V = (b-r, b+r)$ являющийся решением уравнения $F(x,y) = 0$. Действительно, так как для любого $x_1 \in U$ и всех $y \in [b-r, b+r]$ выполнено условие $F'_y(x_1, y) > 0$, то на сегменте $[b-r, b+r]$ функция $F(x_1, y)$ возрастает, но ввиду (10.103), на концах этого сегмента она принимает различные по знаку значения. По теореме 9.25 (о промежуточном значении), существует $y_1 \in V$ такой, что $F(x_1, y_1) = 0$. Ввиду строгой монотонности функции $F(x_1, y)$ он единственен. Таким образом, доказано существование единственной функции $\varphi : U \longrightarrow V$ такой, что $F\,(x, \varphi\,(x)) \equiv 0$ на U. Заметим, что по построению $\varphi\,(a) = b$.

Покажем теперь, что эта функция φ непрерывна на U. Сначала докажем её непрерывность в точке a. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\varepsilon < r$. Повторив доказательство теоремы, найдём окрестность $U_\delta = B(a,\delta) \subset U$ и функцию $\varphi_1 : U_\delta \longrightarrow V_\varepsilon$ $(V_\varepsilon = (b-\varepsilon; b+\varepsilon))$ такую, что $F(x, \varphi_1(x)) \equiv 0$ в U_δ. Так как $U_\delta \subset U$, то в силу единственности $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ на U_δ. Но если $x \in U_\delta$, то $y = \varphi(x) = \varphi_1(x) \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$, другими словами, $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$, если $\|x - a\| < \delta$, что и означает непрерывность функции φ в точке a.

Если взять любую другую точку $x \in U$, то в точке $(x, \varphi(x))$ выполнены все условия доказываемой теоремы, если заменить в ней a на x и b на $\varphi(x)$, поэтому, в частности, функция φ непрерывна в точке x. ■

Возвратимся к примерам, рассмотренным перед этой теоремой.

Рассмотрим уравнение (10.100). Поскольку $F'_y(x,y) = 2y$, то из уравнения $F'_y(x,y) = 0$, находим, что $y = 0$. Но тогда из (10.100) следует, что $x = \pm 1$. Следовательно, $F'_y(-1,0) = 0$ и $F'_y(1,0) = 0$, то есть в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$, и только в них, не выполняются условия теоремы 10.19. Заметим, что эти точки являются критическими.

Обратимся к уравнению (10.101). Так как $F'_z(x,y,z) = -2z$, то $F'_z(x,y,z)$ обращается в ноль при $z = 0$. Подставляя $z = 0$ в (10.101), находим: $x = 0$, $y = 0$. Итак, $F'_z(0,0,0) = 0$. Следовательно, только в точке $(0,0,0)$ не выполняются условия теоремы 10.19. Точка $(0,0,0)$ является критической.

Нетрудно убедиться, что производная функции, задающей уравнение (10.102), обращается в нуль при $z = 0$ и $x^2 + y^2 = R^2$, то есть условия теоремы 10.19 не выполняются в точках окружности, задаваемой уравнениями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. Но все эти точки являются критическими.

Теорема 10.20. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и, сверх того, функция F дифференцируема в области $D \times G$. Тогда неявная функция φ дифференцируема на U и*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.104}$$

Доказательство. Зафиксируем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ и дадим ему такое отличное от нуля приращение $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, чтобы $x + h \in U$. Тогда φ получит приращение

$$h_{n+1} = \Delta\varphi(x)(h) = \varphi(x + h) - \varphi(x). \tag{10.105}$$

Положим $\widetilde{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Так как функция φ непрерывна в точке x (по теореме 10.19 она непрерывна на U), то $h_{n+1} \to 0$ при $h \to 0$. Поэтому $\widetilde{h} \to 0$, когда $h \to 0$. А тот факт, что $h \to 0$, когда $\widetilde{h} \to 0$, очевиден. Следовательно,

$$\widetilde{h} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h \to 0. \tag{10.106}$$

Полагая $y = \varphi(x)$, из (10.105) находим: $\varphi(x + h) = y + h_{n+1}$. Поэтому разность

$$F\left(x + h, \varphi(x + h)\right) - F\left(x, \varphi(x)\right) = F\left(x + h, y + h_{n+1}\right) - F\left(x, y\right)$$

является приращением функции F в точке (x, y), соответствующим приращению аргумента $\widetilde{h}$, то есть

$$F\left(x + h, \varphi(x + h)\right) - F\left(x, \varphi(x)\right) = \Delta F\left(x, y\right)(\widetilde{h}).$$

Но поскольку функция φ является решением уравнения $F(x, y) = 0$ при всех $x \in U$, то $F\left(x, \varphi(x)\right) = 0$ и $F\left(x + h, \varphi(x + h)\right) = 0$. Следовательно,

$$\Delta F\left(x, y\right)(\widetilde{h}) = 0. \tag{10.107}$$

По условию функция F дифференцируема. Тогда, по определению 10.4 дифференцируемости функции, на основании теоремы 10.5 и предложения 10.1, приращение $\Delta F\left(x, y\right)(\widetilde{h})$ представимо в следующем виде:

$$\Delta F\left(x, y\right)(\widetilde{h}) = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}\left(x, y\right) h_i + F'_y\left(x, y\right) h_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\widetilde{h}) h_i, \tag{10.108}$$

где $\alpha_i(\widetilde{h}) \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, при $\widetilde{h} \to 0$. Но учитывая, что вектор $\widetilde{h}$ есть функция вектора h, а также (10.106), заключаем, что все $\alpha_i(\widetilde{h})$ являются некоторыми функциями β_i, зависящими от h, то есть $\beta_i = \beta_i(h)$, причем $\beta_i(h) \to 0$, когда $h \to 0$. Поэтому представление (10.108) можно записать в следующем виде:

$$\Delta F\left(x, y\right)(\widetilde{h}) = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}\left(x, y\right) h_i + F'_y\left(x, y\right) h_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(h) h_i$$

с $\beta_i(h) \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, при $h \to 0$.

Отсюда, принимая во внимание (10.107), выводим

$$\left(F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)\right)h_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}(x,y)\,h_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(h)h_i. \tag{10.109}$$

В области определения неявной функции $F'_y(x,y)\neq 0$, и поскольку $\beta_{n+1}(h)\to 0$ при $h\to 0$, то найдется $\delta>0$ такое, что при $\|h\|<\delta$ справедливо неравенство $2\left|\beta_{n+1}(h)\right|<\left|F'_y(x,y)\right|$. Но тогда коэффициент при h_{n+1} в (10.109) отличен от нуля. Поэтому из (10.109) получаем

$$h_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)}h_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(h)}{F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)}h_i. \tag{10.110}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)}=\frac{1}{F'_y(x,y)}-\frac{\beta_{n+1}(h)}{F'_y(x,y)\left(F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)\right)}.$$

Воспользовавшись этим равенством, преобразуем только первую сумму, стоящую в правой части (10.110). Получим

$$h_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}h_i+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\beta}_i(h)h_i, \tag{10.111}$$

где

$$\widetilde{\beta}_i(h)=\frac{\beta_{n+1}(h)F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)\left(F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)\right)}-\frac{\beta_i(h)}{F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)},\quad i=1,2,\dots,n.$$

Так как при условии $\|h\|<\delta$ справедлива оценка

$$\left|F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)\right|\geq\left|F'_y(x,y)\right|-\left|\beta_{n+1}(h)\right|>\frac{1}{2}\left|F'_y(x,y)\right|,$$

то величина $\dfrac{1}{F'_y(x,y)+\beta_{n+1}(h)}$ ограничена. Поэтому $\widetilde{\beta}_i(h)\to 0$ при $h\to 0$ вместе с $\beta_i(h)$ $(i=1,2,\dots,n)$ и $\beta_{n+1}(h)$.

Из представления (10.111) и равенства (10.105) вытекает дифференцируемость функции φ и справедливость формул (10.104) в точке x. Ввиду произвольности выбора точки x в окрестности U теорема доказана. ■

Следствие 10.11. *Если все частные производные функции F непрерывны в $D\times G$, то и все частные производные неявной функции φ непрерывны на U.*

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из равенств (10.104).

Снова рассмотрим уравнения (10.100) — (10.102). Для функций F, определяющих эти уравнения, выполнены все условия теоремы 10.20 во всех точках, за исключением критических. Поэтому, для неявной функции φ, заданной уравнением (10.100), находим

$$\varphi'(x)=\frac{2x\left(x^2-1\right)}{y}$$

во всех точках (x,y), удовлетворяющих уравнению (10.100), за исключением точек $(-1,0)$ и $(1,0)$;

для функции φ, заданной уравнением (10.101),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{z}$$

во всех точках (x,y,z), удовлетворяющих уравнению (10.101), за исключением точки $(0,0,0)$;

для функции φ, заданной уравнением (10.102),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{z}$$

во всех точках (x,y,z) таких, что $x^2+y^2+z^2=R^2$, за исключением точек окружности $x^2+y^2=R^2$, $z=0$.

Пусть выполнены все условия теоремы 10.20. Тогда, как доказано, частные производные первого порядка неявно заданной функции φ в окрестности U находятся по формулам (10.104).

Пусть теперь функция F дважды дифференцируема в области $D\times G$. Тогда, согласно определению 10.10, все её частные производные первого порядка, то есть функции $F'_{x_i}(x,y)$, $i=1,2,\dots,n$, и $F'_y(x,y)$ дифференцируемы в этой области. Следовательно, по необходимому условию дифференцируемости (теорема 10.5), в указанной области существуют все частные производные второго порядка функция F. Применяя правило дифференцирования частного, продифференцируем i-ое из равенств (10.104), $i=1,2,\dots,n$, по переменной x_j, $j=1,2,\dots,n$. Получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}(x)=\frac{F'_{x_i}(x,\varphi(x))\big(F'_y(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}-\big(F'_{x_i}(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}F'_y(x,\varphi(x))}{\big(F'_y(x,\varphi(x))\big)^2},\ x\in U. \tag{10.112}$$

По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\big(F'_{x_i}(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}=F''_{x_ix_j}(x,\varphi(x))+F''_{x_iy}(x,\varphi(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x),$$
$$\big(F'_y(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}=F''_{yx_j}(x,\varphi(x))+F''_{y^2}(x,\varphi(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x).$$

Подставим полученные выражения для $\big(F'_{x_i}(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}$ и $\big(F'_y(x,\varphi(x))\big)'_{x_j}$ в (10.112). Тогда (для сокращения записи мы опускаем аргументы)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial^2F}{\partial x_j\partial y}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)-\left(\dfrac{\partial^2F}{\partial x_j\partial x_i}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

Подставим теперь в эту формулу выражение $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, определяемое j-ым из равенств (10.104), окончательно получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\dfrac{\partial^2F}{\partial x_j\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}-\dfrac{\partial^2F}{\partial x_j\partial x_i}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x_i}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Аналогично вычисляются частные производные неявно заданной скалярной функции последующих порядков, естественно, в предположении о дифференцируемости функции F в окрестности точки (a, b) достаточное число раз.

Переходя к рассмотрению неявно заданных вектор-функций, предварительно договоримся о некоторых обозначениях. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ будем записывать в виде (x, y), где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{R}^m$. Если $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}^m$, то символами F'_x и F'_y будем обозначать матрицы составленные из частных производных компонент (координатных функций) вектор-функции F по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$, соответственно, то есть

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x, y) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(x, y) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, y) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}(x, y) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Будем говорить,что матрица F'_y непрерывна в точке (a, b), если каждый её элемент $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_j}$, $k, j = 1, 2, \ldots, m$, непрерывен в указанной точке.

Заметим, что множество $D \times G$ есть область в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. Действительно, возьмем произвольную точку $(a, b) \in D \times G$. Так как D и G — области, то $a \in D$ и $b \in G$ являются внутренними точками областей D и G соответственно. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что окрестности

$$B_1(a, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_1 < \delta, \} \subset D,$$

$$B_1(b, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - b\|_1 < \delta\} \subset G,$$

где $\|x\|_1 = \max\{\|x_i\|, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$, $\|x\|_1 = \max\{\|y_j\|, \ j = 1, 2, \ldots, m\}$. А так как $B_1((a, b), \delta) = B_1(a, \delta) \times B_1(b, \delta) \subset D \times G$ и является окрестностью точки (a, b), то точка (a, b) — внутренняя точка множества $D \times G$. Следовательно, $D \times G$ — область в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Для вектор-функции, как и для скалярной функции, справедливы следующие два утверждения о существовании непрерывной и дифференцируемой неявной вектор-функции.

Теорема 10.21. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{R}^m$, $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывная на $D \times G$ вектор-функция и*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) : x \in D,\ y \in G,\ F(x, y) = 0\} \neq \varnothing.$$

Если матрица F'_y определена в $D \times G$ и непрерывна в точке $(a, b) \in \mathcal{L}$, а

$$\Delta = \det F'_y(a, b) = \frac{\mathcal{D}\left(F_1, , F_2, \ldots, F_m\right)}{\mathcal{D}\left(y_1, y_2, \ldots, y_m\right)}(a, b) \neq 0, \tag{10.113}$$

то найдутся окрестности $U = U(a) \subset D$, $V = V(b) \subset G$ и единственная непрерывная вектор-функция $\varphi : U \longrightarrow V$ такая, что $F\left(x, \varphi\left(x\right)\right) = 0$ для всех $x \in U$ и $\varphi\left(a\right) = b$.

Теорема 10.22. *Если выполнены условия теоремы 10.21 и, сверх того, функция $F : D \times G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема на $D \times G$, то вектор-функция φ, существующая по теореме 10.21, дифференцируема на U и справедливо равенство*

$$\varphi'(x) = -\Big(F'_y\left(x, \varphi\left(x\right)\right)\Big)^{-1} \cdot F'_x\left(x, \varphi\left(x\right)\right), \tag{10.114}$$

где $\left(F'_y\left(x, y\right)\right)^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $F'_y\left(x, y\right)$.

Доказательство теорем 10.21 и 10.22. Применим метод математической индукции по m. При $m = 1$ выполняются все условия уже доказанных теорем 10.19 и 10.20 о существовании и дифференцируемой неявной скалярной функции.

Предположим, что утверждение справедливо в случае, когда область $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Докажем, что оно справедливо и в том случае, когда область $G \subset \mathbb{R}^m$.

Прежде всего отметим, что уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} F_1\left(x, y\right) = 0, \\ F_2\left(x, y\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m\left(x, y\right) = 0. \end{cases}$$

Из условия (10.113) следует, что существует минор $(m-1)$-го порядка матрицы F'_y, отличный от нуля в точке (a, b). Для определенности будем предполагать, что

$$\Delta' = \frac{\mathcal{D}\left(F_2, F_3, \ldots, F_m\right)}{\mathcal{D}\left(y_2, y_3, \ldots, y_m\right)}(a, b) \neq 0.$$

Введем обозначения: $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1)$, $\widetilde{y} = (y_2, y_3, \ldots, y_m)$. Тогда, по индуктивному предположению, найдутся окрестности $\widetilde{U} = \widetilde{U}(\widetilde{a})$, $\widetilde{V} = \widetilde{V}(\widetilde{b})$ и единственная вектор-функция $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\varphi}_3, \ldots, \widetilde{\varphi}_m) : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ такая, что

$$\begin{cases} F_2\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{x}\right)\right) = 0, \\ F_3\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{x}\right)\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{x}\right)\right) = 0, \end{cases} \quad \widetilde{x} \in \widetilde{U}, \tag{10.115}$$

причем функция $\widetilde{\varphi}$ непрерывна и дифференцируема на $\widetilde{U}$ и $\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{a}\right) = \widetilde{b}$.

Подставим $\widetilde{\varphi}$ в уравнение $F_1\left(x, y\right) = 0$. Получим $F_1\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{x}\right)\right) = 0$. Поэтому, полагая

$$F_1\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{x}\right)\right) = \Phi\left(\widetilde{x}\right), \tag{10.116}$$

имеем $\Phi(\widetilde{x}) = 0$, то есть

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}\Phi(\widetilde{x}) =& \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) = \\ =& F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \widetilde{\varphi}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1), \ldots, \widetilde{\varphi}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1))\end{aligned}$$

является сложной функцией, образованной непрерывными и дифференцируемыми функциями, то Φ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки $\widetilde{a}$.

Для того, чтобы применить теоремы 10.19 и 10.20 о существовании непрерывной и дифференцируемой неявной скалярной функции докажем, что частная производная $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}$ в точке $\widetilde{a}$ отлична от нуля. С этой целью продифференцируем по y_1 равенство (10.116) и все тождества (10.115). Получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial y_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_m}{\partial y_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial y_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_m}{\partial y_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_3}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_3}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial y_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_3}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_m}{\partial y_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial y_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_m}{\partial y_1} = 0. \end{cases} \tag{10.117}$$

Здесь частные производные функций F_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, по переменным y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и функции Φ по переменной y_1 вычислены в точке $(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}))$, а частные производные функций $\widetilde{\varphi}_j$, $j = 2, 3, \ldots, m$, по переменной y_1 — в точке $\widetilde{x}$.

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ — алгебраические дополнения первого столбца якобиана (10.113). Умножим j-ое равенство системы (10.117), $j = 1, 2, \ldots, m$, на Δ_j, а затем сложим все новые равенства. Получим

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_1}(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}(\widetilde{x})) + \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial y_1}(\widetilde{x}) \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}(\widetilde{x})) = \Delta_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(\widetilde{x}).$$

Поскольку $(\widetilde{a}, \widetilde{\varphi}(\widetilde{a})) = (a, b)$, то при $\widetilde{x} = \widetilde{a}$ последнее равенство принимает вид

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a, b) + \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial y_1}(\widetilde{a}) \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(a, b) = \Delta_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(\widetilde{a}). \tag{10.118}$$

Из курса алгебры известно, что сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (любого другого) столбца равна определителю (нулю). На основании этого свойства имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a, b) = \Delta, \quad \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(a, b) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Следовательно, равенство (10.118) имеет вид

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(\widetilde{a}).$$

Поэтому, учитывая, что $\Delta_1 = \Delta'$, а Δ и Δ' отличны от нуля, заключаем, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}(\widetilde{a}) \neq 0$.

По теоремам 10.19 и 10.20 о существовании непрерывной и дифференцируемой неявной скалярной функции найдутся окрестности $U = U(a)$, $V_1 = V_1(b_1)$ и единственная функция $\varphi_1 : U \longrightarrow V_1$ такая, что $\Phi(x, \varphi_1(x)) = 0$ для всех $x \in U$, $\varphi_1(a) = b_1$, φ_1 непрерывна и дифференцируема на U.

Определим теперь окрестность $V = V(b)$ и функцию $\varphi : U \longrightarrow V$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, полагая $V = V_1 \times \widetilde{V}$, $\varphi_j(x) = \widetilde{\varphi}_j(x, \varphi_1(x))$, $j = 2, 3, \ldots, m$.

По построению, при всех $x \in U$

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \tag{10.119}$$

и $\varphi(a) = b$. Так как функция φ_1 непрерывна и дифференцируема в окрестности U, а все функции $\widetilde{\varphi}_j$, $j = 2, 3, \ldots, m$, непрерывны и дифференцируемы в окрестности $\widetilde{U}$, то каждая функция φ_j, $j = 2, 3, \ldots, m$, непрерывна и дифференцируема в окрестности U. По теореме 9.23 (теореме 10.8) функция φ непрерывна и дифференцируема в окрестности U.

Таким образом теорема 10.21 и первая часть теоремы 10.22 доказаны. Для завершения доказательства теоремы 10.22 необходимо доказать равенство (10.114).

Итак, приступим к доказательству формулы (10.114). Дифференцируя (10.119), получаем

$$\big(F(x, \varphi(x))\big)' = 0, \quad x \in U. \tag{10.120}$$

Чтобы найти $(F(x, \varphi(x)))'$, определим ещё вектор-функцию $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, полагая

$$\psi_i(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ \varphi_{i-n}(x), & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m, \end{cases} \qquad x \in U.$$

По теореме 10.8 вектор-функция ψ дифференцируема в каждой точке окрестности U. Но поскольку $F(x, \varphi(x)) = F(\psi(x))$, то по теореме 10.9

$$(F(x, \varphi(x)))' = (F(\psi(x)))' = F'(\psi(x)) \cdot \psi'(x), \quad x \in U. \tag{10.121}$$

По необходимому условию дифференцируемости вектор-функции (теорема 10.5) имеем

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}(x, y),$$

$$
\psi'(x) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}
\end{pmatrix}(x).
$$

Умножая матрицу $F'(x, \varphi(x))$ на матрицу $\psi'(x)$, получаем

$$
F'(x, \varphi(x)) \cdot \psi'(x) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\frac{\partial F_m}{\partial x_1} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x).
$$

В предыдущей матрице частная производная каждой функции F_j вычисляется в точке $(x, \varphi(x))$, а функции φ_j в точке x, $j = 1, 2, \dots, m$, где $x \in U$.

Отсюда, из (10.121) и из (10.120) следует, что для всех $x \in U$

$$
F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0
$$

или

$$
F'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -F'_x(x, \varphi(x)). \tag{10.122}
$$

По построению $\dfrac{\mathcal{D}(F_1, , F_2, \dots, F_m)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x, \varphi(x)) \neq 0$ для всех $x \in U$. Поэтому матрица $F'_y(x, \varphi(x))$ обратима. Умножая равенство (10.122) слева на матрицу $\left(F'_y(x, \varphi(x))\right)^{-1}$ (обратную к матрице $F'_y(x, \varphi(x))$), получаем (10.114). ■

Применим теперь теоремы о существовании и дифференцируемости неявного отображения к доказательству теорем о существовании и дифференцируемости обратного отображения. Определение и основные свойства обратного отображения были даны в главе „Введение в анализ“ (определение 1.26, лемма 1.7). Напомним их (в несколько изменённом виде).

Определение 10.21. *Пусть X и Y — произвольные множества и $f : X \longrightarrow Y$. Отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ называется обратным к отображению f, если выполняются* *тождества*

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \quad x \in X, \tag{10.123}$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \quad y \in Y. \tag{10.124}$$

Из тождеств (10.123) и (10.124) следует, что если отображение f^{-1} является обратным к отображению f, то отображение f является обратным к отображению f^{-1}.

Лемма 10.2. *Существование отображения f^{-1}, обратного к отображению $f : X \longrightarrow Y$, равносильно однозначной разрешимости на множестве X функционального уравнения*

$$f(x) = y \tag{10.125}$$

для любой правой части $y \in Y$.

Теорема 10.23. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и выполнены условия:*
1) $f(a) = b$;
2) отображение f дифференцируемо в области D;
3) отображение f' непрерывно в точке a;
4) $\det f'(x) \neq 0$ при всех $x \in D$.

Тогда существуют окрестности $V = V(b)$, $U = U(a)$, вектор-функция $f^{-1} : V \longrightarrow U$, обратная к вектор-функции $f : U \longrightarrow V$ и дифференцируемая в V. При этом

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}, \quad x \in U, \quad y = f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^n \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданное равенством

$$F(y, x) = y - f(x). \tag{10.126}$$

Это отображение, как нетрудно убедиться, удовлетворяет всем условиям теорем 10.21, 10.22. Поэтому найдутся окрестности $V = V(b)$ и $U = U(a)$ и единственное отображение $\varphi : V \longrightarrow U$, дифференцируемое на V и являющееся решением уравнения $F(y, x) = 0$. Так как это уравнение эквивалентно уравнению (10.125), то, как следует из доказательства леммы 10.2, $\varphi(y) = f^{-1}(y)$. По формуле (10.114) с учетом (10.126) имеем:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = -\left(F'_x\left(y, f^{-1}\left(y\right)\right)\right)^{-1} \cdot F'_y\left(y, f^{-1}\left(y\right)\right) = -\left(-f'(x)\right)^{-1} \cdot I = \left(f'(x)\right)^{-1}.$$

Теорема доказана. ■

10.6 Системы функций

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ заданы m дифференцируемых функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Определение 10.22. *Говорят, что функция f_k зависит в области D от остальных функций $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_m$, если для любого $x \in D$*

$$f_k(x) = F\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x)\right),$$

где функция F определена и дифференцируема в области, содержащей множество значений своих аргументов.

Определение 10.23. *Функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ называют зависимыми в области D, если хотя бы одна из них зависит от остальных. В противном случае эти функции называют независимыми в области D.*

Пример 10.18. *Покажем, что функции*

$$\begin{aligned} y_1 =& x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ y_3 =& x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

зависимы в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $y_2 = y_1^2 - 2y_3$. Поэтому, согласно определению 10.22, функция y_2 зависит от функций y_1 и y_3 во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Но по определению 10.23 это означает, что функции y_1, y_2 и y_3 зависимы в $\mathbb{R}^n$.

Пример 10.19. *Покажем, что функции $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$ независимы в любой области $D \subset \mathbb{R}^2$.*

Предположим противное, то есть, что существует область $D \subset \mathbb{R}^2$ в которой, например, $y_2 = F(y_1)$. Возьмем произвольную точку $a = (a_1, a_2) \in D$. Так как D — область, то вместе с точкой a она содержит и интервал прямой $x_1 + x_2 = a_1 + a_2$, проходящей через эту точку. На этой прямой выполняется равенство $x_1 - x_2 = 2x_1 - (a_1 + a_2)$. Поэтому равенство $y_2 = F(y_1)$ на прямой $x_1 + x_2 = a_1 + a_2$ принимает вид $2x_1 - (a_1 + a_2) = F(a_1 + a_2)$, что невозможно.

Предположение, что функция y_1 зависит от функции y_2, приводит к такому же результату.

Замечание. Понятие зависимости функций является обобщением известного понятия *линейной* зависимости функций. Действительно, очевидно, что линейно зависимые в области D функции — зависимы в ней. С другой стороны, как показывает пример 10.18, существуют функции, зависимые в области D, но не являющиеся линейно зависимыми в этой области.

Теорема 10.24. (**Достаточное условие независимости функций**) *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m \leq n)$, — дифференцируемые в D функции. Если в некоторой точке $a \in D$ ранг матрицы Остроградского-Якоби функций f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, то есть матрицы*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{10.127}$$

равен m, то существует окрестность точки a, в которой функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, независимы.

Доказательство. Предположим противное, то есть что одна из функций f_j, например, f_k в окрестности точки a зависит от остальных. По определению 10.22 существует дифференцируемая функция F такая, что для любого x из этой окрестности

$$f_k(x) = F\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x)\right).$$

Найдем частные производные функции f_k, представленной в этом виде. Согласно формулам (10.43), будем иметь:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial F}{\partial y_j}(\widetilde{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=k+1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_j}(\widetilde{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.128}$$

где $\widetilde{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_m)$ и $b_j = f_j(a)$. Из равенств (10.128) следует, что k-я строка матрицы (10.127) является линейной комбинацией остальных строк. Поэтому ранг этой матрицы меньше числа m, что противоречит условию. ■

Теорема 10.25. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — дифференцируемые в D функции, причем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ каждой функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, по любой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны в точке a. Если ранг матрицы Остроградского-Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{10.129}$$

не выше r $(0 < r < m,\ 0 < r \leq n)$ в области D и равен r в точке a, то существует окрестность точки a, в которой те r функций f_j, частные производные которых представлены в отличном от нуля миноре порядка r матрицы Остроградского-Якоби в точке a, независимы, а остальные $(m - r)$ функций зависят от них.

Доказательство. Перенумеровав, если необходимо, функции f_j и переменные x_i, можно считать, что отличен от нуля верхний левый минор порядка r, то есть

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)}(a) \neq 0.$$

Тогда по предыдущей теореме функции $f_1, f_2, \ldots, f_r$ независимы в некоторой окрестности точки a.

Докажем, что остальные функции $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_m$ зависят от функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Установим это для функции f_{r+1}.

Пусть $b_j = f_j(a)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $\widetilde{a} = (b_1, b_2, \ldots, b_r, a_{r+1}, \ldots, a_n)$, $\widetilde{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Определим отображение F как r-мерную вектор-функцию $n + r$ переменных, полагая

$$\begin{aligned} &F_j(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_r) = \\ &\quad = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) - y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 10.22, согласно которой найдутся окрестность U точки $\widetilde{a}$, окрестность V точки $\widetilde{b}$ и единственная вектор-функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r) : U \longrightarrow V$ такая, что

$$\begin{aligned} &F(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n,\ \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\quad \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)) = 0 \end{aligned} \tag{10.130}$$

для всех $(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in U$, $\varphi(\widetilde{a}) = \widetilde{b}$ и φ дифференцируема на U.

Возьмем функцию $y_{r+1} = f_{r+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ и заменим первые r её аргументов соответствующими координатными функциями φ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Получим

$$y_{r+1} = f_{r+1}(\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), x_{r+1}, \ldots, x_n) = F_{r+1}(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \tag{10.131}$$

Для того, чтобы убедиться в зависимости функции y_{r+1} от функций y_1, $y_2, \ldots, y_r$, необходимо показать, что функция F_{r+1} на самом деле не содержит аргументов $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Для этого достаточно показать, что в области $U \times V$

$$\frac{\partial F_{r+1}}{\partial x_i} = 0, \quad i = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Из справедливости тождества (10.130) и определения отображения F следует, что

$$f_j(\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots, \varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)) - y_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Дифференцируя каждое из этих тождеств по переменной x_{r+1}, получаем

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial f_j}{\partial x_{r+1}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{10.132}$$

Используя определение (10.131) функции F_{r+1}, найдем частную производную первого порядка функции F_{r+1} по переменной x_{r+1}. Получим:

$$\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \ldots + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} = \frac{\partial F_{r+1}}{\partial x_{r+1}}. \tag{10.133}$$

Рассмотрим систему уравнений, составленную из уравнений (10.132) и уравнения (10.133). Определителем этой системы является левый верхний минор порядка $r+1$ матрицы (10.129). Поскольку ранг этой матрицы не выше r, то данный минор равен нулю. Поэтому левая часть (10.133) является линейной комбинацией левых частей (10.132). Но это означает, что $\dfrac{\partial F_{r+1}}{\partial x_{r+1}} = 0$ в некоторой окрестности точки $\widetilde{a}$. Аналогично доказывается, что там же $\dfrac{\partial F_{r+1}}{\partial x_i} = 0$, $i = r+2, r+3, \ldots, n$. Таким образом, F_{r+1} не зависит от аргументов $x_{r+1}, \ldots, x_n$, а является функцией только переменных $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Следовательно, (10.131) имеет вид: $y_{r+1} = F_{r+1}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$.

Точно так же доказывается, что

$$y_j = F_j(y_1, y_2, \ldots, y_r), \quad j = r+2, r+3, \ldots, m.$$

Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь функции из примера 10.18. Матрица Остроградского-Якоби этих функций имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_n \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n & x_1 + x_3 + \ldots + x_n & \ldots & x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что любой минор второго порядка, составленный из элементов первых двух строк этой матрицы, отличен от нуля. Поэтому ранг этой матрицы не меньше двух. Но, если к третьей строке прибавить вторую, умноженную на $0,5$, а затем вычесть из неё первую, умноженную на $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, то получится строка из нулей. Следовательно, третья строка есть линейная комбинация первых двух строк. Это означает, что все миноры третьего порядка равны нулю. Таким образом, ранг этой матрицы равен двум. Согласно теореме 10.25, функции y_1 и y_2 независимы, а y_3 зависит от y_1 и y_2.

Для функций из примера 10.19 матрица Остроградского-Якоби имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы отличен от нуля. Поэтому её ранг равен двум. По теореме 10.24 функции y_1 и y_2 из примера 10.19 независимы.

10.7 Условный экстремум

В математике и её приложениях часто встречаются задачи отыскания экстремумов функций нескольких переменных, аргументы которых связаны некоторыми соотношениями. Такие экстремумы называют условными.

Начнем со следующего примера.

Пример 10.20. *Исследуем на экстремум функцию $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y = 1$.*

Условие $x + y = 1$ означает, что функция f исследуется на экстремум не во всей плоскости Oxy, а лишь на прямой, описываемой этим уравнением.

Действительно, легко показать, что функция f имеет экстремум в точке $(0,0)$. Этот экстремум — локальный минимум, равный нулю. Но координаты точки $(0,0)$ не удовлетворяют уравнению $x+y = 1$. Следовательно, необходимо как-то учитывать условие $x+y = 1$. Поступим следующим образом. Из этого уравнения выразим переменную y как функцию переменной x. Получим $y = 1 - x$. Подставив теперь это представление в формулу $f(x,y) = x^2 + y^2$, будем иметь функцию $u(x) = f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1$. Таким образом, поставленная задача отыскания условного экстремума функции двух переменных сведена к задаче отыскания безусловного экстремума функции одного переменного.

Нетрудно убедиться, что функция u имеет (безусловный) локальный минимум в точке $x = \dfrac{1}{2}$ равный $\dfrac{1}{2}$. Следовательно, функция f имеет условный локальный минимум в точке $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ равный $\dfrac{1}{2}$.

Как видим, условный экстремум функции f отличается от её безусловного экстремума.

Перейдём к строгим определениям.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, функции $\varphi_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m < n)$, непрерывно дифференцируемы и независимы в области D.

Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.134}$$

В дальнейшем уравнения этой системы будем называть *условиями связи*.

Допустим, что эта система уравнений имеет непустое множество решений $D_0 \subset D$. О каждой точке $a \in D_0$ будем говорить, что она удовлетворяет условиям связи (10.134).

Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, точка $a \in D$ удовлетворяет условиям связи (10.134).

Определение 10.24. *Говорят, что функция f имеет в точке a условный локальный максимум (минимум), если существует окрестность $U = U(a) \subset D$, во всех точках* *которой, удовлетворяющим условиям связи (10.134), значение функции f не больше (не меньше), чем в точке a.*

Условный локальный максимум и условный локальный минимум объединяют в одно понятие — *условный (локальный) экстремум*.

Теоретически задача отыскания условного экстремума функции f в области D может быть сведена к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой функции F от $n-m$ переменных следующим образом.

Пусть точка $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, принадлежащая области D, является точкой условного экстремума функции f. Поскольку функции φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ независимы в области D, то по теореме 10.24 ранг матрицы Остроградского-Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

равен m во всех точках области D. Следовательно, в каждой точке области D по крайней мере один из её миноров порядка m отличен от нуля. Предположим, что

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}(a) \neq 0. \tag{10.135}$$

Пусть $\widetilde{a} = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n)$, $b = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Для каждого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ положим $y = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\widetilde{x} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$. Поскольку систему функций φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ можно рассматривать как вектор-функцию

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

то по теореме 10.22 условия связи (10.134) могут быть разрешены относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, то есть в некоторой окрестности точки $\widetilde{a}$ могут быть определены дифференцируемые функции ψ_i, $i = 1, 2, \dots, m$. Точнее, по упомянутой теореме найдутся окрестность $U = U(\widetilde{a})$, окрестность $V = V(b)$ и единственная вектор-функция $\psi : U \longrightarrow V$ такая, что

$$\varphi\left(\psi_1\left(\widetilde{x}\right), \psi_2\left(\widetilde{x}\right), \dots, \psi_m\left(\widetilde{x}\right), x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\right) = 0, \quad \widetilde{x} \in U,$$

$\psi(\widetilde{a}) = b$, ψ дифференцируема в окрестности U и

$$\psi'(\widetilde{x}) = -\left(\varphi'_y\left(x\right)\right)^{-1} \cdot \varphi'_{\widetilde{x}}\left(x\right). \tag{10.136}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = \\ = & f(\psi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \psi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \dots, \\ & \psi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = F(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10.137}$$

причем F, как суперпозиция дифференцируемых функций, дифференцируема в окрестности точки $\widetilde{a}$.

Очевидно, что точка a является точкой условного экстремума функции f тогда и только тогда, когда точка $\widetilde{a}$ является точкой безусловного экстремума функции F.

Таким образом, задача отыскания условного экстремума теоретически сведена к задаче отыскания безусловного экстремума. На практике, однако, разрешить систему (10.134) нелинейных уравнений относительно каких-либо m переменных почти никогда не представляется возможным. Поэтому необходим метод отыскания условного экстремума более приемлемый для практических целей. Далее будет изложен один из таких методов.

Метод неопределенных множителей Лагранжа

Пусть точка $a \in D$ и удовлетворяет условиям связи (10.134).

Определение 10.25. *Говорят, что приращение h удовлетворяет в точке a условиям связи, если оно удовлетворяет системе линейных уравнений*

$$d\varphi_j(a)(h) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{10.138}$$

Следует иметь в виду, что если приращение h удовлетворяет в точке a условиям связи, то точка $a + h$, вообще говоря, не принадлежит множеству D_0 решений системы (10.134).

Лемма 10.3. *Если точка a — точка условного экстремума функции f, то для любого приращения h, удовлетворяющего в точке a условиям связи,*

$$df(a)(h) = 0. \tag{10.139}$$

Доказательство. Поскольку точка $\widetilde{a} = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n)$ является точкой безусловного экстремума функции F, определенной равенством (10.137), то по следствию 10.8 из необходимого условия безусловного экстремума, имеем

$$dF(\widetilde{a})(\widetilde{h}) = 0,$$

где $\widetilde{h} = (h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_n)$. Ввиду (10.137) и инвариантности формы дифференциала первого порядка это тождество может быть записано в виде (10.139). Но при этом приращения $h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_n$ независимы, а приращения $h_1, h_2, \dots, h_m$ могут быть найдены из уравнений (10.138). Очевидно, что $h_1, h_2, \dots, h_m$ суть дифференциалы функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, поэтому, обозначив $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)$, имеем

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} = d\psi(\widetilde{a})(\widetilde{h}) = \psi'(\widetilde{a}) \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ h_{m+2} \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{10.140}$$

Для завершения доказательства остается показать, что равенство (10.140) выполняется тогда и только тогда, когда приращение h удовлетворяет в точке a условиям связи.

В силу (10.136) равенство (10.140) принимает вид

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} = -\Big(\varphi'_y\,(a)\Big)^{-1} \cdot \varphi'_{\widetilde{x}}\,(a) \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ h_{m+2} \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{10.141}$$

С другой стороны, систему уравнений (10.138) можно записать в виде

$$\varphi'(a)h = \varphi'_y\,(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} + \varphi'_{\widetilde{x}}\,(a) \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ h_{m+2} \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = 0.$$

Перенесем второе слагаемое в правую часть и получим

$$\varphi'_y(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} = -\varphi'_{\tilde{x}}(a)\begin{pmatrix} h_{m+1} \\ h_{m+2} \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Умножив теперь слева обе части последнего равенства на матрицу, обратную матрице $\varphi'_y(a)$, получим (10.141). ■

Необходимое условие условного экстремума

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. Определим функцию $\Phi : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x).$$

Эту функцию называют *функцией Лагранжа*. Функция Лагранжа, как линейная комбинация дифференцируемых в области D функций, дифференцируема в области D.

Теорема 10.26. *Если точка $a \in D$ является точкой условного экстремума функции f, то в $\mathbb{R}^m$ найдется точка $\lambda_0 = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}\right)$ такая, что*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a, \lambda_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{10.142}$$

Доказательство. Пусть h — приращение, удовлетворяющее в точке a условиям связи. Тогда по лемме 10.3 имеем $df(a)(h) = 0$. Поэтому

$$d\Phi(a, \lambda)(h) = df(a)(h) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d\varphi_j(a)(h) = 0.$$

Следовательно,

$$d\Phi(a, \lambda)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a, \lambda) \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) \right) \cdot h_i = 0. \tag{10.143}$$

Как и прежде, будем считать, что выполняется (10.135). Тогда можно подобрать числа $\lambda_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ так, чтобы при $\lambda_j = \lambda_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ выполнялись равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{10.144}$$

Это следует из того, что (10.144) относительно чисел λ_j представляет систему линейных уравнений с определителем, отличным от нуля.

При $\lambda = \lambda_0 = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}\right)$ равенство (10.143) принимает вид

$$d\Phi(a, \lambda_0)(h) = \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) \right) \cdot h_i = 0.$$

Но так как переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в окрестности точки a независимы, то независимы и приращения $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n$. Поэтому из последнего равенства следует, что и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = m+1, m+2, \ldots, n. \tag{10.145}$$

Объединяя (10.144) и (10.145), получаем (10.142).

Теорема доказана. ■

Таким образом, для отыскания точек возможного экстремума функции f следует составить функцию Лагранжа Φ, найти её частные производные первого порядка и решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \varphi_j(x) = 0, & j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{10.146}$$

Эта система состоит из $n+m$ уравнений и содержит столько же неизвестных: n координат точек возможного экстремума и m отвечающих им чисел λ_j.

Достаточное условие условного экстремума

Теорема 10.27. *Пусть функции f и φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы в области D, точка (a, λ_0) является решением системы (10.146). Тогда, если в точке (a, λ_0) дифференциал второго порядка $d^2\Phi(a, \lambda_0)(h)$, где приращение h удовлетворяет условиям связи, представляет собой:*

а) *положительно определенную квадратичную форму, то в точке a функция f имеет локальный условный минимум;*

б) *отрицательно определенную квадратичную форму, то в точке a функция f имеет локальный условный максимум;*

в) *неопределенную или полуопределённую квадратичную форму, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума в точке a у функции f требует дополнительного исследования.*

Доказательство. Снова будем считать выполненным условие (10.135). Как видно из представления (10.136), неявная вектор-функция ψ дифференцируема в окрестности U точки $\widetilde{a}$ столько же раз, сколько и определяющие её функции φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому функция ψ дважды дифференцируема в окрестности V точки b.

Пусть $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ — такое приращение, что точка $a + \Delta x \in V \times U$ и удовлетворяет условиям связи (10.134), то есть

$$\varphi_j(a + \Delta x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как выполнено условие (10.135), то

$$(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_m + \Delta x_m) = \psi(a_{m+1} + \Delta x_{m+1}, \ldots, a_n + \Delta x_n). \tag{10.147}$$

Обозначим

$$\Delta x_i = h_i, \quad i = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Тогда из (10.147) находим

$$(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = \psi(a_{m+1} + h_{m+1}, \ldots, a_n + h_n) - \psi(a_{m+1}, \ldots, a_n).$$

Пусть приращения $h_1, h_2, \ldots, h_m$ определены равенством (10.141). Положим

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_m, h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n).$$

Как было показано при доказательстве леммы 10.3, приращение h удовлетворяет условиям связи.

Рассмотрим теперь приращение функции Лагранжа в точке (a, λ_0) соответствующее приращению аргумента Δx. Имеем:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi\left(a, \lambda_0\right)\left(\Delta x\right) = &\Phi\left(a+\Delta x, \lambda_0\right) - \Phi\left(a, \lambda_0\right) = \\ =&\Phi\left(a+h, \lambda_0\right) - \Phi\left(a, \lambda_0\right) + \Phi\left(a+\Delta x, \lambda_0\right) - \Phi\left(a+h, \lambda_0\right).\end{aligned} \tag{10.148}$$

Так как приращение h удовлетворяет условиям связи и выполнены необходимые условия условного экстремума, то по формуле Тейлора

$$\Phi\left(a+h, \lambda_0\right) - \Phi\left(a, \lambda_0\right) = \frac{1}{2}\, d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h) + o\left(\|h\|^2\right). \tag{10.149}$$

Поскольку на сегменте $[a+\Delta x, a+h]$ для функции $\Phi\left(x, \lambda_0\right)$ переменной x выполнены все условия теоремы Лагранжа 10.2, то найдется точка $c \in (a+\Delta x, a+h)$ такая, что

$$\Phi\left(a+\Delta x, \lambda_0\right) - \Phi\left(a+h, \lambda_0\right) = \Phi'_e\left(c, \lambda_0\right)\cdot\|\Delta x - h\|, \tag{10.150}$$

где направление e определяется вектором $\Delta x - h$.

Так как по условию функции f и φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы в точке a, то Φ'_e непрерывна в точке (a, λ_0). Поэтому $\Phi'_e\left(c, \lambda_0\right)$ представимо в следующем виде $\Phi'_e\left(c, \lambda_0\right) = \Phi'_e\left(a, \lambda_0\right) + \alpha$, где α — бесконечно малая в окрестности точки a функция. А поскольку по необходимому условию (в силу (10.142)) $\Phi'_e\left(a, \lambda_0\right) = 0$, то (10.150)) принимает вид

$$\Phi\left(a+\Delta x, \lambda_0\right) - \Phi\left(a+h, \lambda_0\right) = \alpha\cdot\|\Delta x - h\|.$$

Рассмотрим компоненты вектора $\Delta x - h$. По определению $\Delta x_i - h_i = 0$ для каждого $i = m+1, m+2, \ldots, n$. Если же $i = 1, 2, \ldots, m$, то поскольку h_i есть дифференцируемая функция ψ_i (см. доказательство леммы 10.3), то, используя формулу Тейлора, имеем

$$\begin{aligned}\Delta x_i - h_i =&\Delta\psi_i\left(\widetilde{a}\right)\left(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n\right) - d\psi_i\left(\widetilde{a}\right)\left(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n\right) = \\ =&\frac{1}{2} d^2\psi_i\left(\widetilde{a}\right)\left(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n\right) + o\left(\|h\|^2\right) = O\left(\|h\|^2\right),\end{aligned}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$. Но тогда и $\|\Delta x - h\| = O\left(\|h\|^2\right)$, поэтому

$$\Phi\left(a+\Delta x, \lambda_0\right) - \Phi\left(a+h, \lambda_0\right) = \alpha\cdot O\left(\|h\|^2\right) = o\left(\|h\|^2\right). \tag{10.151}$$

Из (10.148), используя (10.149) и (10.151), получаем

$$\Delta\Phi\left(a, \lambda_0\right)\left(\Delta x\right) = \frac{1}{2}\, d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h) + o\left(\|h\|^2\right).$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности точки a знак приращения функции Лагранжа определяется знаком дифференциала второго порядка функции Лагранжа, зависящего от приращения h, удовлетворяющего условиям связи.

Вводя обозначения $h_i = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, распишем $d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h)$. Так как дифференциалы dx_i, $i = m+1, m+2, \ldots, n$, независимы, а dx_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ не являются таковыми, то

$$d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\left(a, \lambda_0\right) dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\left(a, \lambda_0\right) d^2 x_i.$$

Но $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a, \lambda_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому

$$d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\left(a, \lambda_0\right) dx_i dx_j, \tag{10.152}$$

то есть в точке возможного экстремума дифференциал второго порядка имеет такой же вид, как и при независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Поэтому, если квадратичная форма (10.152) знакоопределенная, то вопрос о наличии условного экстремума в точке a решен.

Если же (10.152) неопределенная или полуопределенная квадратичная форма, то вопрос о наличии или отсутствии в точке a условного экстремума остается открытым, поскольку дифференциалы dx_i принимают не все значения, а только такие, которые удовлетворяют условиям связи, и не исключено, что для таких значений дифференциалов квадратичная форма (10.152) будет иметь определенный знак. В этом случае следует исключить зависимые дифференциалы, выразив из уравнений (10.138) дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ зависимых переменных через дифференциалы $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ независимых переменных. Подставив получившиеся выражения в (10.152), приведем дифференциал $d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h)$ к виду

$$d^2\Phi\left(a, \lambda_0\right)(h) = \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{i,j} dx_i dx_j. \tag{10.153}$$

Поскольку в (10.153) дифференциалы $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ независимы, то они могут принимать произвольные значения, поэтому поведение квадратичной формы (10.153) определяет наличие или отсутствие условного экстремума в точке a. ■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10.21. *Исследовать на экстремум функцию $u = x^3 + y^3 + z^3$, если $x + y + z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.*

Функции $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ и $\varphi(x, y, z) = x + y + z - 6$ — определены и дважды дифференцируемы в первом октанте пространства $\mathbb{R}^3$. Ранг матрицы Остроградского-Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

отображения $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ равен единице. Следовательно, можно применить метод Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi\left(x, y, z, \lambda\right) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda\left(x + y + z - 6\right).$$

Продифференцируем её по переменным x, y и z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 + \lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 + \lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 3z^2 + \lambda.$$

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} 3x^2 + \lambda = 0, \\ 3y^2 + \lambda = 0, \\ 3z^2 + \lambda = 0, \\ x + y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Эта система (в первом октанте) имеет одно решение (a, λ) с $a = (2, 2, 2)$ и $\lambda = -12$.

Нетрудно видеть, что дифференциал второго порядка функции Лагранжа Φ в найденной точке (a, λ) имеет вид:

$$d^2\Phi\,(a, \lambda)\,(dx, dy, dz) = \left(6xdx^2 + 6ydy^2 + 6zdz^2\right)\Big|_{(a,\lambda)} = 12\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

Так как этот дифференциал представляет собой положительно определенную квадратичную форму, то в точке a функция u имеет условный локальный минимум, причём $u_{\min} = u\,(2, 2, 2) = 24$.

Пример 10.22. *Исследуем на экстремум функцию $u = x + y + z$ при условиях $z^2 = xy$, $x + y = 2$.*

Функции $f(x, y, z) = x + y + z$, $\varphi_1(x, y, z) = z^2 - xy$ и $\varphi_2(x, y, z) = x + y - 2$ определены и дважды дифференцируемы во всем трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Матрица Остроградского-Якоби отображения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.154}$$

Её ранг равен единице на прямой $x = y$, $z = 0$, и двум в остальных точках пространства $\mathbb{R}^3$. Но как легко проверить, ни одна точка прямой $x = y$, $z = 0$ не является решением системы

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = & 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = & 0. \end{cases} \tag{10.155}$$

Следовательно, на множестве решений системы (10.155) ранг матрицы (10.154) равен двум, поэтому функции φ_1 и φ_2 независимы на этом множестве. Таким образом, выполнены все условия, необходимые для применения метода Лагранжа.

Запишем функцию Лагранжа

$$\Phi\,(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda\left(z^2 - xy\right) + \mu\,(x + y - 2)\,.$$

Найдем её частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - \lambda y + \mu, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 - \lambda x + \mu, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 1 + 2\lambda z.$$

Приравняем к нулю частные производные и добавим к ним условия связи. Получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - \lambda y + \mu = 0, \\ 1 - \lambda x + \mu = 0, \\ 1 + 2\lambda z = 0, \\ z^2 = xy, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $\lambda\,(x - y) = 0$. Так как $\lambda = 0$ не удовлетворяет третьему уравнению, то мы имеем: $x - y = 0$. Отсюда и пятого уравнения находим $x = y = 1$. Тогда из четвертого уравнения следует, что $z_{1,2} = \pm 1$, из третьего — $\lambda_{1,2} = \mp\dfrac{1}{2}$ и из первого — $\mu_1 = -\dfrac{3}{2}$, $\mu_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Итак, имеем два решения:

$$1)\quad a_1 = (x, y, z_1) = (1, 1, 1), \quad \lambda_0^{(1)} = (\lambda_1, \mu_1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right);$$
$$2)\quad a_2 = (x, y, z_2) = (1, 1, -1), \quad \lambda_0^{(2)} = (\lambda_2, \mu_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Найдем теперь частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = -\lambda, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\lambda.$$

В первой точке дифференциал второго порядка функции Лагранжа имеет вид:

$$d^2\Phi\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)(dx, dy, dz) = dxdy - dz^2.$$

Этот дифференциал является неопределенной квадратичной формой, поэтому по нему нельзя судить о наличии (или отсутствии) условного экстремума в точке $a_1 = (1, 1, 1)$, а следует исключить зависимые дифференциалы.

Продифференцируем условия связи. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -ydx - xdy + 2zdz &= 0, \\ \quad dx + dy &= 0, \end{cases}$$

которая в точке $\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)$ принимает следующий вид:

$$\begin{cases} dx + dy - 2dz &= 0, \\ \quad dx + dy &= 0. \end{cases}$$

Решая её, получаем $dz = 0$, $dy = -dx$. А поскольку нас интересуют лишь нетривиальные решения, то $dx \neq 0$ и поэтому дифференциал второго порядка

$$d^2\Phi\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)(dx, dy, dz) = -dx^2$$

представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму. Следовательно в точке $a_1 = (1, 1, 1)$ функция u имеет условный локальный максимум и $u_{\max} = u(1, 1, 1) = 3$.

Во второй точке дифференциал второго порядка функции Лагранжа имеет следующий вид:

$$d^2\Phi\left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right)(dx, dy, dz) = -dxdy + dz^2$$

и снова $dz = 0$, $dy = -dx \neq 0$, поэтому после исключения зависимых дифференциалов имеем

$$d^2\Phi\left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right)(dx, dy, dz) = dx^2.$$

Последний дифференциал является положительно определенной квадратичной формой. Следовательно в точке $a_2 = (1, 1, -1)$ функция u имеет условный локальный минимум и $u_{\min} = u(1, 1, -1) = 1$.

Пример 10.23. *Найдем экстремальные значения функции $u = xyz$ при следующих условиях: $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.*

Функции $f(x,y,z) = xyz$, $\varphi_1(x,y,z) = x+y+z-5$ и $\varphi_2(x,y,z) = xy+yz+zx-8$ определены и дважды дифференцируемы во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Построим матрицу Остроградского-Якоби отображения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Так как

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = y+z, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = x+z, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = x+y,$$

то матрица Остроградского-Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}. \tag{10.156}$$

Покажем, что ранг этой матрицы на множестве решений системы

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ xy+yz+zx=8 \end{cases} \tag{10.157}$$

равен двум.

Предположим противное. Тогда из обращения в ноль всех миноров второго порядка матрицы (10.156), следует что $y+z = x+z = x+y$ или $x=y=z$. Но из первого уравнения системы (10.157) в этом случае вытекало бы, что $x=y=z=\dfrac{5}{3}$, а из второго — $x=y=z=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$. Противоречие. Следовательно, ранг матрицы (10.156) равен двум в каждой точке, являющейся решением системы (10.157). Поэтому можно применять метод Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi\left(x,y,z,\lambda,\mu\right) = xyz + \lambda\left(x+y+z-5\right) + \mu\left(xy+yz+zx-8\right).$$

Продифференцируем её по переменным x, y и z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda + \mu(y+z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda + \mu(x+z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy + \lambda + \mu(x+y).$$

Для нахождения стационарных точек составим систему уравнений

$$\begin{cases} yz + \lambda + \mu(y+z) = 0, \\ xz + \lambda + \mu(x+z) = 0, \\ xy + \lambda + \mu(x+y) = 0, \\ x+y+z-5 = 0, \\ xy+yz+zx-8 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим шесть стационарных точек для функцию Лагранжа $\left(a_j, \lambda_0^{(j)}\right) = (x_j, y_j, z_j, \lambda_j, \mu_j)$, $j = 1, 2, \ldots, 6$:

$$\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right) = (2,2,1,4,-2), \quad \left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right),$$
$$\left(a_3, \lambda_0^{(3)}\right) = (2,1,2,4,-2), \quad \left(a_4, \lambda_0^{(4)}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right),$$
$$\left(a_5, \lambda_0^{(5)}\right) = (1,2,2,4,-2), \quad \left(a_6, \lambda_0^{(6)}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right).$$

Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=z+\mu,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}=y+\mu,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}=x+\mu.$$

Составим дифференциал второго порядка функции Лагранжа:

$$d^2\Phi\left(a_j,\lambda_0^{(j)}\right)(dx,dy,dz)=2\left((z+\mu)\,dxdy+(y+\mu)\,dxdz+(x+\mu)\,dydz\right).$$

В силу симметрии относительно переменных x, y и z как функции f, так и функций φ_1, φ_2 (функции Лагранжа) достаточно исследовать этот дифференциал только в двух точках $\left(a_1,\lambda_0^{(1)}\right)$ и $\left(a_2,\lambda_0^{(2)}\right)$.

$$d^2\Phi\left(a_1,\lambda_0^{(1)}\right)(dx,dy,dz)=d^2\Phi\,(2,2,1,4,-2)\,(dxdydz)=-2dxdy.$$

Поскольку без учета условий связи невозможно определить знак произведения $dxdy$, продифференцируем уравнения связи. Получим следующую систему

$$\left\{\begin{array}{l} dx+dy+dz=0,\\ (y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(x+y)\,dz=0.\end{array}\right. \tag{10.158}$$

В точке $\left(a_1,\lambda_0^{(1)}\right)$ эта система принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l} dx+dy+dz=0,\\ 3dx+3dy+4dz=0.\end{array}\right.$$

Решая её, получаем: $dz=0$, $dy=-dx$. Поскольку нас интересуют ненулевые решения этой системы, то $dx\neq 0$ (в противном случае и $dy=0$). Поэтому

$$d^2\Phi\left(a_1,\lambda_0^{(1)}\right)(dx,dy,dz)=2dx^2>0.$$

Следовательно, в точке $(2,2,1)$, а также в точках $(2,1,2)$ и $(1,2,2)$, функция u имеет условный локальный минимум: $u_{\min}=u\,(2,2,1)=u\,(2,1,2)=u\,(1,2,2)=4.$

Исследуем теперь дифференциал $d^2\Phi$ в точке $\left(a_2,\lambda_0^{(2)}\right)$. В этой точке

$$d^2\Phi\left(a_2,\lambda_0^{(2)}\right)(dx,dy,dz)=d^2\Phi\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\right)(dx,dy,dz)=2dxdy,$$

а система (10.158) принимает вид:

$$\left\{\begin{array}{l} dx+dy+dz=0,\\ \dfrac{11}{3}dx+\dfrac{11}{3}dy+\dfrac{8}{3}dz=0.\end{array}\right.$$

Решение этой системы $dz=0$, $dy=-dx$ подставим во второй дифференциал и получим

$$d^2\Phi\left(a_2,\lambda_0^{(2)}\right)(dx,dy,dz)=-2dx^2<0.$$

Следовательно, в точках $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ и $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ функция u имеет условный локальный максимум:

$$u_{\max}=u\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)=u\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)=u\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{112}{27}.$$

Пример 10.24. *Найдем экстремальные значения функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $6x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 12$.*

Функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$и $\varphi(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 12$ — определены и дважды дифференцируемы во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Матрица Остроградского-Якоби отображения $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & 8y & 6z \end{pmatrix}.$$

Так как точка $(0, 0, 0)$ не удовлетворяет уравнению связи, то ранг этой матрицы на множестве решений системы равен единице, поэтому для исследований можно применять метод Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi\left(x, y, z, \lambda\right) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(6x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 12\right).$$

Продифференцируем её по переменным x, y и z:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2\left(1 + 6\lambda\right)x, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2\left(1 + 4\lambda\right)y, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2\left(1 + 3\lambda\right)z.$$

Для нахождения стационарных точек составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2\left(1 + 6\lambda\right)x = 0, \\ 2\left(1 + 4\lambda\right)y = 0, \\ 2\left(1 + 3\lambda\right)z = 0, \\ 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет шесть решений:

$$\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right) = \left(0, 0, -2, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right) = \left(0, 0, 2, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(a_3, \lambda_0^{(3)}\right) = \left(0, -\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{4}\right),$$
$$\left(a_4, \lambda_0^{(4)}\right) = \left(0, \sqrt{3}, 0, -\frac{1}{4}\right), \quad \left(a_5, \lambda_0^{(5)}\right) = \left(-\sqrt{2}, 0, 0, -\frac{1}{6}\right), \quad \left(a_6, \lambda_0^{(6)}\right) = \left(\sqrt{2}, 0, 0, -\frac{1}{6}\right).$$

Найдём дифференциал второго порядка функции Лагранжа:

$$d^2\Phi\left(a_j, \lambda_0^{(j)}\right)(dx, dy, dz) = 2\left(1 + 6\lambda\right)dx^2 + 2\left(1 + 4\lambda\right)dy^2 + 2\left(1 + 3\lambda\right)dz^2.$$

В точках $\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)$ и $\left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right)$ этот дифференциал принимает вид

$$d^2\Phi\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)(dx, dy, dz) = d^2\Phi\left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right)(dx, dy, dz) = -2\left(dx^2 + \frac{1}{3}dy^2\right).$$

В этом представлении отсутствует дифференциал dz, поэтому без учета условий связи мы не можем считать эту квадратичную форму отрицательно определенной, так как при $dx = dy = 0$ и $dz \neq 0$ эта квадратичная форма равна нулю. Продифференцировав условие связи, получим уравнение

$$12xdx + 8ydy + 6zdz = 0, \tag{10.159}$$

которое в точках $\left(a_1, \lambda_0^{(1)}\right)$ и $\left(a_2, \lambda_0^{(2)}\right)$ преобразуется в уравнение $dz = 0$. Следовательно, по крайней мере один из дифференциалов dx или dy отличен от нуля, поэтому сумма $dx^2 + \frac{1}{3}dy^2$ положительна, а следовательно,

$$d^2\Phi\left(a_j, \lambda_0^{(j)}\right)(dx, dy, dz) < 0, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, в точках $(0, 0, -2)$ и $(0, 0, 2)$ функция u имеет условный локальный максимум: $u_{\max} = u(0, 0, -2) = u(0, 0, 2) = 4$.

Аналогично получаем

$$d^2\Phi\left(a_5, \lambda_0^{(5)}\right)(dx, dy, dz) = d^2\Phi\left(a_6, \lambda_0^{(6)}\right)(dx, dy, dz) = \frac{2}{3}dy^2 + dz^2,$$

а уравнение (10.159) в точках $\left(a_5, \lambda_0^{(5)}\right)$ и $\left(a_6, \lambda_0^{(6)}\right)$ имеет вид $dx = 0$. Следовательно, $|dy| + |dz| \neq 0$ и поэтому

$$d^2\Phi\left(a_j, \lambda_0^{(j)}\right)(dx, dy, dz) > 0, \quad j = 1, 2.$$

А это означает, что в точках $\left(-\sqrt{2}, 0, 0\right)$ и $\left(\sqrt{2}, 0, 0\right)$ функция u имеет условный локальный минимум: $u_{\min} = u\left(-\sqrt{2}, 0, 0\right) = u\left(\sqrt{2}, 0, 0\right) = 2$.

Рассмотрим теперь точки $\left(a_3, \lambda_0^{(3)}\right)$ и $\left(a_4, \lambda_0^{(4)}\right)$. В этих точках уравнение (10.159) имеем вид $dy = 0$, следовательно, $|dx| + |dz| \neq 0$. А тогда

$$d^2\Phi\left(a_j, \lambda_0^{(j)}\right)(dx, dy, dz) = -dx^2 + \frac{1}{2}dz^2, \quad j = 1, 2.$$

Но так как выражение $-dx^2 + \frac{1}{2}dz^2$ при $dx \neq 0$ и $dz = 0$ отрицательно, а при $dx = 0$ и $dz \neq 0$ положительно, то в точках $\left(a_3, \lambda_0^{(3)}\right)$ и $\left(a_4, \lambda_0^{(4)}\right)$ дифференциал второго порядка функции Лагранжа является неопределенной квадратичной формой. Таким образом, в этих точках функция u экстремумов не имеет.

10.8 Задачи

1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $(1; 1)$, $F(x, y) = f(x^2, y^3)$. Найти $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)$, если $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = 5$.

2. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ всюду дифференцируема и всюду $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$. Определим функцию $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу: $F(t) = f(t, t^3)$. Является ли функция F возрастающей?

3. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x, y) = \int\limits_x^y e^{t^2} dt$. Вычислите $\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x}$.

4. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x, y) = \int\limits_{x^2}^y \sin(t^2) dt$. Чему равна разность $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$?

5. Найти производную функции f в точке M_0 по направлению вектора $\overline{M_0M_1}$, если:

$$\begin{aligned}
&1)\ f(x,y)=5x+10x^2y+y^5, \quad M_0(1;2), \quad M_1(5;-1);\\
&2)\ f(x,y,z)=xy^2z^3, \quad M_0(3;2;1), \quad M_1(7;5;1);\\
&3)\ f(x,y,z)=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad M_0(1;1;1), \quad M_1(1;5;4);\\
&4)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}, \quad M_0(0;1;1;0),\ M_1(3;2;1;0).
\end{aligned}$$

6. Найти производную функции f в точке M по данному направлению h, если:

1) $f(x,y)=3x^4+y^3+xy$, $M(1;2)$, $h=(\cos 135°;\sin 135°)$;

2) $f(x,y,z)=x^2-3yz+4$, $M(1;2;-1)$, h образует одинаковые углы со всеми координатными осями;

3) $f(x,y,z)=\ln(e^x+e^y+e^z)$, $M(0;0;0)$, h образует с осями координат x, y и z углы, соответственно равные $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$;

4) $f(x,y,z)=\operatorname{tg} xz$, $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};1\right)$, по направлению градиента функции $g(x,y,z)=\sin yz$ в точке M;

5) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}$, $M(x_0;y_0;z_0)$, по направлению градиента функции f в точке M.

7. Найти модуль градиента функции $f(x,y,z)=\dfrac{\sin\left(\pi 10^6\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{1000}$ в точке $(2;1;2)$.

8. Найти угол между градиентами функции f в точках A и B, если:

$$a) f(x,y)=\ln\left|\frac{y}{x}\right|,\ A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),\ B(1;-1);$$
$$b) f(x,y)=\arcsin\frac{x}{x+y},\ A(1;1),\ B(3;4).$$

9. Найти угол между градиентами функций $f(x;y)=\sqrt{x^2-y^2}$ и $g(x,y)=x^3+y^3-3xy$ в точке $M(4;3)$.

10. Найти якобиан $\dfrac{\mathcal{D}(f_1,f_2,f_3)}{\mathcal{D}(x,y,z)}$ отображения $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, заданного формулой $f(x,y,z)=(xyz, xy-xyz, y-xy)$.

11. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M:

1) $z=xy$, $M(2;1;2)$; 2) $z=2x^2-4y^2$, $M(-2;1;4)$;
3) $z=(x-y)^2-x+2y$, $M(1;1;1)$; 4) $z=\sqrt{x^2+y^4}$, $M(1;0;1)$.

12. Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности

$$x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$$

в точках её пересечения с прямой $x=1$, $y=2$.

13. Найти на поверхности точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям:

$$1)\ x^2+y^2+z^2-6y+4z=12, \quad 2)\ x^2+y^2-z^2-2x=0.$$

14. Написать уравнения тех касательных плоскостей к поверхности, которые параллельны данной плоскости:

$$1)\ x^2+2y^2+z^2=1,\ x-y+2z=0; \quad 2)\ z^2+xy+xz=1,\ x-y+2z=1.$$

15. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=xy$, перпендикулярной прямой $x=y=-2z$.

16. Для поверхности $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0$ написать уравнение касательной плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{0}.$$

17. Показать, что плоскость $17x+y-4z=12$ касается поверхности $z=x^2\sqrt{x+y}$ в точке $(1;3;2)$.

18. Показать, что уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$, где $z_0>0$, имеет вид: $xx_0+yy_0+zz_0=1$.

19. Показать, что уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$, где $z_0>0$, имеет вид: $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=1$.

20. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности точки M:

$$\begin{aligned}
&1)\quad f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4, \quad M(-2;1);\\
&2)\quad f(x,y)=x^3-2y^3+3xy, \quad M(1;2).
\end{aligned}$$

21. Разложить функцию $f(x,y)=x\sqrt{1+y}$ по формуле Маклорена до членов второго порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Глава III

Третий семестр

13 Числовые ряды

Еще в школьном курсе математики приходилось рассматривать суммы, содержащие бесконечное множество слагаемых, например, сумма всех членов (бесконечной) геометрической прогрессии. Такого рода суммы называют числовыми рядами.

Ряды весьма широко используются в различных разделах математики, являясь одним из наиболее универсальных и эффективных средств как исследования, так и вычисления.

При изучении теории рядов возникают трудности, связанные с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Дело в том, что ряд является "суммой бесконечного множества слагаемых". Но это не алгебраическая сумма, так как в алгебре определены суммы лишь конечного множества слагаемых. Значит, на самом деле речь идет не об обычной сумме, а о чем-то таком, что еще нужно понять и правильно истолковать.

Примеры рядов встречались уже в античной математике. В процессе развития анализа бесконечно малых был накоплен огромный фактический материал о рядах, что к началу 19 века позволило создать и строго обосновать теорию рядов. Эта теория, как и всякая математическая теория, имеет свой аналитический аппарат. Применяя этот аппарат, мы покажем, что при некоторых условиях ряды обладают свойствами, аналогичными свойствам сумм конечного числа слагаемых.

Освоение теории рядов требует изучения довольно большого числа утверждений и формул, а также получения практических навыков, приобретаемых в ходе решения примеров и задач.

Понятие числового ряда тесно связано с понятием числовой последовательности. Пусть

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{13.1}$$

— некоторая последовательность чисел, которые могут быть как вещественными, так и комплексными.

Определение 13.1. *Выражение*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

или, короче,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{13.2}$$

называется числовым рядом или просто рядом

Отдельные элементы u_n, из которых образовано выражение (13.2), называют *членами ряда*.

Очевидно, что совершенно несущественно, с какого номера начинается нумерация членов последовательности (13.1) и ряда (13.2). В частности, иногда оказывается удобным начинать нумерацию членов ряда с нуля. Тогда ряд приобретает вид

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Определение 13.2. *Сумму первых n членов ряда называют n-ой частичной суммой ряда (13.2) и обозначают символом S_n, то есть*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{13.3}$$

Приведем несколько примеров вычисления последовательности частичных сумм ряда.

Пример 13.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$.

Все члены этого ряда равны единице. Следовательно, последовательностью частичных сумм ряда является последовательность $S_n = n$.

Пример 13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Общий член ряда имеет вид $(-1)^{n-1}$ и равен 1, если n — нечетное, и -1, если n — четное, а последовательность частичных сумм этого ряда выглядит так:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ \ldots,\ S_{2k-1} = 1,\ S_{2k} = 0,\ \ldots$$

Пример 13.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $q \in \mathbb{C}$.

Если $q = 1$, то (см. пример (13.1)) последовательностью частичных сумм этого ряда является последовательность $S_n = n$.

Если $q \neq 1$, то

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Так как $e^{in} = \cos n + i \sin n$, общий член этого ряда имеет вид

$$\frac{e^{in}}{n^p} = \frac{\cos n}{n^p} + i\frac{\sin n}{n^p},$$

а общий член S_n последовательности частичных сумм —

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik}}{k^p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k^p} + i\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^p}.$$

Пример 13.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$.

Поскольку $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, общий член этого ряда

$$\frac{\cos(in)}{2^n} = \frac{e^{-n} + e^n}{2^{n+1}} = \frac{\operatorname{ch} n}{2^n},$$

а общий член S_n последовательности частичных сумм —

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(ik)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{ch} k}{2^k}.$$

Отметим, что если задана последовательность частичных сумм (S_n) ряда, то можно восстановить все члены ряда по формулам

$$u_1 = S_1,\ u_2 = S_2 - S_1,\ \ldots,\ u_n = S_n - S_{n-1},\ \ldots\ .$$

Существуют различные способы придания смысла выражению (13.2). Рассмотрим один такой способ.

Определение 13.3. *Ряд (13.2) называется сходящимся, если последовательность* (S_n) *его частичных сумм имеет конечный предел. В противном случае, ряд (13.2) называется расходящимся.*

Определение 13.4. *Если ряд (13.2) сходится, то есть если существует*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

то S *называют суммой ряда и пишут*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Как видим, понятие суммы определено лишь для сходящегося ряда и, в отличие от понятия суммы конечного числа слагаемых, вводится посредством предельного перехода.

Пример 13.6. *Исследовать сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$.

Этот ряд расходится, поскольку последовательность его частичных сумм бесконечно большая (см. пример 13.1) и, следовательно, не имеет конечного предела.

Пример 13.7. *Исследовать сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

И этот ряд расходится, поскольку последовательность его частичных сумм (см. пример 13.2) не имеет предела.

Теорема 13.1. **(Критерий сходимости ряда с комплексными членами)** *Ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, составленные из вещественных и мнимых частей членов ряда.*

Доказательство. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имеют вид: $u_n = a_n + ib_n$, где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть (S_n), (A_n) и (B_n) — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно.

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n + iB_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

По критерию сходимости последовательности комплексных чисел последовательность (S_n) сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности (A_n) и (B_n). Отсюда и определения 13.3 сходимости числового ряда следует справедливость утверждения теоремы. ■

Непосредственно из определений 13.3 и 13.4 вытекают следующие свойства сходящихся рядов.

Свойство 13.1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится и имеет сумму* S*, то для произвольного* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ *также сходится и имеет сумму* λS*.*

Доказательство. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda u_k = \lim_{n\to\infty} \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k = \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lambda S.$$

■

Свойство 13.2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся и имеют соответственно суммы* S_u *и* S_v*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *также сходится и имеет сумму* $S_u + S_v$*.*

Доказательство. В самом деле, если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S_u, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = S_v,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = S_u + S_v.$$

■

Из этих свойств вытекает, что множество всех сходящихся числовых рядов образует векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Свойство 13.3. *Отбрасывание конечного числа членов ряда или добавление к ряду конечного числа новых членов не влияет на сходимость (или расходимость) этого ряда.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием m членов u_{n_1}, $u_{n_2}, \ldots, u_{n_m}$ и перенумерации оставшихся в порядке возрастания номеров; l — наибольший из номеров $n_1, n_2, \ldots, n_m$; (S_n) и (σ_n) — последовательности частичных сумм соответственно рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$; $L = \sum\limits_{k=1}^{m} u_{n_k}$. Так как

$$\sigma_n = S_{n+m} - L, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > l - m,$$

то очевидно, что последовательности (S_n) и (σ_n), а следовательно, и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Случай, когда к исходному ряду добавлено несколько новых членов сводится к предыдущему, если исходный ряд рассматривать как ряд, полученный из нового ряда отбрасыванием несколько (новых) членов. ■

Определение 13.5. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *— ряд с произвольными членами,* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел и* $n_0 = 0$*. Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *положим* $v_k = \sum\limits_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} u_l$*. Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *называется рядом, полученным в результате группировки членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*.*

Свойство 13.4. (Ассоциативный закон для сходящихся рядов) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$*, полученный в результате произвольной группировки членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, будет сходиться и иметь ту же сумму, что и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*.*

Доказательство. Пусть (S_n) и (σ_k) — последовательности частичных сумм соответственно рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\sigma_k = S_{n_k}$, то есть что последовательность (σ_k) является подпоследовательностью сходящейся последовательности (S_n). Но, как мы знаем, всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же предел. Это и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, полученный путем группировки членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ■

Обратное утверждение неверно. Рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ (см. пример 13.7). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-1)$, полученный в результате группировки его членов, очевидно, сходится и имеет сумму $S = 0$.

Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 13.2. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то его общий член* u_n *с ростом* n *стремится к нулю, то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть S — сумма, а S_n — n-ая частичная сумма исходного сходящегося ряда. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а $u_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Следствие 13.1. *Если общий член ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *не стремится к нулю с ростом* n, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится.*

Заметим, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ расходятся, так как 1 и $(-1)^{n-1}$ не стремятся к нулю с ростом n.

Пример 13.8. *Исследовать сходимость ряда* $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} q^{n-1}$, $q \in \mathbb{C}$.

При $|q| < 1$ общий член последовательности частичных сумм ряда (см. пример 13.3)

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Очевидно, что последовательность (S_n) сходится и имеет предел равный $\dfrac{1}{1-q}$.

Если $|q| \geq 1$, то для общего члена q^{n-1} ряда справедлива оценка $|q^{n-1}| = |q|^{n-1} \geq 1$. Следовательно, при $|q| \geq 1$ общий член ряда не стремится к нулю с ростом n. По следствию 13.1 при $|q| \geq 1$ исследуемый ряд расходится.

Таким образом, исходный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$. Причем в случае сходимости, то есть при $|q| < 1$, имеем

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Определение 13.6. *Ряд* $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *называют остатком* (n*-м остатком*) *ряда и обозначают символом* r_n.

Свойство 13.5. *Если ряд сходится, то его остаток с ростом* n *стремится к нулю.*

Доказательство. Если ряд сходится, то его остаток по свойству 13.3 тоже является сходящимся рядом. Пусть S обозначает сумму исходного ряда, S_n — его n-ую частичную сумму и r_n — остаток. Зафиксируем n и возьмём $m > n$. Тогда, очевидно, $S_m = S_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k$.

При $m \to \infty$ имеем: $S_m \to S$, а $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \to r_n$. Следовательно,

$$S = S_n + r_n.$$

Так как в этом равенстве n — любое, то, устремив его к бесконечности, получим $S_n \to S$, следовательно, $r_n \to 0$. ■

Критерий Коши сходимости ряда

Содержание теории числовых рядов состоит в установлении сходимости или расходимости конкретных рядов и в вычислении сумм сходящихся рядов. В принципе, решать эти задачи можно, опираясь непосредственно на определения сходимости и суммы ряда. Но часто, из-за трудностей нахождения предела последовательности частичных сумм, этот путь неудобен. Более того, иногда не нужны ни частичные суммы, ни сумма ряда, а исследования ведутся лишь ради установления сходимости или расходимости ряда. Поэтому оказываются полезными приемы, позволяющие исследовать вопрос о сходимости ряда без нахождения его частичных сумм. И так как вопрос о сходимости ряда, по определению, равносилен вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм, то мы получим критерий Коши для ряда, если сформулируем его для последовательности частичных сумм этого ряда.

Теорема 13.3. (**Критерий Коши для ряда**) *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* ε *нашелся номер* m *такой, что для всех номеров* n*, удовлетворяющих условию* $n \geq m$ *и для всех натуральных чисел* p *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{13.4}$$

Доказательство. Согласно определению 13.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность (S_n) его частичных сумм. По критерию Коши сходимости числовой последовательности последовательность (S_n) сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется номер m такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geq m$ и для всех натуральных чисел p будет выполняться неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \tag{13.5}$$

Но поскольку

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$$

, видим, что неравенство (13.5) может быть записано в виде (13.4). ■

Пример 13.9. *Исследовать сходимость ряда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Этот ряд называют *гармоническим рядом*. Докажем, что гармонический ряд расходится. Для этого применим критерий Коши, то есть покажем, что для некоторого положительного числа ε_0 при любом выборе номера m найдутся номер n, удовлетворяющий условию $n \geq m$, и натуральное число p такие, что справедлива оценка

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \geq \varepsilon_0. \tag{13.6}$$

Действительно, возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, любой номер m, любой номер $n \geq m$ и $p = n$. Тогда получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n} \geq$$
$$\geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}}_{n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Отметим, что необходимое условие сходимости ряда не является достаточным. Это следует из расходимости гармонического ряда, для которого необходимое условие сходимости выполняется.

В дальнейшем мы будем часто опираться на свойство рядов, связанное с их сходимостью, которое следует из теоремы 13.3.

13.1 Ряды с неотрицательными членами

Определение 13.7. *Числовой ряд называется рядом с положительными (со строго положительными) членами, если все его члены неотрицательны (положительны).*

Очевидно, что последовательность частичных сумм ряда с положительными членами не убывает. Это свойство рядов с положительными членами влечет справедливость следующего утверждения.

Теорема 13.4. (**Критерий сходимости ряда с положительными членами**) *Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.*

Доказательство. Необходимость следует из ограниченности сходящейся последовательности, а достаточность вытекает из теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности. ■

Задача 13.1. *Пусть* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами. Доказать, что если ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, полученный в результате группировки членов ряда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(см. определение 13.5) сходится, то и ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *также сходится.*

Решение. Пусть (A_n) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а (B_k) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ — ряд с положительными членами. Следовательно, по теореме 13.4 последовательность (B_k) его частичных сумм ограничена, то есть существует число C такое, что

$$(0 \leq)\ B_k \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда, для каждого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$(0 \leq)\ A_l \leq A_{n_l} = B_l \leq C.$$

По теореме 13.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. ■

Достаточные условия сходимости ряда

Существует довольно много приемов, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость числовых рядов. Эти приемы называются признаками сходимости.

Установим ряд признаков, позволяющих делать заключение о сходимости (или расходимости) ряда путем сравнения его с другим рядом, сходимость (или расходимость) которого известна.

Теорема 13.5. (**Первый или общий признак сравнения**) *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— ряды с положительными членами и пусть для всех номеров* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$a_n \leq b_n. \tag{13.7}$$

Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Доказательство. Пусть (A_n) и (B_n) — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. Из неравенства (13.7) следует, что

$$A_n \leq B_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13.8}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По критерию сходимости ряда с положительными членами (теорема 13.4) последовательность (B_n) ограничена. Отсюда и оценки (13.8) следует ограниченность и последовательности (A_n). По теореме 13.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. По критерию сходимости (теорема 13.4) последовательность (A_n) неограничена. Следовательно, ввиду (13.8), последовательность (B_n) тоже неограничена. По теореме 13.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ■

Замечание 13.1. *В силу свойства 13.3, в условии теоремы достаточно требовать выполнения неравенства (13.7) лишь для всех номеров n, начиная с некоторого номера m.*

Замечание 13.2. *Аналогично, в силу свойства 13.1, в условии теоремы неравенство (13.7) можно заменить неравенством $a_n \le cb_n$, где c — некоторая положительная постоянная.*

Пример 13.10. *Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при любом $p \le 1$.*

Сравним элементы этого ряда с соответствующими элементами гармонического ряда. Очевидно, что при каждом $p \le 1$ справедлива оценка

$$\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, по признаку сравнения исходный ряд расходится.

Пример 13.11. *Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.*

Сравним элементы этого ряда с соответствующими элементами сходящего (см. пример 13.8) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выводим оценку

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n} \le \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

По теореме 13.5 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится.

Напомним, что последовательности положительных чисел (a_n) и (b_n) называют слабо эквивалентными и пишут $a_n \asymp b_n$, если существуют положительные постоянные α и β такие, что выполняются оценки

$$a_n \le \alpha b_n, \quad b_n \le \beta a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13.9}$$

Теорема 13.6 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами и пусть $a_n \asymp b_n$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Ввиду замечания 13.2 и оценок (13.9), это утверждение является следствием первого признака сравнения (теорема 13.5).

Теорема 13.7. (**Признак сравнения в предельной форме**) *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, а* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *— ряд со строго положительными членами. Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$*, то*

1) при $L < +\infty$ *из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*;*

2) при $L > 0$ *из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Доказательство. 1) Пусть $L < +\infty$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдется номер m такой, что

$$\frac{a_n}{b_n} < L + 1, \quad n \geq m.$$

Отсюда следует, что $a_n < (L+1)b_n$ при всех $n \geq m$. По первому признаку сравнения (теорема 13.5) сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ влечёт сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть $L > 0$. Если $L = +\infty$, то по $\varepsilon = 1$ найдётся m такое, что при $n \geq m$ будет справедлива оценка $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, или $a_n \geq b_n$. Если же $L < +\infty$, то по определению предела для $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ найдется номер m такой, что

$$\frac{a_n}{b_n} > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}, \quad n \geq m,$$

откуда следует, что $a_n > \frac{L}{2} b_n$ при всех $n \geq m$.

В обоих случаях, применяя теорему 13.5 (первый признак сравнения) заключаем, что из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ∎

Следствие 13.2. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, а* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *— ряд со строго положительными членами. Если существует конечный положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема 13.8. (**Третий признак сравнения**) *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *— ряды со строго положительными членами. И пусть*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13.10}$$

Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Из (13.10) следует, что

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что последовательность $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ не возрастает, поэтому

$$\frac{a_n}{b_n} \le c = \frac{a_1}{b_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем

$$a_n \le cb_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду замечания 13.2, по первому признаку сравнения (теорема 13.5) получаем требуемое утверждение. ■

Рассмотрим два признака сходимости рядов, члены которых не возрастают.

Следующая теорема Коши показывает, что сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ зависит от довольно "редкой" подпоследовательности последовательности (a_n).

Теорема 13.9. (**Специальный признак Коши**) *Пусть*

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} + \ldots\ .$$

Доказательство. Пусть

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad B_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предположим сначала, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится. По теореме 13.4 последовательность (B_k) ограничена, то есть существует константа B такая, что $B_k \le B$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Возьмём произвольный номер n и любой номер k, удовлетворяющий условию $2^{k+1} > n$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} A_n \le A_{2^{k+1}-1} = & a_1 + \overbrace{(a_2 + a_3)}^{2} + \overbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}^{4} + \ldots + \overbrace{(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1})}^{2^k} \le \\ \le & a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = B_k \le B. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность (A_n) ограничена, и по теореме 13.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Предположим теперь, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда, ввиду теоремы 13.4, последовательность (A_n) ограничена, то есть существует постоянная A такая, что $A_n \leq A$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Возьмем произвольный номер k и оценим сверху частичную сумму B_k. Учитывая монотонность последовательности (a_n), получаем:

$$\begin{aligned} B_k =& a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} \leq 2\left(a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k}\right) \leq \\ \leq& 2\left(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \ldots + a_{2^k})\right) = 2A_{2^k} \leq 2A. \end{aligned}$$

Эта оценка означает, что последовательность (B_k) ограничена. Следовательно, по теореме 13.4 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится. ■

Пример 13.12. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Члены ряда положительны и образуют монотонно убывающую последовательность. По специальному признаку Коши данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln\left(2^k\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}.$$

Сравнивая, полученный ряд с гармоническим, видим, что он расходится. Следовательно, исходный ряд также расходится.

Пример 13.13. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, *где* $p \in \mathbb{R}$.

Пусть $p > 1$. Тогда

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому мы можем воспользоваться специальным признаком Коши. Согласно этому признаку, исходный ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^k\right)^{p-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k.$$

Но последний ряд сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 1. \tag{13.11}$$

Нетрудно убедиться, что при $p > 1$ условие (13.11) выполняется. Следовательно, при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ сходится, а по теореме 13.9, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Таким образом, при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится, а как было установлено раннее (см. пример 13.10), при $p \leq 1$ этот ряд расходится.

Следующий признак основан на сравнении рядов с несобственными интегралами.

Теорема 13.10. (**Интегральный признак Маклорена-Коши**) *Пусть функция* $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *неотрицательна и не возрастает, члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *определяются равенствами*

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \dots\ ,\ a_n = f(n),\ \dots\ .$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Пусть (S_n) — последовательность частичных сумм исходного ряда. Согласно критерию сходимости ряда с положительными членами (теорема 13.4) сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности (S_n).

Поскольку функция f монотонна на $[1, +\infty)$, то при любом $A \in [1, +\infty)$ она интегрируема на сегменте $[1, A]$ (теорема 6.5). А так как функция f неотрицательна, сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ эквивалентна ограниченности функции $F : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, заданной равенством $F(A) = \int\limits_1^{A} f(x)\,dx$.

Покажем, что из ограниченности функции F на $(1, +\infty)$ следует ограниченность последовательности (S_n) и наоборот.

Ввиду невозрастания функции f для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in [n, n+1)$ выполняется неравенство: $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$. Поэтому имеет место двусторонняя оценка:

$$\begin{aligned} a_{n+1} =& f(n+1) = f(n+1)\cdot 1 = \int\limits_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \le \\ &\le \int\limits_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)\cdot 1 = f(n) = a_n. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Пусть A — любое число, большее единицы. Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \le A < n+1$. Тогда, с одной стороны, используя правую часть оценки (13.12), имеем:

$$F(A) = \int\limits_1^{A} f(x)\,dx \le \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n. \tag{13.13}$$

С другой стороны, используя левую часть оценки (13.12), для любого $n \in \mathbb{N}$ находим:

$$F(n) = \int\limits_1^{n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{n} a_k = S_n - a_1. \tag{13.14}$$

Итак, оценка (13.13) показывает, что если ограничена последовательность (S_n), то ограничена и функция F, а оценка (13.14) показывает, что если ограничена функция F, то ограничена и последовательность (S_n). ■

Доказанный признак применяется к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Поскольку числовая последовательность есть функция натурального аргумента, каждый член этого ряда можно рассматривать как значение некоторой функции $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ от номера члена:

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \ldots\ ,\ a_n = f(n),\ \ldots\ .$$

Функцию $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающую в точках $x = n$ значения a_n, чаще всего можно получить путем замены натурального аргумента n в выражении $f(n)$ на непрерывный аргумент x. Например, в случае гармонического ряда $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Пример 13.14. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$.

Члены ряда можно рассматривать как значения функции $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^p x}$ в точках $x = 2, 3, \ldots$, которая на полупрямой $[2, \infty)$ положительна и убывает. Поэтому, согласно признаку Маклорена-Коши, исходный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{1}{x \ln^p x}\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{1}{x \ln^p x}\, dx$. Сделаем в нём замену $\ln x = t$. Тогда

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x}\, dx = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

Используя пример 7.3, заключаем, что исследуемый интеграл, а вместе с ним и ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

К признакам сравнения непосредственно примыкают два часто применяемых признака сходимости для рядов с положительными членами — Даламбера и Коши. В этих признаках доказательство сходимости ряда основано на сравнении исследуемого ряда с рядом, составленным из элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots\ , \quad 0 < q < 1, \tag{13.15}$$

а доказательство расходимости на невыполнении необходимого условия сходимости ряда.

Теорема 13.11. (**Признак Даламбера**) *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд со строго положительными членами.*

Если, начиная с некоторого номера m, отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не превосходит некоторого числа $q < 1$, то есть, если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad n \geq m, \tag{13.16}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Если же, начиная с некоторого номера m, отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ будет не меньше единицы, то есть, если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad n \geq m, \tag{13.17}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Пусть выполняется условие (13.16). Тогда имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}, \quad n \geq m.$$

Ввиду свойства 13.3, по третьему признаку сравнения, исходный ряд сходится, поскольку сходится ряд (13.15).

Пусть теперь выполнено условие (13.17). Из этого условия следует, что

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad n \geq m.$$

Следовательно,

$$a_n \geq a_m > 0, \quad n \geq m.$$

А это означает, что общий член исходного ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому данный ряд расходится. ■

На практике чаще всего этот признак применяется в предельной форме.

Следствие 13.3. (**Признак Даламбера в предельной форме**) *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд со строго положительными членами. Если отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ стремится к некоторому пределу d:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d,$$

то при $d < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $d > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $d < 1$. Возьмем такое положительное число ε чтобы сумма $d + \varepsilon$ была меньше единицы. Введем обозначение: $q = d + \varepsilon$. По определению предела найдется номер m такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon = q, \quad n \geq m.$$

По теореме 13.11 исходный ряд сходится.

Теперь рассмотрим случай $d > 1$. Возьмем положительное число ε, но такое, чтобы выполнялась неравенство $d - \varepsilon \geq 1$.

По определению предела найдется номер m такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > d - \varepsilon \geq 1, \quad n \geq m.$$

Согласно теореме 13.11 исходный ряд расходится. ■

Пример 13.15. *Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.*

Вычислим предел отношения $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

Замечание 13.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд со строго положительными членами. Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \tag{13.18}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Пример 13.16. *Рассмотрим ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Нетрудно убедиться, что для обоих рядов выполняется (13.18), хотя первый из этих рядов сходится, а второй (гармонический) расходится (см. примеры 13.13 и 13.9).

Теорема 13.12. (**Обобщенный признак Даламбера в предельной форме**) *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд со строго положительными членами. Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если же*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d > 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство этого утверждения в основном повторяет доказательство следствия 13.3. Предлагаем читателям провести его самостоятельно.

Замечание 13.4. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд со строго положительными членами. Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может сходиться, а может расходиться.*

Пример 13.17. *Рассмотрим ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}}=1+1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\dots\,.$$

Первый из этих рядов сходится (см. пример 13.13), а второй расходится, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. следствие 13.1).

Но для первого ряда
$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$
а для второго ряда

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0,\quad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}(2n-1)=+\infty.$$

Теорема 13.13. (**Признак Коши**) *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *— ряд с положительными членами. Если, начиная с некоторого номера* m, *корень* $\sqrt[n]{a_n}$ *не превосходит некоторого числа* $q<1$, *то есть, если*
$$\exists m:\ \sqrt[n]{a_n}\le q<1,\quad n\ge m, \tag{13.19}$$
то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится. Если же*

$$\exists m:\ \sqrt[n]{a_n}\ge 1,\quad n\ge m, \tag{13.20}$$

то ряд расходится.

Доказательство. Пусть выполняется (13.19). Из него следует, что $a_n\le q^n$ при всех $n\ge m$, то есть все члены ряда $\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$ не превосходят соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=m}^{\infty}q^n$. Ввиду свойства 13.3, результата примера 13.8 и первого признака сравнения (теорема 13.5) исходный ряд сходится.

Пусть выполняется (13.20). Легко видеть, что в этом случае справедлива оценка $a_n\ge 1$ для всех $n\ge m$. Следовательно, в этом случае общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не стремится к нулю, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Поэтому данный ряд расходится (см. следствие 13.1). ■

Как и для признака Даламбера имеется предельный вариант и для признака Коши.

Следствие 13.4. (**Признак Коши в предельной форме**) *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *с положительными членами существует*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r.$$

Тогда при $r<1$ *этот ряд сходится, а при* $r>1$ *— расходится.*

Доказательство. Как и в доказательстве предельного варианта признака Даламбера (следствие 13.3), положительное число ε будем выбирать так, чтобы выполнялось условие $r+\varepsilon<1$ при $r<1$ и условие $r-\varepsilon\geq 1$ при $r>1$.

По определению предела для выбранного ε найдется номер m такой, что

$$r-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<r+\varepsilon, \quad n\geq m.$$

Отсюда следует, что при $r<1$ выполняется (13.19) с $q=r+\varepsilon$, а при $r>1$ — (13.20). По признаку Коши (теорема 13.13) данный ряд сходится, если $r<1$, и расходится, если $r>1$. ■

Пример 13.18. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Применим признак Коши в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Замечание 13.5. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *— ряд с положительными членами. Если*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1, \tag{13.21}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *может сходиться, а может расходиться.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, который при $p\leq 1$ расходится, а при $p>1$ сходится. Но при любом p справедливо равенство (13.21).

Теорема 13.14. (**Обобщенный признак Коши в предельной форме**) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *с положительными членами и пусть* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=r$. *Тогда, если* $r<1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится, а если* $r>1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $r<1$. Возьмем положительное число ε такое, чтобы выполнялась неравенство $r+\varepsilon<1$. По определению конечного верхнего предела найдется номер m такой, что

$$\sqrt[n]{a_n}<r+\varepsilon<1, \quad n\geq m.$$

Следовательно, по признаку Коши (теорема 13.13) исходный ряд сходится.

Пусть $r>1$. Поскольку r есть верхний предел последовательности $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$, существует подпоследовательность $\left(\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\right)$ такая, что $r=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}$. Такие же рассуждения, как в доказательстве следствия 13.4 при $r>1$, приводят нас к выводу, что $a_{n_k}\not\to 0$ при $k\to\infty$. Это означает, что общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не стремится к нулю, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Поэтому при $r>1$ ряд расходится. ■

Замечание 13.6. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами. Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Отметим, что в математической литературе существует разнобой в формулировках признаков Даламбера и Коши. Иногда эти имена носят соответственно следствия 13.3 и 13.4 или теоремы 13.12 и 13.14.

Сравнение "чувствительности" признаков Даламбера и Коши

Признак Даламбера, как правило, легче применять, чем признак Коши, так как обычно легче вычислить предел частного, чем корня n-ой степени. Однако признак Коши сильнее признака Даламбера в следующем смысле: если признак Даламбера указывает на сходимость ряда, то и признак Коши тоже указывает на его сходимость; если же признак Коши не позволяет сделать никаких заключений, то и признак Даламбера тоже не позволяет сделать никаких заключений. Это следует из следующего утверждения.

Теорема 13.15. *Для любой последовательности* (a_n) *положительных чисел справедливы неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Пусть $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Если $\alpha = +\infty$, то доказываемое неравенство справедливо.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку α есть верхний предел последовательности $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер m такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon, \quad n \ge m. \tag{13.22}$$

Положим $q = \alpha + \varepsilon$. Теперь из (13.22) выводим

$$a_{m+k} < q a_{m+k-1} < q^2 a_{m+k-2} < \ldots < q^k a_m, \quad k \in \mathbb{N},$$

или

$$a_n \le q^{n-m} a_m, \quad n \ge m.$$

Поэтому

$$\sqrt[n]{a_n} \le q \sqrt[n]{q^{-m} a_m}, \quad n \ge m.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim_{n\to\infty} q \sqrt[n]{q^{-m} a_m} = q = \alpha + \varepsilon.$$

Поскольку последняя оценка верна при любом $\varepsilon > 0$, верно и неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Первое неравенство доказано. Аналогично проводится доказательство и второго неравенства. ■

Следствие 13.5. *Пусть дана числовая последовательность* (a_n), $a_n > 0$ *при всех* n. *Если существует конечный предел отношения* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, *то существует конечный предел* $\sqrt[n]{a_n}$, *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Отметим, что признак Коши несколько «чувствительнее», чем признак Даламбера, так как имеются примеры рядов, о сходимости которых признак Даламбера не позволяет сделать заключения, а признак Коши позволяет.

Пример 13.19. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{3^n}, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Так как

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

признак Даламбера здесь неприменим.

Попробуем воспользоваться признаком Коши. Поскольку

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3}, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N},$$

по признаку Коши ряд сходится.

13.2 Знакочередующиеся ряды

До сих пор мы исследовали сходимость рядов с неотрицательными членами. Однако часто встречаются ряды с вещественными членами, среди которых имеются как положительные, так и отрицательные. Такие ряды принято называть *знакопеременными.*

Среди знакопеременных рядов особое место занимают так называемые *знакочередующиеся* ряды, члены которых поочерёдно положительны и отрицательны.

Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n$ $(q > 0)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^5 n} \cos \dfrac{\pi n^2}{n+1}$ — знакочередующиеся ряды.

Знакочередующийся ряд удобно записывать в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$, где $p_n > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Для них имеется достаточно общий, чувствительный и практичный признак сходимости, полученный Лейбницем.

Теорема 13.16. (**Признак Лейбница**) *Если модули членов знакочередующегося ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$ *образуют невозрастающую стремящуюся к нулю последовательность, то есть, если*

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq \ \ldots \ \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$ *сходится.*

Доказательство. Пусть (S_n) — последовательность частичных сумм данного ряда. Рассмотрим подпоследовательность (S_{2k}) чётных частичных сумм. Сгруппируем слагаемые попарно. Тогда

$$S_{2k} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2k-1} - p_{2k}).$$

В силу невозрастания последовательности (p_n) подпоследовательность (S_{2k}) является неубывающей. Если же сгруппируем слагаемые иначе, именно,

$$S_{2k} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2k-2} - p_{2k-1}) - p_{2k},$$

то в силу всё той же монотонности и неотрицательности последовательности (p_n) получим оценку

$$S_{2k} \leq p_1. \tag{13.23}$$

Таким образом, частичные суммы ряда с чётными номерами образуют монотонную ограниченную последовательность. Следовательно, эта последовательность сходится, её предел S неотрицателен и, как следует из оценки (13.23), не превосходит первого члена ряда, то есть

$$0 \leq S \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_{2k} \leq p_1. \tag{13.24}$$

Так как $S_{2k+1} = S_{2k} + p_{2k+1}$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} p_{2k+1} = S + 0 = S.$$

Вместе с (13.24) это дает нам

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 13.6. *Для остатка* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k$ *ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, справедлива оценка*

$$|r_n| \leq p_{n+1}.$$

Доказательство. Действительно, r_n есть сумма ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k$, которая, как следует из доказательства теоремы 13.16 (см. формулу (13.24)), по абсолютной величине не превосходит модуля своего первого члена $|(-1)^n p_{n+1}| = p_{n+1}$. ■

Пример 13.20. *Исследовать сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Данный ряд называется рядом Лейбница. Он является знакочередующимся рядом и, поскольку

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Следовательно, он сходится.

Пример 13.21. *Сколько членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$ *следует просуммировать, чтобы получить его сумму с точностью до* $\varepsilon = 10^{-1}$.

Легко убедиться, что рассматриваемый ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Поэтому, в силу следствия 13.6, нужно взять столько первых членов ряда, чтобы следующий член $\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$ по абсолютной величине был бы меньше ε. Решая неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{10},$$

получаем, что можно просуммировать любое количество первых членов ряда, большее восьми.

Отметим, что в формулировке признака Лейбница содержится три условия, которым должен удовлетворять ряд: знакочередуемость членов ряда, монотонность и сходимость к нулю их абсолютных величин.

Сходимость к нулю абсолютных величин членов любого сходящегося ряда следует из необходимого условия сходимости ряда. Покажем, что каждое из остальных двух условий существенно для признака Лейбница.

Сначала убедимся в необходимости условия знакочередуемости членов ряда. Для этого приведем пример ряда, у которого абсолютные величины членов монотонно стремятся к нулю, но который расходится из-за того, что знаки членов ряда не чередуются.

Пример 13.22. *Исследовать сходимость ряда*

$$\frac{1}{1} \overbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{2} \overbrace{+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}^{3} \overbrace{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}^{4} + \ldots \,. \tag{13.25}$$

Очевидно, что абсолютные величины членов не возрастают и стремятся к нулю. Однако все частичные суммы S_n при $n = k(2k-1)$ равны единице, а при $n = k(2k+1)$ — нулю. Следовательно, последовательность частичных сумм этого ряда не имеет предела и потому ряд (13.25) расходится.

Докажем теперь необходимость монотонности последовательности, образованной из абсолютных величин членов ряда.

Пример 13.23. *Исследовать сходимость ряда*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \ldots \,. \tag{13.26}$$

Ряд (13.26) — знакочередующийся и абсолютные величины его членов (немонотонно) стремятся к нулю. Рассмотрим подпоследовательность последовательности частичных сумм (S_n) с чётными номерами:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)= \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{13.27}$$

Как видим, частичная сумма S_{2n} равна половине n-ой частичной суммы гармонического ряда. А так как гармонический ряд расходится, последовательность его частичных сумм конечного предела не имеет. Ввиду равенства (13.27) последовательность частичных сумм ряда (13.26) также не имеет конечного предела, следовательно этот ряд расходится.

13.3 Ряды с произвольными членами

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}).$$

Некоторую информацию об этом ряде можно получить, исследуя ряд, составленный из абсолютных величин (модулей) его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{13.28}$$

Определение 13.8. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, *составленный из модулей его членов.*

В определении ничего не сказано о сходимости самого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Однако верна следующая

Теорема 13.17. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то есть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши (теорема 13.3) найдется номер m такой, что при любом $n \geq m$ и любом натуральном p будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Поскольку модуль суммы не превосходит суммы модулей, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon, \quad n \geq m,\ p \in \mathbb{N}.$$

По критерию Коши (теорема 13.3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. ■

Обратное утверждение неверно, то есть из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость. Для подтверждения этого факта достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. По признаку Лейбница этот знакочередующийся ряд сходится (пример 13.20). Но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть гармонический ряд, который расходится (пример 13.9).

Определение 13.9. *Числовой ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится.*

Из этого определения и рассмотренного выше примера следует, что ряд Лейбница сходится условно.

Теорема 13.18. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с комплексными членами* $u_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, составленные из вещественных и мнимых частей членов исходного ряда.*

Утверждение теоремы вытекает из очевидных неравенств

$$|a_n| \le |u_n|\,, \quad |b_n| \le |u_n|\,, \quad |u_n| \le |a_n| + |b_n|\,,$$

справедливых для всех натуральных n, и признака сравнения.

Таким образом, исследования как абсолютной, так и условной сходимости рядов с комплексными членами могут быть заменены исследованием такой сходимости рядов с вещественными членами, образованными из действительных и мнимых частей членов ряда.

Пример 13.24. *Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$.

Нетрудно видеть, что при $\alpha \le 0$ общий член ряда не стремится к нулю с ростом n, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда (теорема 13.2). По следствию 13.1 при $\alpha \le 0$ исходный ряд расходится.

Пусть $\alpha > 0$. Ввиду теоремы 13.17, целесообразно начинать с исследования на абсолютную сходимость. Поэтому сначала рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, составленный из модулей членов исходного ряда. Но этот ряд сходится при $\alpha > 1$, а при $\alpha \le 1$ он расходится (см. примеры 13.10 и 13.13). Следовательно, при $\alpha > 1$ исходный ряд сходится абсолютно.

Исследуем сходимость исходного ряда при $\alpha \in (0, 1]$. Легко проверить, что при этих значениях α рассматриваемый ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому он сходится.

Таким образом, исходный ряд при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $0 < \alpha \le 1$ сходится условно, а при $\alpha \le 0$ расходится.

Докажем теперь два признака сходимости рядов с произвольными членами: признак Абеля и признак Дирихле. Для этого нам понадобится преобразование, указанное Абелем.

Предложение 13.1. (**Преобразование Абеля**) *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *— произвольные комплексные числа, а* $S_0, S_1, \ldots, S_n$ *— числа, определяемые формулами*

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{l=1}^{k} u_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_n v_n. \tag{13.29}$$

Равенство (13.29) называется *преобразованием Абеля.*
Доказательство. Действительно, поскольку $u_k = S_k - S_{k-1}$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n$, то, учитывая, что $S_0 = 0$, выводим:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(S_k - S_{k-1}\right) v_k = \sum_{k=1}^{n} S_k v_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} v_k = \sum_{k=1}^{n} S_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k v_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} S_k v_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k v_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_n v_n.$$

■

Следствие 13.7. *Пусть* (u_n), (v_n) *— произвольные последовательности комплексных чисел,* S_n *— частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Тогда для любых* $n, p \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}. \tag{13.30}$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, для любых натуральных n и p получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n+p} u_k v_k - \sum_{k=1}^{n} u_k v_k =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p} v_{n+p}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_n v_n\right) =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_n =$$
$$= \left(S_n \left(v_n - v_{n+1}\right) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right)\right) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_n =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}.$$

■

Отметим, что преобразование Абеля является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

Теорема 13.19. (**Признак Дирихле**) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, *где* $u_n \in \mathbb{C}$, $v_n \in \mathbb{R}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Этот ряд сходится, если последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *ограничена, а члены последовательности* (v_n) *положительны и монотонно стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть (S_n) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. По условию она ограничена. Следовательно,

$$\exists M > 0 \ : \quad |S_n| \le M, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13.31}$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $v_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, то найдется номер m, начиная с которого справедлива оценка:

$$0 < v_n < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{13.32}$$

Берём теперь любой номер $n \ge m$ и любое натуральное число p. Применяя следствие 13.7, пользуясь оценками 13.31, 13.32 и учитывая, что $v_k - v_{k+1} > 0$, выводим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k\,(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k|\,(v_k - v_{k+1}) + |S_{n+p}|\,v_{n+p} + |S_n|\,v_{n+1} \le M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(v_k - v_{k+1}) + v_{n+p} + v_{n+1}\right) =$$

$$= M\,((v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+2} - v_{n+3}) + \ldots + (v_{n+p-1} - v_{n+p}) +$$
$$+ v_{n+p} + v_{n+1}) = 2Mv_{n+1} < 2M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится. ■

Пример 13.25. *Пусть* x *— фиксированное вещественное число. Исследуем сходимость следующих рядов:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Поскольку $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, то второй и третий ряды являются рядами, составленными соответственно из вещественных и мнимых частей первого ряда.

Так как при $x = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\sin nx = 0, \quad \cos nx = 1,$$

то при указанных значениях ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ расходится, а по теореме 13.4 и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ расходится.

Пусть $x \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Докажем, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ сходится. Для этого применим признак Дирихле. Положим $u_n = e^{inx}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$. Очевидно, что члены последовательности (v_n) положительны и монотонно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Докажем, что последовательность частичных сумм ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ограничена. Для этого возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и оценим модуль n-ой частичной суммы S_n этого ряда.

Сумма $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ представляет собой сумму первых n членов геометрической прогрессии с первым членом e^{ix} и знаменателем e^{ix}. Следовательно,

$$S_n = \frac{e^{ix}\left(1 - e^{inx}\right)}{1 - e^{ix}}.$$

Домножая числитель и знаменатель последней дроби на число $1 - e^{-ix}$, сопряжённое знаменателю, и упрощая (вынося из скобок $e^{i\frac{nx}{2}}$ и $e^{-i\frac{x}{2}}$), получаем с использованием формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

$$S_n = \frac{e^{ix}\left(1 - e^{inx}\right)\left(1 - e^{-ix}\right)}{\left(1 - e^{ix}\right)\left(1 - e^{-ix}\right)} = -\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}{2 - \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} =$$

$$= -\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \cdot 2i \cdot \sin\frac{nx}{2} \cdot 2i \cdot \sin\frac{x}{2}}{2 - 2\cos x} = \frac{4e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\frac{nx}{2} \sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Поэтому, учитывая, что $\left|e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right| = 1$ и $\dfrac{x}{2} \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} < +\infty. \tag{13.33}$$

Итак, доказано, что для ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ выполняются оба условия признака Дирихле, следовательно, этот ряд сходится. По теореме 13.4 сходятся и ряды $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Замечание 13.7. *Вместе с оценкой (13.33) доказаны и следующие оценки:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \neq 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Вторая оценка выводится аналогично.

Теорема 13.20. (**Признак Абеля**) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, *где* $u_n \in \mathbb{C}$, $v_n \in \mathbb{R}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, а последовательность* (v_n) *монотонна и ограничена, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ *сходится.*

Доказательство. Монотонная и ограниченная последовательность (v_n) имеет предел, который мы обозначим буквой a.

Для определенности предположим, что последовательность (v_n) неубывающая. Тогда последовательность $(a - v_n)$, не возрастая, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пусть (S_n) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Поскольку этот ряд сходится, последовательность его частичных сумм ограничена. По признаку Дирихле (теорема 13.19) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (a - v_n)$ сходится.

По свойствам 13.1 и 13.2, из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (a - v_n)$ и представления

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_n (a - v_n)$$

вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$. ■

Пример 13.26. *Исследуем на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\cos \dfrac{\pi}{n+1}}{\ln^2(n+1)}$.

Положим $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln^2(n+1)}$, $v_n = \cos \dfrac{\pi}{n+1}$. Нетрудно убедиться, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ удовлетворяет условиям признака Лейбница и поэтому сходится, а последовательность (v_n) возрастает и ограничена. По признаку Абеля исходный ряд сходится.

Рассмотрим далее два свойства рядов , в которых абсолютная сходимость играет немаловажную роль. Но сначала приведём несколько вспомогательных предложений.

Предложение 13.2. *Если все члены сходящегося ряда, начиная с некоторого номера, имеют одинаковые знаки, то ряд сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и, начиная с номера m, все его члены положительны. Тогда ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=m}^{\infty} |u_n|$ сходится, так как конечное число первых членов ряда на сходимость не влияет. По той же причине ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. ■

Следствие 13.8. *Если ряд с вещественными членами сходится условно, то он содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.*

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с вещественными членами содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов. Пусть a_1, a_2, ..., a_p, ... обозначают положительные, а $-b_1$, $-b_2$, ..., $-b_q$, ... — отрицательные члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, занумерованные в том порядке в каком они встречаются в этом ряде.

Лемма 13.1. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то сходятся и оба ряда*

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_q. \tag{13.34}$$

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то оба ряда (13.34) расходятся.

Доказательство. Пусть (S_n), (A_l) и (B_m) — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} b_q$ соответственно, причём $l + m = n$, и пусть $\overline{S}_n$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Тогда, очевидно,

$$S_n = A_l - B_m, \quad \overline{S}_n = A_l + B_m. \tag{13.35}$$

(Число n сразу берём настолько большим, чтобы в сумме S_n встречались и положительные и отрицательные слагаемые.)

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно и пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \overline{S}$. Тогда обе последовательности (A_l) и (B_m) не убывают и ограничены сверху числом $\overline{S}$. Поэтому оба ряда (13.34) сходятся.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно. Тогда последовательность его частичных сумм S_n ограничена, в то время как последовательность $\overline{S}_n$ ряда, составленного из модулей, неограничена. Тогда из второго из равенств (13.35) следует, что хотя бы одна из последовательностей, либо (A_l), либо (B_m), неограничена. А первое из равенств (13.35) требует, чтобы они были неограничены обе. Итак, оба ряда (13.34) расходятся. ■

Следствие 13.9. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то*

$$\forall C > 0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \exists r \in \mathbb{N}:\ a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+r} > C, \tag{13.36}$$

$$\forall D > 0,\ \forall q \in \mathbb{N}\ \exists r \in \mathbb{N}:\ -b_{q+1} - b_{q+2} - \ldots - b_{q+r} < -D. \tag{13.37}$$

Доказательство. Пусть условие (13.36) не выполняется. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена и, следовательно, этот ряд сходится.

Аналогично, невыполнение условия (13.37) влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Но по лемме эти ряды расходятся. Следовательно, (13.36) и (13.37) выполняются. ■

Теорема 13.21. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится абсолютно и имеет сумму* S, *то ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_j$, *полученный путём любой перестановки его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму* S.

Доказательство. Пусть $P : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ — перестановка множества натуральных чисел, то есть биективное отображение множества натуральных чисел на себя.

Введём обозначение: $k_j = P(j)$, $j \in \mathbb{N}$. Полагая

$$v_j = u_{k_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

получаем ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_j$, который и называем рядом, полученным в результате перестановки членов исходного ряда.

Пусть сначала все члены исходного ряда неотрицательны. Тогда и члены ряда, полученного в результате перестановки, тоже неотрицательны и для доказательства его сходимости достаточно установить ограниченность последовательности его частичных сумм. Имеем:

$$S'_l = \sum_{j=1}^{l} v_j = \sum_{j=1}^{l} u_{k_j} \le \sum_{k=1}^{n} u_k \le S.$$

Здесь $n = \max\{k_j : j = 1, 2, \ldots, l\}$.

Итак, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_j$ сходится и его сумма $S' \le S$.

Пусть теперь сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$. Тогда, как показано выше, сходится и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |v_j|$, следовательно, сам ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_j$ сходится абсолютно. Далее по лемме 13.1 сумма исходного ряда $S = A - B$, где A — сумма его положительных членов, B — отрицательных. Перестановка членов ряда приведёт к перестановке среди положительных его членов и среди отрицательных. При этом, как показано, ни S, ни A, ни B не изменятся. ■

Таким образом, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством. Покажем на примере, что условно сходящийся ряд этого свойства не имеет. Для этого возьмём условно сходящийся ряд (см. пример 13.24)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \tag{13.38}$$

Сумма S этого ряда положительна, так как при попарной группировке получаем сумму положительных слагаемых.

Переставим члены ряда (13.38) так, чтобы после одного положительного члена стояли два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots \tag{13.39}$$

Покажем, что полученный ряд сходится и его сумма $\sigma = \dfrac{1}{2}S$. Пусть (σ_n) — последовательность частичных сумм ряда (13.39). Тогда, при каждом $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}S_{2n},$$

где S_{2n} — частичная сумма ряда (13.38). Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = \frac{1}{2}S.$$

Учитывая это, из равенств

$$\sigma_{3n-2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}, \quad \sigma_{3n-1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{4n},$$

справедливых при каждом $n \in \mathbb{N}$, заключаем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n-2} = \frac{1}{2}S, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n-1} = \frac{1}{2}S.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ существует и равен $\dfrac{1}{2}S$. А поскольку $S \neq 0$, то $\sigma \neq S$. Таким образом, в результате указанной перестановки членов условно сходящегося ряда получен сходящийся ряд с другой суммой.

Приведённый пример показывает, что переместительное свойство для условно сходящихся рядов не сохраняется. В действительности справедливо следующее утверждение.

Теорема 13.22 (Риман)**.** *Если ряд с вещественными членами сходится условно, то для любого числа $L \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка его членов, что полученный* (*в результате перестановки*) *ряд будет сходиться к L.*

Доказательство. Возьмем произвольное $L \in \mathbb{R}$. Пусть, как и раньше, a_1, a_2, …, a_p, … — положительные, а $-b_1$, $-b_2$, …, $-b_q$, … — отрицательные члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Приступим к построению перестановки членов исходного ряда. Выпишем столько первых членов ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$, чтобы их сумма стала больше L. Это можно сделать так как, согласно следствию 13.9, найдется натуральное число p_1 такое, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1} > L.$$

Затем к членам $a_1, a_2, \ldots, a_{p_1}$ припишем столько членов ряда $\sum\limits_{q=1}^{\infty} b_q$ со знаком минус, чтобы новая сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1} - b_1 - b_2 - \ldots - b_{q_1}$$

стала меньше L. И это можно сделать по следствию 13.9. Далее, согласно следствию, найдется натуральное число $p_2 > p_1$ такое, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1} - b_1 - b_2 - \ldots - b_{q_1} + a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \ldots + a_{p_2} > L.$$

Неограничено продолжая описанный процесс, получим новый ряд с переставленными членами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Заметим, что в состав членов нового ряда войдут все члены исходного ряда, так как на каждом шаге мы обязательно добавляли *хотя бы один* положительный или отрицательный член исходного ряда.

Если всякий раз, выписывая члены a_n или b_n, набирать их не больше, чем необходимо для выполнения требуемого неравенства, то частичные суммы нового ряда будут колебаться около числа L. Причем, после каждого добавления новых групп положительных или отрицательных слагаемых (членов исходного ряда), полученная сумма будет отличаться от L менее, чем на абсолютную величину члена, приписанного на последнем шаге, который, согласно необходимому условию сходимости ряда (теорема 13.2), стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность частичных сумм нового ряда сходится к L. Это означает, что построенный ряд сходится и его сумма равна L. ■

Отметим, что после небольшой переделки доказательства можно так переставить члены ряда, что его сумма станет равной $+\infty$ или $-\infty$, или вовсе перестанет существовать.

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Их произведением называют ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, составленный из всевозможных произведений вида $u_k v_l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, занумерованных в каком-либо порядке. Обычно используют следующие два способа нумерации членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.

1. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ нумеруют в порядке следования произведений $u_k v_l$ по квадратам:

$$\begin{array}{ccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
u_2v_1 & \leftarrow & u_2v_2 & & u_2v_3 & & \ldots \\
 & & & & \downarrow & & \\
u_3v_1 & \leftarrow & u_3v_2 & \leftarrow & u_3v_3 & & \ldots \\
 & & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array},$$

то есть в следующем порядке

$$\underbrace{u_1v_1} + \underbrace{u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1} + \underbrace{u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1} + \\ + \ldots + \underbrace{u_1v_n + u_2v_n + \ldots + u_nv_n + u_nv_{n-1} + \ldots + u_nv_1} + \ldots \,. \quad (13.40)$$

2. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ нумеруют в порядке следования произведений $u_k v_l$ по диагоналям:

$$\begin{array}{ccccccc} u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & \dots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & \dots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & \dots \\ & \swarrow & & \swarrow & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array},$$

то есть в следующем порядке

$$\underbrace{u_1v_1}_{k+l=2} + \underbrace{u_1v_2 + u_2v_1}_{k+l=3} + \underbrace{u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1}_{k+l=4} + \ldots + \underbrace{u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1}_{k+l=n+1} + \ldots .$$

Теорема 13.23. (**Коши**) *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся и имеют суммы, соответственно равные A и B, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, составленный из всевозможных произведений вида $u_k v_l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, занумерованных в произвольном порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна AB.*

Доказательство. Пусть (A_n), (B_n) и $\left(\overline{S}_n\right)$ — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ соответственно. Очевидно, что все три последовательности неубывающие. А поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то по критерию сходимости ряда с положительными членами (теорема 13.4) последовательности (A_n) и (B_n) ограничены.

Согласно этому же критерию, для доказательства абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ достаточно показать ограниченность последовательности $\left(\overline{S}_n\right)$. Возьмём произвольный номер n. Сумма $\overline{S}_n$ состоит из конечного набора слагаемых вида $|u_k v_l|$. Пусть m обозначает наибольший из индексов k и l в произведениях $|u_k v_l|$, входящих в сумму $\overline{S}_n$. Тогда

$$\overline{S}_n \leq (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)\,(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|) = A_m B_m.$$

Отсюда и из ограниченности последовательностей (A_n) и (B_n) следует ограниченность последовательности $\left(\overline{S}_n\right)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится абсолютно.

Пусть S — сумма этого ряда. Докажем, что $S = AB$. По теореме 13.21 S не зависит от порядка, в котором занумерованы члены ряда. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ занумерованы по квадратам (формула (13.40)). Так как последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда сходится к S, то и любая её подпоследовательность сходится к S. Но подпоследовательность

$$S_{m^2} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)\,(v_1 + v_2 + \ldots + v_m)\,, \quad m \in \mathbb{N},$$

последовательности частичных сумм этого ряда сходится к AB. Итак, $S = AB$. ■

В заключение приведём без доказательства следующую теорему.

Теорема 13.24. (**Мертенс**) *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, причем один из них — абсолютно, а другой — условно и имеют суммы, соответственно равные* A *и* B, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, *составленный из всевозможных произведений вида* $u_k v_l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, *занумерованных по диагоналям, сходится и его сумма равна* AB.

В случае, когда оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся условно, почленное перемножение их с нумерацией даже по этому правилу приводит, вообще говоря, к расходящемуся ряду.

13.4 Задачи

1. Если члены числового ряда положительны и ряд, полученный в результате группировки его членов, сходится, то сходится и исходный ряд. Доказать.

2. Пусть $a_n \le c_n \le b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ оба сходятся. Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ тоже сходится. Доказать.

3. Пусть $a_n \le c_n \le b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$?

4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \ge 0)$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Обратное неверно. Доказать.

5. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Тогда сходятся и ряды: *a*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; *b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$; *c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$. Доказать.

6. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящиеся числовые ряды с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов:
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}?$$

7. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходящийся числовые ряды с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов:
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}?$$

8. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходящиеся числовые ряды с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$?

9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a_0 \neq 0$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

10. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \downarrow 0$, сходится. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

11. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Что можно сказать о сходимости ряда:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n?$$

12. Пусть $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательности комплексных чисел. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, а последовательность $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ абсолютно сходится. Доказать.

13. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится. Что можно сказать о сходимости ряда:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n a_n;$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2} a_n; \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} a_n?$$

14. Доказать, что при любом $m \in \mathbb{N}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$ сходятся или расходятся одновременно.

15. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами; пусть $\{n_k\}$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Доказать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$.

16. Пусть $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся числовая последовательность. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = b_{n+1} - b_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и его сумма $S = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - b_1$.

17. Пусть $0 < a < 1 < b < +\infty$. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + \ldots + a^nb^n + a^{n+1}b^n + \ldots$$

18. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

$$a)\ a_n = \frac{n^{n^2}}{((3n)!)^n};\quad b)\ a_n = \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^n;\quad c)\ a_n = \frac{(n!)^2}{(100)^{n^2}};\quad d)\ a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}};$$

$$e)\ a_n = \frac{2^{n^2}(n!)^n}{n^{n^2}};\quad f)\ a_n = \frac{(n!)^{2n}}{2^{n^3}};\quad g)\ a_n = \frac{n^{2n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n^2}};\quad h)\ a_n = \frac{n^{5n}}{(4^n+5^n)^n};$$

$$i)\ a_n = \left(\frac{77\cdot 78\cdot 79\cdots(76+n)}{(2n-1)!!}\right)^n.$$

19. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, если:

$$a)\ a_n = \frac{n^{n^2}}{((3n)!)^n};\quad b)\ a_n = \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^n;\quad c)\ a_n = \frac{(n!)^2}{(100)^{n^2}};\quad d)\ a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}};$$

$$e)\ a_n = \frac{2^{n^2}(n!)^n}{n^{n^2}};\quad f)\ a_n = \frac{(n!)^{2n}}{2^{n^3}};\quad g)\ a_n = \frac{n^{2n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n^2}};\quad h)\ a_n = \frac{n^{5n}}{(4^n+5^n)^n};$$

$$i)\ a_n = \left(\frac{77\cdot 78\cdot 79\cdots(76+n)}{(2n-1)!!}\right)^n.$$

20. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, если

$$a)\ x_n = \frac{n^{n^2}}{((3n)!)^n};\quad b)\ x_n = \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^n;\quad c)\ x_n = \frac{(n!)^2}{(100)^{n^2}};\quad d)\ x_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}};$$

$$e)\ x_n = \frac{2^{n^2}(n!)^n}{n^{n^2}};\quad f)\ x_n = \frac{(n!)^{2n}}{2^{n^3}};\quad g)\ x_n = \frac{n^{2n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n^2}};\quad h)\ x_n = \frac{n^{5n}}{(4^n+5^n)^n};$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{77\cdot 78\cdot 79\cdots(76+n)}{(2n-1)!!}\right)^n.$$

21. С какой точностью будет вычислена сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$, если для её подсчёта будут взяты первые пять членов ряда ?

22. С какой точностью будет вычислена сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2 2^{n+1}}$, если для её подсчёта будут взяты первые семь членов ряда ?

23. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, если $|ab| < 1$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

24. Доказать, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$, какова бы ни была последовательность (a_n):
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, \; a_n \to +\infty.$$

25. Доказать, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, где $f(x) \geq 0$ на $[a; \; +\infty)$, сходится, если найдётся последовательность (a_n):
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, \; a_n \to +\infty,$$
такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$, сходится.

26. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше, чем на m мест, где m — фиксированное число.

14 Функциональные последовательности и ряды

Пусть X — некоторое множество элементов одного из пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^n$, а F — совокупность функций, определённых на X и принимающих вещественные или комплексные значения.

Определение 14.1. *Функциональной последовательностью называется отображение, ставящее в соответствие каждому натуральному числу одну из функций, принадлежащих множеству F, то есть отображение $\mathbb{N} \mapsto F$.*

Пусть f_n обозначает функцию, соответствующую числу $n \in \mathbb{N}$. Тогда функциональную последовательность будем обозначать символом (f_n).

Отдельные функции f_n называют *членами* или *элементами* рассматриваемой последовательности, а множество X — *областью определения* этой последовательности.

Возьмём произвольную функциональную последовательность (u_n), определённую на множестве X.

Определение 14.2. *Формальную сумму*
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$
называют функциональным рядом.

Функции u_n называют *членами* или *элементами* этого ряда, а множество X — его *областью определения.*

Как и в случае числового ряда, сумму S_n первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют *n-ой частичной суммой* этого ряда.

Между функциональными последовательностями и функциональными рядами существует тесная связь. От рассмотрения функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ можно перейти к рассмотрению функциональной последовательности (S_n) его частичных сумм и наоборот, всякую функциональную последовательность (S_n) можно рассматривать как последовательность частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого определяются формулами

$$u_1 = S_1, \quad u_n = S_n - S_{n-1},\ n = 2, 3, \dots \ .$$

14.1 Поточечная сходимость

Определение 14.3. *Пусть X — область определения функциональной последовательности (f_n). Говорят, что функциональная последовательность (f_n) сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится числовая последовательность $\big(f_n(x_0)\big)$.*

Определение 14.4. *Пусть X — область определения функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.*

Определение 14.5. *Множество X_0 всех точек $x \in X$, в которых сходится данная функциональная последовательность (ряд), называется областью сходимости этой последовательности (ряда).*

Область сходимости может или совпадать с областью определения, или составлять её часть, или быть пустым множеством.

Предположим, что область сходимости X_0 функциональной последовательности (f_n) не пуста. Рассмотрим на X_0 функцию $f : x \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Эту функцию называют *предельной функцией* функциональной последовательности (f_n). При этом говорят, что на множестве X_0 функциональная последовательность (f_n) сходится к предельной функции f *поточечно*.

Аналогично, если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет непустую область сходимости X_0, то на множестве X_0 определена функция S, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его *суммой*. При этом говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится к сумме S *поточечно*.

Пример 14.1. *Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдём область сходимости и предельную функцию последовательности (f_n).*

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ равен нулю при $|x| < 1$, единице при $x = 1$ и не существует при остальных x, то $X_0 = (-1, 1]$, а

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad \quad x = 1. \end{cases}$$

Пример 14.2. *Определим область сходимости X_0 и найдем предельную функцию последовательности (f_n), если $f_n(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Если $|z| \neq 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |z| < 1, \\ \infty, & \text{если} \quad |z| > 1. \end{cases}$$

Если $z = 1$, то $f_n(z) = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Если же $|z| = 1$, но $z \neq 1$, то

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| = \left|z^{n+1} - z^n\right| = |z|^n |z-1| = |z-1| = a > 0. \tag{14.1}$$

Возьмём произвольное положительное ε, не превосходящее a, и любой номер m. Тогда из равенства (14.1) следует, что для любого $n \geq m$ и $p = 1$ справедлива оценка

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \geq \varepsilon.$$

По критерию Коши, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ не существует.

Итак, $X_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{1\}$, то есть X_0 представляет собой объединение открытого круга с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$ и радиуса 1 с точкой $z = 1$, а предельная функция определяется формулой

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |z| < 1, \\ 1, & \text{если} \quad z = 1. \end{cases}$$

Пример 14.3. *Пусть*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{если} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases} \qquad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдём область сходимости и предельную функцию последовательности (f_n).

Возьмём произвольную точку $x_0 \in (0,1]$. Очевидно (см. рис. 29), что для x_0 найдётся номер $m = m(x_0)$ такой, что при всех $n \geq m$ будет выполняться неравенство $\dfrac{1}{n} < x_0$. Поэтому $f_n(x_0) = 0$ при всех $n \geq m$. Ввиду этого, получаем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$X_0 = [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Пример 14.4. *Пусть $u_n(z) = z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и найдём его сумму.*

Изучая числовые ряды, мы выяснили (пример 13.3), что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ при $|z| < 1$ сходится к сумме $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$, а при $|z| \geq 1$ расходится. Следовательно, областью сходимости этого ряда является открытый единичный круг $|z| < 1$, а суммой — функция $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

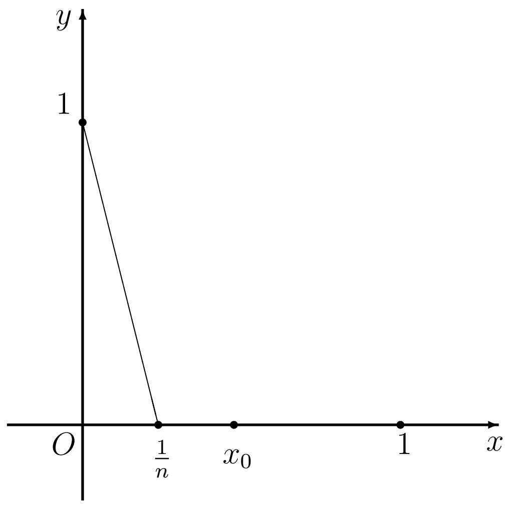

Рис. 29: График функции f_n.

Пример 14.5. *Докажем, что ряд*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{14.2}$$

сходится на всей вещественной оси и имеет сумму, равную e^x.

Возьмём произвольное $n \in \mathbb{N}$. Пусть S_n — n-ая частичная сумма ряда (14.2), то есть

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{14.3}$$

Разлагая функцию e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \quad \theta \in (0,1). \tag{14.4}$$

Из (14.4) и (14.3) следует, что $e^x = S_n(x) + \dfrac{x^n}{n!}e^{\theta x}$. Поэтому

$$|S_n(x) - e^x| = \left|\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\right| = \frac{|x|^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Отсюда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$, следует, что

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = e^x.$$

14.2 Равномерная сходимость

Рассмотрим функциональную последовательность (f_n). Пусть X_0 — её область сходимости, а f — её предельная функция. Из самого определения области сходимости как совокупности точек области определения, в каждой из которых сходится соответствующая числовая последовательность, следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X_0$ найдётся номер m, зависящий не только от ε, но и от точки x, такой, что при всех $n \geq m$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{14.5}$$

Если взять другое значение аргумента x в X_0, то получится другая числовая последовательность, и — при том же ε — найденный номер m может оказаться уже непригодным для выполнения неравенства (14.5). Тогда его пришлось бы заменить бóльшим номером. Возникает вопрос: существует ли номер m, который, при фиксированном ε, годился бы для всех этих последовательностей?

Пример 14.6. *Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Легко убедиться, что для всех $x \in [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Возьмём произвольный номер n. Так как функция f_n непрерывна на сегменте $[0,1]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает на указанном сегменте своей точной верхней грани. Нетрудно проверить, что эта грань достигается в стационарной точке $x_n = \dfrac{1}{n}$. Поэтому для всех $x \in [0,1]$

$$0 \le f_n(x) \le f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}.$$

Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер m такой, что $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$ при всех $n \ge m$, получаем

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x) \le \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in [0,1]$ и всех $n \ge m$.

Пример 14.7. *Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, находим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0, \quad x \in [0,1],$$

и

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

для всех $x \in X$. Следовательно, если положительное число ε не превосходит $\dfrac{1}{2}$, то для любого номера m и любого $n \ge m$ найдётся $x \in [0,1]$ такой, что будет выполняться неравенство $|f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon$.

Таким образом, ответ на поставленный вопрос может быть как положительным (пример 14.6), так и отрицательным (пример 14.7).

Предположим, что функциональная последовательность (f_n) сходится на множестве X к предельной функции f.

Определение 14.6. *Говорят, что последовательность* (f_n) *сходится к функции* f *равномерно на множестве* X *и пишут* $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать номер* m *такой, что при всех* $n \geq m$ *и всех* $x \in X$ *справедливо неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{14.6}$$

Согласно этому определению, для последовательностей из примеров 14.6 и 14.7 нами получено

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2} \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x) \equiv 0,$$

$$\forall x \in [0;1] \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \to f(x) \equiv 0, \quad \text{но} \quad f_n \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f.$$

Таким образом, мы видим, что из поточечной сходимости последовательности (f_n) на множестве X к функции f не следует её равномерная сходимость на указанном множестве.

Непосредственно из определения 14.6 вытекает, что если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, а Y — любое подмножество множества X, то $f_n \overset{Y}{\rightrightarrows} f$.

Определение 14.7. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется равномерно сходящимся на множестве* X *к сумме* S, *если последовательность* (S_n) *его частичных сумм равномерно сходится на множестве* X *к предельной функции* S, *то есть, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся номер* m *такой, что при всех* $n \geq m$ *и всех* $x \in X$ *справедлива оценка*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 14.1. (**Первый критерий равномерной сходимости функциональной последовательности**) *Для того чтобы функциональная последовательность* (f_n) *сходилась равномерно на множестве* X *к предельной функции* f, *необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность* (α_n),

$$\alpha_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

была бесконечно малой.

Доказательство. Необходимость. Согласно определению 14.6, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать номер m такой, что при всех $n \geq m$ и всех $x \in X$ будет выполняться неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\alpha_n \leq \varepsilon$ при всех $n \geq m$, то есть последовательность (α_n) является бесконечно малой.

Достаточность. По определению бесконечно малой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер m такой, что при всех $n \geq m$ будет выполняться оценка

$$\alpha_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\right\} < \varepsilon.$$

Следовательно, для каждого $x \in X$ и каждого $n \geq m$ выполняется неравенство (14.6). Согласно определению $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. ■

Следствие 14.1. (**Первый критерий равномерной сходимости функционального ряда**) *Для того чтобы функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходился на множестве* X*, необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность* (α_n),

$$\alpha_n = \sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| : x \in X\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

была бесконечно малой.

Справедливость утверждения следует из теоремы 14.1 и равенства

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Равномерная сходимость функциональной последовательности (ряда) зависит от множества на котором эта сходимость исследуется. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 14.8. *Исследуем на равномерную сходимость последовательность* $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, *на множествах* $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *и* $X_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $0 < r < 1$.

На множестве X_1 предельная функция $f(z) = 0$ (см. пример 14.2). Поэтому

$$\alpha_n = \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in X_1\} = \sup\{|z|^n : |z| < 1\} = 1 \not\to 0.$$

Согласно критерию равномерной сходимости (теорема 14.1), последовательность (f_n) на множестве X_1 сходится к предельной функции f неравномерно.

Очевидно, что и на множестве X_2 предельная функция $f(z) = 0$. Поэтому

$$\alpha_n = \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in X_2\} = \sup\{|z|^n : |z| < r\} = r^n \to 0.$$

По критерию получаем $f_n \overset{X_2}{\rightrightarrows} f$.

Пример 14.9. *Исследуем на равномерную сходимость последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ \quad 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{n} < x \le 1, \end{cases}$$

на множествах $X_1 = [0, 1]$ *и* $X_2 = [r, 1]$, $0 < r < 1$.

Как показано в примере 14.3, на множестве X_1 предельная функция f имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Поэтому (см. рисунок 30)

$$\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X_1\} \ge f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Таким образом, последовательность (f_n) сходится к функции f на множестве X_1 неравномерно.

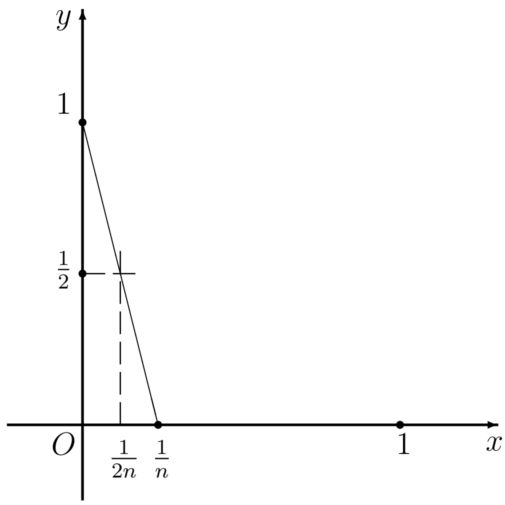

Рис. 30: Значение функции f_n в точке $x = \dfrac{1}{2n}$.

На множестве X_2 все функции f_n с номерами, большими числа $\dfrac{1}{r}$, обращаются в нуль. Поэтому предельная функция f на X_2 тоже обращаются в нуль и при $n > \dfrac{1}{r}$

$$\alpha_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X_2\right\} = 0.$$

Следовательно, $f_n \overset{X_2}{\rightrightarrows} f$.

Пример 14.10. *Исследуем на равномерную сходимость функциональную последовательность* $f_n(x) = \dfrac{2nx}{n^2 + x^2}$ *на множествах* $\mathbb{R}$ *и* $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$.

Находим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

На множестве $\mathbb{R}$

$$\alpha_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n(n) = 1 \not\to 0.$$

На отрезке $[a; b]$ при $n > b$

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = f(b) = \frac{2nb}{n^2 + b^2} \to 0.$$

Следовательно на $\mathbb{R}$ данная последовательность сходится неравномерно, а на сегменте $[a, b]$ — равномерно.

Теорема 14.2. (**Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности**) *Для того чтобы функциональная последовательность* (f_n) *сходилась равномерно на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся номер* m *такой, что для всех* $n \geq m$, *всех* $p \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{14.7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению 14.6 равномерной сходимости

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m\ \forall x \in X \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.8}$$

Отсюда следует, что

$$\forall n \geq m\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.9}$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, используя (14.8) и (14.9), выводим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geq m$, всех $p \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$. Необходимость доказана.
Достаточность. Из неравенства (14.7) и критерия Коши для числовой последовательности вытекает сходимость последовательности $(f_n(x))$ при каждом $x \in X$. Следовательно, на множестве X последовательность (f_n) сходится поточечно. Пусть f — её предельная функция на X.

Так как неравенство (14.7) справедливо при всех $p \in \mathbb{N}$, то, переходя в нем к пределу при $p \to \infty$, получим, что при всех $n \geq m$ и всех $x \in X$ справедлива оценка

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности ε достаточность доказана. ■

Непосредственно из теоремы 14.2 следует аналогичное утверждение для рядов.

Следствие 14.2. (**Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда**) *Для того чтобы функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился равномерно на множестве* X*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся номер* m *такой, что для всех* $n \geq m$*, всех* $p \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{14.10}$$

Действительно, это утверждение следует из теоремы 14.2, поскольку в левой части неравенства (14.10) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм $S_{n+p}(x)$ и $S_n(x)$ исходного ряда.

14.3 Признаки равномерной сходимости

Самым простым из всех признаков является следующий признак.

Теорема 14.3. (**Вейерштрасс**) *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *определен на множестве* X*. Если существует сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *такой, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *при всех* $x \in X$ *справедлива оценка*

$$|u_n(x)| \leq c_n, \tag{14.11}$$

то исходный функциональный ряд на множестве X *сходится равномерно* (*и абсолютно*).

При выполнении для всех $x \in X$ и всех $n \in \mathbb{N}$ неравенства (14.11) говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ является мажорантным для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$).

Приведем другую формулировку признака Вейерштрасса.
Функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.
Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для числового ряда

$$\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \geq m\, \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon. \tag{14.12}$$

Используя оценки (14.12) и (14.11), выводим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

при всех $n \geq m$, $p \in \mathbb{N}$ и $x \in X$. Согласно критерию Коши для функционального ряда исходный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ на множестве X сходятся равномерно. ■

Пример 14.11. *Покажем, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$, *где* $p > 1$, *равномерно сходится на всей вещественной оси* $\mathbb{R}$.

Так как $|\sin nx| \leq 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ мажорирует исходный ряд. А поскольку ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^p}$ сходится, то согласно признаку Вейерштрасса исходный ряд на $\mathbb{R}$ сходится равномерно.

Определение 14.8. *Функциональная последовательность* (f_n) *называется равномерно ограниченной на множестве* X, *если существует вещественное число* M *такое, что для всех* $x \in X$ *и для всех номеров* n *справедливо неравенство* $|f_n(x)| \leq M$.

Теорема 14.4. (**Дирихле**) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, *где* $u_n : X \to \mathbb{C}$, $v_n : X \to \mathbb{R}$, *равномерно сходится на множестве* X, *если выполняются следующие два условия:*

1) *последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно ограничена на* X;

2) *последовательность* (v_n) *монотонна (по* n*) при каждом фиксированном* $x \in X$ *и* $v_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательства признака Дирихле и следующего признака Абеля дословно повторяют доказательства этих признаков для числовых рядов с заменой условий *ограниченность, сходимость* на условия *равномерная ограниченность, равномерная сходимость*.

Теорема 14.5. (**Абель**) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, *где* $u_n : X \to \mathbb{C}$, $v_n : X \to \mathbb{R}$, *равномерно сходится на множестве* X, *если выполняются следующие два условия:*

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на множестве* X*;*

2) последовательность (v_n) *монотонна (по* n*) при каждом фиксированном* $x \in X$ *и равномерно ограничена на* X*.*

Пример 14.12. *Докажем, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$*, где* $a_n \searrow 0$*, равномерно сходится на сегменте* $[\delta, 2\pi\delta]$ $(0 < \delta < \pi)$*.*

Положим $u_n(x) = \sin nx$ и $v_n(x) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $0 < \delta < \pi$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin \dfrac{\delta}{2}},$$

следовательно, первое условие признака Дирихле выполняется.

Так как $a_n \searrow 0$ при $n \to \infty$ и a_n не зависит от x, то $a_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. Следовательно, и второе условие признака Дирихле также выполняется. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ на сегменте $[\delta, 2\pi - \delta]$ сходится равномерно.

Пример 14.13. *Докажем, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cos \dfrac{x}{n}$*, где* $a_n \searrow 0$*, равномерно сходится на сегменте* $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(0 < \delta < \pi)$*.*

Применим признак Абеля. Положим $u_n(x) = a_n \sin nx$, $v_n(x) = \cos \dfrac{x}{n}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на сегменте $[\delta, 2\pi - \delta]$ (см. пример 14.12), первое условие признака Абеля выполняется.

При каждом фиксированном $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ последовательность $(v_n(x))$ возрастает. А поскольку косинус по модулю не превосходит единицы, то для всех $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|v_n(x)| = \left|\cos \dfrac{x}{n}\right| < 1$. Это означает, что последовательность (v_n) равномерно ограничена на $[\delta, 2\pi - \delta]$. Следовательно, выполняется и второе условие признака Абеля, по которому исходный ряд на $[\delta, 2\pi - \delta]$ равномерно сходится.

Теорема 14.6. (**Дини**) *Пусть последовательность* (f_n) *непрерывных на компактном множестве* X *функций сходится к непрерывной на* X *функции* f*. Если* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ *(или* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$*) при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$*, то последовательность* (f_n) *сходится на множестве* X *к функции* f *равномерно.*

Доказательство. Положим $\gamma_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Из условия следует, что все функции γ_n неотрицательны и непрерывны на множестве X, в каждой точке $x \in X$ числовая последовательность $\gamma_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\gamma_n(x) \geq \gamma_{n+1}(x)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$.

Очевидно, что $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ тогда и только тогда, когда $\gamma_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Докажем, что $\gamma_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\gamma_n(y) \geq 0$ при каждом $y \in X$ и каждом $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(y) = 0, \ y \in X,$$

то для каждого $y \in X$ найдется номер m_y такой, что

$$0 \leq \gamma_{m_y}(y) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.13}$$

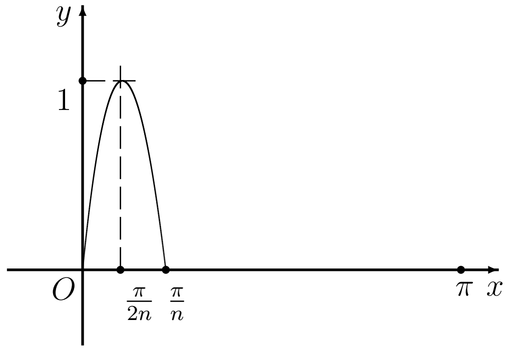

Рис. 31: График функции f_n.

Поскольку функция γ_{m_y} непрерывна в точке y, найдется число $\delta_y > 0$ такое, что

$$\left|\gamma_{m_y}(x) - \gamma_{m_y}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in B\left(y, \delta_y\right). \tag{14.14}$$

Из (14.13) и (14.14) выводим

$$0 \leq \gamma_{m_y}(x) \leq \left|\gamma_{m_y}(x) - \gamma_{m_y}(y)\right| + \gamma_{m_y}(y) < \varepsilon,\ x \in B\left(y, \delta_y\right).$$

Отсюда, учитывая монотонность последовательности $(\gamma_n(x))$, получаем

$$0 \leq \gamma_n(x) < \varepsilon,\ x \in B\left(y, \delta_y\right),\ n \geq m_y. \tag{14.15}$$

Понятно, что система множеств $\left\{B\left(y, \delta_y\right)\right\}_{y \in X}$ образует открытое покрытие множества X. Ввиду компактности множества X, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие множества X. Пусть y_1, y_2, ... , y_l — такой (конечный) набор точек, что система $\left\{B\left(y_k, \delta_{y_k}\right)\right\}_{k=1,2,\ldots,l}$ покрывает множество X, то есть

$$\forall x \in X \quad \exists k (= 1, 2, \ldots, l): \quad x \in B\left(y_k, \delta_{y_k}\right). \tag{14.16}$$

Положим $m = \max\left\{m_{y_k} : k = 1, 2, \ldots, l\right\}$. Возьмем любое $n \geq m$ и любой $x \in X$. Тогда, ввиду (14.16), найдется номер k такой, что $x \in B\left(y_k, \delta_{y_k}\right)$. Поэтому из (14.15) следует, что $0 \leq \gamma_n(x) < \varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольности выбора $n \geq m$ и $x \in X$, получаем $\gamma_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. ■

Заметим, что условие монотонности функциональной последовательности (f_n) в теореме 14.6 существенно, ибо немонотонная на компактном множестве X последовательность непрерывных функций может сходиться на X поточечно к непрерывной функции, но не сходиться к ней равномерно.

Пример 14.14. *Покажем, что последовательность* (f_n) *функций* (*см. рисунок 31*)

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, & \text{если } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{n}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{\pi}{n} < x \leq \pi, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

сходится на сегменте $[0, \pi]$ *к непрерывной функции, но неравномерно.*

Нетрудно видеть, что предельной функцией последовательности (f_n) является функция $f(x) \equiv 0$ на сегменте $[0, \pi]$. Очевидно, что это непрерывная функция. Но

$$\alpha_n = \sup_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,\pi]} f_n(x) = f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 \not\to 0.$$

Согласно критерию равномерной сходимости (теорема 14.1), исходная последовательность сходится на сегменте $[0, \pi]$ к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$ неравномерно.

Следствие 14.3. (**Дини**) *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, составлен из непрерывных и неотрицательных на компактном множестве* X *функций и сходится на этом множестве к сумме* S*. Если функция* S *непрерывна на* X*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится к* S *на* X *равномерно.*

Нетрудно проверить, что последовательность (S_n) частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ удовлетворяет всем условиям теоремы 14.6. Следовательно, $S_n \overset{X}{\rightrightarrows} S$.

14.4 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Здесь мы изучим функциональные свойства суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Как выяснится, в этих вопросах важную роль играет равномерная сходимость.

Теорема 14.7 (О почленном переходе к пределу)**.** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на множестве* X *к сумме* S *и* a *— предельная точка множества* X*. Если для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *в точке* a *существует конечное предельное значение*

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = b_n, \tag{14.17}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, функция* S *имеет в точке* a *предельное значение* b *и справедливо равенство* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$*, или*

$$\lim_{x \to a} S(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{14.18}$$

Доказательство. Применяя критерий Коши, докажем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на множестве X равномерно, согласно критерию Коши равномерной сходимости, найдётся номер m такой, что

$$\forall n \geq m \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in X \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получим оценку

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

которая выполняется при всех $n \geq m$ и всех $p \in \mathbb{N}$. По критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обозначим его сумму буквой b и покажем, что $\lim\limits_{x \to a} S(x) = b$, то есть что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in X \cap B(a, \delta)$

$$|S(x) - b| < \varepsilon. \tag{14.19}$$

Прежде всего заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}|S(x) - b| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| = \\ = \left|\sum_{k=1}^{n}\big(u_k(x) - b_k\big) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k(x) - b_k| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|.\end{aligned} \tag{14.20}$$

Снова возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на множестве X к сумме S, найдётся номер m такой, что для каждого $n \geq m$ и всех $x \in X$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| = \left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.21}$$

Аналогично, ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, найдётся номер l такой, что для всех $n \geq l$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.22}$$

Зафиксируем произвольный номер $n \geq \max\{m, l\}$. Ввиду (14.17), существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X \cap B(a, \delta)$

$$|u_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{3n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.23}$$

Используя оценки (14.20), (14.21), (14.22) и (14.23), для всех $x \in X \cap B(a, \delta)$ получаем

$$|S(x) - b| < \varepsilon.$$

Это означает, что (14.19), а следовательно, и (14.18), выполняется. Теорема доказана. ■

Замечание. *При выполнении условий теоремы операции предельного перехода и суммирования ряда можно менять местами, иначе говоря, к пределу при $x \to a$ можно переходить почленно.*

Справедливость следующего утверждения вытекает непосредственно из определения непрерывности функции в точке (на множестве).

Следствие 14.4. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на множестве X к сумме S. Если все его члены u_n непрерывны в точке $a \in X$ (на множестве X), то сумма S непрерывна в точке a (на множестве X).*

Теорема 14.8. *Пусть функциональная последовательность (f_n) равномерно сходится на множестве X к предельной функции f и a — предельная точка множества X. Если все члены этой последовательности имеют в точке a конечное предельное значение, то и предельная функция f имеет в точке a конечное предельное значение и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$u_1 = f_1, \quad u_n = f_n - f_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots, \quad S = f,$$

и

$$b_1 = c_1, \quad b_n = c_n - c_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots.$$

Понятно, что последовательность (f_n) является последовательностью частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Поэтому, из условий теоремы следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на множестве X к сумме S и для каждого $n \in \mathbb{N}$ в точке a существует конечное предельное значение $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$. Согласно теореме 14.7, существует предельное значение функции S в точке a и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{14.24}$$

Но поскольку $S = f$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(c_1 + \sum_{k=2}^{n}(c_k - c_{k-1})\right) = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

то, используя (14.24), получаем

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} S(x) = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Что и требовалось доказать. ■

Замечание. *При выполнении условий теоремы операции предельного перехода по x и по n можно менять местами.*

Следствие 14.5. *Пусть функциональная последовательность (f_n) равномерно сходится на множестве X к предельной функции f. Если все члены последовательности (f_n) непрерывны в точке $a \in X$ (на множестве X), то и предельная функция f непрерывна в точке a (на множестве X).*

Теорема 14.9 (О почленном интегрировании)**.** *Пусть последовательность функций $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится на сегменте $[a,b]$ к функции f. Тогда, если все $f_n \in R[a,b]$ (интегрируемы на сегменте $[a,b]$), то и предельная функция $f \in R[a,b]$, причём имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{14.25}$$

Доказательство. Докажем сначала, что предельная функция f ограничена на сегменте $[a, b]$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, то найдётся номер m такой, что для всех $n \geq m$ и всех $x \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{14.26}$$

Зафиксируем один из номеров $n \geq m$. Поскольку функция f_n интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нём, то есть имеется постоянная $M > 0$ такая, что

$$|f_n(x)| \leq M, \ x \in [a, b]. \tag{14.27}$$

Используя неравенства (14.26) и (14.27), выводим оценку

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + M,$$

которая выполняется при всех $x \in [a, b]$. Таким образом, ограниченность функции f на сегменте $[a, b]$ доказана.

Теперь докажем, что предельная функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$. Так как $f_n \in R[a, b]$, то согласно критерию интегрируемости (теорема 6.2), найдётся $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} \omega_i(f_n)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.28}$$

Зафиксируем одно из таких разбиений T и возьмём произвольный частичный сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда для любых x' и x'' из сегмента $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| \leq \\ \leq |f(x') - f_n(x')| + \omega_i(f_n) + |f_n(x'') - f(x'')| \,. \end{aligned}$$

Отсюда и неравенства (14.26) выводим

$$|f(x') - f(x'')| < \omega_i(f_n) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Следовательно,

$$\omega_i(f) \leq \omega_i(f_n) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до l, получаем

$$\sum_{i=1}^{l} \omega_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{l} \omega_i(f_n)\Delta x_i + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{l} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{l} \omega_i(f_n)\Delta x_i + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и оценки (14.28) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости функция f интегрируема на $[a, b]$.

Теперь, применяя свойства интегралов и используя (14.26), получаем

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Отсюда следует равенство (14.25). Теорема доказана. ■

Замечание. *При выполнении условий теоремы говорят, что последовательность* (f_n) *можно интегрировать на сегменте* $[a,b]$ *почленно.*

Теорема 14.10. *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *образован из функций* $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *интегрируемых на сегменте* $[a,b]$. *Тогда, если этот ряд сходится равномерно на сегменте* $[a,b]$ *к сумме* S, *то его можно интегрировать почленно, то есть*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx.$$

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему 14.9 к частичным суммам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пример 14.15. *Покажем, что последовательность функций*

$$f_n(x) = n^{\alpha}\sin x\cos^n x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0,$$

сходится на сегменте $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *к функции* $f(x) \equiv 0$. *Выясним при каких значениях* α *последовательность* (f_n) *можно интегрировать почленно.*

Поскольку $f_n(0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Так как $\cos x = a < 1$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, а $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}a^n = 0$ при $a \in [0;1)$, то и при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеем: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Поэтому и

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0. \tag{14.29}$$

Найдем интеграл от функции f_n ($n \in \mathbb{N}$).

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = n^{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^n x\,dx = -n^{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,d\left(\cos x\right) = -n^{\alpha}\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n^{\alpha}}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ 1, & \text{если } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Отсюда и (14.29) следует, что равенство (14.25) выполняется лишь при $0 < \alpha < 1$.

Таким образом, перестановка порядка предельного перехода и интегрирования может привести к ошибочным результатам, если не проверено выполнение условий теоремы 14.10. Так как все функции рассматриваемой последовательности непрерывны на сегменте $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то, значит, нет равномерной сходимости.

Проверим последовательность на равномерную сходимость, используя первый критерий (теорема 14.1). Так как предельная функция $f(x) \equiv 0$, то

$$\alpha_n = \sup\left\{n^\alpha \sin x \cos^n x : x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right\} = n^\alpha \sup\left\{\sin x \cos^n x : x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Легко проверить, что функция $\sin x \cos^n x$ достигает максимума в точке $x_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и подсчитать, что

$$\alpha_n = \frac{n^{\alpha + \frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Теперь нетрудно найти, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{e}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ +\infty, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, равномерная сходимость есть только для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, поэтому только для этих значений α можно быть заранее уверенными в правомерности перестановки порядка предельного перехода и интегрирования.

Пусть задана последовательность $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что все функции f_n дифференцируемы. Естественно возникает вопрос, можно ли из равномерной сходимости последовательности (f_n) к функции f получить дифференцируемость предельной функции f и сходимость последовательности (f_n') к f'? Легко убедиться, что такое утверждение неверно.

Пример 14.16. *Покажем, что последовательность функций $f_n(x) = |x - \frac{1}{n}\sin nx|$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $f(x) = |x|$, функции последовательности дифференцируемы на $\mathbb{R}$, но $f'(0)$ не существует.*

Ввиду чётности функций $f_n(x)$ и $f(x)$ равномерную сходимость достаточно доказать на множестве $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$. На этом множестве

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x - \frac{1}{n}\sin nx - x\right| = \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ($n \in \mathbb{N}$), так что равномерная сходимость имеется. Дифференцируемость функций f_n в точках $x \neq 0$ очевидна. Докажем их дифференцируемость в точке $x = 0$. Вычислим правую производную. Так как в точке $x = 0$ имеем $\Delta x = x$, то

$$(f_n)'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - \frac{1}{n}\sin nx}{x} = 1 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin nx}{x} = 1 - 1 = 0.$$

Аналогично устанавливается, что и левая производная $(f_n)'_-(0) = 0$, а из равенства правой и левой производных следует дифференцируемость функций f_n в точке $x = 0$ (см. теорему 4.2). Недифференцируемость предельной функции $f(x) = |x|$ в нуле очевидна.

Пример 14.17. *Покажем, что последовательность* (f_n) *функций*

$$f_n(x) = \frac{\sin n^3 x}{n}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси к некоторой функции f, *но последовательность* (f_n') *не сходится к* f'.

Не составляет труда проверить, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^3 x}{n} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что $f_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$. Так как

$$\alpha_n = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin n^3 x}{n} \right| = \frac{1}{n} \to 0,$$

то по критерию равномерной сходимости $f_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

Производные функций f_n и f соответственно равны

$$f_n'(x) = n^2 \cos n^3 x, \quad f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку, например, $f_n'(0) = n^2 \to +\infty$, в то время как $f'(0) = 0$, последовательность (f_n') не сходится к f'.

Рассмотренные примеры показывают, что ограничивающие условия должны быть более жёсткими и, вероятно, касаться не только последовательности, но и её производных.

Теорема 14.11. (**О почленном дифференцировании**) *Пусть* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность дифференцируемых функций* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть, далее, последовательность производных* (f_n') *сходится равномерно на сегменте* $[a,b]$, *а последовательность функций* (f_n) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a,b]$. *Тогда последовательность* (f_n) *равномерно сходится на сегменте* $[a,b]$ *к некоторой функции* f, *причем функция* f *дифференцируема на сегменте* $[a,b]$ *и её производная* f' *является предельной функцией последовательности* (f_n'), *то есть*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b]. \tag{14.30}$$

Доказательство. Возьмём произвольное положительное число ε. Так как числовая последовательность $(f_n(x_0))$ сходится, а последовательность производных (f_n') сходится равномерно на сегменте $[a,b]$, по критериям Коши найдется номер m такой, что

$$\forall n \geq m \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14.31}$$

$$\forall n \geq m \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \left| f_{n+p}'(x) - f_n'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{14.32}$$

Пусть x и t — произвольные точки сегмента $[a,b]$. При любых фиксированных n и p для функции $(f_{n+p} - f_n)$ на сегменте $[t,x]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. По этой теореме найдётся точка $\xi \in (t,x)$ такая, что

$$(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(t) - f_n(t)) = \left(f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi) \right)(x - t). \tag{14.33}$$

При $t = x_0$, используя неравенства (14.31), (14.32) и, учитывая, что $|x - x_0| \leq b - a$, из (14.33) выводим оценку

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| |x - x_0| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши это означает, что последовательность (f_n) равномерно сходится на сегменте $[a, b]$ к некоторой функции f.

Для доказательства дифференцируемости функции f и равенства (14.30) будем использовать теорему (14.8) о почленном переходе к пределу.

Возьмём произвольную точку $x \in [a, b]$. Определим на множестве $X = [a, b] \setminus \{x\}$ функцию $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ и последовательность функций $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14.34}$$

Поскольку все функции f_n дифференцируемы на сегменте $[a, b]$, и, следовательно, в точке x, то

$$\lim_{t \to x} \varphi_n(t) = f'_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14.35}$$

Возьмём произвольное $t \in X$. Применяя равенство (14.33), получаем

$$|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| = \left| \frac{f_{n+p}(t) - f_{n+p}(x)}{t - x} - \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \right| =$$
$$= \left| \frac{(f_{n+p}(t) - f_n(t)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x))}{t - x} \right| = \left| f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi) \right|,$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между t и x. Теперь, используя оценку (14.32), получаем оценку

$$|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

которая справедлива при всех $n \geq m$, всех $p \in \mathbb{N}$ и всех $t \in X$. Согласно критерию Коши равномерной сходимости (теорема 14.2) функциональная последовательность (φ_n) равномерно сходится на множестве X. А так как последовательность (f_n) сходится к f, то, ввиду (14.34), последовательность (φ_n) сходится на множестве X (и, как доказано, сходится равномерно) к функции φ, то есть

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \quad t \in X. \tag{14.36}$$

Следовательно, на множестве X для последовательности (φ_n) выполняются все условия теоремы 14.8 о почленном переходе к пределу, согласно которой

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} \varphi_n(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t). \tag{14.37}$$

Теперь, используя равенства (14.36), (14.37) и (14.35), находим

$$\lim_{t \to x} \varphi(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} \varphi_n(t) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x). \tag{14.38}$$

По условию $\lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$ существует, поэтому, ввиду (14.38), существует и $\lim\limits_{t \to x} \varphi(t)$. Но из определения функции φ следует, что

$$\lim_{t \to x} \varphi(t) = f'(x).$$

Отсюда и равенства (14.38) получаем

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Из теоремы 14.11 непосредственно вытекает следующее утверждение для функциональных рядов, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 14.12 (О почленном дифференцировании). *Пусть члены функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *дифференцируемы на сегменте* $[a,b]$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$, *составленный из производных членов этого ряда, сходится равномерно на сегменте* $[a,b]$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a,b]$, *то он сходится равномерно на сегменте* $[a,b]$ *к некоторой сумме* $S : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *при этом функция* S *дифференцируема на* $[a,b]$ *и*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Заметим, что в теоремах 14.7 — 14.12 требование равномерной сходимости лишь достаточно, но не необходимо. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 14.18. *Рассмотрим последовательность функций* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *заданных формулой* $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

В примере 14.7 было показано, что эта последовательность на сегменте $[0,1]$ сходится неравномерно к предельной функции $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемой равенством $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Нетрудно видеть, что все функции f_n и функция f непрерывны на сегменте $[0,1]$, хотя $f_n \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f$.

Проинтегрируем каждую из этих функций на сегменте $[0,1]$. Получим

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\ln(1+n^2)}{2n},$$

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 0\,dx = 0.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$, применяя второе правило Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{2(1+t^2)} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx,$$

хотя $f_n \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f$.

Теперь рассмотрим последовательность функций $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданных формулой $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}$. Функции f_n дифференцируемы на сегменте $[0,1]$ и $f_n'(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Как отмечено выше, последовательность (f_n') на сегменте $[0,1]$ сходится неравномерно к предельной функции $g(x) = 0$, а последовательность (f_n) сходится в точке $x = 0$ к нулю.

Покажем, что $f_n \to 0$ и при остальных значениях $x \in [0,1]$. Итак, пусть $0 < x \le 1$. Применяя второе правило Лопиталя, находим

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+t^2x^2)}{2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2tx^2}{2\,(1+t^2x^2)} = 0.$$

Таким образом,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Поскольку $f'(x) = 0 = g(x)$, получаем, что последовательность (f_n) дифференцируемых функций сходится на сегменте $[0,1]$ к дифференцируемой на сегменте $[0,1]$ функции f и выполняется равенство (14.30), хотя $f_n' \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f'$.

15 Степенные ряды

Определение 15.1. *Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

$$c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + \ldots + c_n(t-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n, \tag{15.1}$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \in \mathbb{C}$ называются коэффициентами степенного ряда, t — комплексная переменная, $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка.

Если заменить $t-a$ на z, то есть положить $t-a=z$, то степенной ряд (15.1) преобразуется к виду

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_nz^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n. \tag{15.2}$$

Далее, если не оговорено иное, ограничимся рассмотрением степенных рядов лишь вида (15.2).

15.1 Свойства степенных рядов

Степенному ряду, как функциональному ряду, присущи все понятия, введенные для функциональных рядов, справедливы и все утверждения, доказанные для функциональных рядов. Однако имеется ряд свойств, которыми обладают лишь степенные ряды.

Выясним, какой может быть область сходимости степенного ряда. Отметим прежде всего, что степенной ряд (15.2) всегда сходится в точке $z = 0$.

Теорема 15.1. **(Абель, 1-я)** *Если степенной ряд (15.2) сходится при $z = z_0$, $z_0 \ne 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$ и равномерно в замкнутом круге $|z| \le |z_0| - \delta$ при любом $0 < \delta < |z_0|$.*

Доказательство. По условию теоремы числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {z_0}^n$ сходится. В силу необходимого условия сходимости его общий член $c_n {z_0}^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $(c_n {z_0}^n)$ сходится, а потому ограничена. Поэтому существует положительное число M такое, что $|c_n {z_0}^n| \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Возьмем любое значение z так, чтобы $|z| < |z_0|$ и положим $q = \dfrac{|z|}{|z_0|}$. Так как $q < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. А так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|c_n z^n| = |c_n {z_0}^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

то по признаку сравнения ряд с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ сходится, следовательно, ряд (15.2) при выбранном z абсолютно сходится. Первая часть теоремы доказана.

Приступим к доказательству второй части. Возьмём любое δ, $0 < \delta < |z_0|$, и положим $q = \dfrac{|z_0| - \delta}{|z_0|}$. Так как $0 < q < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится.

Для любых z из круга $|z| \leq |z_0| - \delta$ и $n \in \mathbb{N}$ в силу того, что $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| \leq \dfrac{|z_0| - \delta}{|z_0|} = q$ справедлива оценка

$$|c_n z^n| = |c_n {z_0}^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n,$$

из которой по признаку Вейерштрасса следует, что ряд (15.2) в круге $|z| \leq |z_0| - \delta$ сходится равномерно. ■

Следствие 15.1. *Если степенной ряд (15.2) расходится при $z = z_1$, то он расходится при каждом значении z, удовлетворяющем неравенству $|z| > |z_1|$.*

Доказательство. Действительно, предположение о существовании значения z, удовлетворяющего неравенству $|z| > |z_1|$, при котором ряд (15.2) сходится, приводит, согласно теореме 15.1, к сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {z_1}^n$. ■

Следующая теорема является важнейшим следствием только что доказанной.

Теорема 15.2. *Для каждого степенного ряда вида (15.2) существует R, $0 \leq R \leq +\infty$, такое, что при $|z| < R$ ряд сходится, а при $|z| > R$ расходится.*

Доказательство. Пусть E — область сходимости ряда. Множество E не пустое, так как каждый степенной ряд сходится в точке $z = 0$. Положим

$$R = \sup\{|z| : z \in E\}. \tag{15.3}$$

Если $R = 0$, то $E = \{0\}$, множество $\{z : |z| < R\}$ — пустое, что формально не противоречит формулировке теоремы.

Если $R = +\infty$, то ряд сходится абсолютно по предыдущей теореме при любом $z \in \mathbb{C}$, ибо по второму свойству точной верхней грани для каждого $z \in \mathbb{C}$ найдётся $z' \in E$ такое, что $|z| < |z'|$. Итак, в этом случае множество $\{z : |z| < R\} = \mathbb{C}$, множество $\{z : |z| > R\}$ — пустое. Теорема справедлива.

Пусть теперь $0 < R < +\infty$. Возьмём любое $z \in \mathbb{C}$ такое, что $|z| < R$. По второму свойству точной верхней грани найдётся $z' \in E$ такое, что $|z| < |z'| \le R$. По предыдущей теореме в любой такой точке ряд сходится и при том абсолютно. Возьмём теперь любое $z' \in \mathbb{C}$ такое, что $|z'| > R$. В таких точках ряд сходиться не может, ибо из его сходимости вытекает, что $z' \in E$. Но тогда

$$R = \sup\{|z| : z \in E\} \ge |z'| > R.$$

Противоречие. ■

Определение 15.2. *Число R, существование которого установлено теоремой 15.2, называют радиусом сходимости степенного ряда, а круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — кругом сходимости.*

Таким образом, установлено, что или степенной ряд сходится только в точке $z = 0$ ($R = 0$), или сходится абсолютно на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ($R = +\infty$), или (если $0 < R < +\infty$) абсолютно сходится в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. В последнем случае ничего не говорится о поведении ряда на границе $|z| = R$ круга сходимости. Как мы увидим на примерах, для разных рядов оно бывает разным.

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, сделаем следующее замечание. Если степенной ряд (15.2) (может быть, с вещественными коэффициентами) рассматривается не в комплексной плоскости, а лишь на вещественной оси, то в доказательствах теорем 15.1, 15.2 ничто не меняется, поэтому понятие "радиус сходимости" сохраняется, понятие же "круг сходимости" заменяется на понятие "интервал сходимости".

Пример 15.1. *Найдём радиусы и области сходимости следующих рядов:*

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

a) Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!|z|^n$ и, считая $|z| \ne 0$, применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = +\infty.$$

Если предел получается больше единицы, то, как следует из доказательства признака Даламбера, общий член ряда не стремится к нулю, поэтому расходится не только ряд из модулей, но и сам ряд.

Вывод: этот ряд сходится лишь при $z = 0$.

b) Снова рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ и, считая $|z| \ne 0$, применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1} n!}{(n+1)!|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Вывод: ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

c) В этом примере члены ряда образуют геометрическую прогрессию и нам известно (см. пример 13.8), что при $|z| = q < 1$ ряд сходится, а при $|z| = q \ge 1$ ряд расходится.

Вывод: ряд абсолютно сходится в открытом круге $|z| < 1$ и расходится вне него.

d) При $|z| \le 1$ имеем очевидную оценку

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}.$$

Из этой оценки и признака Вейерштрасса следует, что при $|z| \le 1$ данный ряд сходится. При $|z| = q > 1$ общий член ряда не стремится к нулю, так как, в силу того, что показательная функция q^n $(q > 1)$ возрастает быстрее степенной n^2, имеет место: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^2} = +\infty$.

Вывод: данный ряд абсолютно сходится в замкнутом круге $|z| \le 1$ и расходится вне него.

e) Если $|z| < 1$, то $\left|\dfrac{z^n}{n}\right| \le |z|^n$, и из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z|^n$ следует абсолютная сходимость исследуемого ряда. Если $|z| > 1$, то по той же причине, что и в предыдущем примере, общий член ряда не стремится к нулю, ряд расходится. Осталось рассмотреть случай $|z| = 1$.

В этом случае ряд из модулей есть гармонический ряд, который расходится, следовательно абсолютной сходимости нет. Чтобы исследовать ряд на условную сходимость, запишем z в показательной форме. Так как $|z| = 1$, то $z = e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$. При $\varphi = 0$ имеем расходящийся (гармонический) ряд, а при $0 < \varphi < 2\pi$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$ установлена в примере 13.25.

Вывод: ряд сходится абсолютно в открытом круге $|z| < 1$, условно на окружности $|z| = 1$, за исключением точки $z = 1$, и расходится в точке $z = 1$ и при $|z| > 1$.

Как видим из трёх последних примеров, на границе круга сходимости степенного ряда могут складываться самые разные ситуации: от абсолютной сходимости на всей границе до расходимости на всей границе.

Следующая теорема устанавливает простой, часто применяемый на практике и незаменимый в теории способ нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема 15.3. *Радиус сходимости степенного ряда (15.2) может быть вычислен по формуле Коши-Адамара:*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,. \tag{15.4}$$

В формуле Коши-Адамара в случае, если правая часть равна нулю, считаем $R = +\infty$, а если правая часть равна $+\infty$, то считаем $R = 0$.

Доказательство. Применим обобщенный признак Коши в предельной форме (теорема 13.14) к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|\,, \tag{15.5}$$

составленному из абсолютных величин членов ряда (15.2). Для этого вычислим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|} = |z|\,L,$$

где $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}$.

Очевидно, что при $L = 0$ произведение $|z|\,L = 0 < 1$ при любом $z \in \mathbb{C}$, и, следовательно, ряд (15.5) сходится по признаку Коши на всей комплексной плоскости. Это означает, что радиус сходимости R ряда (15.2) равен $+\infty$. Если же $L = +\infty$, то при любом $z \ne 0$ произведение $|z|L = +\infty > 1$. Поэтому ряд (15.5), а вместе с ним и ряд (15.2) сходится только в точке $z = 0$. Следовательно, в этом случае радиус сходимости $R = 0$.

Пусть теперь $0 < L < +\infty$. Согласно обобщённому признаку Коши, если $|z|\,L < 1$, то ряд (15.5) сходится, следовательно, ряд (15.2) абсолютно сходится. Если же $|z|L > 1$, то ряд (15.5) расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Но тогда и общий член ряда (15.2) не стремится к нулю, следовательно, он тоже расходится. Итак, ряд (15.2) сходится при выполнении условия $|z|L < 1$ или $|z| < \dfrac{1}{L} = R$. ■

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда может быть использована также более простая, но далеко не всегда применимая формула.

Теорема 15.4. *Пусть у ряда (15.2) все коэффициенты $c_n \neq 0$. Тогда его радиус сходимости может быть найден по формуле*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| , \tag{15.6}$$

если предел (конечный или бесконечный) существует.

Доказательство. Рассмотрим ряд (15.5) и применим к нему признак Даламбера в предельной форме (следствие к теореме 13.11). Для этого, считая $z \neq 0$, вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}z^{n+1}|}{|c_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |z| \cdot L,$$

где $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \right|$.

Если $L = +\infty$, при любом $z \neq 0$ произведение $|z| \cdot L = +\infty > 1$, поэтому по признаку Даламбера ряд (15.5) расходится. А так как причина расходимости кроется в том, что общий член ряда (15.5) не стремится к нулю, то не стремится к нулю и общий член ряда (15.2). Таким образом, ряд (15.2) при $|z| \neq 0$ расходится, то есть его радиус сходимости $R = 0$. Приняв, как и при доказательстве предыдущей теоремы, соглашение $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ и $\dfrac{1}{0} = +\infty$, имеем:

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Если $L = 0$,то при любом $z \in \mathbb{C}$ произведение $|z| \cdot L = 0 < 1$, поэтому по признаку Даламбера ряд (15.5) сходится, следовательно, ряд (15.2) сходится абсолютно при любом $z \in \mathbb{C}$, то есть его радиус сходимости $R = +\infty$. Снова

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Пусть теперь $0 < L < +\infty$. Возьмём любое $z \in \mathbb{C}$ такое, что $|z| < \dfrac{1}{L}$. Тогда произведение $|z| \cdot L < 1$, следовательно, ряд (15.5), а вместе с ним и ряд (15.2) сходится (абсолютно). Если же возьмём любое $z \in \mathbb{C}$ такое, что $|z| > \dfrac{1}{L}$, то произведение $|z| \cdot L > 1$, следовательно, ряд (15.5), а вместе с ним и ряд (15.2) расходится. Таким образом, по определению радиуса сходимости и в этом случае

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Теорема доказана. ■

Замечание 15.1. *Формулы Коши-Адамара (15.4) и (15.6), очевидно, сохраняют свою силу и в том случае, когда степенной ряд рассматривается лишь на вещественной оси.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 15.2. *Найти области сходимости следующих степенных рядов:*
a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(1+i)^n}$; *b*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(n+1)(n+2)}$; *c*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$.

a) Для вычисления радиуса сходимости применим формулу (15.6). Имеем:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}}{(1+i)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |1+i| = \sqrt{2}\,.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \sqrt{2}$. Исследуем сходимость ряда на границе $|z| = \sqrt{2}$ круга сходимости. На границе $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$, поэтому ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^n e^{in\varphi}$. Так как модуль каждого множителя общего члена ряда равен единице, то общий член ряда не стремится к нулю, следовательно, на границе ряд расходится.

Ответ: ряд сходится абсолютно в открытом круге $|z| < \sqrt{2}$ и расходится вне него.

b) У этого ряда чётные коэффициенты $c_{2n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, а нечётные $c_{2n+1} = 0$, поэтому условия теоремы 15.4 не выполняются, следовательно, формула (15.6) не может быть использована. Поэтому для вычисления радиуса сходимости применим формулу Коши-Адамара. Обозначив коэффициенты ряда через c_k, имеем:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = 1.$$

(При вычислении предела был использован известный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

Итак, $R = 1$, следовательно, ряд абсолютно сходится в круге $|z| < 1$. Исследуем его сходимость на границе круга $|z| = 1$. Ряд, составленный из модулей, будет иметь вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, его общий член $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. По признаку сравнения ряд из модулей сходится, следовательно по признаку Вейерштрасса сам ряд на границе $|z| = 1$ круга сходимости сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно в замкнутом круге $|z| \le 1$ и расходится вне него.

c) Коэффициенты $c_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ образуют две последовательности: $c_{2k} = \dfrac{1}{4^{2k}}$ и $c_{2k+1} = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$. Чётные убывают существенно быстрее нечётных, а по формуле Коши-Адамара нам следует вычислить верхний предел, поэтому

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2^{2k+1}}} = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, $R = 2$ и ряд абсолютно сходится в круге $|z| < 2$. Проверим ряд на сходимость на границе $|z| = 2$ круга сходимости. На границе $z = 2e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$, нечётные члены ряда $a_{2k+1} = \dfrac{2^{2k+1}e^{i(2k+1)\varphi}}{\left(3+(-1)^{2k+1}\right)^{2k+1}} = e^{i(2k+1)\varphi}$. Так как $|e^{i(2k+1)\varphi}| = 1$, то общий член ряда на границе $|z| = 2$ не стремится к нулю, ряд расходится.

Ответ: ряд сходится абсолютно в открытом круге $|z| < 2$ и расходится вне него.

Пример 15.3. *Найти промежуток сходимости следующих (вещественных) степенных рядов: a)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{\ln^2 n}$; *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2+n}(3x)^n$.

a) Радиус сходимости найдём, используя формулу Коши-Адамара.

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln^2 n}}=1.$$

(Верхний предел заменён на обычный потому, что монотонная последовательность сходится, а при вычислении предела использованы: теорема о трёх последовательностях, неравенство $1<\ln n<n$, и тот факт, что $\sqrt[n]{n}\to 1$ при $n\to\infty$.)

Итак, $R=1$, поэтому в интервале $(-1;1)$ ряд абсолютно сходится. Остаётся исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$, который расходится, потому что $\ln n$ возрастает медленнее любой положительной степени n, поэтому, начиная с некоторого номера n_0, справедлива оценка $\ln n<\sqrt{n}$, следовательно, $\dfrac{1}{\ln^2 n}>\dfrac{1}{n}$, то есть члены ряда больше членов расходящегося гармонического ряда.

При $x=-1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n}$. Этот ряд сходится по признаку Лейбница, потому что $\dfrac{1}{\ln^2 n}\downarrow 0$ при $n\to\infty$, но сходится условно, потому что ряд, составленный из модулей, совпадает с рядом, получающимся при $x=1$.

Ответ: ряд сходится на промежутке $[-1;1)$, причём в точке -1 сходимость условная.

b) Здесь при вычислении радиуса сходимости можно применить формулу (15.6).

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(3+n)}{(2+n)3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3+n}{2+n}=\frac{1}{3}\,.$$

Итак, интервал сходимости $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Исследуем сходимость на концах интервала.

При $x=-\dfrac{1}{3}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2+n}$. Этот ряд расходится, так как его общий член $\dfrac{1}{2+n}\sim\dfrac{1}{n}$, а гармонический ряд расходится.

При $x=\dfrac{1}{3}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2+n}$. Этот ряд сходится по признаку Лейбница, но сходится условно, так как ряд, составленный из модулей расходится.

Ответ: ряд сходится на промежутке $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]$, причём на правом конце промежутка сходится условно.

Функциональные свойства суммы степенного ряда

В этом пункте будем предполагать, что радиус сходимости степенного ряда $R>0$, то есть что область сходимости ряда не вырождается в точку $z=0$.

Теорема 15.5. *Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.*

Доказательство. Возьмём любое r такое, что $0<r<R$. Тогда по теореме 15.1 степенной ряд равномерно сходится в замкнутом круге $|z|\le r$. А так как члены степенного ряда

— непрерывные в этом круге функции, то по следствию из теоремы 14.7 (о почленном переходе к пределу в функциональных рядах) и сумма его будет непрерывна в этом круге. Ввиду произвольности r отсюда следует, что сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости $|z| < R$. ■

Теорема 15.6. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *— вещественный степенной ряд* ($a_n, x \in \mathbb{R}$) *с радиусом сходимости* $R > 0$ *и* $x \in (-R; R)$. *Этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте* $[0, x]$, *то есть справедливо равенство*

$$\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Полученный в результате интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Доказательство. По теореме 15.1 исходный ряд равномерно сходится на отрезке $[0, x]$. А поскольку члены ряда — непрерывные, а значит и интегрируемые функции, то, согласно теореме 14.10, его можно почленно интегрировать на отрезке $[0, x]$. В результате интегрирования получим новый степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, радиус сходимости R_1 которого можно вычислить по формуле Коши-Адамара. Имеем:

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \frac{1}{R}\,.$$

(При вычислении использовано свойство: если последовательность (x_n) сходится, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

и учтено, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,$.)

Следовательно, $R_1 = R$. ■

Теорема 15.7. *Вещественный степенной ряд в его интервале сходимости можно дифференцировать почленно, то есть справедливо равенство*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Полученный в результате дифференцирования ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы точно такое же, как и предыдущей. Лишь ссылку на теорему 14.10 следует заменить ссылкой на теорему 14.12. ■

Следствие 15.2. *Вещественный степенной ряд в его интервале сходимости можно интегрировать и дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд, полученный* l*-кратным почленным интегрированием или дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Замечание 15.2. *Теоремы 15.6 и 15.7 справедливы и для комплексных степенных рядов. Просто мы пока ещё не знакомы с понятиями производной и интеграла от функций комплексной переменной.*

Теорема 15.8. (**Абель, 2-я**) *Пусть радиус сходимости вещественного степенного ряда $R > 0$. Если этот ряд сходится при $x = R$, то его сумма непрерывна на сегменте $[0, R]$.*

Доказательство. Представим исходный ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n, \quad 0 \le x \le R.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ по условию сходится, а множители $\left(\dfrac{x}{R}\right)^n$ образуют монотонную (по n) при каждом фиксированном $x \in [0, R]$ и равномерно ограниченную на $[0, R]$ (в силу того, что $0 \le \dfrac{x}{R} \le 1$) последовательность, то по признаку Абеля (теорема 14.5) исследуемый ряд равномерно сходится на сегменте $[0, R]$. ■

Из доказанной теоремы следует, в частности, что сумма ряда S непрерывна в точке $x = R$ слева, то есть что

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Это обстоятельство широко используется при суммировании числовых рядов.

15.2 Суммирование числовых рядов

Предположим, что необходимо найти сумму S сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. При этом известна (или может быть найдена) сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в его интервале сходимости $(-R, R)$. (Поскольку при $x = 1$ этот степенной ряд сходится, его радиус сходимости $R \ge 1$.) Согласно второй теореме Абеля (теорема 15.8) имеем:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(1) = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{15.7}$$

Изложенный метод обычно называют методом Пуассона-Абеля.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 15.4. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Данный ряд сходится по признаку Лейбница. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{15.8}$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, его радиус сходимости равен единице. Найдем сумму $S(x)$ ряда (15.8) в его интервале сходимости $(-1; 1)$. По теореме о почленном дифференцировании степенных рядов (теорема 15.7) имеем:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}. \tag{15.9}$$

Радиус сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (15.9), равен единице, поэтому при каждом x из интервала $(-1, 1)$ члены этого ряд образуют бесконечно убывающую прогрессию со знаменателем $-x$. Следовательно,

$$S'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Интегрируя это равенство на сегменте $[0, x]$, где $x \in (-1, 1)$, находим

$$\int\limits_0^x S\,'(t)\,dt = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

или

$$S(x) - S(0) = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x).$$

Отсюда, учитывая, что $S(0) = 0$, получаем

$$S(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1)\,.$$

Теперь, согласно формуле (15.7) имеем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \ln 2.$$

Итак, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$ ■

Пример 15.5. *Найти сумму ряда* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Этот ряд обычно называют рядом Лейбница.

Решение. По признаку Лейбница этот ряд сходится. Поэтому радиус сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ не меньше единицы. (В действительности, его радиус сходимости равен единице.) Найдем его сумму $S(x)$ в интервале сходимости $(-1, 1)$. Дифференцируя почленно, имеем:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда

$$S(x) = S(0) + \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

Учитывая, что $S(0) = 0$, согласно второй теореме Абеля

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$ ■

Пример 15.6. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{n^2+n-2} \asymp \dfrac{1}{n^2}$, исходный ряд сходится абсолютно. Разложим дробь $\dfrac{1}{n^2+n-2}$ на простейшие дроби (например, методом неопределенных коэффициентов):

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Так как ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n-1)}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+2)}$ сходятся (условно) по признаку Лейбница, то исходный ряд представим в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}. \qquad (15.10)$$

Далее можно методом Пуассона-Абеля найти сумму каждого из рядов, стоящих в правой части (15.10). Мы поступим иначе, а именно, воспользуемся решением примера 15.4. Преобразуем правую часть (15.10), положив в первом из рядов $n-1=k$, а во втором — $n+2=k$:

$$\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k-2}}{k}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}.$$

Итак, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{5}{18}$. ■

Заметим, что метод Пуассона-Абеля применим к нахождению "обобщенных сумм" некоторых расходящихся рядов: по данному числовому ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ строится степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; если этот ряд сходится в интервале $x \in (0,1)$ и его сумма $S(x)$ имеет конечный предел A при $x \to 1-0$, то число A и называют обобщенной (в смысле Пуассона) суммой числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Пример 15.7. *Найти обобщенную сумму (если она существует) ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Решение. Так как общий член данного ряда не стремится к нулю, то ряд расходится и его сумма не определена.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$. Как геометрическая прогрессия он сходится при $|x|<1$ и его сумма $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$ для всех $x\in(-1;1)$. Поскольку

$$\lim_{x\to 1-0}S(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2},$$

число $\dfrac{1}{2}$ является обобщенной суммой данного ряда.

Итак, в обобщённом смысле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=\dfrac{1}{2}$. ■

15.3 Разложение функций в степенные ряды

Вычислением сумм числовых рядов не исчерпываются приложения теории степенных рядов. Данная теория является простым и удобным аппаратом при вычислении значений функций, пределов, определенных интегралов, при изучении свойств функций, при решении дифференциальных и интегральных уравнений, при рассмотрении многих других вопросов прикладной и теоретической математики.

Определение 15.3. *Говорят, что функция f на интервале $(-R;R)$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к f на указанном интервале.*

Непосредственно из этого определения вытекает следующее

Предложение 15.1. *Если функция f на интервале $(-R;R)$ разлагается в степенной ряд, то эта функция имеет на указанном интервале непрерывные производные любого порядка.*

Доказательство. Действительно, по определению 15.3 существует степенной ряд, сходящийся к f на интервале $(-R,R)$. А поскольку по следствию 15.2 из теоремы 15.7 степенной ряд в интервале сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз, то и его сумма f имеет в интервале $(-R;R)$ производные любого порядка. Непрерывность всех производных следует из теоремы о непрерывности дифференцируемой функции. ■

Теорема 15.9. *Если функция f на интервале $(-R,R)$ разлагается в степенной ряд*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\,, \tag{15.11}$$

то это разложение единственно.

Доказательство. По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится и функция f — его сумма. Следовательно, по теореме 15.7 равенство (15.11) можно почленно дифференцировать любое число раз. Дифференцируя, получим:

$$\begin{aligned}
f'(x)=&1a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\,,\\
f''(x)=&1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots\,,\\
f'''(x)=&1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots \cdot n a_n + 2 \cdot 3 \ldots \cdot n(n+1) a_{n+1} x + \ldots ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя в эти равенства и равенство (15.11) $x = 0$, находим

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 2! a_2,$$
$$f'''(0) = 3! a_3, \quad \ldots , \quad f^{(n)}(0) = n! a_n, \ \ldots .$$

Отсюда

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \ldots , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ \ldots . \tag{15.12}$$

Из этих равенств следует, что все коэффициенты ряда (15.11) определяются единственным образом формулами (15.12), что и доказывает теорему. ■

Подставив найденные выражения коэффициентов в равенство (15.11), получаем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \tag{15.13}$$

Следовательно, если функция f на интервале $(-R; R)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд необходимо имеет вид (15.13).

Предположим теперь, что функция f имеет на интервале $(-R, R)$ непрерывные производные любого порядка.

Определение 15.4. *Степенной ряд, коэффициенты которого определяются формулами (15.12), то есть ряд*

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots , \tag{15.14}$$

называется рядом Тейлора функции f.

Из теоремы 15.9 вытекает

Следствие 15.3. *Если функция f на интервале $(-R; R)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд является её рядом Тейлора.*

Подойдём теперь к этой проблеме с другой стороны. Пусть функция f имеет на интервале $(-R; R)$ производные любого порядка. Тогда мы можем составить для неё ряд Тейлора (15.14). Сразу же возникают два вопроса. Будет ли ряд Тейлора сходиться на интервале $(-R; R)$? Если ряд сходится, то будет ли его сумма совпадать с функцией f?

Частичный ответ на поставленные вопросы будет получен с помощью формулы Маклорена для функции f. Напомним эту формулу.

Если функция f на интервале $(-R, R)$ имеет производные до порядка n, то она представляется в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член. Если положить

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

то формулу Маклорена примет вид

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{15.15}$$

Теорема 15.10. *Пусть функция f имеет на интервале $(-R; R)$ производные любого порядка. Для того чтобы ряд Тейлора (15.14) сходился на $(-R; R)$ и имел своей суммой функцию f, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Маклорена (15.15) стремился к нулю при $n \to \infty$, то есть для любого $x \in (-R; R)$*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Доказательство. Если функция f имеет на интервале $(-R; R)$ производные любого порядка, то формулу Маклорена (15.15) можно написать для любого $n \in \mathbb{N}$. Перейдём в (15.15) к пределу при $n \to \infty$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R; R)$, то для любого $x \in (-R; R)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n.$$

Если же для любого $x \in (-R; R)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

то из (15.15) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R; R)$. ■

Из этой теоремы вытекает, что вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора сводится к вопросу об условиях, при которых остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Приведём простое, но достаточно часто применимое условие стремления остаточного члена к нулю.

Лемма 15.1. *Если существует $M > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in (-R; R)$ выполняется условие $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, то $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ на $(-R; R)$.*

Доказательство. Возьмём остаточный член в форме Лагранжа, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ $(\xi \in (0; x))$, и оценим его сверху. Получим

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} R^{n+1} \tag{15.16}$$

для любого $x \in (-R; R)$. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{R^n}{n!}$ и применим к нему признак Даламбера в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1} n!}{(n+1)! R^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится по признаку Даламбера, следовательно, его общий член $\dfrac{R^n}{n!}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Но тогда из оценки 15.16 следует, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ на $(-R; R)$. ■

Чтобы не возникло впечатления, что $R_n(x)$ стремится к нулю на некотором интервале $(-R; R)$ всегда, приведем пример функции f, ряд Тейлора которой не сходится к f ни на каком интервале.

Пример 15.8. *Покажем, что функция*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

имеет на всей вещественной оси непрерывные производные любого порядка, но ни на одном интервале $(-R, R)$ не представима своим рядом Тейлора.

Решение. При $x \neq 0$ имеем:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Применяя метод математической индукции, легко убедиться, что

$$f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $P_{3n}(x)$ — многочлен степени $3n$.

Следовательно, в любой точке $x \neq 0$ производные функции f существуют и непрерывны.

Покажем, применяя метод математической индукции, что в точке $x = 0$ функция f имеет производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

Так как $f(0) = 0$, то, сделав в ходе вычислений замену $\dfrac{1}{x^2} = t$ и используя результат примера 4.14, находим

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0.$$

Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $f^{(n)}(0) = 0$. Докажем, что $f^{(n+1)}(0) = 0$. По определению

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\sqrt{t} P_{3n}(\sqrt{t})}{e^t} = 0. \tag{15.17}$$

Из (15.17) следует, что $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Таким образом доказано, что $f^{(n)}(0) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, то как сама функция f, так и ее производные любого порядка непрерывны в точке $x = 0$.

Следовательно, в любом интервале $(-R, R)$ ряд Тейлора функции f имеет вид

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots .$$

Конечно, этот ряд сходится всюду на $\mathbb{R}$, но ни при одном, отличном от нуля значении x, его сумма не совпадает с функцией f. ■

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.

1) $f(x) = e^x$.

Поскольку сама функция e^x и все ее производные в точке $x = 0$ равны единице, то ряд Тейлора функции e^x имеет вид

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Чтобы доказать сходимость этого ряда к функции e^x, используем теорему 15.10. Пусть $R > 0$ — любое. Так как любая производная от функции e^x равна e^x, а на интервале $(-R; R)$ справедлива оценка $e^x < e^R = M$, то выполнено условие леммы 15.1, значит, по теореме 15.10 на интервале $(-R; R)$ ряд Тейлора функции e^x сходится к e^x. А так как R — любое, то сходимость имеет место и на всей вещественной оси. Итак,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{15.18}$$

2) $f(x) = \cos x$.

При выводе формулы Маклорена для функции $\cos x$ мы получили

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^k, & n = 2k. \end{cases}$$

По формуле (15.14) для функции $\cos x$ составим ряд Тейлора

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots\ . \tag{15.19}$$

Так как для любого n на любом интервале $(-R; R)$ имеем оценку

$$\left|\cos^{(n)} x\right| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1,$$

то по теореме 15.10 с использованием леммы 15.1 ввиду произвольности R получаем, что на всей вещественной оси справедливо разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ . \tag{15.20}$$

3) $f(x) = \sin x$.

Аналогично предыдущему можно получить разложение функции $\sin x$ в ряд Тейлора, справедливое при любом $x \in \mathbb{R}$. Но разложение функции $\sin x$ получается и путем почленного дифференцирования ряда (15.20):

$$(\cos x)' = (1)' - \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \left(\frac{x^4}{4!}\right)' - \left(\frac{x^6}{6!}\right)' + \ldots + \left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)' + \ldots\ ,$$

откуда получаем разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\ , \tag{15.21}$$

справедливое при любом $x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = (1+x)^p$, $p \in \mathbb{R}$.

Поскольку $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}$, . . .,

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \tag{15.22}$$

то $f(0) = 1$, $f'(0) = p$, $f''(0) = p(p-1)$, . . . , $f^{(n)}(0) = p(p-1)\dots(p-n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, ряд Тейлора функции $(1+x)^p$ имеет вид:

$$1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \ldots . \tag{15.23}$$

Этот ряд называют *биномиальным рядом*, а его коэффициенты — *биномиальными коэффициентами*.

Заметим, что если p — целое положительное число, $p = m \in \mathbb{Z}_+$, то при $n > m$ один из множителей в правой части (15.22), именно, множитель $m - (m+1) + 1 = 0$, поэтому при $n > m$ производные $f^{(n)}(x)$ тождественно равны нулю, следовательно, все коэффициенты ряда (15.23) при $n > m$ равны нулю, то есть ряд (15.23) фактически представляет из себя конечную сумму (правую часть формулы бинома Ньютона). Так как этот случай интереса не представляет, то в дальнейшем будем считать, что $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$, то есть p не является целым положительным числом.

Найдем радиус сходимости ряда (15.23):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)|\;(n+1)!}{|p(p-1)(p-2)\dots(p-n)|\;n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|n-p|} = 1.$$

Следовательно, биномиальный ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$, а при $|x| > 1$ расходится.

Мы не рассматриваем вопрос о сходимости биномиального ряда на концах интервала сходимости, а лишь приведем без доказательства следующую таблицу:

$x = 1$	$p \le -1$	расходится
	$-1 < p < 0$	сходится условно
	$p > 0$	сходится абсолютно
$x = -1$	$p < 0$	расходится
	$p > 0$	сходится абсолютно

Теперь, применяя теорему 15.10, покажем, что сумма ряда (15.23) в интервале $(-1, 1)$ равна $(1+x)^p$. Формула Маклорена функции $(1+x)^p$ имеет вид

$$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Для исследования остаточного члена R_n представим его в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$
$$= \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!}x^n \cdot px \cdot (1+\theta x)^{p-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Выражение

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!}x^n$$

представляет собой общий член биномиального ряда, отвечающего показателю $p-1$, а так как при $|x|<1$ биномиальный ряд сходится, каков бы ни был показатель, то это выражение при $n\to\infty$ стремится к нулю. А поскольку при $x\in(-1,1)$

$$\left|px(1+\theta x)^{p-1}\right| \leq |p|\, 2^{p-1}, \quad 0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,$$

то при каждом $x\in(-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Таким образом, по теореме 15.10, в интервале $(-1,1)$

$$(1+x)^p = 1+\frac{p}{1!}x+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ . \tag{15.24}$$

Поведение ряда на концах интервала $(-1,1)$ указано в вышеприведенной таблице.

5) $f(x)=\ln(1+x)$.

В (15.24) положим $p=-1$. Имеем:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\ . \tag{15.25}$$

Возьмём любое $x\in(-1;1)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства по отрезку $[0;x]$. По теореме 15.6 интегрирование справа можно произвести почленно. Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int\limits_0^x \left(1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^n+\ldots\right)dt,$$

или

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\ .$$

Заменив в последнем равенстве $n+1$ на n, для любого $x\in(-1;1)$ получим окончательно:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ . \tag{15.26}$$

Так как ряд в правой части (15.26) сходится и при $x=1$, то по второй теореме Абеля (теорема 15.8) равенство (15.26) справедливо и при $x=1$. Следовательно, формула (15.26) имеет место для любого $x\in(-1;1]$.

6) $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

Заменим в (15.25) x на t^2. Получим равенство

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots\ ,$$

справедливое для любого $t\in(-1;1)$. Проинтегрируем его по отрезку $[0;x]$, где $x\in(-1;1)$ — любое. Получим:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ ,$$

или, после замены n на $n-1$,

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\ . \tag{15.27}$$

Так как ряд, стоящий в этой формуле справа, сходится и при $x=\pm1$, то в силу второй теоремы Абеля формула (15.27) справедлива для любого $x\in[-1;1]$.

15.4 Элементарные функции от комплексного аргумента

Определить элементарные функции комплексной переменной можно несколькими различными способами. Мы воспользуемся идеей, принадлежащей К. Вейерштрассу, и определим показательную, тригонометрические и гиперболические функции с помощью степенных рядов.

Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

Выше мы получили формулы (15.18) — (15.21), представляющие показательную и тригонометрические функции как суммы степенных рядов. Эти формулы справедливы для любого вещественного x. Поэтому, в силу первой теоремы Абеля (теорема 15.1), если заменить в них вещественное x на комплексное z, то ряды будут сходиться на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Положим по определению для любого $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ , \tag{15.28}$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ , \tag{15.29}$$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ . \tag{15.30}$$

Формулами (15.28) — (15.30) показательная и тригонометрические функции естественным образом продолжаются с вещественной оси на всю комплексную плоскость. Изучим некоторые их свойства.

Для начала заметим, что функция $\cos z$ сохраняет на комплексной плоскости свойство чётности, а $\sin z$ — нечётности.

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\cos z$ и $\sin z$ существует тесная связь. Подставим в (15.28) iz вместо z и сгруппируем отдельно в полученном ряде все слагаемые, содержащие множитель i, и отдельно — не содержащие множителя i:

$$\begin{gathered} e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \ldots + \frac{i^n z^n}{n!} + \ldots = \\ = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \\ = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots\right). \end{gathered}$$

Сравнивая полученный результат с формулами (15.29) и (15.30), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{15.31}$$

Далее, подставляя в (15.31) $-z$ вместо z, получаем

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{15.32}$$

Формулы (15.31) и (15.32) называются *формулами Эйлера*. Они устанавливают связь между показательной и тригонометрическими функциями комплексной переменной z. Если почленно сложим и вычтем равенства (15.31) и (15.32), то получим другую запись тех же формул Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ . \tag{15.33}$$

Из формул (15.33) вытекает, что $\cos z$ и $\sin z$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ могут принимать сколь угодно большие по модулю значения. Например,

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \;\to\; +\infty.$$

при $x \to \pm\infty$.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ остается справедливым основное тригонометрическое тождество. Для доказательства возведём в квадрат и сложим равенства (15.33). Тогда

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}\right) = 1.$$

Аналогично получаются и другие тригонометрические формулы в пространстве $\mathbb{C}$. Например, правило для косинуса суммы следует из равенства

$$\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}.$$

Отсюда

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 + z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Определим теперь гиперболические функции комплексного переменного, положив для каждого $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \tag{15.34}$$

$$\mathrm{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \tag{15.35}$$

Очевидно, что ряды, стоящие в правых частях (15.34) и (15.35), абсолютно сходятся на всей комплексной плоскости.

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{ch} z + \mathrm{sh} z = e^z, \quad e^{-z} = \mathrm{ch} z - \mathrm{sh} z.$$

Отсюда выводим

$$\mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Полагая в (15.34) и (15.35) iz вместо z, получим

$$\mathrm{ch}(iz) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos z,$$

$$\mathrm{sh}(iz) = i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) = i \sin z.$$

Из этих равенств получаем, что тригонометрические и гиперболические функции связаны соотношениями

$$\cos(iz) = \mathrm{ch} z, \quad \mathrm{ch}(iz) = \cos z, \quad \sin(iz) = i\,\mathrm{sh} z, \quad \mathrm{sh}(iz) = i \sin z.$$

Используя эти соотношения, нетрудно показать, что гиперболические функции обладают свойствами, во многом подобными свойствам тригонометрических функций. Так, основное тождество для тригонометрических функций выглядит следующим образом:

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1;$$

теоремы сложения:

$$\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch}z_1\operatorname{ch}z_2+\operatorname{sh}z_1\operatorname{sh}z_2,\quad \operatorname{sh}(z_1+z_2)=\sin z_1\operatorname{ch}z_2+\operatorname{ch}z_1\operatorname{sh}z_2;$$

формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{ch}(2z)=\operatorname{ch}^2z+\operatorname{sh}^2z,\quad \operatorname{sh}(2z)=2\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z;$$

и так далее.

Покажем, что основное свойство показательной функции, выражаемое формулой

$$e^{x+y}=e^xe^y\quad \forall x,y\in\mathbb{R},$$

остаётся в силе и для комплексных значений аргументов.

Теорема 15.11. *Для всех $u,v\in\mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$e^{u+v}=e^ue^v.$$

Доказательство. Ряд (15.28) абсолютно сходится при всех $z\in\mathbb{C}$ к сумме e^z. Следовательно, по теореме Коши (теорема 13.23) о произведении абсолютно сходящихся рядов,

$$e^ue^v=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{v^l}{l!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{u^kv^l}{k!\,l!}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковой суммой показателей $k+l=n$. Очевидно, n будет изменяться от 0 до $+\infty$. В качестве второго индекса суммирования оставим k, а $l=n-k$. Тогда

$$e^ue^v=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{u^kv^{n-k}}{k!\,(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}u^kv^{n-k}==\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u+v)^n}{n!}=e^{u+v}.$$

Здесь были использованы формула бинома Ньютона $(u+v)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^kv^{n-k}$ и формула вычисления биномиальных коэффициентов $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. ∎

Следствие 15.4. *Если $z=x+iy$, где x и $y\in\mathbb{R}$, то*

$$e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right).\tag{15.36}$$

Доказательство. Действительно, применяя формулу (15.31), выводим

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right).$$

∎

Поскольку $e^x>0$ при любом $x\in\mathbb{R}$, а $\cos y$ и $\sin y$ одновременно в нуль не обращаются, то из (15.36) следует, что e^z отлично от нуля при любом комплексном z.

Следствие 15.5. *Функция e^z является $2\pi i$-периодической.*

Доказательство. В самом деле,

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z\left(\cos\left(2\pi\right)+i\sin\left(2\pi\right)\right)=e^z.$$

∎

Логарифмическая функция

Возьмем любое, отличное от нуля, комплексное число w и найдем число z, удовлетворяющее уравнению:

$$e^z = w \tag{15.37}$$

(как отмечено раньше, при $w = 0$ это уравнение решений не имеет). Такое число z называется *натуральным логарифмом* и обозначается символом

$$z = \operatorname{Ln} w.$$

Представим w в тригонометрической, а z — в алгебраической форме, то есть в виде

$$w = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \qquad z = x + iy.$$

Тогда, ввиду (15.36), уравнение (15.37) распадается на такие:

$$e^x = r, \quad \cos y = \cos\varphi, \quad \sin y = \sin\varphi,$$

откуда находим

$$x = \ln r, \quad y = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что логарифм числа w (при $w \neq 0$) существует и определяется формулой

$$\operatorname{Ln} w = \ln|w| + i\cdot\arg w + 2\pi k i = \ln|w| + i\cdot\operatorname{Arg} w.$$

Таким образом, логарифмическая функция является *многозначной*. При $k = 0$ получаем так называемое *главное значение логарифма*:

$$\ln\ w = \ln|w| + i\cdot\arg w,$$

при этом считается, что его мнимая составляющая $\arg w$ содержится в полуинтервале $(-\pi;\pi]$ или же в полуинтервале $[0;2\pi)$.

Степенная функция

Пусть z и p — два комплексных числа, причем $z \neq 0$. Определим z^p, полагая

$$z^p := e^{p\operatorname{Ln}\, z} = e^{p(\ln z + 2\pi k i)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что в общем случае степень z^p оказывается *многозначной*. При $k = 0$ получается так называемое *главное значение степени* $e^{p\ln z}$.

Из определения степени z^p следует, что если $p \in \mathbb{Z}$, то множитель $e^{2p\pi k i}$ равен единице. В этом случае степень z^p будет иметь лишь одно значение: $e^{p\ln z}$.

Когда p есть несократимая рациональная дробь $\dfrac{l}{m}$ $(m > 1)$, то степень будет иметь ровно m различных значений:

$$e^{\frac{l}{m}\ln z + \frac{2kl\pi i}{m}}, \quad k = 0, 1,\ \ldots\ , m-1.$$

В частности, $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ имеет два различных значения, отличающиеся друг от друга на множитель $e^{\pi i} = -1$, то есть отличающиеся друг от друга только знаком.

При всех остальных значениях p степень z^p будет иметь бесконечное множество значений.

Обратные тригонометрические функции

Обратимся теперь к решению уравнения $\sin z = w$, которое, ввиду формулы Эйлера (15.33), принимает вид $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$ или

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0.$$

Отсюда находим, сначала решая квадратное уравнение относительно e^{iz}

$$e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2},$$

а затем логарифмируя обе части последнего равенства

$$z = \mathrm{Arcsin} w = -i \mathrm{Ln}\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right).$$

Поскольку логарифмическая функция многозначна, то и функция $\mathrm{Arcsin} w$ так же многозначна.

Аналогично, решая уравнение $\cos z = w$ относительно z, находим

$$z = \mathrm{Arccos} w = -i \mathrm{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right).$$

Функция $\mathrm{Arccos} w$ так же является многозначной.

15.5 Аппроксимация непрерывных функций

Аппроксимация (латинское approximare - приближаться) — замена одних (математических) объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более известных объектов. Некоторые разделы математики в сущности целиком посвящены аппроксимации, например, теория приближения функций.

Аппроксимация непрерывной функции алгебраическими полиномами

Классическим результатом этой теории является результат Вейерштрасса, установленный им в 1885 году.

Теорема 15.12. *Если $f \in C[a, b]$, то существует последовательность (алгебраических) многочленов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $P_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.*

Из утверждения $P_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен P_n, с которым оценка

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется сразу для всех $x \in [a, b]$. Поэтому теорему Вейерштрасса можно сформулировать так: *непрерывную на сегменте функцию f можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью ε.*

Доказательство. Поскольку сегмент $[a, b]$ линейной заменой $t = \dfrac{x - a}{b - a}$ преобразуется в сегмент $[0, 1]$, то, не ограничивая общности, вместо сегмента $[a, b]$ можно рассматривать сегмент $[0, 1]$.

Кроме этого, достаточно доказать теорему для функции f, непрерывной на $[0,1]$ и обращающейся в нуль на концах этого сегмента, то есть удовлетворяющей условиям

$$f(0)=0, \quad f(1)=0. \tag{15.38}$$

Действительно, если функции f не удовлетворяет условиям (15.38), введем вспомогательную функцию $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, полагая

$$g(x)=f(x)-f(0)-x\big(f(1)-f(0)\big).$$

Очевидно, что функция g непрерывна на сегменте $[0,1]$ и обращается в нуль на его концах. А так как функции f и g отличаются друг от друга на многочлен $f(0)+x\,(f(1)-f(0))$, то из справедливости теоремы для функции g вытекает ее справедливость и для функции f.

Итак, пусть функция $f\in C[0,1]$ и удовлетворяет условиям (15.38). Продолжим функцию f на всю числовую ось $\mathbb{R}$, полагая ее равной нулю вне сегмента $[0,1]$. Заметим, что непрерывность функции f на сегменте $[0,1]$ влечет ее ограниченность на этом сегменте, а следовательно, и на всей вещественной оси. Это означает, что существует положительная постоянная M такая, что для всех $x\in\mathbb{R}$

$$|f\,(x)|\le M. \tag{15.39}$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность многочленов (Q_n), полагая

$$Q_n(x)=c_n\big(1-x^2\big)^n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{15.40}$$

У каждого из многочленов Q_n коэффициент c_n выбран так, что выполняется равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx=1, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{15.41}$$

Не вычисляя точного значения постоянной c_n, оценим её сверху.

Заметим, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и любого $x\in[0,1]$ справедливо неравенство

$$\big(1-x^2\big)^n\ge 1-nx^2. \tag{15.42}$$

Это следует, например, из того, что функция

$$\varphi(x)=\big(1-x^2\big)^n-1+nx^2, \quad x\in[0,1],$$

не убывает на сегменте $[0,1]$ и $\varphi(0)=0$. Применяя неравенство (15.42) и учитывая, что $\sqrt{n}\ge 1$, выводим оценку

$$\int\limits_{-1}^{1}\big(1-x^2\big)^n dx=2\int\limits_{0}^{1}\big(1-x^2\big)^n dx\ge 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\big(1-x^2\big)^n dx\ge$$

$$\ge 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(1-nx^2\right)\,dx=2\left(x-n\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{15.43}$$

Из (15.40), (15.41) и (15.43) заключаем, что

$$c_n<\sqrt{n}. \tag{15.44}$$

Теперь на сегменте $[0,1]$ определим последовательность многочленов (P_n) по правилу

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt. \tag{15.45}$$

Убедимся прежде всего, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция P_n действительно есть многочлен степени $2n$. В результате замены $\tau = x + t$ в интеграле (15.45), имеем

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau. \tag{15.46}$$

Представим интеграл (15.46) в следующем виде

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{0} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau + \int_{0}^{1} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau + \int_{1}^{x+1} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau.$$

Отсюда, учитывая что $x-1 \le 0$, $x+1 \ge 1$ и функция f за пределами сегмента $[0,1]$ равна нулю, получаем

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau. \tag{15.47}$$

Из определения (15.40) последовательности многочленов (Q_n) видно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция Q_n есть многочлен степени $2n$. Поэтому, ввиду представления (15.47), для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $P_n(x)$ также является многочленом степени $2n$ относительно x.

Докажем, что последовательность (P_n) равномерно сходится на сегменте $[0,1]$ к функции f, то есть является искомой последовательностью полиномов.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Кантора о равномерной непрерывности функция f равномерно непрерывна на сегменте $[0,1]$. А поскольку вне сегмента $[0,1]$ эта функция равна нулю, то она равномерно непрерывна и на $\mathbb{R}$. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x', x'' \in \mathbb{R} \ : \ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15.48}$$

Из оценки (15.44) следует, что для всех $x \in [\delta, 1]$ справедливо неравенство

$$0 \le Q_n(x) \le \sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n. \tag{15.49}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n = 0,$$

то оценка (15.49) означает, что $Q_n \overset{[\delta,1]}{\rightrightarrows} 0$. Поэтому

$$\exists m \ : \ \forall n \ge m \ \forall x \in [\delta, 1] \implies Q_n(x) < \frac{\varepsilon}{8M}. \tag{15.50}$$

Возьмем произвольный номер $n \geq m$ и любой $x \in [0,1]$. Ввиду (15.45) и (15.41) имеем

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,dt - f(x)\int\limits_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, Q_n(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt + \int\limits_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt. \quad (15.51)$$

Используя (15.39), (15.48), (15.50) и (15.41) , получаем оценки

$$\int\limits_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt \leq 2M \int\limits_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt = 2M \int\limits_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int\limits_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,dt \leq 2M \int\limits_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Применяя эти оценки в (15.51), получаем

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Это как раз и означает, что $P_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$. Теорема доказана. ■

Определение 15.5. *Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется плотным в множестве B, если его замыкание $\overline{A}$ содержит множество B, то есть $\overline{A} \supset B$. В частности, множество A называется всюду плотным (в пространстве X), если его замыкание $\overline{A}$ совпадает со всем пространством X.*

Пусть $P[a,b]$ обозначает совокупность всех алгебраических многочленов определенных на сегменте $[a,b]$. Теорема Вейерштрасса 15.12 утверждает, что *множество $P[a,b]$ всюду плотно в пространстве $C[a,b]$.*

Определение 15.6. *Множество A называется полным в линейном нормированном пространстве X, если совокупность всех конечных линейных комбинаций элементов из A всюду плотна в X.*

Таким образом, теорема Вейерштрасса 15.12 гласит: *система степеней*

$$\left\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots\ x^n,\ \ldots\right\}$$

полна в пространстве $C[a,b]$.

Аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими полиномами

Здесь мы установим важную теорему о равномерном приближении непрерывной функции так называемыми тригонометрическими многочленами.

Определение 15.7. *Последовательность функций*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{15.52}$$

называют тригонометрической системой.

Определение 15.8. *Тригонометрическим многочленом порядка n называют каждую линейную комбинацию первых $2n+1$ элементов тригонометрической системы (15.52), то есть выражение вида*

$$T(x) = \overline{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \sin kx \right),$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $\overline{C}_k$, $\overline{\overline{C}}_k \in \mathbb{R}$.

Отметим, что поскольку все элементы тригонометрической системы являются периодическими функциями с периодом 2π, каждый тригонометрический многочлен также является периодической функцией с периодом 2π.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два элементарных утверждения.

Предложение 15.2. *Если $P(x)$ — какой-либо алгебраический многочлен, то функции $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ являются тригонометрическими многочленами.*

Предложение 15.3. *Если T — какой-либо тригонометрический многочлен, то функции $T(x)\sin x$ и $T(x)\sin^2 x$ также являются тригонометрическими многочленами.*

Оба утверждения вытекают из того, что при любых r и $s \in \mathbb{Z}_+$ произведение $\cos^r x \sin^s x$ приводится к линейной комбинации конечного числа элементов тригонометрической системы (15.52).

Теорема 15.13. (**Вейерштрасс**) *Функцию f непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющую условию $f(-\pi) = f(\pi)$ можно на указанном сегменте равномерно с любой точностью приблизить тригонометрическим многочленом, то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно найти тригонометрический многочлен T такой, что при всех $x \in [-\pi; \pi]$*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на две части. Сначала докажем утверждение теоремы для четной, а затем для произвольной функции.

1°. Пусть функция f является четной. Определим на сегменте $[-1, 1]$ вспомогательную функцию F по правилу $F(t) = f(\arccos t)$. По теореме о непрерывности сложной функции, функция F непрерывна на сегменте $[-1; 1]$. Следовательно, по теореме 15.12 для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен P такой, что для всех $t \in [-1; 1]$

$$|F(t) - P(t)| = |f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon. \tag{15.53}$$

Поскольку функция $\arccos t$, рассматриваемая на сегменте $[-1, 1]$, является функцией, обратной функции $\cos x$, рассматриваемой на сегменте $[0, \pi]$, то, положив в (15.53) $t = \cos x$, получим

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \tag{15.54}$$

для всех $x \in [0, \pi]$.

Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство (15.54) справедливо и для всех $x \in [-\pi, 0]$. Следовательно, неравенство (15.54) верно для всех $x \in$

$[-\pi, \pi]$. Но согласно предложению 15.2, функция $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом. Таким образом, для четной функции f теорема доказана.

Продолжим теперь функцию f периодически с периодом 2π на всю вещественную ось $\mathbb{R}$ так чтобы продолженная функция f была непрерывной на $\mathbb{R}$ (это возможно сделать поскольку по условию теоремы функция f непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах равные значения). Учитывая 2π-периодичность тригонометрических многочленов, заключаем, что неравенство (15.54) справедливо на всей вещественной оси $\mathbb{R}$.

2°. Пусть теперь f — любая функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Эту функцию периодически с периодом 2π продолжим на всю вещественную ось и определим на $\mathbb{R}$ две четные функции:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x. \tag{15.55}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Как доказано в пункте 1°, найдутся тригонометрические многочлены T_1 и T_2 такие, что

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{15.56}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть T_3 — тригонометрический многочлен, заданный равенством

$$T_3(x) = T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x.$$

Используя оценки (15.56), формулы (15.55) и учитывая, что $|\sin x| \leq 1$, выводим оценку

$$\begin{aligned} \left|f(x)\sin^2 x - T_3(x)\right| &= \left|\left(f_1(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x\right) + \left(f_2(x)\sin x - T_2(x)\sin x\right)\right| \leq \\ &\leq \left|f_1(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x\right| + \left|f_2(x)\sin x - T_2(x)\sin x\right| = \\ &= |f_1(x) - T_1(x)| \cdot \left|\sin^2 x\right| + |f_2(x) - T_2(x)| \cdot |\sin x| \leq \\ &\leq |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{15.57}$$

Очевидно, что функция $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15.58}$$

на сегменте $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы. Следовательно, согласно доказанному, найдется тригонометрический многочлен T_4 такой, что

$$\left|g(x)\sin^2 x - T_4(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заменяя здесь x на $x - \dfrac{\pi}{2}$ и обозначая через T_5 тригонометрический многочлен, заданный равенством $T_5(x) = T_4\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, получаем

$$\left|g\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - T_5(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, учитывая (15.58) и равенство $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$, выводим

$$\left|f(x)\cos^2 x - T_5(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15.59}$$

Используя оценки (15.57), (15.59) и полагая $T(x) = T_3(x) + T_5(x)$, получаем

$$|f(x) - T(x)| \leq \left|f(x)\sin^2 x - T_3(x)\right| + \left|f(x)\cos^2 x - T_5(x)\right| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R},$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Заметим, что непрерывность функции f на сегменте $[-\pi, \pi]$ и равенство ее значений на концах этого сегмента являются не только достаточными, но и необходимыми условиями для равномерного на сегменте $[-\pi, \pi]$ приближения функции f тригонометрическими многочленами.

Теорема 15.14. *Для того чтобы функцию $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ можно было равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция f была непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Доказательство. Достаточность показана в теореме 15.13.
Необходимость. Пусть последовательность тригонометрических многочленов (T_n) равномерно сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ к функции f. Так как все члены этой последовательности непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$, по следствию 14.5 из теоремы 14.8 о почленном переходе к пределу функция f непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $T_n \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f$, найдется многочлен T_n такой, что

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Поэтому

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь, учитывая, что $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$, выводим

$$|f(-\pi) - f(\pi)| \leq |f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности выбора числа ε, следует равенство $f(-\pi) = f(\pi)$. ■

15.6 Задачи

1. Доказать, что если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на $[a; b]$, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$.

2. Пусть члены ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ суть монотонные на $[a; b]$ функции и ряд сходится абсолютно в концевых точках сегмента $[a; b]$. Тогда он сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a; b]$. Доказать.

3. Если функции f_n $(n \in \mathbb{N})$ монотонны на $[a; b]$ и последовательность $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в концевых точках сегмента $[a; b]$, то она не обязательно сходится равномерно на сегменте $[a; b]$. Показать.

4. Если последовательность $\Big(f_n(x)\Big)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\text{ряд} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$ сходится равномерно на множествах X_1 и X_2, то она (он) равномерно сходится и на множестве $X = X_1 \cup X_2$. Доказать.

5. Если последовательность $\Big(f_n(x)\Big)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\text{ ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$ сходится равномерно на множестве X_1, а последовательность $\Big(g_n(x)\Big)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\text{ ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)$ сходится равномерно на множестве X_2, то последовательность $\Big(f_n(x)+g_n(x)\Big)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\text{ ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n(x)+v_n(x))\right)$ сходится равномерно на множестве $X = X_1 \cap X_2$. Доказать.

6. Если последовательности $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ и $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся равномерно на множестве X к одной и той же функции $f(x)$, то последовательность
$$f_n(x) = \begin{cases} u_k(x), & n = 2k-1 \\ v_k(x), & n = 2k \end{cases}$$
сходится равномерно на X. Доказать.

7. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geq 0$. Доказать.

8. Доказать, что ряд $x^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(x^{2n} - x^{2n-2}\right)$, членами которого являются непрерывные всюду функции, на сегменте $[-1, 1]$ сходится, но его сумма $S(x)$ разрывна.

9. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$, членами которого являются непрерывные всюду функции, на сегменте $[0, 1]$ сходится, но его сумма $S(x)$ разрывна.

10. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n + x}$ в интервале $(-3, +\infty)$ имеет непрерывную сумму.

11. Доказать непрерывность суммы функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt[4]{n^5 + x^6}}$ на всей числовой оси.

12. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную в $\mathbb{R}$, если:
$$a)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3};\quad b)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^3};\quad c)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(nx^2+1\right)}{n^2\sqrt{n}};$$
$$d)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^4};\quad e)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(n^2x^4+27\right)}{n^2}.$$

13. Можно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$ дифференцировать в интервале $(-1; 1)$?

14. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, но его нельзя дифференцировать ни в каком интервале.

15. Пусть функция f имеет непрерывную производную в $(a;b)$ и

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Доказать, что $f_n(x)$ равномерно сходится к $f'(x)$ на любом сегменте $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$.

Указание. Нужно помнить о равномерной непрерывности f' на $[\alpha;\beta]$ и применить теорему Лагранжа к функции f.

16. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2}$ непрерывна на всей числовой оси, и вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

17. Доказать, что функция f непрерывна на всей числовой оси, и вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$, если:

$$a)\quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)^2 + x^2}; \quad b)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + x^2};$$

$$c)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{4^n + (2n-1)^2 x^2}; \quad d)\quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2 + x^2};$$

$$e)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(2n+1)^2 + x^2}; \quad f)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(2n+1)^2 + x^2};$$

$$g)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 9^n + x^2}; \quad h)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2 + x^2}.$$

18. Доказать следующие равенства. Выяснить, при каких значениях x они имеют место:

$$a)\quad \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x-4)^n; \quad b)\quad \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n.$$

19. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ и определить радиус сходимости полученного ряда.

20. Представить интеграл $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ в виде ряда.

21. Следующие функции разложить по степеням указанных выражений:

$$a)\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x}; \quad b)\quad \ln x, \quad \frac{1-x}{1+x};$$

$$c)\quad f(x) = x, \quad \sin x; \qquad d)\quad \ln|\sin x|, \quad \cos(2x).$$

22. Не производя разложения функции $f(x) = \ln(1+8x^3)$ в ряд Тейлора по степеням x, указать область сходимости этого ряда к $f(x)$.

23. Не производя разложения функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ в ряд Тейлора по степеням $x-4$, указать интервал сходимости этого ряда к $f(x)$.

24. Найти значение производной семьдесят шестого порядка функции $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$ в точке $x=-1$.

25. Найти значение производной сто семьдесят первого порядка функции $f(x) = x^5 \cos\dfrac{x}{2}$ в точке $x=0$.

26. Найти значение производной двести семьдесят второго порядка функции $f(x) = x^3 \cos\dfrac{x^2}{3}$ в точке $x=0$.

27. Найти значение производной пятьдесят второго порядка функции $f(x) = \ln\left(1+5x^5\right)$ в точке $x=0$.

28. Найти значение производной сто двадцать четвёртого порядка функции $f(x) = x^7 \sin x$ в точке $x=0$.

29. Найти значение производной пятого порядка функции $f(x) = (x-1)^2 \ln x$ в точке $x=1$.

30. Найти значение производной двадцатого порядка функции $f(x) = x^2 e^{2x}$ в точке $x=1$.

16 Объем тела и кратные интегралы

Задача вычисления площади криволинейной трапеции и задача вычисления массы неоднородного стержня по известной линейной плотности этого стержня — наиболее типичные задачи, приводящие к понятию *"однократного"* определенного интеграла.

Существует много задач, аналогичных названным, но относящихся к функциям не одной, а нескольких переменных, которые приводят к понятию n-кратного интеграла (двойного, тройного, и т.д.).

Примеры задач, приводящих к понятию двойного и тройного интеграла

Задача о вычислении объема

Одной из таких геометрических задач является задача нахождения объема криволинейного цилиндра (трехмерный аналог криволинейной трапеции).

Под криволинейным цилиндром с основанием F, лежащим в плоскости xOy, понимается тело T, ограниченное этим основанием, некоторой поверхностью $z = f(x,y)$ и боковой цилиндрической поверхностью (рис. 32). Объем такого тела естественно искать следующим образом. Разобьем основание F сетью кривых на конечное множество ячеек F_i; тогда весь цилиндр T разобьется на «цилиндрические столбики» T_i, основанием которых служат ячейки F_i. Естественно объем цилиндра T следует считать равным сумме объемов составляющих его столбиков T_i.

Для приближенного вычисления объема столбика T_i выберем в F_i какую-нибудь точку (ξ_i, η_i) и заменим цилиндрический столбик T_i с «кривым» верхним основанием цилиндром

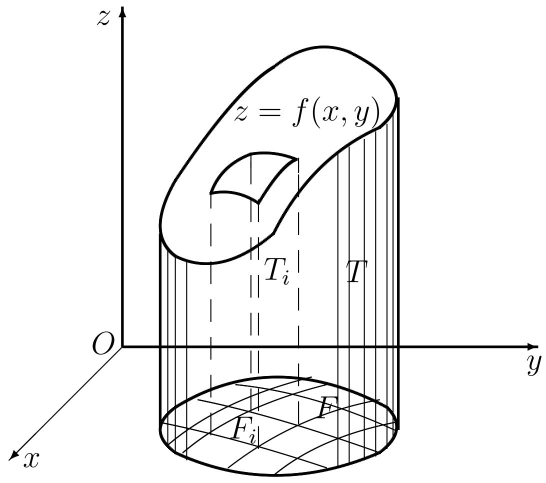

Рис. 32: Криволинейный цилиндр

с высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$, и тем же основанием F_i. Иначе говоря, объем столбика T_i приближенно положим равным $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i$, где Δs_i — площадь ячейки F_i. А за приближенное значение объема всего цилиндра T примем сумму

$$\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i, \tag{16.1}$$

взятую по всем ячейкам, на которые разбито основание F. Интуитивно ясно, что сумма (16.1) будет представлять объем цилиндра T с точностью тем большей, чем меньше размеры ячеек F_i. Для получения точного значения объема нужно в выражении (16.1) перейти к пределу, неограничено уменьшая размеры ячеек F_i.

Этот предельный переход и приведет нас к понятию интеграла от функции $f(x, y)$ двух независимых переменных — так называемому *двойному интегралу*.

Помимо этой задачи существует много других задач, также приводящих к понятию двойного интеграла. Кроме этого, имеется множество физических и геометрических задач, связанных с понятием интеграла от функций трех и большего числа переменных.

Задача о вычислении массы неоднородного тела

Задача вычисления массы неоднородного тела T по известной объемной плотности $\rho(x, y, z)$ этого тела приводит к понятию тройного интеграла.

Для вычисления массы тела разобьем его на конечное множество «достаточно малых тел» $T_1, T_2, \ldots, T_l$. Приближенно можно считать объемную плотность каждого тела T_i постоянной и равной $\rho\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, где (ξ_i, η_i, ζ_i) — некоторая точка тела T_i. Поэтому масса тела T_i будет приближенно равна $\rho\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\ \Delta v_i$, где Δv_i — объем тела T_i. Приближенное значение массы всего тела T будет равно

$$\sum_{i=1}^{l} \rho\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\ \Delta v_i. \tag{16.2}$$

Точное значение массы тела T естественно определить как предел суммы (16.2) при "неограниченном уменьшении" тел T_i. Этот предел и будет интегралом от функции $\rho(x, y, z)$ трех независимых переменных, то есть *тройным интегралом*.

Изложение теории кратных интегралов начнем с описания необходимых в дальнейшем основополагающих понятий — понятия тела и понятия объема тела.

16.1 Тело и его объем

Пусть $a^{(k)} = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ — произвольные элементы (векторы) n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Эти векторы определяют n-мерный параллелепипед Π, для которого они служат ребрами, выходящими из одной вершины.

Примером n-мерного параллелепипеда является шар в $\mathbb{R}^n$ в метрике

$$\rho_1(x, y) = \max\left\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, который, как обычно, мы будем называть n-мерным кубом или просто кубом.

Как известно, объем параллелепипеда может быть вычислен по формуле

$$V\left(\Pi\right) = \mathtt{abs}\det\left(a_{ij}\right) = \mathtt{abs}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{16.3}$$

Рассмотрим n-мерную пирамиду, боковыми ребрами которой являются n векторов $a^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а основанием $(n-1)$-мерная пирамида, вершинами которой являются концы данных векторов. Эту пирамиду называют n-мерным симплексом. Можно показать, что объем описанного симплекса S вычисляется по формула

$$V\left(S\right) = \frac{1}{n!}V\left(\Pi\right) = \frac{1}{n!}\mathtt{abs}\det\left(a_{ij}\right).$$

Заметим, что объем n-мерного параллелепипеда (и n-мерного симплекса) не зависит от выбранного в $\mathbb{R}^n$ ортонормированного базиса, поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому сводится к параллельному переносу, при котором матрица (a_{ij}) не изменяется, и ортогональному преобразованию, при котором она умножается на ортогональную матрицу, модуль определителя которой равен единице.

Определение 16.1. *Многогранником называют любое множество в $\mathbb{R}^n$, которое можно представить в виде конечного объединения n-мерных симплексов, не имеющих попарно общих внутренних точек.*

Примеры многогранников приведены на рисунке 33.

Итак, если P — многогранник, то

$$P = \bigcup_{j=1}^{m} S_j, \tag{16.4}$$

причем $\mathrm{int}S_j \cap \mathrm{int}S_k = \varnothing$ при $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 16.2. *Объемом многогранника называют сумму объемов составляющих его симплексов.*

Таким образом, если многогранник P имеет представление (16.4), то

$$V\left(P\right) = \sum_{j=1}^{m} V\left(S_j\right). \tag{16.5}$$

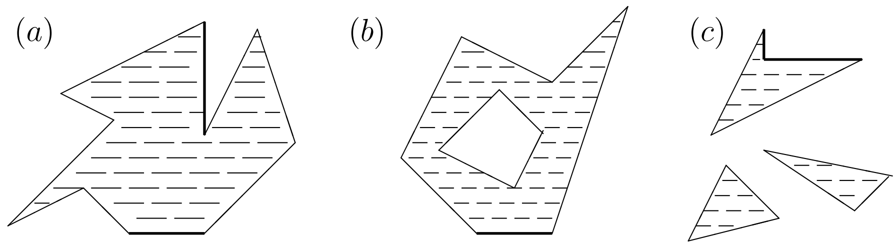

Рис. 33: Многогранники в $\mathbb{R}^2$

Объем многогранника обладает следующими свойствами:

1) (неотрицательность) $V(P) \geq 0$ для любого многогранника P;

2) (аддитивность) если многогранники P_1 и P_2 не имеют общих внутренних точек, то $V(P_1 \cup P_2) = V(P_1) + V(P_2)$;

3) (монотонность) если $P_1 \subset P_2$, то $V(P_1) \leq V(P_2)$;

4) (инвариантность) если многогранники P_1 и P_2 конгруэнтны, то $V(P_1) = V(P_2)$.

Свойства 1 и 4 очевидны, а свойства 2 и 3 при $n = 2, 3$ известны, а при $n > 3$ примем без доказательства (сложности в их доказательстве — чисто алгебраические).

Договоримся считать пустое множество (вырожденным) многогранником, объем которого равен нулю.

Определение 16.3. *Связное множество называется конечносвязным, если его граница состоит из конечного числа связных компонент.*

Определение 16.4. *Ограниченное конечносвязное множество в $\mathbb{R}^n$ называется телом.*

Напомним, что ограниченность множества в $\mathbb{R}^n$ означает существование куба, содержащего данное множество.

Возьмем произвольное тело G. Учитывая, что пустое множество является многогранником и $\varnothing \subset G$, в тело G всегда можно вписать хотя бы один многогранник P. Пусть K — любой куб содержащий тело G. Очевидно, что $P \subset K$. Но тогда, ввиду монотонности объема многогранника (свойство 3), справедлива оценка $V(P) \leq V(K)$. Поэтому совокупность $\{V(P) : P \subset G\}$ объемов всевозможных многогранников, вписанных в тело G ограничено сверху (например, числом $V(K)$). Следовательно, существует точная верхняя грань множества $\{V(P) : P \subset G\}$.

Определение 16.5. *Число*

$$V_*(G) = \sup\{V(P) : P \subset G\}$$

называют внутренним объемом тела G.

Рассмотрим теперь совокупность всех многогранников Q, описанных около тела G. Поскольку тело G, как ограниченное множество, содержится в некотором кубе K, а куб является многогранником, то множество многогранников, описанных около тела G не пусто. Отсюда следует, что множество $\{V(Q) : Q \supset G\}$ также не пусто. Очевидно, что это множество ограничено снизу, например, нулем. Поэтому оно имеет точную нижнюю грань.

Определение 16.6. *Число*

$$V^*(G) = \inf\{V(Q) : Q \supset G\}$$

называют внешним объемом тела G.

Лемма 16.1. *Для всякого тела G справедливо неравенство*

$$V_*(G) \leq V^*(G). \tag{16.6}$$

Доказательство. Возьмем произвольные многогранники P и Q соответственно вписанный в тело G и описанный около него. В силу монотонности объемов многогранников (свойство 3) имеем:

$$V(P) \leq V(Q).$$

Из этой оценки следует, что каков бы ни был многогранник $Q \supset G$, число $V(Q)$ является одной из верхних граней множества объемов всевозможных многогранников, вписанных в тело G. Следовательно, $V_*(G) \leq V(Q)$. А это означает, что число $V_*(G)$ есть какая-то нижняя грань множества объемов всех многогранников, описанных около тело G. Поэтому справедливо неравенство (16.6). ■

Существуют тела, для которых в (16.6) имеет место строгое неравенство. Например, для тела

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\Big(1 + D(x)\Big)\right\},$$

где $D : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ — функция Дирихле, имеем:

$$V_*(G) = \frac{1}{2}, \quad V^*(G) = 1.$$

Определение 16.7. *Тело G назовем кубируемым, если его внутренний и внешний объемы совпадают, то есть если*

$$V_*(G) = V^*(G). \tag{16.7}$$

При этом число

$$V(G) = V_*(G) = V^*(G) \tag{16.8}$$

называют объемом тела G.

Замечание 16.1. *При $n = 2$ принято употреблять термины "фигура "квадрируемая фигура" и "площадь" вместо терминов "тело "кубируемое тело "объем" и обозначать площадь фигуры буквой S или P вместо V.*

Замечание 16.2. *Связный многогранник P — кубируемое тело, ибо, очевидно, его внутренний $V_*(P)$ и внешний $V^*(P)$ объемы совпадают. Поэтому $V_*(P) = V^*(P) = V(P)$, где $V(P)$ определяется формулой (16.5). Таким образом, для связного многогранника объем, определяемый формулами (16.5) и (16.8), одинаков.*

Теорема 16.1. (**Первый критерий кубируемости**) *Тело G кубируемо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два многогранника $P \subset G$ и $Q \supset G$ такие, что*

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon. \tag{16.9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть G — кубируемое тело. Тогда, по определению 16.7 справедливо равенство (16.7).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определениям 16.5, 16.6 и точных граней, найдутся многогранники $P \subset G$ и $Q \supset G$ такие, что

$$V(P) > V_*(G) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad V(Q) < V^*(G) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, учитывая (16.7), получаем

$$V(Q) - V(P) < \left(V^*(G) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(V_*(G) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon,$$

и (16.9) установлено.
Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию существуют многогранники $P \subset G$ и $Q \supset G$, для объемов которых выполняется оценка (16.9). Используя теперь (16.9) и лемму 16.1, выводим

$$0 \le V^*(G) - V_*(G) \le V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Так как $V^*(G)$ и $V_*(G)$ — числа, отсюда, ввиду произвольности ε, вытекает равенство $V^*(G) - V_*(G) = 0$, то есть $V^*(G) = V_*(G)$. Согласно определению 16.7 тело G кубируемо. ■

Определение 16.8. *Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ назовем множеством нулевого объема, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется многогранник $P \supset F$ такой, что*

$$V(P) < \varepsilon. \tag{16.10}$$

Отметим два простых, но полезных в дальнейшем, свойства множеств нулевого объема.

Предложение 16.1. *Конечное объединение множеств нулевого объема есть множество нулевого объема.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — множества нулевого объема и $F = \bigcup\limits_{j=1}^{k} F_j$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению 16.8, для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ найдется многогранник $P_j \supset F_j$ такой, что

$$V(P_j) < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{16.11}$$

Положим $P = \bigcup\limits_{j=1}^{k} P_j$. Очевидно, что $F \subset P$ и $V(P) \le \sum\limits_{j=1}^{k} V(P_j)$. Отсюда, используя (16.11), получаем оценку $V(P) < \varepsilon$. По определению 16.8, множество F есть множество нулевого объема. ■

Предложение 16.2. *Любое подмножество множества нулевого объема является множеством нулевого объема.*

Доказательство. Пусть F — множество нулевого объема и $F_0 \subset F$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определения 16.8 найдется многогранник $P \supset F$ такой, что выполняется (16.10). Но так как $F_0 \subset F \subset P$, то согласно определению 16.8, множество F_0 есть множество нулевого объема. ■

Теорема 16.2. (**Второй критерий кубируемости**) *Тело G кубируемо тогда и только тогда, когда его граница ∂G есть множество нулевого объема.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — кубируемое тело. Тогда, по критерию кубируемости, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многогранники P и Q, $P \subset G \subset Q$, такие, что $V(Q) - V(P) < \varepsilon$. Будем считать многогранник P открытым, а многогранник Q замкнутым. Тогда, очевидно, $\partial G \subset Q \setminus P$. Но так как разность двух многогранников

есть многогранник и $V(Q \setminus P) = V(Q) - V(P) < \varepsilon$, то граница ∂G тела G заключена в многогранник $Q \setminus P$, объем которого меньше ε.
Достаточность. Так как граница ∂G тела G является множеством нулевого объема, для любого $\varepsilon > 0$ найдется многогранник $P' \supset \partial G$ такой, что $V(P') < \varepsilon$. Если граница $\partial P'$ многогранника P' состоит из одной связной компоненты, то P' — односвязное множество, поэтому вместе с границей тела G многогранник P' содержит и все тело G. Поэтому, полагая $Q = P'$, $P = \varnothing$, имеем $P \subset G \subset Q$ и

$$V(Q) - V(P) = V(P') - V(\varnothing) = V(P') < \varepsilon.$$

Пусть теперь граница $\partial P'$ многогранника P' состоит из нескольких связных компонент. Немного изменив, при необходимости, размеры многогранника P', можем считать, что границы ∂G тела G и $\partial P'$ многогранника P' не имеют общих точек. Выберем те из компонент границы многогранника P', которые не принадлежат телу G. Пусть Q — многогранник, границей которого служат эти компоненты, а P — многогранник, границей которого служат оставшиеся компоненты границы $\partial P'$ многогранника P'. Очевидно, что $G \subset Q$, $P \subset G$ и $Q \setminus P = P'$. Следовательно, имеем два многогранника P и Q таких, что $P \subset G \subset Q$ и

$$V(Q) - V(P) = V(Q \setminus P) = V(P') < \varepsilon.$$

Согласно первому критерию кубируемости тела (теорема 16.1), тело G является кубируемым. ■

Свойства кубируемых тел и их объемов

Непосредственно из определений 16.7, 16.5 и неотрицательности объема многогранника вытекает следующее утверждение.

Свойство 16.1. *Объем $V(G)$ любого кубируемого тела G неотрицателен.*

Свойство 16.2. *Пусть G_1 и G_2 — кубируемые тела. Если $G_1 \subset G_2$, то $V(G_1) \le V(G_2)$.*

Доказательство. Так как $G_1 \subset G_2$, то и любой многогранник P, содержащийся в G_1, содержится также и в G_2. Поэтому справедливо включение

$$\{V(P) : P \subset G_1\} \subset \{V(P) : P \subset G_2\},$$

которое влечет оценку

$$V(G_1) = V_*(G_1) = \sup\{V(P) : P \subset G_1\} \le \sup\{V(P) : P \subset G_2\} = V_*(G_2) = V(G_2),$$

и свойство установлено. ■

Свойство 16.3. *Если тело $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 — кубируемые тела, не имеющие общих внутренних точек, то G — кубируемое тело и*

$$V(G) = V(G_1) + V(G_2). \tag{16.12}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\partial G \subset \partial G_1 \cup \partial G_2. \tag{16.13}$$

Но согласно второму критерию кубируемости (теорема 16.2), границы ∂G_1 и ∂G_2 являются множествами нулевого объема.

Ввиду (16.13) и предложений 16.1, 16.2, граница ∂G тела G является множеством нулевого объема. По теореме 16.2 тело G — кубируемое.

Докажем равенство (16.12). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По первому критерию кубируемости (теорема 16.1), найдутся многогранники P_1, Q_1, $P_1 \subset G_1 \subset Q_1$, и P_2, Q_2, $P_2 \subset G_2 \subset Q_2$, такие, что

$$V(Q_1) - V(P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad V(Q_2) - V(P_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.14}$$

Образуем многогранники P и Q, полагая $P = P_1 \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. Так как тела G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то и многогранники P_1 и P_2 обладают этим же свойством. Следовательно, в силу аддитивности объемов многогранников (свойство 2), справедливо равенство

$$V(P) = V(P_1) + V(P_2). \tag{16.15}$$

А вот многогранники Q_1 и Q_2 могут иметь общую внутреннюю часть, поэтому, применяя свойства 2 и 3 объемов многогранников, получаем

$$\begin{aligned} V(Q) =& V(Q_1 \cup Q_2) = V(Q_1 \cup (Q_2 \setminus (Q_1 \cap Q_2))) = \\ =& V(Q_1) + V(Q_2 \setminus (Q_1 \cap Q_2)) \le V(Q_1) + V(Q_2). \end{aligned} \tag{16.16}$$

Поскольку $P \subset G \subset Q$, то, учитывая (16.15) и (16.16), получаем

$$V(P_1) + V(P_2) = V(P) \le V(G) \le V(Q) \le V(Q_1) + V(Q_2).$$

Отсюда и очевидных неравенств

$$V(P_1) \le V(G_1) \le V(Q_1), \qquad V(P_2) \le V(G_2) \le V(Q_2),$$

используя (16.14), выводим

$$\begin{aligned} V(G) - \Big(V(G_1) + V(G_2)\Big) \le& \Big(V(Q_1) + V(Q_2)\Big) - \Big(V(P_1) + V(P_2)\Big) = \\ =& \Big(V(Q_1) - V(P_1)\Big) + \Big(V(Q_2) - V(P_2)\Big) < \varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V(G) - \Big(V(G_1) + V(G_2)\Big) \ge& \Big(V(P_1) + V(P_2)\Big) - \Big(V(Q_1) + V(Q_2)\Big) = \\ =& -\Big(V(Q_1) - V(P_1)\Big) - \Big(V(Q_2) - V(P_2)\Big) > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Big| V(G) - \Big(V(G_1) + V(G_2)\Big) \Big| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора ε, это означает, что (16.12) выполняется. ■

Свойство 16.4. *Если тело G_2 конгруэнтно кубируемому телу G_1, то оно кубируемо и $V(G_2) = V(G_1)$.*

Это свойство очевидно.

Свойство 16.5. *Если G_1 и G_2 — кубируемые тела и $G = G_1 \cap G_2$, то G — кубируемое тело.*

Доказательство. Так как пересечение двух связных и ограниченных множеств есть связное и ограниченное множество, то G — тело.

Покажем, что
$$\partial G \subset \partial G_1 \cup \partial G_2. \tag{16.17}$$
Пусть, как обычно, CF обозначает дополнение, а $\mathrm{int}F$ — совокупность внутренних точек множества F. Возьмем произвольную точку $a \in \partial G$. Тогда $a \notin \mathrm{int}G$ и $a \notin \mathrm{int}(CG)$. Но поскольку
$$\mathrm{int}G = \mathrm{int}G_1 \cap \mathrm{int}G_2, \quad \mathrm{int}(CG) = \mathrm{int}(CG_1) \cup \mathrm{int}(CG_2),$$
то множества $\mathrm{int}(CG_1)$, $\mathrm{int}(CG_2)$ и по крайней мере одно из множеств $\mathrm{int}G_1$ и $\mathrm{int}G_2$ не содержат точки a. Поэтому, если $a \notin \mathrm{int}G_1$, то $a \in \partial G_1$ и (16.17) доказано. Если же $a \in \mathrm{int}G_1$, то $a \notin \mathrm{int}G_2$, и, следовательно, $a \in \partial G_2$. Таким образом, и в этом случае, (16.17) выполняется. Из этого включения следует, что ∂G есть множество нулевого объема, следовательно, тело G кубируемо. ■

Можно расширить понятия тела и кубируемого тела, отказавшись от требования связности.

Определение 16.9. *Назовем (несвязным) телом любое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, *состоящее из конечного числа конечносвязных компонент.*

Определение 16.10. *Несвязное тело назовем кубируемым, если каждая его компонента есть кубируемое тело. При этом объемом тела назовем сумму объемов его компонент.*

Легко проверить, что для несвязных тел сохраняются свойства 16.1 - 16.5.

Теорема 16.3. *Пусть E — компактное множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда множество (график функции f)*
$$\Gamma = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E,\ x_n = f\left(\widetilde{x}\right) \right\}$$
есть множество нулевого объема.

Доказательство. Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Так как E ограничено, найдется содержащий его куб K_0 (являющийся шаром в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с метрикой $\rho_1(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n-1\}$). Пусть V_0 обозначает объем куба K_0, а a — длину его ребра.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на компактном множестве E. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что при любых $x', x'' \in E$ и удовлетворяющих условию $\rho_1(x', x'') < \delta$, справедлива оценка
$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \frac{\varepsilon}{V_0}. \tag{16.18}$$
Подберем натуральное число m так, чтобы число $\delta_1 = \dfrac{a}{m}$ было меньше, чем δ, и разобьем каждое ребро куба K_0 на m равных частей. Тем самым куб K_0 разобьется на (замкнутые) кубики с ребром δ_1. Выберем те из них, которые имеют непустое пересечение с множеством E и занумеруем их: $K_1, K_2, \ldots, K_l$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$ множество $E \cap K_j$ компактно, а функция f непрерывна на нем. Поэтому достигаются точные грани
$$m_j = \inf\left\{f(x) : x \in E \cap K_j\right\}, \quad M_j = \sup\left\{f(x) : x \in E \cap K_j\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

то есть для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$ существуют $x^{(j)}, y^{(j)} \in E \cap K_j$ такие, что

$$f(x^{(j)}) = M_j, \quad f(y^{(j)}) = m_j. \tag{16.19}$$

А поскольку ребро куба K_j равно $\delta_1 < \delta$, то $\rho_1(x^{(j)}, y^{(j)}) < \delta$. Ввиду (16.19) и (16.18), имеем

$$M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{V_0}. \tag{16.20}$$

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$ построим параллелепипед

$$\Pi_j = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in K_j,\ m_j \leq x_n \leq M_j\}$$

и положим $P = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \Pi_j$. Очевидно, что P — многогранник и по построению $P \supset \Gamma$. Поэтому для завершения доказательства, достаточно показать, что объем $V(P)$ многогранника P меньше ε.

Используя (16.20), оценим объем многогранника P:

$$V(P) = \sum_{j=1}^{l} V(\Pi_j) = \sum_{j=1}^{l} V(K_j)(M_j - m_j) < \sum_{j=1}^{l} V(K_j)\frac{\varepsilon}{V_0} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{V_0}\sum_{j=1}^{l} V(K_j) \leq \frac{\varepsilon}{V_0} V(K_0) = \frac{\varepsilon}{V_0} V_0 = \varepsilon.$$

Теорема доказана. ■

Определение 16.11. *Пусть E — связное множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, а функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на E. Множество*

$$\Gamma = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in E,\ x_n = f(\widetilde{x})\right\}$$

(график функции f) называют поверхностью, заданной над множеством E.

Теорема 16.4. *Пусть граница тела $G \subset \mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа поверхностей, заданных над компактными множествами. Тогда G — кубируемое тело.*

Эта теорема является следствием теоремы 16.3.

Пример 16.1. *Покажем, что в $\mathbb{R}^n$ замкнутый шар*

$$\overline{B}(0, R) = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2\right\}$$

с центром в точке 0 *и радиуса R является кубируемым телом.*

Решение. Действительно, граница

$$\Gamma = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2\right\}$$

шара $\overline{B}(0, R)$ состоит из двух поверхностей

$$x_n = \pm\sqrt{R^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)},$$

заданных над множеством

$$E = \left\{\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq R^2\right\}.$$

Поскольку выполнены все условия теоремы 16.4, шар $\overline{B}(0, R)$ — кубируемое тело. ■

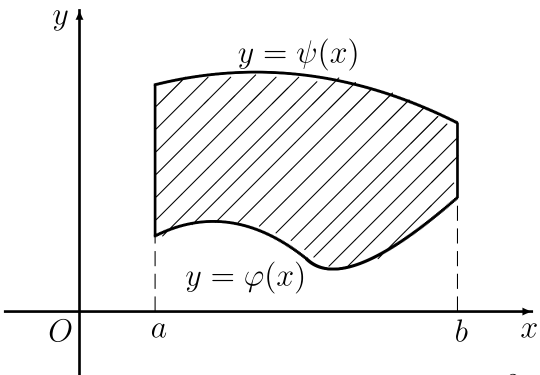

Рис. 34: Цилиндрическое тело в $\mathbb{R}^2$

Определение 16.12. *Пусть E — замкнутое тело в $\mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi, \psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем $\varphi(\widetilde{x}) \le \psi(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in E$. Множество*

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} \in E,\ \varphi(\widetilde{x}) \le x_n \le \psi(\widetilde{x})\} \tag{16.21}$$

называют цилиндрическим телом.

Если $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$, то цилиндрическое тело G является фигурой в $\mathbb{R}^2$. На рисунке 34 изображена одна из таких фигур.

Теорема 16.5. *Пусть G — цилиндрическое тело, определенное равенством (16.21). Если тело E кубируемо, то и тело G кубируемо.*

Доказательство. Граница тела G состоит из трех частей: «нижняя» и «верхняя» поверхности, заданные над телом E (графики функций φ и ψ)

$$\Gamma_\varphi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in E,\ x_n = \varphi(\widetilde{x})\},$$

$$\Gamma_\psi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in E,\ x_n = \psi(\widetilde{x})\},$$

и боковой поверхности

$$\Gamma_{\text{бок.}} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} \in \partial E,\ \varphi(\widetilde{x}) \le x_n \le \psi(\widetilde{x})\}.$$

По теореме 16.3 множества Γ_φ и Γ_ψ имеют нулевой объем. Покажем, что и боковая поверхность $\Gamma_{\text{бок.}}$ есть множество нулевого объема. Поскольку множество E ограничено и замкнуто, то есть компактно, а функции φ и ψ непрерывны на E, по первой теореме Вейерштрасса найдутся числа m и M такие, что

$$m \le \varphi(\widetilde{x}) \le \psi(\widetilde{x}) \le M \quad \text{для всех } \widetilde{x} \in E. \tag{16.22}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как E — кубируемое тело, в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ найдется многогранник $\widetilde{P} \supset \partial E$ такой, что

$$V\left(\widetilde{P}\right) < \frac{\varepsilon}{M - m}. \tag{16.23}$$

Построим многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$, полагая

$$P = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \widetilde{P},\ m \le x_n \le M\right\}.$$

Из (16.22) следует, что $P \supset \Gamma_{\text{бок.}}$. Очевидно, что $V(P) = V\left(\widetilde{P}\right)(M - m)$. Следовательно, ввиду (16.23), $V(P) < \varepsilon$. Поэтому поверхность $\Gamma_{\text{бок.}}$ является множеством нулевого объема. Таким образом, кубируемость цилиндрического тела доказана. ■

Следствие 16.1. *Криволинейная трапеция — квадрируемая фигура.*

16.2 Кратные интегралы

Известная нам теория определенного интеграла от функции одной переменной без каких-либо осложнений переносится на случай интегралов от функций нескольких переменных.

Определение 16.13. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело. Разбиением тела G называют любое его представление в виде конечного числа кубируемых тел, не имеющих попарно общих внутренних точек.*

Итак, если T разбиение тела G, то $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$, где G_k — кубируемое тело при каждом $k = 1, 2, \dots, m$, $G = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k$ и $\mathrm{int} G_k \cap \mathrm{int} G_l = \varnothing$ при $l \neq k$.

Определение 16.14. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество. Число*

$$d\,(E) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in E\}$$

называют диаметром множества E.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело и $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ — его произвольное разбиение.

Определение 16.15. *Число*

$$\Delta = \max\{d\,(G_k) : k = 1, 2, \dots, m\}$$

называют параметром разбиения T.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Фиксируем какое-либо разбиение $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ тела G. В каждом теле G_k, $k = 1, 2, \dots, m$, возьмем точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma = \sigma\,(f, T, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{m} f\,(\xi_k)\,\Delta v_k,$$

где $\Delta v_k = V\,(G_k)$.

Определение 16.16. *Сумму σ называют интегральной суммой функции f, отвечающей данному разбиению T и данному выбору точек ξ_k, $k = 1, 2, \dots, m$.*

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм функции f, отвечающих всевозможным разбиениям тела G и любым наборам точек ξ_k.

Определение 16.17. *Число I называют пределом интегральных сумм σ при условии, что параметр разбиения $\Delta \to 0$,*

$$I = \lim_{\Delta \to 0} \sigma,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении T тела G с параметром разбиения $\Delta < \delta$ и при любом выборе точек ξ_k справедливо неравенство

$$|\sigma - I| = |\sigma\,(f, T, \{\xi_k\}) - I| < \varepsilon.$$

Определение 16.18. *Если для функции f предел I интегральных сумм σ при $\Delta \to 0$ существует, то функцию f называют интегрируемой (по Риману) на теле G, а число I — (n-кратным или просто кратным) определенным интегралом от функции f по телу G и пишут*

$$I = \int\limits_G f(x)\, dv = \int\int\underset{G}{\cdots}\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

При $n = 2, 3$ n-кратный интеграл, обычно, называют двойным и тройным, соответственно.

Совокупность всех интегрируемых на теле G функций будем обозначать символом $R\,(G)$.

Известно, что всякая функция f, интегрируемая по Риману на сегменте $[a, b]$, ограничена на этом сегменте. При $n \geq 2$ это свойство не имеет места, то есть функция может быть интегрируемой на теле G, но неограниченной на нем.

Пример 16.2. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ фигуру G, состоящую из сегмента $[0, 1]$ оси Ox и замкнутого круга K единичного радиуса с центром в точке $(2, 0)$, а на нем функцию $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ заданную равенством*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \textit{если}\, x = 0, \\ \dfrac{1}{x}, & \textit{если}\, 0 < x < 1, \\ 1, & \textit{если}\, 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажем, что функция f неограничена на G, но интегрируема на нем.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, функция f неограничена на G.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$. Множество тел G_k распадается на три подмножества: 1) G_k целиком содержится в отрезке $[0, 1]$; 2) G_k целиком содержится в круге K; 3) одно G_{k_0} частично содержится в отрезке $[0, 1]$ и частично в круге K. Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k:\, G_k \subset [0,1]} f\,(\xi_k, 0)\, \Delta s_k + \sum_{k:\, G_k \subset K} f\,(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k + f\,(\xi_{k_0}, \eta_{k_0})\, \Delta s_{k_0}. \tag{16.24}$$

Если $G_k \subset [0, 1]$, то $\Delta s_k = 0$ и поэтому первая сумма в (16.24) равна нулю. Если $G_k \subset K$, то $f\,(\xi_k, \eta_k) = 1$. Поэтому вторая сумма в (16.24) равна площади круга K без площади тела G_{k_0}, то есть числу $\pi - \Delta s_{k_0}$. Следовательно, справедливо равенство

$$\sigma = (\pi - \Delta s_{k_0}) + f\,(\xi_{k_0}, \eta_{k_0})\, \Delta s_{k_0}. \tag{16.25}$$

Очевидно, что при стремлении к нулю параметра разбиения, $\Delta s_{k_0} \to 0$, а $(\xi_{k_0}, \eta_{k_0}) \to (1, 0)$ и поэтому $f\,(\xi_{k_0}, \eta_{k_0}) \to f\,(1, 0) = 1$. Таким образом, переходя в (16.25) к пределу при $\Delta \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma = \pi$. Согласно определению 16.18, функция f интегрируема на теле G и имеет место равенство

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = \pi.$$

■

Итак, функция может быть интегрируемой на некотором теле, но не ограниченной на нем. В дальнейшем однако, будем рассматривать лишь ограниченные функции.

16.3 Суммы Дарбу и их свойства

Пусть тело $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемо, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограничена G, $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ — разбиение тела G, $m_k = \inf\{f(x) : x \in G_k\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x \in G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 16.19. *Суммы*

$$s = \sum_{k=1}^{m} m_k \Delta v_k, \quad S = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta v_k$$

называют соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции f по данному разбиению T.

Непосредственно из определения следует, что

$$s \leq S.$$

Рассмотрим свойства сумм Дарбу.

Свойство 16.1. *Для любого разбиения T и любой интегральной суммы σ выполняются неравенства*

$$s \leq \sigma \leq S. \tag{16.26}$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения T и при любом выборе точек $\xi_k \in G_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, справедливы неравенства

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

Умножая эти неравенства на Δv_k и суммируя по всем k от 1 до m, придем к (16.26). ■

Свойство 16.2. *Для любого разбиения T*

$$s = \inf\{\sigma\}, \quad S = \sup\{\sigma\}. \tag{16.27}$$

Доказательство. Оба соотношения (16.27) доказываются одинаково, поэтому остановимся на доказательстве первого из них.

Возьмем произвольное разбиение T и зафиксируем $\varepsilon > 0$. По второму свойству точной нижней грани для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ найдется точка $\xi_k \in G_k$ такая, что

$$f(\xi_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{V},$$

где $V = V(G)$. Умножив обе части этих неравенств на ΔV_k и просуммировав по всем k от 1 до m, получим:

$$\sigma < \sum_{k=1}^{m} \left(m_k + \frac{\varepsilon}{V} \right) \Delta v_k = \sum_{k=1}^{m} m_k \Delta v_k + \frac{\varepsilon}{V} \sum_{k=1}^{m} \Delta v_k = s + \varepsilon.$$

Эта оценка вместе с левой частью (16.26) устанавливает справедливость первого из равенств (16.27). ■

Определение 16.20. *Разбиение $T' = \{G'_1, G'_2, \ldots, G'_l\}$ называется продолжением разбиения $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, если каждое тело G_k либо совпадает с некоторым G'_j, либо является объединением нескольких G'_j.*

Перенумеровав G'_j должным образом, можно добиться, чтобы

$$G_k = \bigcup_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} G'_j, \quad \text{где} \quad 0 = j_0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_m = l.$$

Тогда имеем

$$G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{m} \left(\bigcup_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} G'_j \right). \tag{16.28}$$

Свойство 16.3. *Пусть T и T' — разбиения тела G, s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f для разбиения T, s' и S' — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f для разбиения T'. Если разбиение T' является продолжением разбиения T, то*

$$s \le s', \quad S' \le S. \tag{16.29}$$

Доказательство. Оба соотношения (16.29) доказываются одинаково, поэтому остановимся на доказательстве первого из них.

Пусть $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, $T' = \{G'_1, G'_2, \ldots, G'_l\}$ и справедливо равенство (16.28). Поскольку $G_k = \bigcup\limits_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} G'_j$, то для каждого j такого, что $j_{k-1} < j \le j_k$ имеем $G'_j \subset G_k$. Следовательно, $m'_j \ge m_k$, где $m'_j = \inf\left\{f(x) : x \in G'_j\right\}$, $m_k = \inf\left\{f(x) : x \in G_k\right\}$. Поэтому

$$s' = \sum_{j=1}^{l} m'_j \Delta v'_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} m'_j \Delta v'_j \right) \ge \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} m_k \Delta v'_j \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} m_k \left(\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} \Delta v'_j \right) = \sum_{k=1}^{m} m_k \Delta v_k = s.$$

■

Свойство 16.4. *Пусть T и T' — произвольные разбиения тела G, s — нижняя сумма Дарбу функции f для разбиения T, S' — верхняя сумма Дарбу функции f для разбиения T'. Тогда*

$$s \le S'.$$

Доказательство. Пусть $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, $T' = \{G'_1, G'_2, \ldots, G'_l\}$. Рассмотрим разбиение

$$T'' = \left\{G_k \cap G'_j : k = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, l\right\}.$$

Очевидно, что разбиение T'' является продолжением каждого из разбиений T и T'. Следовательно, по предыдущему свойству,

$$s \le s'' \le S'' \le S'.$$

■

Из свойства 16.4 сумм Дарбу следует, что множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу любой ограниченной функции f ограничено сверху (любой верхней суммой Дарбу), а множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

Определение 16.21. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Числа*

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\}$$

называют соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу функции f.

Лемма 16.2. *Имеет место неравенство $I_* \le I^*$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное разбиение $\widetilde{T}$ тела G. Пусть $\widetilde{s}$ и $\widetilde{S}$ — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f для этого разбиения. По свойству 16.4 число $\widetilde{S}$ является какой-то верхней гранью множества $\{s\}$. Отсюда и определения числа I_* следует, что $I_* \le \widetilde{S}$. А в силу произвольности разбиения $\widetilde{T}$, это неравенство означает, что число I_* есть какая-то нижняя грань множества $\{S\}$. Поэтому, согласно определению числа I^*, имеем $I_* \le I^*$. ■

Теорема 16.6. (**Критерий интегрируемости**) *Ограниченная на кубируемом теле G функция f интегрируема на нем тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T тела G с параметром разбиения $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство*

$$S - s < \varepsilon. \tag{16.30}$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R(G)$, найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T с параметром $\Delta < \delta$ при любом выборе точек ξ_k будет выполняться неравенство

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда по свойствам 16.1 и 16.2 сумм Дарбу будем иметь

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s \le \sigma \le S \le I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда выводим

$$S - s \le \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T с параметром $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство (16.30). Из определения 16.21 и леммы 16.2 следует, что

$$s \le I_* \le I^* \le S. \tag{16.31}$$

Это неравенство вместе с (16.30), влечет оценку $0 \le I_* - I^* \le S - s < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε, это означает, что $I_* = I^*$. Пусть $I = I_* = I^*$. Из (16.31) следует, что для числа I справедливо неравенство

$$s \le I \le S.$$

Вычитая его из неравенства (16.26), получаем $-(S - s) \le \sigma - I \le S - s$. Следовательно, учитывая (16.30), имеем $|\sigma - I| \le S - s < \varepsilon$. По определению 16.18 функция $f \in R(G)$. ■

Пусть G — кубируемое тело, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция,

$$m = \inf\{f(x) : x \in G\}, \quad M = \sup\{f(x) : x \in G\}.$$

Определение 16.22. *Число $\omega = M - m$ называется колебанием функции f на теле G.*

Теорема 16.7. (**Второй критерий интегрируемости**) *Ограниченная на кубируемом теле G функция f интегрируема на нем тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ тела G с параметром разбиения $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k < \varepsilon,$$

где ω_k колебание функции f на теле G_k, $k = 1, 2, \dots, m$.

Это утверждение является следствием критерия интегрируемости (теорема 16.6), так как

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k = \sum_{k=1}^{m} (M_k - m_k) \Delta v_k = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta v_k - \sum_{k=1}^{m} m_k \Delta v_k = S - s.$$

Теорема 16.8. *Пусть G — замкнутое кубируемое тело, функция $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна на G. Тогда $f \in R(G)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку множество G ограничено и замкнуто, то оно компактно. А согласно теореме Кантора непрерывная на G функция f равномерно непрерывна на нем. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in G$ и удовлетворяющих условию $\rho_1(x, y) < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{V_0}, \tag{16.32}$$

где $V_0 > V(G)$.

Возьмем произвольное разбиение $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ тела G, параметр которого $\Delta < \delta$. Тогда, ввиду (16.32), для колебания ω_k функции f на теле G_k справедлива оценка $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{V_0}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k \le \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{V_0} \Delta v_k = \frac{\varepsilon}{V_0} \sum_{k=1}^{m} \Delta v_k = \frac{\varepsilon}{V_0} V(G) < \varepsilon.$$

По теореме 16.7 функция f интегрируема на теле G. ■

Теорема 16.9. *Пусть G — замкнутое кубируемое тело, функция $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограничена на G. Если множество точек разрыва функции f есть множество нулевого объема, то функция f интегрируема на G.*

Доказательство. Пусть положительная постоянная M такова, что

$$|f(x)| \le M, \quad x \in G. \tag{16.33}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть Γ обозначает множество точек разрыва функции f. Так как Γ — множество нулевого объема, найдется многогранник $P_1 \supset \Gamma$, объем которого

$$V_1 = V(P_1) < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Без нарушения общности можно предполагать, что $\Gamma \subset \mathrm{int} P_1$.

Построим теперь многогранник $P_2 \supset P_1$ так, чтобы границы S_1 и S_2 многогранников P_1 и P_2 не соприкасались и чтобы выполнялось условие

$$V_2 = V(P_2) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{16.34}$$

Так как границы S_1 и S_2 многогранников P_1 и P_2 не имеют общих точек, число

$$\delta_1 \overset{def}{=} \inf \{\rho_1(x,y) : x \in S_1,\ y \in S_2\} > 0.$$

Рассмотрим множество $\widetilde{G} = G \setminus \mathrm{int} P_1$. Как разность замкнутого и открытого множеств оно замкнуто, а следовательно, компактно. Поскольку функция f непрерывна на $\widetilde{G}$, по теореме Кантора она и равномерно непрерывна на нем. Поэтому найдется $\delta_2 > 0$ такое, что для всех $x, y \in \widetilde{G}$ и удовлетворяющих условию $\rho_1(x,y) < \delta_2$ справедлива оценка

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2V_0}, \tag{16.35}$$

где V_0 — любое число, большее, чем $V(G)$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и возьмем произвольное разбиение $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G с параметром $\Delta < \delta$. Составим сумму $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k$. Разобьем ее на две суммы:

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k = \sum{}' \omega_k \Delta v_k + \sum{}'' \omega_k \Delta v_k, \tag{16.36}$$

включив в первую сумму $\sum'$ слагаемые $\omega_k \Delta v_k$, соответствующие тем G_k, которые имеют общие точки с $\overline{P}_1$, а во вторую сумму $\sum''$- все остальные слагаемые.

Тогда для слагаемых первой группы имеем: $\omega_k \le 2M$ (ввиду (16.33)), $G_k \subset P_2$ (ввиду построения многогранника P_2 и определения числа δ). Отсюда и оценки (16.34) следует, что

$$\sum{}' \omega_k \Delta v_k \le 2M \sum{}' \Delta v_k \le 2MV_2 < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.37}$$

Так как слагаемые второй группы соответствуют $G_k \subset \widetilde{G}$, то для этих слагаемых, ввиду выбора δ и оценки (16.35), имеем $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{2V_0}$. Поэтому

$$\sum{}'' \omega_k \Delta v_k \le \frac{\varepsilon}{2V_0} \sum{}'' \Delta v_k \le \frac{\varepsilon}{2V_0} V_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.38}$$

Из равенства (16.36) и оценок (16.37), (16.38) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k < \varepsilon$. Согласно теореме 16.7 функция $f \in R(G)$. ■

16.4 Свойства интеграла

При формулировке свойств интеграла будем предполагать, что G — кубируемое тело, а функции, рассматриваемые на нем, ограничены.

Свойство 16.1. *Если $V(G) = 0$, то $\int\limits_G f(x)\, dv = 0$.*

Доказательство. Используя определение интеграла, ограниченность функции f и свойство множеств нулевого объема, выводим

$$\int\limits_G f(x)\, dv = \lim_{\Delta \to 0} \sigma = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \Delta v_k = 0.$$

■

Свойство 16.2. *Если $f \in R\,(G)$ и $c \in \mathbb{R}$, то $cf \in R\,(G)$ и*

$$\int\limits_G cf(x)\,dv = c\int\limits_G f(x)\,dv. \tag{16.39}$$

Доказательство. Для любого разбиения $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G при любом выборе точек $\xi_k \in G_k$ имеем

$$\sigma\,(cf) = \sum_{k=1}^{m} cf\,(\xi_k)\,\Delta v_k = c\sum_{k=1}^{m} f\,(\xi_k)\,\Delta v_k = c\sigma\,(f)\,.$$

Отсюда и интегрируемости функции f (существования предела $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma\,(f)$) следует существования предела $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma\,(cf)$ и равенство

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma\,(cf) = c\lim_{\Delta\to 0}\sigma\,(f)\,.$$

Этим установлены и интегрируемость функции cf и равенство (16.39). ■

Свойство 16.3. *Если $f, g \in R\,(G)$, то $f + g \in R\,(G)$ и*

$$\int\limits_G \big(f(x) + g(x)\big)\,dv = \int\limits_G f(x)\,dv + \int\limits_G g(x)\,dv. \tag{16.40}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G и любую интегральную сумму функции $f{+}g$, соответствующую этому разбиению. Очевидно, что

$$\sigma\,(f+g) = \sum_{k=1}^{m}\big(f\,(\xi_k) + g\,(\xi_k)\big)\Delta v_k = \sum_{k=1}^{m} f\,(\xi_k)\,\Delta v_k + \sum_{k=1}^{m} g\,(\xi_k)\,\Delta v_k = \sigma\,(f) + \sigma\,(g)\,.$$

Отсюда и существования пределов $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma\,(f)$ и $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma\,(g)$, стоящих в правой части, следуют существование предела $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma\,(f+g)$ и равенство

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma\,(f+g) = \lim_{\Delta\to 0}\sigma\,(f) + \lim_{\Delta\to 0}\sigma\,(g)\,.$$

Согласно определению 16.18 функция f интегрируема на теле G и выполняется равенство (16.40). ■

Свойство 16.4. *Если $f \in R\,(G)$ и $G_0 \subset G$, то $f \in R\,(G_0)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R\,(G)$, по критерию интегрируемости найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G с параметром $\Delta < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k\Delta v_k < \varepsilon. \tag{16.41}$$

Возьмем теперь любое разбиение $T_0 = \left\{G_1^{(0)}, G_2^{(0)}, \ldots, G_l^{(0)}\right\}$ тела G_0, параметр которого $\Delta_0 < \delta$ и составим для него сумму

$$\sum_{k=1}^{m_0}\omega_k^{(0)}\Delta v_k^{(0)}. \tag{16.42}$$

Дополним разбиение T_0 до разбиения T тела G так, чтобы его параметр Δ удовлетворял условию $\Delta < \delta$. Тогда сумма (16.42) есть часть суммы $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k$, соответствующей разбиению T. Поскольку для суммы $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k$ справедлива оценка (16.41) и все ее слагаемые неотрицательны, то

$$\sum_{k=1}^{m_0} \omega_k^{(0)} \Delta v_k^{(0)} < \varepsilon.$$

Поэтому, согласно критерию интегрируемости, $f \in R\,(G_0)$. ■

Свойство 16.5. *Если $f \in R\,(G)$ и тело $G = G^{(1)} \cup G^{(2)}$, где $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ — кубируемые тела, не имеющие общих внутренних точек, то*

$$\int\limits_{G} f(x)\,dv = \int\limits_{G^{(1)}} f(x)\,dv + \int\limits_{G^{(2)}} f(x)\,dv. \tag{16.43}$$

Доказательство. По предыдущему свойству 16.4 функция f интегрируема на $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Пусть $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ — произвольные разбиения тел $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Объединив их, получим разбиение $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G. В каждом теле G_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, возьмем произвольную точку ξ_k. По построению, для интегральных сумм

$$\sigma = \sigma\bigl(f, T, \{\xi_k\}\bigr) = \sum_{k=1}^{m} f\,(\xi_k)\,\Delta v_k$$

и

$$\sigma_j = \sigma\bigl(f, T^{(j)}, \{\xi_k\}\bigr) = \sum_{k: G_k \subset G^{(j)}} f\,(\xi_k)\,\Delta v_k, \quad j = 1, 2,$$

функции f справедливо равенство

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{16.44}$$

Так как функция f интегрируема на каждом из тел G, $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, то при $\Delta \to 0$ пределы интегральных сумм σ, σ_1 и σ_2 существуют и равны соответственно интегралам $\int\limits_{G} f(x)\,dv$, $\int\limits_{G^{(1)}} f(x)\;dv$ и $\int\limits_{G^{(2)}} f(x)\;dv$. Поэтому, перейдя в равенстве (16.44) к пределу при $\Delta \to 0$, получим (16.43). ■

Свойство 16.6. *Пусть $G = G^{(1)} \cup G^{(2)}$, где $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ — кубируемые тела, не имеющие общих внутренних точек, $f \in R\bigl(G^{(1)}\bigr)$ и $f \in R\bigl(G^{(2)}\bigr)$. Тогда $f \in R\,(G)$ и имеет место равенство (16.43).*

Доказательство. Если будет доказана интегрируемость функции f на теле G, то равенство (16.43) будет следовать из предыдущего свойства 16.5.

Докажем, что $f \in R\,(G)$. Пусть M — положительная постоянная такая, что

$$|f(x)| \le M, \quad x \in G. \tag{16.45}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть Γ — общая часть границ тел $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Поскольку Γ, как подмножество множества нулевого объема, есть множество нулевого объема, то найдется многогранник $P_1 \supset \Gamma$ такой, что

$$V\,(P_1) < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Заключим теперь многогранник P_1 в многогранник P_2, объем которого

$$V(P_2) < \frac{\varepsilon}{4M}, \tag{16.46}$$

причем сделаем это так, чтобы границы S_1 и S_2 многогранников P_1 и P_2 не соприкасались. Тогда число

$$\delta_0 \stackrel{def}{=} \inf\{\rho_1(x,y) : x \in S_1,\ y \in S_2\} > 0.$$

Так как f интегрируема на $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, найдется $\delta > 0$ такое, что для любых разбиений $T^{(1)} = \left\{G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, \ldots, G_{m_1}^{(1)}\right\}$ тела $G^{(1)}$ и $T^{(2)} = \left\{G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \ldots, G_{m_2}^{(2)}\right\}$ тела $G^{(2)}$ с параметрами разбиений $\Delta_1 < \delta$ и $\Delta_2 < \delta$ будут выполняться неравенства

$$\sum_{k=1}^{m_1} \omega_k^{(1)} \Delta v_k^{(1)} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k^{(2)} \Delta v_k^{(2)} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{16.47}$$

Не уменьшая общность, будем предполагать, что $\delta < \delta_0$. Возьмем произвольное разбиение $T = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ тела G с параметром $\Delta < \delta$. Множество номеров $K = \{1, 2, \ldots, m\}$ разобьем на три подмножества K_0, K_1 и K_2, полагая

$$K_0 = \{k \in K : \mathrm{int} G_k \cap \mathrm{int} P_1 \neq \varnothing\}, \quad K_j = \left\{k \in K \setminus K_0 : G_k \subset G^{(j)}\right\}, \quad j = 1, 2.$$

Представим сумму $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k$, соответствующую разбиению T тела G в виде

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k = \sum_{k \in K_0} \omega_k \Delta v_k + \sum_{k \in K_1} \omega_k \Delta v_k + \sum_{k \in K_2} \omega_k \Delta v_k. \tag{16.48}$$

Из выбора числа δ следует, что при $k \in K_0$ тело G_k находится в многограннике P_2, поэтому, используя (16.45) и (16.46), выводим

$$\sum_{k \in K_0} \omega_k \Delta v_k \leq 2M \sum_{k \in K_0} \Delta v_k \leq 2MV(P_2) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.49}$$

Дополним совокупность множеств $\{G_k : k \in K_1\}$ до разбиения $T^{(1)}$ тела $G^{(1)}$ с параметром меньшим δ. Очевидно, что $\sum\limits_{k \in K_1} \omega_k \Delta v_k$ составляет лишь часть суммы $\sum\limits_{k=1}^{m_1} \omega_k^{(1)} \Delta v_k^{(1)}$ построенной по разбиения $T^{(1)}$. Поэтому, на основании первого из неравенств (16.47), заключаем, что

$$\sum_{k \in K_1} \omega_k \Delta v_k < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{16.50}$$

Аналогичные рассуждения с использованием второго из неравенств (16.47) приводят к неравенству

$$\sum_{k \in K_2} \omega_k \Delta v_k < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{16.51}$$

Применяя (16.49), (16.50) и (16.51) к оценке правой части (16.48), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta v_k < \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости функция f интегрируема на теле G. ■

Свойство 16.7. *Пусть $f \in R(G)$. Если $m \le f(x) \le M$ при всех $x \in G$, то*

$$mV(G) \le \int\limits_G f(x)\,dv \le MV(G)\,. \tag{16.52}$$

Доказательство. Пусть $T = \{G_k\}_{k=1}^{l}$ — произвольное разбиение тела G, а интегральная сумма $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{l} f(\xi_k)\,\Delta v_k$ — любая , соответствующая разбиению T. Учитывая, что значения функции f на G заключены между m и M, имеем

$$mV(G) = m\sum_{k=1}^{l}\Delta v_k \le \sigma \le M\sum_{k=1}^{l}\Delta v_k = MV(G)\,.$$

Отсюда, путем предельного перехода, получаем (16.52). ∎

Свойство 16.8. (**Формула среднего значения**) *Если $f \in R(G)$, $m = \inf\{f(x) : x \in G\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in G\}$, то существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что*

$$\int\limits_G f(x)\,dv = \mu V(G)\,. \tag{16.53}$$

Доказательство. Если $V(G) = 0$, то, ввиду свойства 16.1, равенство (16.53) верно при любом μ. Пусть $V(G) \neq 0$. Так как выполнены условия свойства 16.7, то выполняется неравенство (16.52). Разделив его на $V(G)$, получим

$$m \le \frac{1}{V(G)}\int\limits_G f(x)\,dv \le M.$$

Полагая $\mu = \dfrac{1}{V(G)}\displaystyle\int\limits_G f(x)\,dv$, видим, что $m \le \mu \le M$, и что с найденным μ выполняется равенство (16.53). ∎

Свойство 16.9. (**Формула среднего значения**) *Если тело G — замкнуто, а функция f непрерывна на G, то существует точка $c \in G$ такая, что*

$$\int\limits_G f(x)\,dv = f(c)V(G)\,. \tag{16.54}$$

Формулу (16.54) тоже называют формулой среднего значения.

Доказательство. Поскольку замкнутое тело G компактно, согласно второй теореме Вейерштрасса существуют $a, b \in G$ такие, что

$$f(a) = m = \inf\{f(x) : x \in G\}\,, \quad f(b) = M = \sup\{f(x) : x \in G\}\,.$$

По предыдущему свойству существует число $\mu \in [f(a), f(b)]$, с которым верно равенство (16.53). А так как тело — связное множество, по теореме о промежуточном значении найдется $c \in G$ такая, что $f(c) = \mu$. Заменяя в (16.53) μ на $f(c)$, получаем (16.54). ∎

16.5 Сведение кратного интеграла к повторному

Мы уже познакомились с определением и основными свойствами кратного интеграла, условиями его существования. Но до сих пор мы не затрагивали вопроса о способах фактического вычисления такого интеграла. В решении этой задачи важную роль играет утверждение о том, что вычисление кратного интеграла сводится, при достаточно широких условиях, к последовательному интегрированию по каждой из переменных в отдельности, что является одним из эффективных способов вычисления кратного интеграла.

Рассмотрим сначала частный случай — случай прямоугольного параллелепипеда. Итак, пусть тело G есть прямоугольный параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$:

$$\Pi = \Pi^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ a_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ такие, что $k+l = n$. Представим пространство $\mathbb{R}^n$ в виде декартова произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ двух подпространств $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$. Параллелепипед Π будем рассматривать как $\Pi^k \times \Pi^l$, $\Pi^k \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi^l \subset \mathbb{R}^l$, элементы $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем записывать как пары (x, y), считая $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, а $y = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^l$, и функции f, заданные на Π, будем рассматривать как функции двух векторных переменных $x \in \Pi^k$ и $y \in \Pi^l$ и будем писать $f(x, y)$. Наконец, рассматривая объемы тел в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, будем обозначать эти объемы соответственно $V^{(n)}$, $V^{(k)}$, $V^{(l)}$.

Теорема 16.10. (**Фубини**) *Пусть функция f интегрируема на Π^n и для каждого $x \in \Pi^k$ интегрируема на Π^l. Тогда функция*

$$I(x) = \int\limits_{\Pi^l} f(x, y)\ dv^{(l)} \tag{16.55}$$

интегрируема на Π^k и имеет место равенство

$$\int\limits_{\Pi^n} f(x, y)\ dv^{(n)} = \int\limits_{\Pi^k} I(x) dv^{(k)} = \int\limits_{\Pi^k} \left(\int\limits_{\Pi^l} f(x, y)\ dv^{(l)} \right) dv^{(k)}. \tag{16.56}$$

Равенство (16.56) обычно записывают в виде

$$\int\limits_{\Pi^n} f(x, y)\ dv^{(n)} = \int\limits_{\Pi^k} dv^{(k)} \int\limits_{\Pi^l} f(x, y)\ dv^{(l)}, \tag{16.57}$$

и интеграл, стоящий в его правой части, называют повторным интегралом.

Доказательство. Пусть $T^{(k)} = \left\{\Pi^k_s : s = 1, 2, \ldots, p\right\}$ и $T^{(l)} = \left\{\Pi^l_r : r = 1, 2, \ldots, q\right\}$ — разбиения параллелепипедов Π^k и Π^l на частичные параллелепипеды, соответственно.

Образуем параллелепипеды $\Pi^n_{s,r} = \Pi^k_s \times \Pi^l_r$, $s = 1, 2, \ldots, p$, $r = 1, 2, \ldots, q$. Очевидно, что

$$T = \left\{\Pi^n_{s,r} : s = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, q\right\}$$

есть разбиение параллелепипеда Π^n. Параметры разбиений $T^{(k)}$, $T^{(l)}$ и T обозначим соответственно $\Delta^{(k)}$, $\Delta^{(l)}$ и $\Delta^{(n)}$.

Пусть

$$m_{s,r} = \inf\left\{f(x, y) : (x, y) \in \Pi^n_{s,r}\right\}, \quad M_{s,r} = \sup\left\{f(x, y) : (x, y) \in \Pi^n_{s,r}\right\}.$$

На каждом параллелепипеде Π^k_s возьмем по одной точке ξ_s. Тогда при любом $y \in \Pi^l_r$

$$m_{s,r} \leq f(\xi_s, y) \leq M_{s,r}, \quad s = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, q.$$

По условию функция $f(\xi_s, y)$ (функция переменной y) интегрируема на Π^l. Тогда, по свойству 16.4 интеграла она интегрируема на Π^l_r, $r = 1, 2, \ldots, q$, а по свойству 16.7,

$$m_{s,r}\Delta v_r^{(l)} \le \int\limits_{\Pi^l_r} f(\xi_s, y)\, dv^{(l)} \le M_{s,r}\Delta v_r^{(l)}, \tag{16.58}$$

$$s = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, q,$$

где $\Delta v_r^{(l)} = V\left(\Pi^l_r\right)$. Просуммируем неравенства (16.58) по r от 1 до q. Так как по свойству 16.5 интеграла

$$\sum_{r=1}^{q} \int\limits_{\Pi^l_r} f(\xi_s, y)\, dv^{(l)} = \int\limits_{\Pi^l} f(\xi_s, y)\, dv^{(l)},$$

то в результате суммирования мы получим

$$\sum_{r=1}^{q} m_{s,r}\Delta v_r^{(l)} \le \int\limits_{\Pi^l} f(\xi_s, y)\, dv^{(l)} \le \sum_{r=1}^{q} M_{s,r}\Delta v_r^{(l)}, \quad s = 1, 2, \ldots, p. \tag{16.59}$$

Воспользовавшись (16.55), перепишем (16.59) в виде

$$\sum_{r=1}^{q} m_{s,r}\Delta v_r^{(l)} \le I(\xi_s) \le \sum_{r=1}^{q} M_{s,r}\Delta v_r^{(l)}, \quad s = 1, 2, \ldots, p. \tag{16.60}$$

Умножим неравенства (16.60) на $\Delta v_s^{(k)} = V\left(\Pi^k_s\right)$, а затем просуммируем по s от 1 до p и получим

$$\sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q} m_{s,r}\Delta v_r^{(l)}\Delta v_s^{(k)} \le \sum_{s=1}^{p} I(\xi_s)\Delta v_s^{(k)} \le \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q} M_{s,r}\Delta v_r^{(l)}\Delta v_s^{(k)}.$$

Поскольку

$$\Delta v_r^{(l)}\Delta v_s^{(k)} = \Delta v_s^{(k)}\Delta v_r^{(l)} = V\left(\Pi^k_s\right)V\left(\Pi^l_r\right) = V\left(\Pi^k_s \times \Pi^l_r\right) = V\left(\Pi^n_{s,r}\right) = \Delta v_{s,r}^{(n)},$$

последнее неравенство может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q} m_{s,r}\Delta v_{s,r}^{(n)} \le \sum_{s=1}^{p} I(\xi_s)\Delta v_s^{(k)} \le \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q} M_{s,r}\Delta v_{s,r}^{(n)}. \tag{16.61}$$

Слева и справа в неравенстве (16.61) стоят соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f для разбиения T параллелепипеда Π^n, а в центре — интегральная сумма функции I отвечающая разбиению $T^{(k)}$ параллелепипеда Π^k.

Устремим к нулю параметры $\Delta^{(k)}$ и $\Delta^{(l)}$. Тогда, очевидно, что параметр $\Delta^{(n)}$ также стремится к нулю. Поэтому, ввиду интегрируемости функции f на параллелепипеде Π^n, левая и правая части (16.61) стремятся к $\int\limits_{\Pi^n} f(x, y)\, dv^{(n)}$, стоящему в левой части (16.56). По принципу двухстороннего ограничения предел

$$\lim_{\Delta^{(k)}\to 0} \sum_{s=1}^{p} I(\xi_s)\Delta v_s^{(k)}$$

существует и равен $\int\limits_{\Pi^n} f(x,y)\,dv^{(n)}$. А согласно определению 16.18,

$$\lim_{\Delta^{(k)}\to 0}\sum_{s=1}^{p} I(\xi_s)\Delta v_s^{(k)} = \int\limits_{\Pi^k} I(x)dv^{(k)}.$$

Следовательно, в результате перехода к пределу в (16.61) при $\Delta^{(k)}\to 0$ и $\Delta^{(l)}\to 0$ мы получим равенство (16.56). ■

Замечание 1. Элементы $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в формулировке теоремы 16.10 были разбиты на пары (x,y) вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $y = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^l$ только ради удобства. Разумеется, теорема остается в силе, если ее условия выполнены для пар (x,y) вида

$$x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k, \quad y = \left(x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}\right) \in \mathbb{R}^l,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ — любая перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Замечание 2. Пусть $k=1$, $l=n-1$. Тогда равенство (16.57) принимает вид

$$\int\int\limits_{\Pi^n}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{[a_1,b_1]} dx_1 \int\int\limits_{\Pi^{n-1}}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2dx_3\ldots dx_n.$$

Поскольку для любой функции $g : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ интеграл $\int\limits_{[a_1,b_1]} g(x_1)dx_1$ принято записывать в виде $\int\limits_{a_1}^{b_1} g(x_1)dx_1$, имеем

$$\int\int\limits_{\Pi^n}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\int\limits_{\Pi^{n-1}}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2dx_3\ldots dx_n. \qquad (16.62)$$

Если теперь на параллелепипеде Π^{n-1} для функции f выполнены условия доказанной теоремы (при любом фиксированном $x_1 \in [a_1, b_1]$) для частного случая $k=1$, то применяя ее к внутреннему интегралу в (16.62), будем иметь:

$$\int\int\limits_{\Pi^n}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\int\limits_{\Pi^{n-2}}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_3dx_4\ldots dx_n,$$

и т. д.

Следствие 16.2. *Пусть функция f интегрируема на Π^n и для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ функция f интегрируема на соответствующем параллелепипеде по переменным x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$ при любых фиксированных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда справедлива формула*

$$\int\!\!\int_{\Pi^n}\!\!\cdots\!\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{16.63}$$

Условия теоремы и следствия из нее выполняются для непрерывных на Π^n функций. Следовательно, по крайней мере для непрерывных функций, вычисление n-кратного интеграла сводится к последовательному интегрированию по каждой переменной в отдельности.

Пример 16.3. *Вычислить* $\iint\limits_P (x+y)\, dxdy$, *где*

$$P = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Решение. Ввиду непрерывности подынтегральной функции можно применить формулу (16.63). Согласно этой формуле получаем

$$\iint\limits_P (x+y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)\, dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$
$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = 1.$$

■

Пример 16.4. *Вычислить* $\iiint\limits_P xy^2z^3\, dxdydz$, *где*

$$P = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Решение. Опять можно применить формулу (16.63), но здесь x и y^2 можно вынести из под внутренних интегралов как постоянные множители, поэтому

$$\iiint\limits_P xy^2z^3\, dxdydz = \int_0^1 x\, dx \int_0^1 y^2\, dy \int_0^1 z^3\, dz.$$

При вычислении каждого внутреннего интеграла получается число, которое может быть вынесено за знак интеграла, поэтому тройной интеграл представим в виде произведения трех однократных интегралов, которые можно вычислять не последовательно, а одновременно. Итак

$$\iiint\limits_P xy^2z^3\, dxdydz = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 \cdot \frac{z^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

■

Теперь рассмотрим общий случай.

Теорема 16.11. (**Фубини**) *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — замкнутое кубируемое тело, а функции $\varphi, \psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, причем $\varphi(\widetilde{x}) \le \psi(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in E$, G — цилиндрическое тело, определенное формулой (16.21). Если функция $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на теле G и при каждом $\widetilde{x} \in E$ интегрируема по x_n на сегменте $[\varphi(\widetilde{x}), \psi(\widetilde{x})]$, то функция*

$$I(\widetilde{x}) = \int\limits_{\varphi(\widetilde{x})}^{\psi(\widetilde{x})} f(x)\, dx_n \tag{16.64}$$

интегрируема на теле E и имеет место равенство

$$\int\limits_G f(x)\, dv = \int\limits_E I(\widetilde{x})\, dv^{(n-1)} = \int\limits_E dv^{(n-1)} \int\limits_{\varphi(\widetilde{x})}^{\psi(\widetilde{x})} f(x)\, dx_n. \tag{16.65}$$

Доказательство. По теореме 16.5 тело G кубируемо. Так как кубируемое тело ограничено, найдется прямоугольный параллелепипед $\Pi \supset G$. Определим функцию $\widetilde{f} : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in G, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \Pi \setminus G. \end{cases}$$

По свойству 16.6 интеграла, функция $\widetilde{f}$ интегрируема на $\Pi = \Pi^n$ и на сегменте $[a_n, b_n] = \Pi^1$ при каждом $\widetilde{x} \in \Pi^{n-1}$. Следовательно, по предыдущей теореме 16.10 ($k = n-1$, $l = 1$) имеем

$$\int\limits_\Pi \widetilde{f}(x)\, dv = \int\limits_{\Pi^{n-1}} dv^{(n-1)} \int\limits_{a_n}^{b_n} \widetilde{f}(x)\, dx_n. \tag{16.66}$$

Преобразуем каждую из частей этого равенства. Так как $\Pi = G \cup (\Pi \setminus G)$, то по свойству 16.5 интеграла, получаем

$$\int\limits_\Pi \widetilde{f}(x)\, dv = \int\limits_G \widetilde{f}(x)\, dv + \int\limits_{\Pi \setminus G} \widetilde{f}(x)\, dv. \tag{16.67}$$

Но ввиду определения функции $\widetilde{f}$,

$$\int\limits_G \widetilde{f}(x)\, dv = \int\limits_G f(x)\, dv, \quad \int\limits_{\Pi \setminus G} \widetilde{f}(x)\, dv = 0,$$

поэтому равенство (16.67) принимает вид

$$\int\limits_\Pi \widetilde{f}(x)\, dv = \int\limits_G f(x)\, dv. \tag{16.68}$$

Используя обозначение $\widetilde{I}(\widetilde{x})$ для интеграла $\int\limits_{a_n}^{b_n} \widetilde{f}(x)\, dx_n$, мы можем представить интеграл, стоящий в правой части (16.66), в следующем виде: $\int\limits_{\Pi^{n-1}} \widetilde{I}(\widetilde{x})\, dv^{(n-1)}$, а затем, рассматривая параллелепипед Π^{n-1} как объединение двух множеств E и $\Pi^{n-1}\setminus E$, снова воспользуемся свойством 16.5 интеграла, и получим

$$\int\limits_{\Pi^{n-1}} \widetilde{I}(\widetilde{x})\,dv^{(n-1)} = \int\limits_{E} \widetilde{I}(\widetilde{x})\,dv^{(n-1)} + \int\limits_{\Pi^{n-1}\setminus E} \widetilde{I}(\widetilde{x})\,dv^{(n-1)}. \tag{16.69}$$

Очевидно, что $\widetilde{f}(x)=0$ на множестве $(\Pi^{n-1}\setminus E)\times[a_n,b_n]$. Поэтому последний интеграл в равенстве (16.69) равен нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{\Pi^{n-1}} dv^{(n-1)}\int\limits_{a_n}^{b_n}\widetilde{f}(x)\,dx_n = \int\limits_{E} dv^{(n-1)}\int\limits_{a_n}^{b_n}\widetilde{f}(x)\,dx_n. \tag{16.70}$$

Учитывая, что при каждом $\widetilde{x}\in E$ функция $\widetilde{f}(x)$ на сегменте $[\varphi(\widetilde{x}),\psi(\widetilde{x})]$ совпадает с $f(x)$, а вне его $\widetilde{f}(x)=0$, замечаем, что

$$\int\limits_{a_n}^{b_n}\widetilde{f}(x)\,dx_n = \int\limits_{a_n}^{\varphi(\widetilde{x})}\widetilde{f}(x)\,dx_n + \int\limits_{\varphi(\widetilde{x})}^{\psi(\widetilde{x})}\widetilde{f}(x)\,dx_n + \int\limits_{\psi(\widetilde{x})}^{b_n}\widetilde{f}(x)\,dx_n = \int\limits_{\varphi(\widetilde{x})}^{\psi(\widetilde{x})} f(x)\,dx_n.$$

Отсюда и (16.70), получаем

$$\int\limits_{\Pi^{n-1}} dv^{(n-1)}\int\limits_{a_n}^{b_n}\widetilde{f}(x)\,dx_n = \int\limits_{E} dv^{(n-1)}\int\limits_{\varphi(\widetilde{x})}^{\psi(\widetilde{x})} f(x)\,dx_n. \tag{16.71}$$

Комбинируя теперь (16.66), (16.68) и (16.71), приходим к равенству (16.65). ■

Замечание 1. Если E, в свою очередь является цилиндрическим телом и функция I, определенная равенством (16.64), удовлетворяет на нем условиям доказанной теоремы 16.11, то внешний интеграл в (16.65) тоже может быть заменен повторным и так далее.

Замечание 2. Если тело G не является цилиндрическим, но его можно представить в виде конечного объединения цилиндрических тел, то, согласно свойству 16.5, интеграл по телу G можно заменить суммой интегралов по упомянутым цилиндрическим телам, каждый из которых, при выполнении условий теоремы 16.11, сводится к повторному.

Пример 16.5. *Вычислить* $\iint\limits_D x^2\,dxdy$, *где* D *— фигура, заключенная между эллипсом* $x^2+4y^2=4$ *и окружностью* $x^2+y^2=1$.

Решение. Очевидно, что $D=D_1\cup D_2$, где D_1 и D_2 — криволинейные трапеции. Их границы образуют кривые, заданные уравнениями $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ и $x=\pm2\sqrt{1-y^2}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D x^2\,dxdy = \iint\limits_{D_1} x^2\,dxdy + \iint\limits_{D_2} x^2\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{-2\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx +$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-2\sqrt{1-y^2}}^{x=-\sqrt{1-y^2}}\right)dy + \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=\sqrt{1-y^2}}^{x=2\sqrt{1-y^2}}\right)dy =$$

$$= \frac{7}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy + \frac{7}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy = \frac{28}{3}\int\limits_{0}^{1}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy =$$

$$= \left|\text{замена } y=\sin t \;\Rightarrow\; dy=\cos t\,dt\right| = \frac{28}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt =$$

$$= \frac{7}{6}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3+4\cos 2t+\cos 4t\right)\,dt = \frac{7}{6}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{4}.$$

■

Пример 16.6. *Вычислить* $\iiint\limits_G (x+y+z)\;dxdydz$, *где* G *— тело, ограниченное плоскостями* $x=0,\ y=0,\ z=0$ *и* $x+y+z=1$.

Решение. Здесь G — цилиндрическое тело над треугольником

$$D=\left\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\right\},$$

ограниченное сверху плоскостью $x+y+z=1$, снизу — плоскостью $z=0$. Треугольник D — тоже цилиндрическая фигура над сегментом $[0,1]$, ограниченная сверху прямой $x+y=1$, снизу — прямой $y=0$. Поэтому

$$\iiint\limits_G (x+y+z)\;dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)\;dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)\;dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(\frac{(x+y+z)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}\right)\;dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(1-(x+y)^2\right)\;dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\left(y-\frac{(x+y)^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right)\;dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(2-3x+x^3\right)\;dx = \frac{1}{6}\left(2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

■

16.6 Замена переменных в кратном интеграле

Замена переменных в кратном интеграле играет еще более важную роль, чем в интеграле по отрезку, поскольку необходимость в ней вызывается не только сложностью подынтегральной функции, но и сложной конфигурацией тела, по которому приходится интегрировать, или не позволяющей свести кратный интеграл к повторному, или приводящей к громоздким вычислениям.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$: одно $\mathbb{R}^n(x)=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$, другое $\mathbb{R}^n(\xi)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\}$, в первом рассмотрим замкнутое односвязное кубируемое тело G, во втором — замкнутое односвязное кубируемое тело $\widetilde{G}$. И пусть отображение $\psi:\widetilde{G}\longrightarrow G$ (то есть n-мерная функция n вещественных переменных) обладает следующими свойствами:

1) ψ отображает $\widetilde{G}$ в G непрерывно и $\mathrm{int}\widetilde{G}$ в $\mathrm{int}G$ биективно;

2) ψ непрерывно дифференцируемо в $\widetilde{G}$, то есть ψ дифференцируемо в $\mathrm{int}\widetilde{G}$ и все частные производные каждой координатной функции непрерывны в $\widetilde{G}$;

3) якобиан $J(\xi) = \dfrac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}(\xi) \neq 0$ в каждой точке $\xi \in \mathrm{int}\widetilde{G}$.

Напомним, что

$$J(\xi) = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \det \psi'(\xi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

Из свойств 2 и 3 следует, что:
a) якобиан $J(\xi)$ отображения ψ сохраняет знак в $\mathrm{int}\widetilde{G}$;
b) существует обратное отображение $\psi^{-1} : \mathrm{int}G \longrightarrow \mathrm{int}\widetilde{G}$.

Возьмем произвольную точку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathrm{int}\widetilde{G}$. Через нее проходят n гиперплоскостей $\xi_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Части этих гиперплоскостей, содержащиеся в $\widetilde{G}$, отображение ψ переводит в части гиперповерхностей

$$x_i = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \alpha_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

проходящих через точку $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \psi(\alpha)$.

Если рассмотреть другую точку $\alpha^{(1)} = \left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}\right) \in \mathrm{int}\widetilde{G}$, то ее образ $a^{(1)}$ находится на пересечении гиперповерхностей

$$x_i = \psi\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \alpha_i^{(1)}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку отображение ψ биективно (свойство 1), набор гиперповерхностей, определяющих положение точки $a^{(1)}$, отличен от набора гиперповерхностей, определяющих положение точки a. Таким образом, положение каждой точки $a \in \mathrm{int}G$ может быть определено как пересечением гиперплоскостей $x_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, так и пересечением гиперповерхностей, являющихся образами частей гиперплоскостей $\xi_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, то есть, фактически, значениями $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Принято поэтому $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называть криволинейными координатами точки $a \in \mathrm{int}G$, а гиперповерхности

$$x_i = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \alpha_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

— координатными гиперповерхностями (линиями при $n = 2$, поверхностями при $n = 3$).

Пример 16.7. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ полярную систему координат*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Нетрудно убедиться, что отображение $\psi : (r, \varphi) \longrightarrow (x, y)$ удовлетворяет условиям 1—3 для любой квадрируемой замкнутой односвязной фигуры $\widetilde{G}$, расположенной в полуполосе

$$\Pi = \{(r, \varphi) : 0 \leq r < +\infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Координатные линии — окружности $r = const$ и лучи $\varphi = const$.
Вычислим якобиан отображения ψ:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Пример 16.8. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ цилиндрическую систему координат*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = u\ (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < u < +\infty).$$

Отображение $\psi : (r,\varphi,u) \longrightarrow (x,y,z)$ удовлетворяет условиям 1—3 на любом замкнутом кубируемом односвязном теле $\widetilde{G}$, удовлетворяющем приведенным выше ограничениям. Координатными поверхностями являются цилиндрические поверхности $r = const$, полуплоскости $\varphi = const$ и плоскости $u = const$.
Вычислим якобиан отображения ψ:

$$J(r,\varphi,u) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Пример 16.9. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат*

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ z = r\sin\theta\ (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

И это отображение $\psi : (r,\varphi,\theta) \longrightarrow (x,y,z)$ удовлетворяет условиям 1—3 на любом замкнутом кубируемом односвязном теле $\widetilde{G}$, удовлетворяющем приведенным выше ограничениям. Координатные поверхности — сферы $r = const$, полуплоскости $\varphi = const$ и конические поверхности $\theta = const$.
Вычислим якобиан отображения ψ:

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta.$$

Теорема 16.12. *Пусть тела G и $\widetilde{G}$ — замкнутые односвязные кубируемые тела в $\mathbb{R}^n(x)$ и $\mathbb{R}^n(\xi)$ соответственно, отображение $\psi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ удовлетворяют условиям 1–3. Тогда справедлива формула*

$$V(G) = \int\limits_{\widetilde{G}} |J(\xi)|\ dv(\xi), \tag{16.72}$$

где $dv(\xi)$ обозначает элемент объема в пространстве $\mathbb{R}^n(\xi)$.

Схема доказательства. Пусть $\widetilde{T}$ — разбиение тела $\widetilde{G}$, образованное гиперплоскостями, параллельными координатным гиперплоскостям. Разбиение $\widetilde{T}$ состоит из множеств двух типов:

(A) прямоугольные параллелепипеды $\widetilde{\Pi}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, полностью содержащиеся в $\mathrm{int}\widetilde{G}$;
(B) прямоугольные параллелепипеды $\widetilde{\Pi}_k$, $k = m+1, m+2, \ldots, m_1$ $(m_1 > m)$, или их части, имеющие общие точки с границей $\partial\widetilde{G}$ тела $\widetilde{G}$.

Ввиду кубируемости тела $\widetilde{G}$, при достаточно мелком разбиении сумма объемов элементов разбиения, перечисленных в (B), настолько мала (по сравнению с суммарным объемом параллелепипедов, перечисленных в (A)), что этой частью разбиения можно пренебречь.

В силу биективности, отображение ψ по разбиению $\widetilde{T}$ тела $\widetilde{G}$ определяет разбиение T тела G. Разбиение T также состоит из множеств двух типов:
(C) криволинейных параллелепипедов Π_k, являющихся образами прямоугольных параллелепипедов $\widetilde{\Pi}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$;
(D) образов частичных тел, перечисленных в (B).

При достаточно мелком разбиении $\widetilde{T}$, ввиду непрерывности отображения ψ, разбиение T тоже будет достаточно мелким, поэтому сумма объемов тел, перечисленных в (D), будет очень мала, по сравнению с суммарным объемом тел, перечисленных в (C). Следовательно, объем тела G практически равен сумме объемов криволинейных параллелепипедов Π_k, перечисленных в (C).

Возьмем произвольное $k = 1, 2, \ldots, m$ и вычислим объем параллелепипеда Π_k. Пусть точка $\widetilde{A}_k$ — одна из вершин параллелепипеда $\widetilde{\Pi}_k$, $\xi^{(k)} = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$ — ее координаты, а $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — величины ребер (с учетом знака), выходящих из этой вершины. Тогда вершины параллелепипеда $\widetilde{\Pi}_k$, соседние с $\widetilde{A}_k$, имеют координаты $\xi^{(k)} + h^{(i)}$, где $h^{(i)} = (0, 0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Согласно формуле (16.3), объем $V\left(\widetilde{\Pi}_k\right)$ параллелепипеда $\widetilde{\Pi}_k$ равен $|h_1 h_2 \ldots h_n|$.

Отображение ψ вершину $\widetilde{A}_k$ переведет в вершину $A_k\left(x^{(k)}\right)$ с $x^{(k)} = \psi\left(\xi^{(k)}\right)$, а соседние с A_k вершины криволинейного параллелепипеда Π_k будут иметь координаты $\psi\left(\xi^{(k)} + h^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заменим криволинейный параллелепипед Π_k прямолинейным (косоугольным) параллелепипедом Π_k', оставив вершину A_k неизменной, а координаты соседних с ней вершин положим равными $\psi\left(\xi^{(k)}\right) + d\psi\left(\xi^{(k)}\right)\left(h^{(i)}\right)$. Так как величина $i-$того ребра параллелепипеда Π_k' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равна

$$d\psi\left(\xi^{(k)}\right)\left(h^{(i)}\right) = \psi'\left(\xi^{(k)}\right)\cdot h^{(i)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\xi_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\xi_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ h_i \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi_i} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\xi_i} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\xi_i} \end{pmatrix} \cdot h_i,$$

то его объем, вычисленный по формуле (16.3), будет равен

$$V\left(\Pi_k'\right) = \mathtt{abs}\left(\det\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_i}\left(\xi^{(k)}\right)\right)\cdot h_1 h_2 \ldots h_n\right) = \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right|\cdot V\left(\widetilde{\Pi}_k\right).$$

При переходе от Π_k к Π_k' мы заменили приращения $\Delta\psi\left(\xi^{(k)}\right)\left(h^{(i)}\right)$ дифференциалами $d\psi\left(\xi^{(k)}\right)\left(h^{(i)}\right)$, поэтому

$$V\left(\Pi_k\right) \approx V\left(\Pi_k'\right) = \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right|\cdot V\left(\widetilde{\Pi}_k\right), \tag{16.73}$$

причем разность между левой и правой частями в (16.73) есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $V\left(\widetilde{\Pi}_k\right)$. Суммируя (16.73) по k от 1 до m, получаем

$$V(G) \approx \sum_{k=1}^{m} \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right| \cdot \Delta v_k(\xi), \tag{16.74}$$

где $\Delta v_k(\xi) = V\left(\widetilde{\Pi}_k\right)$.

Добавим в полученную сумму слагаемые, отвечающие значениям k от $m+1$ до m_1. Эти слагаемые соответствуют параллелепипедам $\widetilde{\Pi}_k$ или их частям, которые примыкают к границе тела $\widetilde{G}$. В силу малости $\sum\limits_{k=m+1}^{m_1} V\left(\widetilde{\Pi}_k\right)$, непрерывности отображения ψ и непрерывности, а следовательно, и ограниченности якобиана $J(\xi)$, добавленная сумма «*очень мала*» по сравнению с суммой, стоящей в правой части (16.74). Поэтому

$$V(G) \approx \sum_{k=1}^{m_1} \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right| \cdot \Delta v_k(\xi). \tag{16.75}$$

Легко видеть, что сумма, стоящая в правой части (16.75), есть интегральная сумма функции $|J(\xi)|$, соответствующая разбиению $\widetilde{T}$ тела $\widetilde{G}$. Пусть $\widetilde{\Delta}$ обозначает параметр разбиения $\widetilde{T}$. Поскольку якобиан $J(\xi)$ есть непрерывная функция, то предел интегральных сумм при $\widetilde{\Delta} \to 0$ существует. Перейдем в (16.75) к пределу при $\widetilde{\Delta} \to 0$ и получим (16.72).

Точные оценки, обосновывающие все приведенные рассуждения, ввиду их сложности, опущены. ■

Теорема 16.13. *Пусть G и $\widetilde{G}$ — замкнутые односвязные кубируемые тела в $\mathbb{R}^n(x)$ и $\mathbb{R}^n(\xi)$ соответственно, отображение $\psi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ удовлетворяет условиям 1—3, а функция $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на G. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{G} f(x)\, dv(x) = \int\limits_{\widetilde{G}} f(\psi(\xi))\, |J(\xi)|\, dv(\xi). \tag{16.76}$$

Доказательство. Ввиду непрерывности подынтегральных функций, каждый из интегралов в (16.76) существует. Остается доказать лишь само равенство (16.76).

Пусть $\widetilde{T} = \left\{\widetilde{G}_k : k = 1, 2, \ldots, m\right\}$ — разбиение тела $\widetilde{G}$, $G_k = \psi\left(\widetilde{G}_k\right)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Ввиду непрерывности отображения ψ все тела G_k кубируемы, а согласно теореме (16.12), их объемы находятся по формуле

$$V(G_k) = \int\limits_{\widetilde{G}_k} |J(\xi)|\, dv(\xi). \tag{16.77}$$

Из свойств 1—3 отображения ψ следует, что тела G_k при различных k не имеют общих внутренних точек и $\bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k = G$. Следовательно, совокупность $T = \{G_k : k = 1, 2, \ldots, m\}$ образует разбиение тела G. Составим интегральную сумму функции f, соответствующую этому разбиению. Учитывая (16.77) и полагая $\Delta v_k(x) = V(G_k)$, получаем

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} f\left(x^{(k)}\right) \Delta v_k(x) = \sum_{k=1}^{m} f\left(x^{(k)}\right) \int\limits_{\widetilde{G}_k} |J(\xi)|\, dv(\xi). \tag{16.78}$$

По свойству 16.9 интеграла, для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ найдется точка $\xi^{(k)} \in \widetilde{G}_k$ такая, что

$$\int\limits_{\widetilde{G}_k} |J(\xi)| \ dv(\xi) = \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right| \cdot V\left(\widetilde{G}_k\right) = \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right| \cdot \Delta v_k(\xi). \tag{16.79}$$

В (16.78) точки $x^{(k)}$ могут быть выбраны произвольно, поэтому мы можем положить $x^{(k)} = \psi\left(\xi^{(k)}\right)$, где $\xi^{(k)}$ удовлетворяют (16.79). Тогда, подставляя (16.79) в равенство (16.78), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} f\left(x^{(k)}\right) \Delta v_k(x) = \sum_{k=1}^{m} f\left(\psi\left(\xi^{(k)}\right)\right) \left|J\left(\xi^{(k)}\right)\right| \cdot \Delta v_k(\xi). \tag{16.80}$$

В обеих частях этого равенства стоят интегральные суммы интегралов составляющих доказываемое равенство.

Пусть $\widetilde{\Delta}$ и Δ — параметры разбиений $\widetilde{T}$ и T соответственно. Так как G и $\widetilde{G}$ замкнутые тела, то они являются компактными множествами. Следовательно, согласно теореме Кантора, непрерывное отображение $\psi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ равномерно непрерывно на $\widetilde{G}$. Поэтому $\Delta \to 0$ при $\widetilde{\Delta} \to 0$. Перейдем теперь в равенстве (16.80) к пределу при $\widetilde{\Delta} \to 0$ и получим равенство (16.76). ■

Пример 16.10. *Вычислить* $\iint\limits_D xy\ dxdy$*, где* D *— фигура, ограниченная эллипсом* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ *и координатными осями* $x = 0,\ y = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Решение. Перейдем к обобщенным полярным координатам, полагая

$$x = ar\cos\varphi,\ \ y = br\sin\varphi.$$

Эти функции определяют отображение ψ прямоугольника

$$\Pi = \left\{(r,\varphi) \ \ : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$$

на D, удовлетворяющее условиям 1-3. Вычислим якобиан этого отображения.

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Согласно формуле (16.76), имеем

$$\iint\limits_D xy\ dxdy = \iint\limits_\Pi (ar\cos\varphi)(br\sin\varphi)\, abr\ drd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2b^2 \int\limits_0^1 r^3\ dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}a^2b^2 \cdot \left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{8}a^2b^2.$$

■

Пример 16.11. *Вычислить* $\iiint\limits_G x\ dxdydz$*, где* G *— тело, ограниченное координатными плоскостями* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ *и сферой* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам: $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Эти функции осуществляют отображение ψ параллелепипеда

$$\Pi = \left\{(r,\varphi,\theta) \;:\; 0 \le r \le R,\; 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2},\; 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

на тело G. В примере 16.9 вычислен якобиан этого отображения; он равен $r^2\cos\theta$. Поэтому

$$\iiint\limits_G x\,dxdydz = \iiint\limits_\Pi r\cos\varphi\cos\theta\cdot r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int\limits_0^R r^3\,dr =$$

$$= \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{16}.$$

■

16.7 Несобственные кратные интегралы

Пусть $\mathcal{D}$ — область в $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$, функция $f:\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}$, интеграл $\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv$ не существует из-за того, что либо область $\mathcal{D}$ не ограничена, либо функция f не ограничена в $\mathcal{D}$, либо и то, и другое, но на каждом замкнутом кубируемом подмножестве $\mathcal{G}\subset\mathcal{D}$ функция f интегрируема по Риману.

Определение 16.23. *При выполнении всех перечисленных выше условий*

$$\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv \tag{16.81}$$

будем называть несобственным кратным интегралом.

Определение 16.24. *Последовательность областей $(\mathcal{D}_m)$ $(m\in\mathbb{N})$ назовём исчерпывающей (область $\mathcal{D}$), если:*

1) $\mathcal{D}_m$ кубируема для каждого $m\in\mathbb{N}$;
2) $\mathcal{D}_m\subset\mathcal{D}$ для каждого $m\in\mathbb{N}$;
3) $\overline{\mathcal{D}}_m\subset\mathcal{D}_{m+1}$ для каждого $m\in\mathbb{N}$;
4) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathcal{D}_m=\mathcal{D}$.

Определение 16.25. *Несобственный кратный интеграл (16.81) называют сходящимся, если при любом выборе исчерпывающей последовательности областей $\mathcal{D}_m$ $(m\in\mathbb{N})$ существует $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv$, принимающий одно и то же значение I.*

В этом случае будем говорить и писать

$$\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv = I. \tag{16.82}$$

В противном случае будем говорить, что интеграл расходится, и не будем приписывать ему никакого значения.

Понятие условной сходимости для кратного несобственного интеграла теряет смысл, ибо справедливо следующее утверждение.

Теорема 16.14. *Если сходится* $\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv$, *то сходится и* $\int\limits_{\mathcal{D}} |f(x)|dv$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [23], [2], [13] и других учебниках.

А поскольку получается, что всякий интеграл сходится абсолютно, то достаточно сформулировать условия сходимости интегралов от неотрицательных функций. Но прежде докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 16.3. *Пусть* $(\mathcal{D}_m)$ *и* $(\mathcal{D}'_l)$ *— две любые исчерпывающие область* $\mathcal{D}$ *последовательности. Тогда для любого* $m \in \mathbb{N}$ *найдётся* $l \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}'_l$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда некоторая область $\mathcal{D}_{m_0}$ не содержится ни в одной из областей $\mathcal{D}'_l$, а это означает, что для любого $l \in \mathbb{N}$ найдётся $x_l \in \mathcal{D}_{m_0}$ такое, что $x_l \notin \mathcal{D}'_l$. Таким образом, из области $\mathcal{D}_{m_0}$ выделена последовательность точек (x_l). Так как область $\mathcal{D}_{m_0}$ кубируема, то её замыкание $\overline{\mathcal{D}}_{m_0}$ — ограниченное и замкнутое, то есть, компактное множество. Но тогда из любой содержащейся в нём последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Итак, последовательность (x_l) содержит подпоследовательность (x_{l_k}), сходящуюся к $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}_{m_0}$. Так как $\overline{\mathcal{D}}_{m_0} \subset \mathcal{D}$, то $x_0 \in \mathcal{D}$, а так как $\mathcal{D}'_l$ — исчерпывающая последовательность, то найдётся $\mathcal{D}'_{l_0} \ni x_0$. $\mathcal{D}'_{l_0}$ — область, поэтому точка x_0 содержится в ней вместе с окрестностью, а это означает, что все точки x_{l_k} с достаточно большими номерами тоже принадлежат $\mathcal{D}'_{l_0}$ и всем $\mathcal{D}'_l$ с номерами, большими, чем l_0. Получается, что если номер l_k настолько велик, что $x_{l_k} \in \mathcal{D}'_{l_0}$ и $l_k > l_0$, то $x_{l_k} \in \mathcal{D}'_{l_k}$, но это противоречит выбору точек x_l. ■

Теорема 16.15. *Несобственный кратный интеграл от неотрицательной функции сходится тогда и только тогда, когда хотя бы по одной исчерпывающей последовательности областей* $\mathcal{D}_m$ *последовательность интегралов*

$$\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv \tag{16.83}$$

ограничена.

Доказательство. Необходимость этого утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{D}_m$ — такая исчерпывающая последовательность областей, что последовательность интегралов $\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv$ ограничена, то есть, существует постоянная M такая, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv \leq M \ , \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv$ к тому же монотонно не убывает, то к ней можно применить теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности (теорема 2.14), по которой существует

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv = I,$$

и при этом

$$\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv \leq I, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{16.84}$$

Пусть $\mathcal{D}_l'$ — другая исчерпывающая последовательность. Тогда по лемме 16.3 для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{D}_l' \subset \mathcal{D}_m$. А тогда для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathcal{D}_l'} f(x)dv \leq \int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv \leq I,$$

следовательно, последовательность интегралов $\int\limits_{\mathcal{D}_l'} f(x)dv$ ограничена и по доказанному выше является сходящейся, то есть, существует число I' (очевидно, $I' \leq I$) такое, что

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathcal{D}_l'} f(x)dv = I'.$$

Осталось доказать, что $I' = I$. Исчерпывающие последовательности $(\mathcal{D}_m)$ и $(\mathcal{D}_l')$ равноправны, поэтому, поменяв их местами и повторив приведённые выше рассуждения, получим, что $I \leq I'$, то есть, $I' = I$. ■

Теорема 16.16. (**Признак сравнения**) *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям, описанным при определении кратного несобственного интеграла, неотрицательны, и $f(x) \leq g(x)$ всюду в области $\mathcal{D}$. Тогда, если сходится $\int\limits_{\mathcal{D}} g(x)dv$, то сходится и $\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_m$ — исчерпывающая последовательность областей. Так как $\int\limits_{\mathcal{D}} g(x)dv$ сходится, то последовательность интегралов $\int\limits_{\mathcal{D}_m} g(x)dv$, $m \in \mathbb{N}$, ограничена. Тогда, в силу того, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv \leq \int\limits_{\mathcal{D}_m} g(x)dv,$$

последовательность интегралов $\int\limits_{\mathcal{D}_m} f(x)dv$, $m \in \mathbb{N}$, тоже ограничена, поэтому по предыдущей теореме $\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)dv$ сходится. ■

В одномерном случае при применении признака сравнения обычно используют эталонные функции, среди которых наиболее употребительной является функция $1/x^p$. В n-мерном случае аналогом этой функции является функция $1/r^p$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Выясним, при каких условиях на p интеграл от этой функции сходится, ограничившись случаем $n = 2$.

Пример 16.12. *Рассмотрим $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{r^p}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а область $\mathcal{D} = \{(x,y):\ 0 < x^2+y^2 < 1\}$ — открытый единичный круг с выколотым центром.*

Решение. Возьмём в качестве исчерпывающей последовательности областей последовательность колец $\mathcal{D}_m = \left\{(x,y):\ \dfrac{1}{m^2} < x^2+y^2 < 1 - \dfrac{1}{m}\right\}$ $(m \geq 2)$ и перейдём к полярной системе координат. Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_m} \frac{dxdy}{r^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1/m}^{\sqrt{1-1/m}} \frac{rdr}{r^p} < 2\pi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{p-1}}.$$

Как известно, предел последнего интеграла при $m \to \infty$ существует, если $p-1 < 1$ или $p < 2$. Следовательно, $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{r^p}$ при $p < 2$ сходится, а при $p \geq 2$ расходится. ■

Пример 16.13. *Рассмотрим этот же интеграл* $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{r^p}$, *но теперь в качестве области* $\mathcal{D}$ *выберем внешность замкнутого круга с центром в точке* O *радиуса 1, то есть* $\mathcal{D} = \{(x, y): \ x^2 + y^2 > 1\}$.

Решение. В качестве исчерпывающей область $\mathcal{D}$ последовательности выберем последовательность колец $\mathcal{D}_m = \{(x, y): \ 1 + 1/m < x^2 + y^2 < m^2\}$ $(m \geq 2)$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_m} \frac{dxdy}{r^p} = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{D}_m} \frac{dxdy}{r^p} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{1+1/m}}^{m} \frac{rdr}{r^p} < 2\pi \lim_{m\to\infty} \int\limits_1^m \frac{dr}{r^{p-1}}.$$

Как известно, последний предел существует при $p - 1 > 1$ или $p > 2$ и не существует при $p \leq 2$. ■

Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что если размерность пространства $n = 3$, то интегралы, аналогичные рассмотренным в примерах 16.12, 16.13 сходятся соответственно при $p < 3$ и $p > 3$. В общем случае рассмотренные интегралы сходятся при $p < n$ (первый) и при $p > n$ (второй). Обоснование последнего утверждения можно найти в [2].

Интеграл Эйлера-Пуассона

Интегралом Эйлера-Пуассона называют интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ $(a > 0)$. Покажем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{16.85}$$

Рассмотрим $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$. Это — несобственный двойной интеграл. Возьмём в качестве исчерпывающей последовательность кругов $K_m = \{(x, y): \ x^2 + y^2 < m^2\}$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{K_m} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^m e^{-r^2} rdr =$$

$$= \pi \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^m e^{-r^2} d(r^2) = \pi \lim_{m\to\infty} \left(-e^{-r^2} \Big|_0^m \right) = \pi \lim_{m\to\infty} \left(1 - e^{-m^2} \right) = \pi.$$

А теперь возьмём в качестве исчерпывающей последовательности последовательность квадратов $\Pi_m = \{(x, y) : |x| < m, \ |y| < m\}$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\Pi_m} e^{-x^2-y^2} dxdy =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \int\limits_{-m}^{m} e^{-y^2} dy = 4 \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_{0}^{m} e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 .$$

Сравнив полученные результаты, найдём: $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Отсюда формула (16.85) получается подстановкой $x = \sqrt{a}\, t$.

16.8 Задачи

1. Покажите, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет нулевой объем, то и его замыкание $\overline{E}$ есть множество нулевого объема.

2. Покажите, что если тело G кубируемо и не имеет внутренних точек, то его объем равен нулю.

3. Покажите, что кубируемое тело нулевого объема не имеет внутренних точек.

4. Докажите, что если проекция ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет $(n-1)$-мерный нулевой объем, то само множество E имеет n-мерный нулевой объем.

5. Если тело T кубируемо, то $\operatorname{int} T$ тоже кубируемо, причём $v(\operatorname{int} T) = v(T)$. Доказать.

6. Если $\operatorname{int} T$ кубируемо, то T не обязательно кубируемо.

7. Если T кубируемо, то и $\overline{T}$ кубируемо, причём $v\left(\overline{T}\right) = v(T)$. Доказать.

8. Если $\overline{T}$ кубируемо, то T не обязательно кубируемо.

9. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 1 + \frac{k}{m}, \quad y = 1 + \frac{2l}{m}, \quad k,l = 0,1,\ldots,m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

   Напомним, что
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

10. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 6,\ 4 \le y \le 6\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{2k}{m}, \quad y = 4 + \frac{2l}{m}, \quad k = 0,1,\ldots,2m, \quad l = 0,1,\ldots,m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

    Напомним, что
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

11. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x^2 - y$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 6,\ 4 \le y \le 6\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{2k}{m}, \quad y = 4 + \frac{2l}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

Напомним, что
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

12. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x - y^2$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 6,\ 4 \le y \le 6\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{2k}{m}, \quad y = 4 + \frac{2l}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

Напомним, что
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

13. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = xy$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{k}{m}, \quad y = 1 + \frac{l}{m}, \quad k, l = 0, 1, \ldots, 2m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

14. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x + y$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{k}{m}, \quad y = 1 + \frac{l}{m}, \quad k, l = 0, 1, \ldots, 2m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

15. Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $f(x,y) = x - y$ на прямоугольнике
$$\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\right\},$$
разбивая его на прямоугольники прямыми
$$x = 2 + \frac{k}{m}, \quad y = 1 + \frac{l}{m}, \quad k, l = 0, 1, \ldots, 2m.$$
Чему равны пределы этих сумм при $m \to \infty$?

16. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — кубируемое тело, объем которого $V(G) > 0$, а $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная интегрируемая на G функция и $M = \sup\limits_{x\in G} f(x)$. Покажите, что

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_G \Big(f(x)\Big)^k dV \right)^{\frac{1}{k}} = M.$$

17. Пусть $\Phi(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)\,dt$. Найдите $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$.

18. Пусть $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на множестве

$$G = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x\Big\}.$$

Докажите, что

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx.$$

19. На примере повторного интеграла $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} dy$ объясните, почему не каждый повторный интеграл является расписанным по теореме Фубини двойным интегралом.

20. Какой вид имеет область D, если после перехода к полярным координатам получаем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr,$$

где φ_1, φ_2 $(0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi)$, r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2 < +\infty)$ — постоянные числа?

21. Пусть f — непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция. Докажите неравенство

$$\left(\int\limits_a^b f(x)dx \right)^2 \le (b-a) \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Указание. Рассмотрите интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b (f(x) - f(y))^2 dy$.

22. Докажите сходимость интеграла $\iint\limits_K \dfrac{\cos(xy)}{x+y} dxdy$, где $K = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 1; \ 0 \le y \le 1\}$.

23. Исследуйте на сходимость интеграл $\iint\limits_E \dfrac{dxdy}{|x|^p + |y|^p}$, где:

а) $E = \{(x,y) : \ |x| + |y| \ge 1\}$; б) $E = \{(x,y) : \ |x| + |y| \le 1\}$ $(p > 0)$.

24. Исследуйте на сходимость интеграл $\iint\limits_E \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}$, где:

а) $E = \{(x, y) :\ |x| + |y| \geq 1\}$; б) $E = \{(x, y) :\ |x| + |y| \leq 1\}$ $(p, q > 0)$.

25. Убедитесь, что интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2)dxdy$ расходится, проверив, что:

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{|x|\leq n,\, |y|\leq n} \sin(x^2 + y^2)dxdy = \pi; \quad b)\quad \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2)dxdy = 0.$$

Указание. При решении этого примера могут быть полезны интегралы Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

26. Покажите, что $\iint\limits_K \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dxdy$, где $K = \{(x, y) :\ x \geq 1,\ y \geq 1\}$, расходится, в то время как повторные интегралы $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx$, $\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy$ сходятся.

27. Вычислите интегралы:

а) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $E = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 < 1\}$;

б) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{x^4 + y^2}$, $E = \{(x, y) :\ y \geq x^2 + 1\}$;

в) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$, $E = \left\{(x, y) :\ x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$;

г) $\iiint\limits_K \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$, $K = \{(x, y, z);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

17 Интегралы, зависящие от параметра

17.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

В различных приложениях приходится интегрировать функции, зависящие от нескольких (двух, трех и т. д.) переменных по одной из переменных. В результате получается функция, зависящая от оставшихся переменных. Такие функции принято называть интегралами, зависящими от параметра. Естественно, возникают вопросы о существовании пределов, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости таких функций.

Пусть $[a;\ b] \subset \mathbb{R}$, Y — любое множество, $[a;\ b] \times Y = \{(x, y) :\ x \in [a;\ b],\ y \in Y\}$, а $f :\ [a;\ b] \times Y \to \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $y \in Y$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;\ b]$.

Определение 17.1. *Функцию*

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx, \tag{17.1}$$

заданную на множестве Y при описанных выше условиях, будем называть собственным интегралом, зависящим от параметра.

Изучим свойства этого интеграла, ограничившись простейшим случаем: $Y = [c;\ d] \in \mathbb{R}$, и введя обозначение

$$\Pi = [a\ b] \times [c;\ d] = \{(x,\ y) :\ x \in [a;\ b],\ y \in [c;\ d]\}.$$

Теорема 17.1. *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике* Π*. Тогда функция I, заданная формулой (17.1), непрерывна на отрезке* $[c;\ d]$*.*

Доказательство. Функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке множества. Возьмём, поэтому, любое $y_0 \in [c;\ d]$ и любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдётся $\delta > 0$ такое, что если $y \in [c;\ d]$ и $|y - y_0| < \delta$, то будет выполняться неравенство $\big|I(y) - I(y_0)\big| < \varepsilon$.

Прямоугольник Π — компактное множество в $\mathbb{R}^2$, поэтому по теореме Кантора (теорема 9.18) функция f равномерно непрерывна на Π, следовательно, по выбранному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых $(x', y'), (x'', y'') \in \Pi$, удовлетворяющих условию $\rho((x', y'), (x'', y'')) < \delta$, выполняется неравенство

$$\big|f(x', y') - f(x'', y'')\big| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Возьмём любое $x \in [a; b]$ и такое $y \in [c; d]$, чтобы выполнялось условие $|y - y_0| < \delta$. Тогда $\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$, поэтому

$$\big|I(y) - I(y_0)\big| = \left|\int\limits_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)]dx\right| \leq \int\limits_a^b \Big|f(x, y) - f(x, y_0)\Big|dx < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 17.2. *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике* Π*. Тогда функция I интегрируема на отрезке* $[c;\ d]$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{17.2}$$

Доказательство. Интегрируемость I вытекает из предыдущей теоремы и теоремы об интегрируемости непрерывных функций. Равенство же 17.2 следует из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (теорема 16.56). Для непрерывной на прямоугольнике Π функции существует $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)dxdy$, который может быть сведён к повторному в любом порядке. ■

Теорема 17.3. *Если функция f непрерывна и имеет непрерывную частную производную f'_y на прямоугольнике* Π*, то функция I дифференцируема на отрезке* $[c;\ d]$ *и справедливо равенство*

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx. \tag{17.3}$$

Доказательство. Так как f'_y непрерывна на П, то, используя предыдущую теорему, для любого $y \in [c;\ d]$ можем написать равенство

$$\int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta = \int_c^y d\eta \int_a^b \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} dx. \tag{17.4}$$

Преобразуем левую часть равенства (17.4) с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta = \int_a^b dx \cdot f(x,\eta)\ \Big|_c^y = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,c)dx = I(y) - I(c).$$

Обозначим через $J(\eta)$ внутренний интеграл в правой части равенства (17.4). Тогда равенство (17.4) примет вид:

$$I(y) - I(c) = \int_c^y J(\eta)d\eta. \tag{17.5}$$

По теореме 17.1 функция J непрерывна на $[c;\ d]$. Но тогда по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом (теорема 6.7) правая часть равенства 17.5 (следовательно, и левая) дифференцируема на отрезке $[c;\ d]$. По той же теореме из равенства 17.5 получаем:

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_c^y J(\eta)d\eta = J(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy,$$

что и требовалось. ■

Рассмотрим теперь более общий случай, когда не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования зависят от параметра. Итак, пусть функция f определена на прямоугольнике $\Pi = [a;\ b] \times [c; d]$, интегрируема по x на отрезке $[a; b]$ для каждого $y \in [c; d]$, функции $a(y)$ и $b(y)$ заданы на отрезке $[c; d]$ и для любого $y \in [c; d]$ выполняется $a \leq a(y) \leq b(y) \leq b$. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx. \tag{17.6}$$

Теорема 17.4. *Пусть функция f непрерывна на П, а функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывны на $[c; d]$. Тогда функция I, определённая равенством (17.6), непрерывна на $[c; d]$.*

Доказательство. Пусть $y_0 \in [c; d]$. Покажем, что

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx.$$

Для этого разобьём интеграл на три слагаемых, используя свойство аддитивности интеграла.

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx =$$

$$= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)dx = I_0(y) + I_b(y) - I_a(y). \tag{17.7}$$

Здесь интегралы обозначены в порядке следования. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Первый из интегралов — интеграл с постоянными пределами вида (17.1), его непрерывность доказана в теореме 17.1. Поэтому

$$\lim_{y\to y_0} I_0(y) = I_0(y_0) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx = I(y_0).$$

Займёмся вторым интегралом. Функция f непрерывна на П, следовательно, ограничена. Поэтому существует постоянная M такая, что $\bigl|f(x,y)\bigr| \le M$, $(x,y) \in \Pi$. Но тогда

$$\bigl|I_b(y)\bigr| = \left|\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx\right| \le M\bigl|b(y) - b(y_0)\bigr|.$$

А так как функция $b(y)$ непрерывна на $[c;\ d]$, то $b(y) - b(y_0) \to 0$ при $y \to y_0$, поэтому

$$\lim_{y\to y_0} I_b(y) = 0.$$

Аналогично доказывается, что и

$$\lim_{y\to y_0} I_a(y) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} I_0(y) + \lim_{y\to y_0} I_b(y) - \lim_{y\to y_0} I_a(y) = I(y_0),$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 17.5. *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике* П *и имеет на нём непрерывную частную производную f'_y, а функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы на отрезке $[c;\ d]$. Тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (17.6), дифференцируема на отрезке $[c;\ d]$ и её производная может быть вычислена по формуле*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y). \tag{17.8}$$

Доказательство. Поскольку дифференцируемость на промежутке есть дифференцируемость в каждой точке промежутка, то возьмём произвольное y_0 на отрезке $[c;\ d]$ и покажем, что $I(y)$ дифференцируема в точке y_0, и что $I'(y_0)$ представляется в виде правой части формулы (17.8). Для этого воспользуемся представлением $I(y)$ в виде (17.7) и покажем, что каждое слагаемое правой части (17.7) дифференцируемо и вычислим его производную.

Первый из интегралов в правой части (17.7) имеет постоянные пределы интегрирования. Его дифференцируемость установлена в теореме 17.3. Поэтому

$$I_0'(y_0) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}dx. \tag{17.9}$$

Теперь докажем дифференцируемость и вычислим производную второго слагаемого в правой части (17.7). (Отметим, что $I_b(y_0) = 0$.)

По определению производной

$$I_b'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{I_b(y) - I_b(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна (по x), то по свойству 6.15 определённого интеграла найдётся $c = c(y)$, $b(y_0) \le c(y) \le b(y)$, такое, что

$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx = f(c(y), y)(b(y) - b(y_0)).$$

Но тогда

$$I_b'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{y - y_0} f(c(y), y)(b(y) - b(y_0)) =$$

$$= \lim_{y\to y_0} f(c(y), y) \cdot \lim_{y\to y_0} \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} = f(b(y_0), y_0)b'(y_0),$$

так как первый предел существует по теореме о трёх функциях и в силу непрерывности функции f на прямоугольнике П, а второй — в силу дифференцируемости функции $b(y)$. Следовательно,

$$I_b'(y_0) = f(b(y_0), y_0)b'(y_0). \tag{17.10}$$

Аналогично доказывается, что третье слагаемое в (17.7) дифференцируемо и что

$$I_a'(y_0) = f(a(y_0), y_0)a'(y_0). \tag{17.11}$$

Итак, все три слагаемых в правой части равенства (17.7) дифференцируемы в точке y_0, значит, и функция $I(y)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I'(y_0) = I_0'(y_0) + I_b'(y_0) - I_a'(y_0). \tag{17.12}$$

Подставив сюда значения производных (формулы (17.9), (17.10), (17.11)), получим представление (17.8) в точке y_0. ■

Замечание 17.1. *Условия теорем 17.1 — 17.5 являются достаточными. Декларируемые в теоремах свойства могут выполняться и при нарушении условий этих теорем. Но быть уверенным в их выполнении при нарушении условий теорем нельзя.*

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 17.1. *Рассмотрим* $I(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x - y)dx,\ y \in \mathbb{R}.$

Подынтегральная функция на отрезке $y = x$, $x \in [0; 1]$, терпит разрыв. Однако, вычислив интеграл, убедимся, что он представляет непрерывную функцию от y на всей вещественной прямой.

1. Пусть $y \le 0$. Тогда

$$I(y) = \int\limits_0^1 dx = 1.$$

2. Пусть $0 < y < 1$. Тогда

$$I(y) = -\int\limits_0^y dx + \int\limits_y^1 dx = -y + (1-y) = 1 - 2y.$$

3. Пусть $y \geq 1$. Тогда

$$I(y) = -\int\limits_0^1 dx = -1.$$

Нетрудно убедиться, что функция $I(y)$ имеет одинаковые пределы слева и справа в точках $y = 0$ и $y = 1$, поэтому непрерывна.

Пример 17.2. *Пусть на* $[0;1] \times (0;1]$ *задана функция* $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$. *Рассмотрим* $I(y) = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx.$

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $(0;\ 0)$, однако, вычислив интеграл, убедимся, что он представляет интегрируемую на отрезке $[0;\ 1]$ функцию.

$$I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \int\limits_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}\ \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2},$$

поэтому

$$\int\limits_0^1 I(y) dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} y\ \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Однако попытка проинтегрировать по параметру под знаком интеграла приведёт к иному результату.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\int\limits_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\ \Big|_{y=0}^{y=1} dx = -\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Пример 17.3. *Пусть* $I(y) = \displaystyle\int\limits_y^{y^2} \frac{\sin xy}{x} dx,\ y \in \mathbb{R}$. *Найти* $I'(y)$.

Легко видеть, что интеграл удовлетворяет условиям теоремы 17.5 на любом отрезке $[c;\ d]$. Найдём производную $I'(y)$, используя формулу 17.8.

$$I'(y) = \int\limits_y^{y^2} \cos xy dx + \frac{\sin y^3}{y^2} \cdot 2y - \frac{\sin y^2}{y} \cdot 1 = \frac{\sin xy}{y}\ \Big|_y^{y^2} + 2\frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} =$$

$$= \frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} + 2\frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} = 3\frac{\sin y^3}{y} - 2\frac{\sin y^2}{y}.$$

17.2 Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра

Пусть Y — произвольное множество, $f : [a; +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится для каждого $y \in Y$.

Определение 17.2. *Функцию*

$$I(y) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, \ y \in Y, \tag{17.13}$$

будем называть несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра.

Равномерная сходимость

Понятие равномерной сходимости для несобственных интегралов, зависящих от параметра, столь же важно, как и для функциональных рядов.

Определение 17.3. *Будем говорить, что интеграл (17.13) сходится равномерно на множестве Y, если его остаток равномерно стремится к нулю на этом множестве, то есть если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0 (> a)$ такое, что для любого $A > A_0$, для любого $y \in Y$ выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon. \tag{17.14}$$

Теорема 17.6. (**Критерий Коши**) *Для того, чтобы интеграл (17.13) сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно выполнение следующего условия (условие Коши): для любого $\varepsilon > 0$ найдётся A_0, зависящее только от ε, такое, что для любых $A', A'' > A_0$ и для любого $y \in Y$ будет выполняться неравенство*

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon. \tag{17.15}$$

Доказательство. Пусть интеграл (17.13) сходится равномерно на множестве Y. Тогда, взяв любое $\varepsilon > 0$, подберём $A_0 = A_0(\varepsilon)$ так, чтобы для любых $A > A_0$ и $y \in Y$ выполнялось неравенство $\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon/2$.

Возьмём любые $A', A'' > A_0$ и любое $y \in Y$. Тогда

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{A''}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \le \left| \int\limits_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int\limits_{A''}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и необходимость доказана.

Наоборот, если выполнено условие (17.15), то оно выполнено для любого фиксированного $y \in Y$. Но тогда по теореме 7.4 для любого фиксированного $y \in Y$ интеграл (17.13) сходится, то есть, для каждого $y \in Y$ существует $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x,y)dx$. Поэтому, положив в (17.15) $A' = A (> A_0)$ и устремив A'' к $+\infty$, получим для любого $y \in Y$

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| \leq \varepsilon,$$

что означает равномерную на Y сходимость интеграла (17.13). ■

Теорема 17.7. (**Вейерштрасс**) *Пусть $f: [a, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ и для любых $A (> a)$ и $y \in Y$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;\ A]$. Пусть $g: [a;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, для всех $x \in [a;\ +\infty)$, $y \in Y$ выполняется неравенство $|f(x,y)| \leq g(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда интеграл (17.13) сходится равномерно (и абсолютно) на множестве Y.*

Доказательство. По критерию Коши для несобственных интегралов первого рода (см. 7.4) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся A_0 такое, что для любых $A', A'' > A_0$ будет выполняться неравенство $\left| \int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx \right| < \varepsilon$. Но тогда для любого $y \in Y$, для любых $A', A'' > A_0$ имеем:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| \leq \left| \int\limits_{A'}^{A''} |f(x,y)|\, dx \right| \leq \left| \int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Остаётся применить теорему 17.6. ■

Пример 17.4. *Рассмотрим* $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax}{1+x^2} dx$.

Этот интеграл сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как имеет место оценка $\left| \dfrac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, а $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Теорема 17.8. (**Дирихле**) *Пусть функции $f, g: [a;\ +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ и интегрируемы по Риману на $[a; A]$ при любых $A > a$ и $y \in Y$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если выполнены следующие два условия:*

1) $\int\limits_a^A f(x,y)dx$ равномерно ограничен на $[a;\ +\infty)$, то есть существует постоянная M такая, что для любых $A > a$ и $y \in Y$

$$\left| \int\limits_a^A f(x,y)dx \right| \leq M;$$

2) функция $g(x,y)$ монотонно по x при каждом $y \in Y$ и равномерно по $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы такое же, как и доказательство теоремы 7.8, нужно лишь проследить, чтобы все оценки выполнялись равномерно по параметру.

По первому условию существует постоянная M такая, что для всех $A > a$ и $y \in Y$ имеет место оценка:

$$\left|\int\limits_a^A f(x,y)dx\right| \leq M. \tag{17.16}$$

По второму условию для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0(> a)$ такое, что для любых $A > A_0$ и $y \in Y$ выполнено

$$|g(A,y)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{17.17}$$

Возьмём $A', A'' > A_0$ и применим к интегралу $\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx$ вторую теорему о среднем значении (только на этот раз в общем виде, поскольку неизвестен знак $g(x,y)$), согласно которой найдётся $A = A(y)$, $A \in [A',\ A'']$, такое, что

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx = g(A',y)\int\limits_{A'}^{A} f(x,y)dx + g(A'',y)\int\limits_{A}^{A''} f(x,y)dx. \tag{17.18}$$

Оценим (17.18) с помощью (17.16) и (17.17).

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx\right| \leq \left|g(A',y)\int\limits_{A'}^{A} f(x,y)dx\right| + \left|g(A'',y)\int\limits_{A}^{A''} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$$

для любого y из множества Y.

Используя критерий Коши, получаем требуемое утверждение. ■

Теорема 17.9. (**Абель**) *Пусть функции $f, g :\ [a;\ +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ и интегрируемы по Риману на $[a; A]$ при любых $A > a$ и $y \in Y$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если выполнены следующие два условия:*

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве Y;

2) функция $g(x,y)$ монотонна по x при каждом $y \in Y$ и равномерно по $y \in Y$ ограничена, то есть существует постоянная M такая, что $|g(x,y)| \leq M$ для всех $x \in [a;\ +\infty)$ и $y \in Y$.

Эта теорема доказывается точно так же, как и теорема 7.9, только вместо теоремы 7.8 следует использовать теорему 17.8. Рекомендуем читателям доказать эту теорему самостоятельно.

Пример 17.5. *Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2}dx$, где $b > 0$ — постоянная, а параметр a удовлетворяет условию $|a| \geq a_0 > 0$.*

Положим $f(x,a)=\sin ax$, $g(x,a)=\dfrac{x}{b^2+x^2}$. Тогда

$$\left|\int\limits_0^A \sin(ax)dx\right| = \left|-\frac{1}{a}\cos(ax)\ \Big|_0^A\right| = \left|\frac{1}{a}\big(1-\cos(aA)\big)\right| \le \frac{2}{|a|} \le \frac{2}{a_0} = M;$$

$$\frac{x}{b^2+x^2} \downarrow 0$$

при $x\to+\infty$, и это условие (ввиду независимости функции g от a) выполнено равномерно по a.

Так как оба условия признака Дирихле выполнены, то рассматриваемый интеграл сходится равномерно в указанной области.

Пример 17.6. *Рассмотрим* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$ $(a\ge 0)$.

Положим $f(x,a)=\dfrac{\sin x}{x}$, $g(x,a)=e^{-ax}$. Так как $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится равномерно по a (ввиду его отсутствия) по признаку Дирихле, а функция e^{-ax} монотонна по x и при $x\ge 0$, $a\ge 0$ ограничена, то рассматриваемый интеграл сходится равномерно в указанной области по признаку Абеля.

Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Изучим свойства несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра, ограничившись простейшим случаем: множество Y есть отрезок $[c;\ d]$ вещественной оси. Введём обозначение

$$\Pi_\infty = [a;\ +\infty)\times[c;\ d]$$

и докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 17.1. *Если интеграл (17.13) сходится равномерно на множестве Y, то последовательность функций*

$$I_n(y) := \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx \ (n\in\mathbb{N}) \tag{17.19}$$

тоже равномерно сходится на множестве Y к функции $I(y)$.

Доказательство. Если интеграл (17.13) сходится равномерно на множестве Y, то по определению равномерной сходимости для любого $\varepsilon>0$ найдётся A_0 такое, что для любого $A>A_0$, для любого $y\in Y$ выполняется условие

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Положим $n_0=\min\{n\in\mathbb{N}:\ a+n>A_0\}$ и возьмём любое $n\ge n_0$. Тогда $a+n>A_0$, поэтому для любого $y\in Y$

$$|I(y)-I_n(y)| = \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\,,$$

что по определению означает равномерную на множестве Y сходимость последовательности $I_n(y)$ к функции $I(y)$. ■

Теорема 17.10. *Если функция f определена и непрерывна на Π_∞, а интеграл (17.13) сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$, то функция I, определяемая этим интегралом, непрерывна на $[c;\ d]$.*

Доказательство. По теореме 17.1 функции I_n $(n \in \mathbb{N})$ непрерывны на отрезке $[c;\ d]$. По лемме 17.1 последовательность функций I_n $(n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$ к функции I. Но тогда по следствию 14.5 из теоремы 14.8 о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций функция I непрерывна на отрезке $[c;\ d]$. ■

Следующая теорема является в некотором роде обратной к предыдущей.

Теорема 17.11. (**Дини**) *Если функция f непрерывна и неотрицательна на $\Pi_{+\infty}$, а функция I, определяемая интегралом (17.13), непрерывна на отрезке $[c;\ d]$, то интеграл (17.13) сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$.*

Доказательство. По теореме 17.1 функции I_n $(n \in \mathbb{N})$ (см. (17.19)) непрерывны на отрезке $[c;\ d]$. Так как функция f неотрицательна, то последовательность функций I_n $(n \in \mathbb{N})$ монотонно не убывает. Но тогда, поскольку предельная функция I этой последовательности тоже непрерывна, к ней можно применить теорему Дини для последовательностей (теорема 14.6), согласно которой последовательность I_n сходится к функции I равномерно на отрезке $[c;\ d]$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n > n_0$ для всех $y \in [c;\ d]$ справедливо неравенство $I(y) - I_n(y) < \varepsilon$.

Положим $A_0 = n_0 + 1$ и возьмём $A > A_0$. Тогда, учитывая неотрицательность функции f, для всех $y \in Y$ получаем:

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx \le \int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{A_0} f(x,y)dx = I(y) - I_{n_0+1}(y) < \varepsilon,$$

и равномерная сходимость интеграла доказана.

■

Теорема 17.12. *Если функция f определена и непрерывна на Π_∞, а интеграл (17.13) сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$, то функция I, определяемая этим интегралом, интегрируема на $[c;\ d]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{17.20}$$

Доказательство. Снова рассмотрим последовательность I_n. По лемме 17.1 она сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$ к функции I, а по теореме 17.2 функции последовательности интегрируемы на отрезке $[c;\ d]$. Тогда по теореме об интегрируемости предельной функции равномерно сходящейся последовательности (теорема 14.9) функция $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c;\ d]$ и

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_c^d I_n(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^{a+n} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Возможность изменения порядка интегрирования следует из той же теоремы 17.2. ■

Следствие 17.1. *Если f непрерывна и неотрицательна на Π_∞, а функция I непрерывна на $[c;\ d]$, то равенство (17.20) справедливо.*

Действительно, при наложенных условиях интеграл (17.13) по теореме Дини сходится равномерно на $[c;\ d]$.

Теорема 17.13. *Если функция f непрерывна на множестве Π_∞ и имеет на нём непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$, интеграл (17.13) сходится хотя бы при одном $y \in [c; d]$, а интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \tag{17.21}$$

сходится равномерно на $[c;\ d]$, то функция I дифференцируема на отрезке $[c;\ d]$ и справедливо равенство

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx. \tag{17.22}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций I_n. По условию теоремы эта последовательность сходится в некоторой точке $y \in [c;\ d]$ (поскольку в этой точке сходится интеграл (17.13)). По теореме 17.3 функции $I_n(y)$ ($n \in \mathbb{N}$) дифференцируемы на отрезке $[c;\ d]$, а по лемме 17.1 последовательность производных I'_n сходится на этом отрезке равномерно. Но тогда по теореме о дифференцируемости предельной функции равномерно сходящейся последовательности (теорема 14.11) функция I дифференцируема на отрезке $[c;\ d]$ и

$$I'(y) = \lim_{n\to\infty} I'_n(y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx.$$

■

В некоторых случаях бывает необходимо изменить порядок интегрирования, когда и переменная x и параметр y изменяются на бесконечных промежутках. Пусть

$$K = [a;\ +\infty) \times [c;\ +\infty) = \{(x,y):\ a \le x < +\infty,\ c \le y < +\infty\}.$$

Теорема 17.14. *Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на K, интегралы*

$$I(y) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad J(x) := \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy \tag{17.23}$$

оба сходятся и являются непрерывными функциями на $[c;\ +\infty)$ и $[a;\ +\infty)$ соответственно. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$ или $\int\limits_a^{+\infty} J(x)dx$ следует сходимость другого и их равенство.

Другими словами, равенство

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy \tag{17.24}$$

справедливо при условии существования одного из повторных интегралов.

Доказательство. Допустим, что существует левый из интегралов в равенстве (17.24), именно $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$. Покажем, что в таком случае существует и правый интеграл $\int\limits_a^{+\infty} J(x)dx$, и что они равны. Для этого достаточно установить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $A_0 > a$ такое, что для любого $A > A_0$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{A} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy\right| < \varepsilon. \tag{17.25}$$

Преобразуем левую часть (17.25). Так как для интеграла $J(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ в полуполосе $[a;A]\times[c;+\infty)$ выполнены условия признака Дини (теорема 17.11), то он равномерно сходится на любом сегменте $[a;\ A]$, следовательно, по теореме 17.12

$$\int\limits_a^{A} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{A} f(x,y)dx.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{A} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy\right| = \left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{A} f(x,y)dx\right| =$$

$$= \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_c^{C} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx + \int\limits_C^{+\infty} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx,$$

где число C пока не определено.

Выберем $\varepsilon > 0$ и оценим оба последних интеграла. Так как $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится, найдётся C_0 такое, что для любого $C > C_0$ будет иметь место неравенство

$$\int\limits_C^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда, ввиду неотрицательности функции $f(x,y)$, каково бы ни было $A \geq a$, и

$$\int\limits_C^{+\infty} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx \leq \int\limits_C^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17.26}$$

Выберем и зафиксируем $C > C_0$ и оценим первый интеграл. По признаку Дини интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c;\ C]$, поэтому существует

$A_0 > a$ такое, что если $A > A_0$, то для любого $y \in [c;\ C]$

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2(C-c)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_c^C dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2(C-c)} \cdot (C-c) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17.27}$$

Итак, если $A > A_0$, то, используя (17.26), (17.27), получаем:

$$\left| \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{A} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy \right| = \int\limits_c^{C} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx + \int\limits_C^{+\infty} dy \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx < \varepsilon.$$

Оценка (17.25) получена, следовательно, теорема доказана. ■

17.3 Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра

Пусть снова Y — произвольное множество, $f : (a;b] \times Y \to \mathbb{R}$, причём функция f при стремлении x к a неограничена, но для каждого $y \in Y$ несобственный $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится.

Определение 17.4. *Функцию*

$$I(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx,\ \ y \in Y \tag{17.28}$$

будем называть несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра.

Понятие равномерной сходимости в теории несобственных интегралов второго рода играет столь же важную роль, как и в теории несобственных интегралов первого рода. Сформулируем его.

Определение 17.5. *Будем говорить, что интеграл (17.28) сходится равномерно по параметру y на множестве Y, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_0 > 0$ ($\delta_0 < b-a$), зависящее только от ε и такое, что для любого $0 < \delta < \delta_0$ и для любого $y \in Y$ выполняется условие*

$$\left| \int\limits_a^{a+\delta} f(x,y)dx \right| < \varepsilon. \tag{17.29}$$

Пример 17.7. *Покажем, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится неравномерно по параметру p на полуинтервале $[0;1)$, но равномерно на каждом отрезке $[0;p_0]$ $(0 < p_0 < 1)$.*

То, что данный интеграл сходится при любом $0 \le p < 1$, нам уже известно (см. пример 7.12, п. 7.2).

Возьмём произвольное $0 < \delta < 1$ и вычислим

$$\int\limits_0^\delta \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\, x^{1-p}\Big|_0^\delta = \frac{1}{1-p}\, \delta^{1-p}.$$

Если рассматриваем случай $p \in [0;1)$, то, как нетрудно видеть,

$$\sup_{p\in[0;1)} \left\{ \frac{1}{1-p}\, \delta^{1-p} \right\} = +\infty$$

при любом $0 < \delta < 1$, поэтому ни для какого $\varepsilon > 0$ условие (17.29) не может быть выполнено, следовательно, рассматриваемый интеграл сходится неравномерно на $[0;1)$.

Если же $p \in [0;p_0]$, где $0 < p_0 < 1$, то

$$\int\limits_0^\delta \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\, \delta^{1-p} \le \frac{1}{1-p_0}\, \delta^{1-p_0}.$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta_0 = \big((1-p_0)\varepsilon\big)^{\frac{1}{1-p_0}}$. Тогда, если $\delta < \delta_0$, то при любом $p \in [0;p_0]$ будем иметь

$$\int\limits_0^\delta \frac{dx}{x^p} \le \frac{1}{1-p_0}\, \delta^{1-p_0} < \frac{1}{1-p_0}\, \delta_0^{1-p_0} = \varepsilon.$$

Из полученной оценки следует, что рассматриваемый интеграл сходится равномерно на $[0;p_0]$, $0 < p_0 < 1$.

Теорема 17.15. (**Критерий Коши**) *Для того чтобы интеграл (17.28) сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно выполнения следующего условия, называемого условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $0 < \delta', \delta'' < \delta$ и для любого $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon. \tag{17.30}$$

Доказательство этой теоремы практически повторяет доказательство аналогичной теоремы 17.6 для несобственных интегралов первого рода.

Теорема 17.16. (**Вейерштрасс**) *Пусть $f : (a;b] \times Y \to \mathbb{R}$ и для каждого $y \in Y$ и при любом $\delta > 0$ ($\delta < b-a$) существует $\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x,y)dx$. Если найдётся функция $g : (a;b] \to \mathbb{R}$ такая, что $|f(x,y| \le g(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл (17.28) сходится равномерно на множестве Y.*

Доказательство и этой теоремы практически ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы 17.7 для несобственных интегралов первого рода.

Пример 17.8. *Покажем равномерную сходимость интеграла* $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x}$ *на отрезке* $[0; p_0]$, *где* $0 < p_0 < 1$.

Функция sin вогнута на отрезке $[0; \pi/2]$, поэтому её график на этом отрезке располагается не ниже соединяющей концы графика хорды, то есть $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, если $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\frac{1}{\sin^p x} \leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^p \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p_0} \frac{1}{x^{p_0}} < \frac{2}{x^{p_0}}\,.$$

Так как $p_0 < 1$, то $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2}{x^{p_0}} dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{p_0}}$ сходится. По признаку Вейерштрасса рассматриваемый интеграл сходится равномерно на $[0; p_0]$.

Теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру для несобственных интегралов второго рода формулируются и доказываются точно так же, как и для несобственных интегралов первого рода.

17.4 Вычисление некоторых несобственных интегралов

Интеграл Эйлера-Пуассона

Интеграл Эйлера-Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ $(a > 0)$ был рассмотрен и вычислен в главе "Несобственные кратные интегралы". Здесь мы покажем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \tag{17.31}$$

используя технику, опирающуюся на изложенную в настоящей главе теорию.

Сначала покажем, что интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{17.32}$$

Сделаем замену $x = ut$, где $u > 0$, а t — новая переменная. Тогда $dx = udt$, пределы интегрирования останутся теми же, следовательно,

$$I = \int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2t^2} dt.$$

Умножив обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрировав по u от 0 до $= \infty$, получим:

$$I \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)} dt.$$

Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du = I$, то последнее равенство примет вид

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt. \tag{17.33}$$

Поменяем в правой части равенства (17.33) (пока формально) порядок интегрирования.

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du. \tag{17.34}$$

Вычислим внутренний интеграл.

$$\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du = -\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-u^2(1+t^2)}\Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{1}{2(1+t^2)}\ . \tag{17.35}$$

Подставим его значение в (17.34).

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Извлечём корень и получим (17.32).

Осталось доказать возможность изменения порядка интегрирования при переходе от (17.33) к (17.34). Для этого покажем, что выполнены условия теоремы 17.14.

1) Функция $f(u,t) = ue^{-u^2(1+t^2)}$, очевидно, непрерывна и неотрицательна на квадранте $K = [0;\,+\infty) \times [0;\,+\infty)$.

2) Внутренний интеграл в (17.33) $\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt = I \cdot e^{-u^2}$ сходится и является непрерывной на $[0;\,+\infty)$ функцией.

3) Внутренний интеграл в (17.34) $\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du = \dfrac{dt}{2(1+t^2)}$ сходится и является непрерывной на $[0;\,+\infty)$ функцией.

4) Повторный интеграл (17.34) существует.

Итак, все условия теоремы 17.14 выполнены, следовательно, все рассуждения и вычисления, приведшие к (17.32), законны. Чтобы из (17.32) получить (17.31), достаточно сделать замену $x = \sqrt{a}\,\xi$.

Пример 17.9. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-9x^6}dx$.

Сделаем замену $x^3 = t$. Тогда $3x^2dx = dt$. Пределы интегрирования не изменятся. имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-9x^6}dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} e^{-9t^2}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{18}\sqrt{\pi}\ .$$

Интеграл Дирихле

Интегралом Дирихле называют интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$. Покажем,что

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a. \tag{17.36}$$

Очевидно, что $I(0) = 0$. Столь же очевидно, что $I(-a) = -I(a)$. Поэтому остаётся вычислить интеграл Дирихле при $a > 0$. Для этого положим $ax = t$. Тогда $I(a)$ примет вид $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Так что остаётся показать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{17.37}$$

Рассмотрим более общий интеграл

$$J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \ (a \geq 0). \tag{17.38}$$

Он равномерно сходится на множестве $a \geq 0$ (см. пример 17.6), поэтому функция $J(a)$ непрерывна при $a \geq 0$, в частности, при $a = 0$. Продифференцируем (пока формально) интеграл (17.38).

$$J'(a) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x e^{-ax} dx. \tag{17.39}$$

Интеграл (17.39) легко вычисляется двукратным интегрированием по частям. Проделав это, получим:

$$J'(a) = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

Отсюда

$$J(a) = -\int \frac{1}{1 + a^2} da = -\operatorname{arctg} a + C. \tag{17.40}$$

Чтобы определить значение C, совершим предельный переход при $a \to +\infty$, для чего оценим интеграл (17.38).

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right| \leq \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-ax} dx \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{a \to +\infty} J(a) = 0$. Воспользуемся этим в (17.40).

$$\lim_{a \to +\infty} J(a) = C - \frac{\pi}{2} = 0,$$

отсюда $C = \dfrac{\pi}{2}$ и

$$J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a. \tag{17.41}$$

Поскольку $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx = J(0)$, а функция J непрерывна в точке $a = 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \to +0} J(a) = \lim_{a \to +0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Осталось обосновать законность дифференцирования под знаком интеграла, то есть, переход от (17.38) к (17.39). Непрерывность подынтегральных функций в (17.38) и (17.39) очевидна, интеграл (17.38) сходится (и даже равномерно при $a \geq 0$). Покажем равномерную сходимость интеграла (17.39). Но на множестве $\{a: \ a \geq 0\}$ равномерной сходимости быть не может, потому что при $a = 0$ интеграл $J'(0) = \int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$ расходится. Поэтому возьмём любое $a_0 > 0$ и рассмотрим множество $\{a: \ a \geq a_0\}$. Установим равномерную сходимость интеграла (17.39) на этом множестве. Так как $|\sin x e^{-ax}| \leq e^{-a_0 x}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл (17.39) сходится равномерно на множестве $\{a: \ a \geq a_0\}$, поэтому на этом множестве дифференцирование под знаком интеграла законно, а так как $a_0 (> 0)$ — любое, то дифференцирование законно при $a > 0$.

Пример 17.10. *Вычислить* $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^p}{x} dx$ $(p > 0)$.

Положим $x^p = t$ или $x = t^{\frac{1}{p}}$. Тогда $dx = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p} - 1} dt$. Пределы интегрирования останутся прежними, поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p} - 1} dt = \frac{1}{p} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2p}.$$

Интегралы Лапласа

Интегралами Лапласа называют интегралы

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \quad J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx.$$

Покажем, что

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \ (a \geq 0, \ b > 0); \tag{17.42}$$

$$J(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab}\ (a>0,\ b\geq 0). \tag{17.43}$$

Убедимся, прежде всего, в равномерной сходимости каждого из интегралов по параметру a.

Интеграл (17.42) сходится равномерно при $a\geq 0$, так как для подынтегральной функции имеет место оценка $\left|\dfrac{\cos ax}{x^2+b^2}\right|\leq\dfrac{1}{x^2+b^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+b^2}dx$ сходится.

Интеграл (17.43) сходится равномерно при $a\geq a_0$, где $a_0>0$ — любое, по признаку Дирихле, поскольку $\left|\int\limits_0^{A}\sin ax dx\right|\leq\dfrac{2}{a_0}$, а $\dfrac{x}{x^2+b^2}\to 0$ при $x\to+\infty$ монотонно по x и равномерно по a (от a не зависит!).

Продифференцируем (17.42). Тогда

$$I'(a)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx=-J(a). \tag{17.44}$$

Дифференцирование законно при $a>0$, так как доказана равномерная сходимость интеграла (17.43) при $a\geq a_0$, а $a_0>0$ — любое.

Сложим интегралы (17.44) и (17.36),

$$I'(a)+\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx-\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx=b^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx,$$

и снова продифференцируем (дифференцирование законно, потому что выше установлена равномерная при $a\geq 0$ сходимость интеграла (17.42)). Тогда получим:

$$I''(a)=b^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=b^2I(a).$$

Таким образом, искомая функция $I(a)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(a)-b^2I(a)=0$. Это — линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2-b^2=0$ имеет корни $k=\pm b$, поэтому общее решение имеет вид:

$$I(a)=C_1e^{ab}+C_2e^{-ab}. \tag{17.45}$$

Так как

$$|I(a)|=\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx\right|\leq\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\right|dx\leq\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+b^2}=\frac{\pi}{2b},$$

то функция $I(a)$ ограничена на $[0;\ +\infty)$, поэтому в (17.45) $C_1=0$, следовательно,

$$I(a)=C_2e^{-ab}.$$

Положим $a = 0$. Это можно сделать, потому что функция $I(a)$ в точке $a = 0$ непрерывна, так как интеграл (17.42) сходится равномерно при $a \geq 0$. Тогда, с одной стороны, $I(0) = C_2$, а с другой

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b}.$$

Следовательно, $C_2 = \dfrac{\pi}{2b}$ и равенство (17.42) установлено.

А так как $J(a) = -I'(a)$, то

$$J(a) = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Возможность дифференцирования при $a > 0$ была установлена ранее.

Пример 17.11. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x+1} dx.$

Положим $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$. Пределы интегрирования не поменяются, поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x+1} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+1} \cdot 2tdt = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1} dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} e^{-1} = \frac{\pi}{e}\,.$$

Интеграл Фруллани

Пусть функция f определена и непрерывна на $(0;\ +\infty)$, числа $a, b > 0$. Интегралом Фруллани называют интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx. \tag{17.46}$$

По определению несобственного интеграла

$$I(a,b) = \lim_{A\to+\infty,\ \delta\to 0} \int\limits_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{A\to+\infty,\ \delta\to 0} \left(\int\limits_\delta^A \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_\delta^A \frac{f(bx)}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty,\ \delta\to 0} \left(\int\limits_\delta^A \frac{f(ax)}{ax} d(ax) - \int\limits_\delta^A \frac{f(bx)}{bx} d(bx) \right) = \lim_{A\to+\infty,\ \delta\to 0} \left(\int\limits_{a\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{b\delta}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt \right).$$

Применяя свойство аддитивности интеграла по множеству, получим:

$$I(a,b) = \lim_{A\to+\infty,\ \delta\to 0} \left(\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt + \int\limits_{b\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{b\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt \right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{17.47}$$

Накладывая на функцию $f(x)$ дополнительные условия, вычислим каждый из пределов в правой части.

1) Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(+0)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$.

Применим к каждому из интегралов в правой части (17.47) первую обобщённую теорему о среднем. Рассмотрим сначала первый интеграл. Так как $f(t)$ непрерывна, а $g(t) = 1/t$ неотрицательна, то найдётся такое $\tau \in [a\delta;\ b\delta]$, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt = \lim_{\delta\to 0} f(\tau)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t} = \lim_{\delta\to 0} f(\tau)\ln t\,\Big|_{a\delta}^{b\delta} = f(+0)\ln\frac{b}{a}.$$

Точно так же, для второго интеграла найдётся $\tau \in [aA;\ bA]$ такое, что

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt = \lim_{A\to+\infty} f(\tau)\int\limits_{aA}^{bA}\frac{dt}{t} = \lim_{A\to+\infty} f(\tau)\ln t\,\Big|_{aA}^{bA} = f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

Следовательно, если функция f непрерывна на $(0;\ +\infty)$ и имеет конечные пределы $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(+0)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \big(f(+0)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

2) Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(+0)$ и при некотором $A_1 > 0$ интеграл $\int\limits_{A_1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ сходится.

Покажем, что $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt = 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Если интеграл сходится, то по критерию Коши найдётся A_0 $(> A_1)$ такое, что $\left|\int\limits_{A'}^{A''}\frac{f(t)}{t}dt\right| < \varepsilon$ при $A', A'' > A_0$. Тогда, если взять A настолько большим, чтобы выполнялось $aA, bA > A_0$, то будет выполняться и $\left|\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt\right| < \varepsilon$, и требуемое установлено.

Следовательно, если функция $f(x)$ непрерывна на $(0;\ +\infty)$, имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(+0)$ и при некотором $A_1 > 0$ интеграл $\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ сходится, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(+0)\ln\frac{b}{a}.$$

3) Пусть существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и найдётся $A_1 > 0$ такое, что интеграл $\int\limits_0^{A_1}\frac{f(x)}{x}dx$ сходится.

Тогда совершенно аналогично предыдущему доказывается,что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

4) Пусть интегралы $\int\limits_0^{A_1} \frac{f(x)}{x}dx$ и $\int\limits_{A_2}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ оба сходятся при некоторых $A_1, A_2 > 0$. Тогда, как следует из ранее доказанного,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = 0.$$

Пример 17.12. *Вычислить* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{2x}}}{x}dx$.

В этом примере функция $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ непрерывна на $[0;\,+\infty)$ и $f(0) = 1$, а $f(+\infty) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{2x}}}{x}dx = (1-0)\ln\frac{2}{1} = \ln 2.$$

Пример 17.13. *Вычислить* $I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx$.

Если $b = \pm a$, то интеграл принимает вид $I(a,b) = \pm\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x}dx$ и, очевидно, расходится. Поэтому в дальнейшем считаем $b \neq \pm a$.

Преобразуем подинтегральную функцию, используя формулу произведения синусов и чётность косинуса. Имеем:

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos|a-b|x - \cos|a+b|x}{x}dx.$$

Получили интеграл Фруллани с $f(x) = \cos x$. Косинус непрерывен на $[0;+\infty)$, $\cos 0 = 1$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ сходится по признаку Дирихле. В силу наложенного выше требования $|a+b|,\ |a-b| > 0$.

Итак, выполнены все условия пункта 2), поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-b}{a+b}\right|,\ b \neq \pm a.$$

17.5 Эйлеровы интегралы

Гамма-функция и её свойства

Гамма-функцией Эйлера или эйлеровым интегралом второго рода называют интеграл

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{17.48}$$

Изучим свойства гамма-функции.

1) *Функция* $\Gamma(x)$ *определена в области* $x > 0$.

Интеграл (17.48) — смешанный несобственный интеграл с особыми точками $t = 0$ и $t = +\infty$. Чтобы исследовать интеграл на сходимость, разобьём его на два интеграла,

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^{1} t^{x-1}e^{-t}dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

и исследуем на сходимость каждый в отдельности из стоящих справа интегралов.

Для первого интеграла, очевидно, $t^{x-1}e^{-1} \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$, поэтому для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $1 - x < 1$ или $x > 0$.

Для второго интеграла имеем оценку:

$$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1} \cdot \frac{1}{t^{x+1}} = \frac{1}{t^2}, \quad t \ge t_0(x),$$

(функция e^{-t} при $t \to +\infty$ убывает быстрее любой степени $1/t$), поэтому он сходится при любом значении x.

Итак, интеграл (17.48) при $x > 0$ сходится, а при $x \le 0$ расходится.

2) *Функция* $\Gamma(x)$ *непрерывна в области* $x > 0$.

Покажем, что интеграл (17.48) сходится равномерно на отрезке $[x_1; x_2]$, при любых x_1, x_2 $(0 < x_1 < x_2 < +\infty)$. Это следует из того, что при $x_1 \le x \le x_2$ справедлива оценка

$$t^{x-1}e^{-t} \le e^{-t}(t^{x_1-1} + t^{x_2-1})$$

(показательная функция t^{x-1} монотонна, а потому достигает наибольшего значения на одном из концов отрезка), и из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(t^{x_1-1} + t^{x_2-1}\right) e^{-t}dt,$$

установленной в свойстве 1. По теореме 17.10 функция Γ непрерывна на отрезке $[x_1;\ x_2]$, а так как для каждого $x > 0$ найдутся $x_1, x_2 > 0$ такие, что $x_1 < x < x_2$, то функция Γ непрерывна в области $x > 0$.

3) *Функция* $\Gamma(x)$ *бесконечно дифференцируема в области* $x > 0$.

Покажем, что функция $\Gamma(x)$ дифференцируема в области $x > 0$. Дифференцируя, пока формально, под знаком интеграла, получим:

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t \cdot e^{-t}dt. \tag{17.49}$$

Чтобы оправдать дифференцирование, необходимо проверить выполнение условий теоремы 17.13. Непрерывность обеих подынтегральных функций очевидна, сходимость интеграла (17.48) установлена в свойстве 1. Остаётся показать равномерную сходимость интеграла (17.49). Как и при доказательстве предыдущего свойства, возьмём произвольные $x_1,\ x_2$ $(0 < x_1 < x_2 < +\infty)$ и оценим на отрезке $[x_1;\ x_2]$ подынтегральную функцию интеграла (17.49).

$$\left|t^{x-1}\ln t e^{-t}\right| \le e^{-t}|\ln t|\left(t^{x_1-1}+t^{x_2-1}\right). \tag{17.50}$$

Так как $|\ln t|$ при $t\to+0$ возрастает медленнее любой положительной степени $1/t$, то найдётся $t_1>0$ такое, что при $t<t_1$ будет справедлива оценка $|\ln t|<1/t^{x_1/2}$, поэтому при $t<t_1$ для первого слагаемого в (17.50) имеем оценку:

$$t^{x_1-1}|\ln t|e^{-t} < t^{\frac{x_1}{2}-1}e^{-t}.$$

На отрезке $[x_1;1]$ функция $|\ln t|$ ограничена, поэтому найдётся такая постоянная M, что на этом отрезке $|\ln t|<M$, следовательно,

$$t^{x_1-1}|\ln t|e^{-t} < Mt^{x_1-1}e^{-t} < Mt^{\frac{x_1}{2}-1}e^{-t}.$$

Считая $M\ge 1$, из двух последних оценок делаем вывод, что на отрезке $[0;1]$

$$t^{x_1-1}|\ln t|e^{-t} < Mt^{\frac{x_1}{2}-1}e^{-t}. \tag{17.51}$$

При $t\ge 1$ справедлива оценка $\ln t<t$, поэтому при этих значениях t имеем:

$$t^{x_2-1}|\ln t|e^{-t} < t^{x_2}e^{-t} \le Mt^{x_2}e^{-t}. \tag{17.52}$$

Используя (17.51), (17.52) и продолжая оценку (17.50), получаем

$$\left|t^{x-1}\ln t e^{-t}\right| < M\left(t^{\frac{x_1}{2}-1}+t^{x_2}\right)e^{-t}.$$

Так как интеграл от правой части последнего неравенства сходится (свойство 1), то интеграл (17.49) сходится равномерно на отрезке $[x_1;\ x_2]$, поэтому дифференцирование на этом отрезке законно, а поскольку x_1, x_2 произвольны, то дифференцирование законно при любом $x>0$.

По индукции с помощью аналогичных рассуждений доказывается существование у гамма-функции производных любого порядка.

4) *Для любого $x>0$ справедлива формула*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{17.53}$$

называемая формулой приведения.

Справедливость равенства (17.53) легко устанавливается интегрированием по частям. Пусть $x>0$. Тогда

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Следствие 17.2. *Если $n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 1$, то*

$$\Gamma(n+p) = (n-1+p)(n-2+p)\dots p\Gamma(p). \tag{17.54}$$

Формула (17.54) легко получается многократным применением формулы приведения и позволяет сводить вычисление значений гамма-функции от любого значения аргумента к вычислению её значений от аргумента, заключённого между нулём и единицей.

5) $\Gamma(1) = 1$.

Действительно,

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Следствие 17.3.

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{17.55}$$

Формула (17.55) получается из формулы (17.54) при $p = 1$ и показывает, что функция $\Gamma(x)$ является естественным продолжением функции $n!$ с множества натуральных чисел на множество положительных чисел.

6) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Действительно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int\limits_0^{+\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2u du = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}.$$

(В процессе вычислений была сделана подстановка $t = u^2$ и использован интеграл Эйлера-Пуассона (16.85).)

7) *Справедлива формула*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1, \tag{17.56}$$

называемая формулой дополнения.

Эта формула будет доказана позже (см. 19.75).

8) *Продолжение гамма-функции в область отрицательных чисел.*

Перепишем формулу приведения в виде

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{17.57}$$

Пусть $x \in (-1;\ 0)$. Тогда $x + 1 \in (0;\ 1)$ и с помощью формулы (17.57) можно задать гамма-функцию на интервале $(-1;\ 0)$. Теперь рассмотрим $x \in (-2;\ -1)$. Тогда $x + 1 \in (-1;\ 0)$ и, поскольку на интервале $(-1;\ 0)$ гамма-функция уже определена, с помощью формулы (17.57) можно задать гамма-функцию на интервале $(-2;\ -1)$. Повторяя описанный процесс неограниченно, мы определим гамма-функцию на множестве отрицательных чисел за исключением точек $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$

Процесс продолжения гамма-функции в область отрицательных чисел можно оформить немного иначе. Возьмём $x \in (-(n+1);\ -n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $x + n + 1 \in (0;\ 1)$. По аналогии с формулой (17.54) напишем:

$$\Gamma(n+1+x) = (n+x)(n-1+x)\ldots(1+x)x\Gamma(x)$$

или

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(n+1+x)}{(n+x)(n-1+x)\ldots(1+x)x}, \tag{17.58}$$

и будем считать, что функция $\Gamma(x)$ определена на $(-(n+1);\ -n)$ с помощью формулы (17.58).

Поскольку оба описанных процесса продолжения гамма-функции основаны на использовании формулы приведения, то они дают один и тот же результат (проверьте!).

9) *График функции* $\Gamma(x)$.

Рассмотрим сначала $x > 0$. Очевидно, что $\Gamma(x) > 0$. Также очевидно, что и $\Gamma''(x) > 0$, поэтому функция $\Gamma(x)$ — выпуклая, а её производная $\Gamma'(x)$ — функция возрастающая и обратиться в ноль может только один раз. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля найдётся $x_0 \in (1;\ 2)$ такое, что $\Gamma'(x_0) = 0$. В этой точке функция $\Gamma(x)$ имеет минимум. Подсчитано (см. [5], п.531), что $x_0 = 1,4616...$, $\Gamma(x_0) = 0,8856...$. Так как при $x > x_0$ функция $\Gamma(x)$ монотонно возрастает и $\Gamma(n+1) = n!$, то при $x \to +\infty$ также и $\Gamma(x) \to +\infty$. Из формулы (17.57) следует, что если $x \to +0$, то $\Gamma(x) \to +\infty$. Этих сведений достаточно для построения графика $\Gamma(x)$ при $x > 0$.

Пример 17.14. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$.

Произведём замену $x = t^{1/4}$. Тогда $dx = \dfrac{1}{4}x^{-3/4}dt$. Пределы интегрирования сохранятся. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Пример 17.15. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{1} x \ln\frac{1}{x} dx$.

Выполним замену $\ln\dfrac{1}{x} = t$. Тогда

$$x = e^{-t},\ dx = -e^{-t}dt,\ x = 0 \Rightarrow t = +\infty,\ x = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{1} x\ln\frac{1}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} te^{-2t}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}(2t)e^{-2t}d(2t) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u}du = \frac{1}{4}\Gamma(2) = \frac{1}{4}\,.$$

Бета-функция и её свойства

Бета-функцией или эйлеровым интегралом первого рода называют интеграл

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{17.59}$$

Изучим свойства этого интеграла.

1) *Функция* $B(x,y)$ *определена в области* $x > 0,\ y > 0$.

Интеграл (17.59) — несобственный интеграл второго рода с особыми точками $t = 0$ и $t = 1$. Чтобы исследовать его сходимость, разобьём промежуток интегрирования на две части.

$$B(x,y) = \int\limits_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int\limits_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

На первом промежутке функция $(1-t)^{y-1}$ непрерывна, следовательно, ограничена, поэтому $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \le M(y)t^{x-1}$.

На втором промежутке непрерывна, а значит ограничена функция t^{x-1}, поэтому

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \le M_1(x)(1-t)^{x-1}.$$

Применив признак Вейерштрасса, устанавливаем сходимость обоих интегралов при $x > 0$, $y > 0$ соответственно.

2) $B(x, y) = B(y, x)$.

В справедливости этого свойства нетрудно убедиться, сделав в (17.59) замену $t = 1-\tau$.

3) *Справедлива формула*

$$B(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \tag{17.60}$$

называемая вторым интегральным представлением бета-функции.

Чтобы убедиться в этом, сделаем в интеграле (17.59) подстановку $t = \dfrac{\tau}{1+\tau}$. Тогда $1 - t = \dfrac{1}{1+\tau}$, $dt = \dfrac{d\tau}{(1+\tau)^2}$, $t = 0$ перейдёт в $\tau = 0$, $t = 1$ перейдёт в $\tau = +\infty$, поэтому

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^{y-1} \frac{d\tau}{(1+\tau)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

4) *Для любых $x > 0$, $y > 0$ имеет место равенство*

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y), \tag{17.61}$$

называемое формулой приведения для бета-функции.

Для доказательства произведём в (17.61) интегрирование по частям, положив $u = t^x$, $dv = (1-t)^{y-1}dt$. Тогда $du = xt^{x-1}$, $v = -\dfrac{1}{y}(1-t)^y$ и

$$B(x+1, y) = \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt = -\frac{1}{y} t^x (1-t)^y \Big|_0^1 + \frac{x}{y} \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt =$$

$$= \frac{x}{y} \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt = \frac{x}{y} \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - \frac{x}{y} \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt =$$

$$= \frac{x}{y} B(x, y) - \frac{x}{y} B(x+1, y).$$

Перенеся второе слагаемое справа налево и сложив, найдём:

$$\frac{x+y}{y} B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y),$$

откуда после деления и получается формула приведения.

Так как функция $B(x, y)$ симметрична относительно своих аргументов, то справедливо также и равенство

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y). \tag{17.62}$$

Действительно,

$$B(x,y+1)=B(y+1,x)=\frac{y}{y+x}B(y,x)=\frac{y}{x+y}B(x,y).$$

5) *Между функциями $B(x,y)$ и $\Gamma(x)$ существует тесная связь, выражаемая формулой*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{17.63}$$

В интегральном представлении (17.48) совершим подстановку $t=u\tau$, где τ — новая переменная, а $u>0$. Тогда

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}(u\tau)^{x-1}e^{-u\tau}ud\tau=u^x\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x-1}e^{-u\tau}d\tau.$$

Так как в этом равенстве никаких условий, кроме положительности, нет, то можно подставить в него $x+y$ вместо x и $1+u$ вместо u. Получим:

$$\Gamma(x+y)=(1+u)^{x+y}\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}d\tau.$$

Разделим обе части на множитель, стоящий перед интегралом.

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}}=\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}d\tau.$$

Умножим обе части последнего равенства на u^{x-1} и затем проинтегрируем по u в пределах от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(x+y)\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}=u^{x-1}\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}d\tau, \tag{17.64}$$

$$\Gamma(x+y)\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}=\int\limits_0^{+\infty}u^{x-1}du\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}d\tau. \tag{17.65}$$

Интеграл в левой части последнего равенства есть $B(x,y)$ (см. (17.60)), а в правой части произведём перемену порядка интегрирования. Тогда

$$\Gamma(x+y)B(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}d\tau\int\limits_0^{+\infty}u^{x-1}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}du=\int\limits_0^{+\infty}d\tau\int\limits_0^{+\infty}(\tau u)^{x-1}\tau^{y-1}e^{-\tau}e^{-\tau u}\tau du. \tag{17.66}$$

Вынесем множитель $\tau^{y-1}e^{-\tau}$ из под знака внутреннего интеграла, после чего совершим в нём подстановку $\tau u=v$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+y)B(x,y) &= \int\limits_0^{+\infty}\tau^{y-1}e^{-\tau}d\tau\int\limits_0^{+\infty}(\tau u)^{x-1}e^{-\tau u}d(\tau u)=\\ &= \int\limits_0^{+\infty}\tau^{y-1}e^{-\tau}d\tau\int\limits_0^{+\infty}v^{x-1}e^{-v}dv=\Gamma(y)\Gamma(x).\end{aligned} \tag{17.67}$$

После деления на $\Gamma(x+y)$ из (17.67) получается (17.63).

Осталось обосновать законность изменения порядка интегрирования при переходе от (17.65) к (17.66). Для этого необходимо проверить выполнение условий теоремы 17.14. Сделаем это, считая, что $x > 1$, $y > 1$.

1) Очевидно, что подынтегральная функция $f(u,\tau) = u^{x-1}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}$ (см. (17.66)) непрерывна при изменении u и τ от нуля до плюс бесконечности.

2) Первый внутренний интеграл (см. (17.66), (17.65))

$$I(u) = u^{x-1}\int\limits_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(1+u)\tau}d\tau = \Gamma(x+y)\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$$

существует и является непрерывной функцией от u на $[0;\ +\infty)$.

3) Второй внутренний интеграл (см. (17.67))

$$J(\tau) = \tau^{y-1}e^{-\tau}\int\limits_0^{+\infty}(\tau u)^{x-1}e^{-\tau u}d(\tau u) = \tau^{y-1}e^{-\tau}\Gamma(x)$$

существует и является непрерывной функцией от τ на $[0;\ +\infty)$.

4) Второй повторный интеграл (см. (17.67))

$$\int\limits_0^{+\infty}\tau^{y-1}e^{-\tau}d\tau\int\limits_0^{+\infty}(\tau u)^{x-1}e^{-\tau u}d(\tau u) = \Gamma(y)\Gamma(x)$$

существует.

Следовательно, формула (17.63) доказана при $x > 1$, $y > 1$.

Пусть теперь $x > 0$, $y > 0$. Тогда $x+1 > 1$, $y+1 > 1$ и по доказанному

$$B(x+1,y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}.$$

Воспользуемся формулами приведения (17.53), (17.54), (17.61), (17.62).

$$B(x+1,y+1) = \frac{x}{x+y+1}B(x,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}B(x,y).$$

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}.$$

Так как левые части этих формул равны, то равны и правые. Приравнивая их и сокращая на общие множители, получим (17.63).

6) *Функция $B(x,y)$ непрерывна в области $x > 0$, $y > 0$.*

7) *Функция $B(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $x > 0$, $y > 0$.*

Эти свойства являются следствиями формулы (17.63) и соответствующих свойств гамма-функции.

8) *Для $0 < x < 1$ справедлива формула дополнения*

$$B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Действительно, используя формулы (17.56) и (17.63), имеем:

$$B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Пример 17.16. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+x^2)^3}dx.$

Сделаем подстановку $x^2 = t$, или $x = t^{1/2}$. Тогда $dx = \dfrac{1}{2}t^{-1/2}dt$, пределы интегрирования останутся прежними. Имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+x^2)^3}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{3/8}}{(1+t)^3}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-1/8}}{(1+t)^3}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{8};\frac{17}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{17}{8}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{2!} = \frac{9}{256}\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{256}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}\,.$$

Пример 17.17. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^8 x\cos^2 x\,dx.$

Произведём замену $\sin^2 x = t$. Тогда $2\sin x\cos x\,dx = dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$, поэтому

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^8 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)^{7/2}\left(\cos^2 x\right)^{1/2}(2\sin x\cos x\,dx) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} t^{7/2}(1-t)^{1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!} = \frac{7\pi}{2^9}\,.$$

Пример 17.18. *Вычислить интеграл* $K = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\,dx.$

Рассмотрим интеграл $I(p) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^3}\,dx$. Данный интеграл сходится, если $0 < p < 3$, и может быть сведён к бета-функции подстановкой $x^3 = t$.

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^3}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{(p-1)/3}}{1+t}\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p/3-1}}{1+t}dt = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{p}{3};1-\frac{p}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sin\pi\frac{p}{3}}\,.$$

Продифференцируем $I(p)$ (возможность дифференцирования под знаком интеграла обосновывается в точности так же, как и при доказательстве свойства 3 о бесконечной дифференцируемости гамма-функции).

$$I'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x^3}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{\sin^2\pi\frac{p}{3}}\right)\cdot\cos\pi\frac{p}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{\cos\pi\frac{p}{3}}{\sin^2\pi\frac{p}{3}}\,.$$

Осталось отметить, что

$$K = I'(1) = -\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi^2}{27}\,.$$

17.6 Задачи.

1. Проверить непрерывность на вещественной оси функций:

   а) $F(y)=\int\limits_0^1 \sin(x^2y)dx$; б) $F(y)=\int\limits_{-1}^2 \frac{x^2dx}{1+x^2+x^4y^2}$.

2. Пусть f непрерывна и положительна на $[0;\ 1]$. Доказать, что функция

$$F(a)=\int\limits_0^1 \frac{a}{x^2+a^2}f(x)dx$$

   терпит разрыв в точке $a=0$.

3. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла, вычисляя

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx?$$

4. Доказать возможность предельного перехода под знаком интеграла в следующих выражениях: а) $\lim\limits_{y\to o}\int\limits_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{x+y}\right)dx$; б) $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\sin\frac{x^2}{y}dx$.

5. Вычислить:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+(1+x/n)^n}$; б) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}dx$; в) $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{y}{x+y}e^{-x^2y}dx$;

   г) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{\sin(xy)}{(x+y)y+1}dx$; д) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{x+y}\right)dx$.

6. Можно ли изменить порядок интегрирования в интегралах:

   а) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} dy\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dx$; б) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx$?

7. Можно ли вычислить производную функции $F(a)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+a^2)dx$ при $a=0$, дифференцируя по параметру под знаком интеграла?

8. Исследовать возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла в интеграле $F(y)=\int\limits_{-1}^1 \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^2+|y|+2}$.

9. Найти $F'(y)$, если:

   а) $F(y)=\int\limits_1^3 \frac{\cos(x^3y)}{x}dx$; б) $F(y)=\int\limits_2^3 \operatorname{ch}(x^2y^4)\cdot\frac{dx}{x}$.

10. Найти $F'(y)$, если:

а) $F(y) = \int\limits_{y}^{2y} \frac{\sin(xy)}{x} dx$; б) $F(y) = \int\limits_{3y}^{y^2} e^{x^2 y} dx$;

в) $F(y) = \int\limits_{ye^{-y}}^{ye^{y}} \ln(1 + x^2 y^2) dx$; г) $F(y) = \int\limits_{\cos y}^{\sin y} \operatorname{sh}(x^2 y) dx$.

11. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Доказать, что функция $F(y) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} f(x + y) dx$:

а) непрерывна на $\mathbb{R}$; б) дифференцируема на $\mathbb{R}$.

12. Пусть $f \in C(\Pi)$, $\Pi = [a;\ b] \times [c;\ d]$, а $g \in R[a;\ b]$. Доказать, что функция $F(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y) g(x) dx$ непрерывна на $[c;\ d]$.

13. Пусть $f \in C(\Pi)$, $\Pi = [a;\ b] \times [c;\ d]$, а $g \in R[a;\ b]$. Доказать, что $F(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y) g(x) dx$ интегрируема на $[c;\ d]$ и справедливо равенство $\int\limits_{c}^{d} F(y) dy = \int\limits_{a}^{b} g(x) dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y) dx$.

14. Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$, $\Pi = [a;\ b] \times [c;\ d]$, а $g \in R[a;\ b]$. Доказать, что функция $F(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y) g(x) dx$ непрерывно дифференцируема на $[c;\ d]$.

15. Вычислить:

а) $I(a) = \int\limits_{0}^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2) dx$; б) $I(a) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) dx$.

16. Исследовать на равномерную сходимость на указанных множествах интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}} dx$ $(0 \leq y < +\infty)$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^p(x^2 + 1)}{x\sqrt{x - 1}} dx$ $(0,1 \leq p \leq 10)$;

в) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} (1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty)$; г) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\,|\ln x|^\alpha}$ $(1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty)$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^\alpha e^{-2x} dx$ $(1 \leq \alpha \leq 3)$; д) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + (x - \alpha)^4}$ $(-\infty < \alpha \leq \alpha_0 < 0)$;

е) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}(\alpha x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\ (-2<\alpha<+\infty)$; ж) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}dx\ (\alpha\in\mathbb{R})$;

з) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx\ \left(-\infty<\alpha<\frac{1}{2}\right)$.

17. Доказать равномерную сходимость на указанных множествах следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cos(\alpha x)dx\ (0<\alpha_0\le\alpha<+\infty)$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin(2x)\sin\frac{\alpha}{x}dx\ (0\le\alpha\le 1)$;

в) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2}\sin(\alpha x)dx\ (0<\alpha_0\le\alpha<+\infty)$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^5)}{x}dx\ (0<\alpha_0\le\alpha<+\infty)$;

д) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos(\alpha x^2)dx\ (1\le\alpha<+\infty)$; е) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^\alpha}dx\ (0\le\alpha<+\infty)$;

ж) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}(\alpha x)dx\ (|\alpha|\ge 1)$; з) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+x^\alpha}dx\ (0\le\alpha<+\infty)$.

18. Исследовать на равномерную сходимость на указанных множествах следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}\ (1<\alpha<+\infty)$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x-x)}{x^\alpha}dx\ (2<\alpha<+\infty)$;

в) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{y}{y+1}\operatorname{arctg}(xy)dx\ (0<y<+\infty)$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^\alpha+1}\ (0\le\alpha<+\infty)$;

д) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{yx^y}dx\ (1<y<+\infty)$; е) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x+y}\cos(x^2+y)dx\ (y>0)$;

ж) $\displaystyle\int\limits_0^{1} y\cos\frac{1}{x^2}dx\ (|y|<+\infty)$; з) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{y-1}\ln(1-x)dx\ (y>0)$;

и) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}\ (0<\alpha<2)$.

19. Пусть $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится ($a\ge 0$). Доказать, что на $[0;\ +\infty)$ равномерно сходятся интегралы: а) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx$; б) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x^2}f(x)dx$.

20. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно. Доказать, что при $|y| < +\infty$ равномерно и абсолютно сходятся интегралы: а) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin(x^2+y^2)dx$; б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\operatorname{arctg}(xy)dx$.

21. Пусть $f:\ [a;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ $(a \geq 0)$, интегрируема на $[a;\ A]$ для любого $A(> a)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(xy)dx$ сходится равномерно на $[y_0;\ +\infty)$ $(y_0 > 0)$. Доказать.

22. Исследовать функцию $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\pi/4}(x^2+y^2+1)}$ на непрерывность.

23. Проверить непрерывность на указанных множествах следующих функций:

а) $F(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$ $(a \in \mathbb{R})$; б) $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx$ $(a \in \mathbb{R})$;

в) $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha x^2)dx$ $(\alpha \in (0;\ +\infty))$; г) $F(a) = \int\limits_0^1 \frac{\sin(a/x)}{x^a}dx$ $(a \in (0;\ 1))$;

д) $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+a)^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}+1}dx$ $(a \in [1;\ 2])$; е) $F(a) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x+a}}dx$ $(a \in [1;\ +\infty))$;

ж) $F(a) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{x^a(\pi-x)^a}$ $(a \in (0;\ 2))$; з) $F(a) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^a x}$ $(a \in [0;\ 1))$;

и) $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^a}$ $(a \in (2;\ +\infty))$; к) $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{|\sin x|^a}$ $(a \in (0;\ 1))$.

24. Пусть $f:\ [0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема на [0; A] для любого $A > 0$. Тогда функция $F(y) = \int\limits_y^{+\infty} f(xy)dx$ непрерывна на $(0;\ +\infty)$.

25. Вычислить:

а) $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\frac{\sin(2tx)}{x}dx$; б) $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx$.

26. Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1$; б) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^a}dx = 1$;

в) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+a^2x^2} = 0$; г) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{\pi}{2}$.

27. Законен ли переход к пределу при $\alpha \to 0$ в интеграле $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$?

28. Доказать, что если f непрерывна и ограничена на $[0;\ +\infty)$, то

$$\lim_{a\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{af(x)}{x^2+a^2} dx = f(0).$$

29. Допустима ли перестановка порядка интегрирования в интегралах:

а) $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_0^{1} \frac{y-x}{(x+y)^3} dx$?

30. Доказать дифференцируемость на $\mathbb{R}$ функции $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+(x-a)^2}$.

31. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ $(a, b > 0)$;

в) $\int\limits_0^{1} \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ $(a, b > 0)$; г) $\int\limits_0^{1} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ $(a, b > 0)$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx$ $(|a| \le 1)$.

32. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+x^2)} dx$.

33. Используя результат предыдущего примера, показать, что:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

34. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$ $(a, b > 0)$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ $(a > 0)$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch}(bx) dx$ $(a > 0)$; г) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \frac{\operatorname{sh}(bx)}{x} dx$ $(a > 0)$; д) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx$ $(a > 0)$;

е) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ $(a > 0)$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha/x^2} - e^{-\beta/x^2}\right) dx$ $(\alpha, \beta > 0)$.

35. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2(ax)-\cos^2(bx)}{x}dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)+\cos(bx)-2}{x^2}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2\sin(ax)-\sin(2ax)}{x^3}dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)-\sin^4(bx)}{x}dx$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4}dx$;

з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^3)}{x}dx$; и) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}dx$; к) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$; л) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}dx$;

м) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}e^{-bx}dx$ $(b>0)$; н) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^2(bx)\frac{dx}{x}$ $(a>0)$;

о) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos x dx$ $(a,b>0)$; п) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ax)}{x}e^{-bx}dx$ $(b>0)$.

36. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2(ax)}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)}{ax^2+2bx+c}dx$ $(a>0,\ ac-b^2>0)$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2(1+x^2)}dx$.

37. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x^q}dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^p\frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_0^{1} x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^5 dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}e^{px}dx$; д) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$; е) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$;

ж) $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{(2-x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$; и) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x}dx$;

к) $\int\limits_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$; л) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+a^2}$; м) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$.

18 Криволинейные интегралы

Здесь мы распространим понятие одномерного определённого интеграла Римана, взятому по отрезку вещественной оси, на случай, когда областью интегрирования является дуга некоторой кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Такие интегралы называются *криволинейными*.

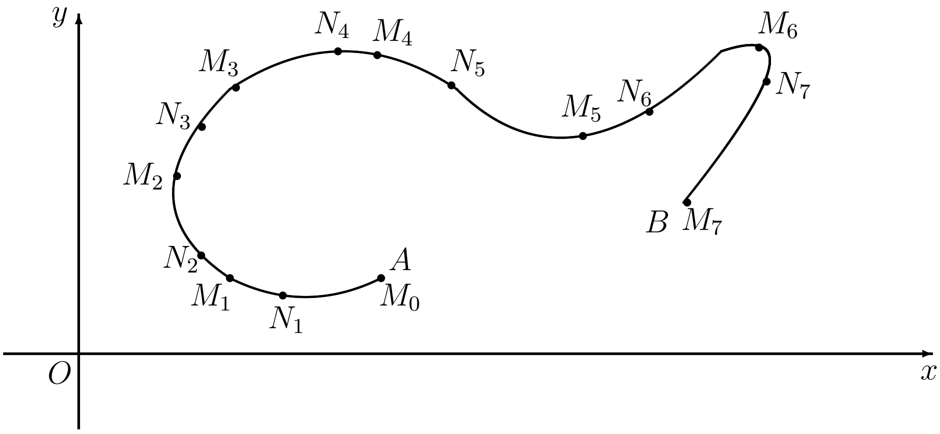

Рис. 35: Масса кривой.

При введении определённого интеграла мы рассмотрели несколько задач, приводящих к понятию этого интеграла. В частности, были рассмотрены задача о вычислении массы неоднородного стержня и задача о вычислении работы переменной силы.

Аналогичные пространственные задачи приводят нас к понятию криволинейного интеграла. Рассматривают криволинейные интегралы двух видов (от выражений, имеющих скалярный и векторный смысл).

Для простоты изложения мы ограничимся случаем $n = 2$.

18.1 Криволинейные интегралы первого рода

Начнём с физической задачи, приводящей к понятию криволинейного интеграла первого рода.

Пусть на плоскости Oxy дана простая спрямляемая кривая L, ограниченная точками A и B (рис. 35).

Предположим, что вдоль кривой расположена масса с линейной плотностью $\rho = \rho(N)$. Требуется определить массу m всей кривой L.

С этой целью разобьём кривую L точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_p = B$ на p частичных дуг $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{p-1}M_p$. Мы считаем, что эти точки перенумерованы в направлении от A к B.

Пусть $\Delta\ell_k$ обозначает длину частичной дуги $M_{k-1}M_k$, а $\lambda = \max\{\Delta\ell_k : k = 1, 2, \dots, p\}$.

Возьмём теперь на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку N_k и будем считать плотность во всех точках дуги $M_{k-1}M_k$ равной $\rho(N_k)$. Тогда масса этой дуги приближённо будет равно произведению $\rho(N_k) \cdot \Delta\ell_k$, а искомая масса m всей кривой L —

$$m \approx \sum_{k=1}^{p} \rho(N_k) \cdot \Delta\ell_k.$$

Очевидно, что точная величина массы равна пределу при $\lambda \to 0$ приближённого значения, то есть

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \rho(N_k) \cdot \Delta\ell_k.$$

Отвлекаясь теперь от конкретной задачи, будем рассматривать пределы такого вида. Точнее, пусть имеется простая спрямляемая кривая L и функция $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$. Повторим указанный выше процесс (см. рис. 35): разобьём кривую L на частичные дуги $M_{k-1}M_k$, выберем на каждой из них произвольную точку N_k и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta\ell_k, \tag{18.1}$$

где (ξ_k, η_k) — координаты точки N_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Определение 18.1. *Число I называют пределом интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L с $\lambda < \delta$ при любом выборе точек N_k на частичных дугах $M_{k-1}M_k$ справедлива оценка*

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Этот предел называют криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначают символом

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl \quad \textit{или} \quad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl.$$

Из вида интегральной суммы (18.1) следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается кривая L, то есть справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl. \tag{18.2}$$

Поэтому можно дать определение криволинейного интеграла первого рода по замкнутой кривой, если взять за $A(B)$ любую её точку, а точки M_k расположить в соответствии с тем или другим направлением на кривой.

Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода

Пусть кривая L определена параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (a \le t \le b). \tag{18.3}$$

Определение 18.2. *Кривую L называют гладкой, если функции φ и ψ из определяющих её уравнений (18.3) имеют на сегменте $[a,b]$ непрерывные производные φ' и ψ', причём ${\varphi'}^2(t) + {\psi'}^2(t) \neq 0$.*

Напомним, что гладкая кривая — спрямляема (теорема 8.1), а её длина может быть вычислена по одной из формул: (8.5), (8.17), (8.18).

Определение 18.3. *Кривая L называется кусочно-гладкой, если существует конечное разбиение её на гладкие кривые.*

Точка кривой L, соответствующая значению параметра $t \in [a,b]$, называется *особой точкой*, если нарушается непрерывность φ' и (или) ψ' в этой точке или обе они обращаются в ноль.

Теорема 18.1. *Пусть простая гладкая кривая $L = AB$ задана уравнениями (18.3) и не имеет особых точек, а функция $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на L. Тогда криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ существует и справедливо равенство*

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt. \tag{18.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что определённый интеграл, стоящий в правой части (18.4), существует, так как при сделанных предположениях его подынтегральная функция непрерывна. Обозначим этот интеграл буквой I.

Возьмём теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на нём. Поэтому найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех $t', t'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедлива оценка

$$\Bigl|f\bigl(\varphi(t'),\psi(t')\bigr) - f\bigl(\varphi(t''),\psi(t'')\bigr)\Bigr| < \frac{\varepsilon}{\ell}, \tag{18.5}$$

где ℓ — длина дуги кривой L.

Из условия следует, что функция $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}$ непрерывна и положительна на сегменте $[a,b]$. Поэтому

$$\min\left\{\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} : t \in [a,b]\right\} = q > 0. \tag{18.6}$$

Возьмём теперь любое разбиение кривой L точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_p = B$, удовлетворяющее условию $\lambda < \delta q$, и на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольно точку N_k.

Поскольку кривая L является простой, то данному разбиению кривой L соответствует единственное разбиение T сегмента $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p = b$, а каждой точке N_k — единственная точка $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Следовательно, точки M_k и N_k имеют координаты $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ и $(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))$ соответственно.

Очевидно, что каждая частичная дуга $M_{k-1}M_k$ кривой L спрямляема. Поэтому

$$\Delta\ell_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{18.7}$$

Следовательно, сумма σ может быть записана в следующем виде:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p} f\left(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\right)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt. \tag{18.8}$$

Интеграл I представим в виде суммы интегралов

$$I = \sum_{k=1}^{p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt. \tag{18.9}$$

Оценим теперь разность $\sigma - I$, которая, ввиду (18.8) и (18.9), представима в виде

$$\sigma - I = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(f\big(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\big) - f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \Big) \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt. \tag{18.10}$$

Учитывая (18.6), из (18.7) выводим

$$\lambda \geq \Delta\ell_k \geq q \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = q\,(t_k - t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Следовательно, для любого $t \in [t_{k-1}, t_k]$ справедлива оценка $|\tau_k - t| < \delta$. Используя её и оценку (18.5), имеем

$$\Big| f\big(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\big) - f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \Big| < \frac{\varepsilon}{\ell}.$$

Из этой оценки и равенств (18.7) и (18.10) выводим:

$$|\sigma - I| \leq \frac{\varepsilon}{\ell} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt = \frac{\varepsilon}{\ell} \sum_{k=1}^{p} \Delta\ell_k = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 18.1. *Криволинейный интеграл по кусочно-гладкой кривой L естественно полагаем равным сумме криволинейных интегралов по всем гладким частям, составляющим кривую L. Таким образом, равенство (18.4) оказывается справедливым и в случае кусочно-гладкой кривой L. Это равенство остается справедливым и в случае кусочно-непрерывной функции $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Свойства криволинейных интегралов первого рода

Нетрудно показать, что криволинейные интегралы первого рода обладают такими же свойствами, что и обычные определенные интегралы. Перечислим основные из этих свойств.

Линейность. Если существуют интегралы $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl$ и $\int\limits_{AB} g(x, y)\, dl$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ для функции $\alpha f + \beta g$ также существует интеграл по кривой AB и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} \Big(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \Big)\, dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl + \beta \int\limits_{AB} g(x, y)\, dl.$$

Аддитивность. Пусть дуга AB состоит из двух дуг AC и CB. Если существует интеграл $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl$, то существуют интегралы $\int\limits_{AC} f(x, y)\, dl$ и $\int\limits_{CB} f(x, y)\, dl$, причем

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{AC} f(x, y)\, dl + \int\limits_{CB} f(x, y)\, dl.$$

Оценка интеграла. Если существует интеграл $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$, то существует и интеграл $\int\limits_{AB} \bigl|f(x,y)\bigr|\,dl$ и справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl\right| \le \int\limits_{AB} |f(x,y)|\;dl.$$

Формула среднего значения. Если функция f непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдётся точка $M(\xi,\eta)$ такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = f(\xi,\eta)\cdot\ell,$$

где ℓ — длина дуги кривой AB.

Пример 18.1. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \int\limits_{L} xy\,d\ell$, *где* L *есть четверть эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, *лежащая в первом квадранте.*

Параметрические уравнения L имеют вид $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0\le t\le \pi/2)$. Найдём $d\ell$. Имеем: $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, следовательно,

$$d\ell = \sqrt{x'^2+y'^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$$

Поэтому по формуле (18.4)

$$I = ab\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt.$$

Найдём производную подкоренного выражения. Имеем:

$$(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)' = 2a^2\sin t\cos t - 2b^2\cos t\sin t = 2(a^2-b^2)\cos t\sin t.$$

Наличие под интегралом $\cos t\sin t$ позволяет сделать подстановку $a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t = u$. Тогда $\cos t\sin t dt = \dfrac{1}{2(a^2-b^2)}du$. Если $t=0$, то $u=b^2$, а если $t=\pi/2$, то $u=a^2$. Совершив подстановку, получим:

$$I = \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int\limits_{b^2}^{a^2} u^{1/2}du = \frac{ab}{3(a^2-b^2)}u^{3/2}\Big|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\,.$$

Пример 18.2. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \int\limits_{L}\dfrac{1}{y^2}\,d\ell$, *где* L *есть цепная линия* $y = a\,ch\dfrac{x}{a}$, $a>0$.

Находим
$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}, \qquad d\ell = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx.$$
Поэтому
$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{2}{a^2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{4}{a^2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}} =$$
$$=\frac{4}{a^2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{a}}}{e^{\frac{2x}{a}}+1}\,dx = \frac{4}{a^2}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{e^{\frac{x}{a}}}{\left(e^{\frac{x}{a}}\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{a}\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{a}}\Big|_0^A =$$
$$=\frac{4}{a}\left(\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} e^{\frac{A}{a}} - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{4}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

Пример 18.3. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \int\limits_L z\,d\ell$, *где* L *— один виток винтовой линии:* $x = a\cos t, y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Находим
$$dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$
Поэтому
$$I = \int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = b\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}.$$

18.2 Криволинейные интегралы второго рода

Перейдём теперь к определению криволинейного интеграла второго рода.

Пусть, как и раньше, на плоскости Oxy задана простая незамкнутая спрямляемая кривая L, ограниченная точками A и B, а на ней определена функция $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$.

Разделим кривую L точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ... , $M_p(x_p, y_p) = B$, занумерованными в направлении от A к B, на p частичных дуг M_0M_1, M_1M_2, ... , $M_{p-1}M_p$ и выберем на каждой дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ (см. рис. 35).

Теперь составим интегральную сумму
$$\sigma_1(f) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta x_k.$$

Пусть $\Delta\ell_k$ обозначает длину частичной дуги $M_{k-1}M_k$, а $\lambda = \max\{\Delta\ell_k : k = 1, 2, \ldots, p\}$.

Определение 18.4. *Число* I *называют пределом интегральных сумм* $\sigma_1(f)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* L *с* $\lambda < \delta$ *при любом выборе точек* N_k *на частичных дугах* $M_{k-1}M_k$ *справедлива оценка*
$$|\sigma_1(f) - I| < \varepsilon.$$
Этот предел называют криволинейным интегралом второго рода от функции f *по кривой* L *и обозначают символом*
$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dx.$$

Аналогично, составляя сумму

$$\sigma_2(f) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k,$$

как предел её получим криволинейный интеграл второго рода от функции f по кривой L, обозначаемый символом

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dy.$$

Пусть на кривой AB определены две функции P и Q. Если существуют интегралы $\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx$ и $\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy$, то их сумму называют общим криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом общего вида и полагают

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy. \tag{18.11}$$

Заметим, что между криволинейными интегралами первого и второго рода имеется существенное различие: при составлении интегральной суммы (18.1) значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ умножается на длину $\Delta\ell_k$ частичной дуги $M_{k-1}M_k$, а в случае суммы σ_1 (σ_2) это значение $f(\xi_k, \eta_k)$ умножается на проекцию Δx_k (Δy_k) упомянутой дуги на ось абсцисс (ординат). Но величина $\Delta\ell_k$ не зависит от направления пути, вдоль которого производится интегрирование (от A к B или от B к A), а проекция Δx_k (Δy_k) зависит и меняет знак при изменении направления.

Поэтому для интегралов первого рода выполняется равенство (18.2), а для интегралов второго рода — равенства

$$\int\limits_{BA} f(x, y)\, dx = -\int\limits_{AB} f(x, y)\, dx, \quad \int\limits_{BA} f(x, y)\, dy = -\int\limits_{AB} f(x, y)\, dy.$$

Из определения криволинейного интеграла как предела интегральных сумм вытекает, что $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dx = 0$, если AB является отрезком, лежащим на прямой $x = c$. Действительно, в этом случае проекции всех частичных дуг на ось абсцисс равны нулю и, следовательно, $\sigma_1(f) = 0$.

Аналогично, если AB — отрезок, лежащий на прямой $y = c$, то $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dy = 0.$

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Пусть материальная точка движется из A в B вдоль кривой L под действием силы $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y)$, имеющей компоненты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Для вычисления работы, произведенной этой силой, разобьем кривую L на участки и, считая, что на каждом участке сила меняется мало, положим работу на каждом участке равной сумме произведений компонент силы, взятых в некоторых промежуточных точках, на компоненты вектора смещения. Следовательно, приближенное значение работы по перемещению точки из A в B равно сумме

$$\sum_{k=1}^{p} P(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{p} Q(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k. \tag{18.12}$$

Точное значение этой работы естественно определить как предел суммы (18.12) при стремлении к нулю длин частичных дуг ($\lambda \to 0$).

Таким образом, общий криволинейный интеграл второго рода (18.11) равен работе по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы $\overrightarrow{F}$.

Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема 18.2. *Пусть простая гладкая кривая $L = AB$ задана уравнениями (18.3) и не имеет особых точек, а функции $P, Q : L \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на L. Тогда криволинейные интегралы второго рода $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$ и $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ существуют и справедливы равенства*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\varphi'(t)\,dt, \tag{18.13}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\psi'(t)\,dt. \tag{18.14}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно провести доказательство только для одного из двух интегралов, например, для $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$.

Прежде всего заметим, что определённый интеграл, стоящий в правой части (18.13) существует, так как при сделанных предположениях его подынтегральная функция непрерывна. Обозначим этот интеграл буквой K.

Поскольку кривая L — гладкая, функция φ' непрерывна, поэтому ограничена на на сегменте $[a,b]$. Пусть постоянная $C > 0$ такова, что

$$|\varphi'(t)| \le C \quad \text{при всех} \quad t \in [a,b]. \tag{18.15}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $P\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на нём. Поэтому найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех $t', t'' \in [a,b]$ и удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$ справедлива оценка

$$\Bigl| P\bigl(\varphi(t'), \psi(t')\bigr) - P\bigl(\varphi(t''), \psi(t'')\bigr) \Bigr| < \frac{\varepsilon}{C(b-a)}. \tag{18.16}$$

Как отмечено в доказательстве теоремы 18.1 число

$$q = \min\left\{ \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} : t \in [a,b] \right\}$$

положительно.

Возьмём любое разбиение кривой L точками $A = M_0$, M_1, M_2, … , $M_p = B$, удовлетворяющее условию $\lambda < \delta q$, и на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольно точку N_k (см. рис. 35).

Пусть точки M_k и N_k имеют координаты $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ и $(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))$ соответственно, которые определяются однозначно в силу условия, что кривая L является простой.

Так как

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

то сумма $\sigma_1(P)$ может быть записана в следующем виде:

$$\sigma_1(P) = \sum_{k=1}^{p} P\left(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\right) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt. \tag{18.17}$$

Интеграл K представим в виде суммы интегралов

$$K = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \varphi'(t)\, dt. \tag{18.18}$$

Оценим теперь разность $\sigma - K$, которая ввиду (18.17) и (18.18) представима в виде

$$\sigma_1(P) - K = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(P\big(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\big) - P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Big)\varphi'(t)\, dt. \tag{18.19}$$

Из выбора разбиения кривой L следует (смотрите доказательство теоремы 18.1), что при каждом $k = 1, 2, \ldots, p$ выполняется неравенство $t_k - t_{k-1} < \delta$. Следовательно, для любого $t \in [t_{k-1}, t_k]$ справедлива оценка $|\tau_k - t| < \delta$.

Поэтому, ввиду (18.16), имеем

$$\Big|P\big(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\big) - P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Big| < \frac{\varepsilon}{C(b-a)}.$$

Используя эту оценку, оценку (18.15) и равенство (18.19), получаем

$$|\sigma_1(P) - K| \le \frac{\varepsilon}{C(b-a)} \cdot C \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 18.4. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \int\limits_{AB} x^2\, dx + xy\, dy$, *где* AB *— четверть эллипса* $x = 2\cos t$,$y = 3\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, A *соответствует* $t = 0$, *а* B *соответствует* $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Имеем

$$x^2 = 4\cos^2 t, \quad dx = -2\sin t\, dt, \quad xy = 6\cos t \sin t, \quad dy = 3\cos t\, dt.$$

Применяя формулы (18.13) и (18.14), получаем

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-8\cos^2 t \sin t + 18\cos^2 t \sin t\right)\, dt = 10\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt =$$

$$= -\,10\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, d\,(\cos t) = -\frac{10}{3}\cos^3 t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{3}.$$

Пример 18.5. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \int\limits_{AB} \left(x^2 - y^2\right) dy$, *где* AB *— дуга параболы* $y = x^2$, $A = A(0,0)$, $B = B(2,4)$.

Первый способ (интегрируем по y). Так как y пробегает отрезок от 0 до 4, то учитывая, что $x^2 = y$, имеем

$$I = \int\limits_0^4 \left(y - y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{40}{3}.$$

Второй способ (интегрируем по x). Так как $y = x^2$, то $x^2 - y^2 = x^2 - x^4$ и $dy = 2x\,dx$. И поскольку x пробегает отрезок от 0 до 2, получаем

$$I = \int\limits_0^2 \left(x^2 - x^4\right) 2x\,dx = 2\int\limits_0^2 \left(x^3 - x^5\right) dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{40}{3}.$$

Ориентация плоскости

Рассмотрим теперь случай замкнутой кривой. Мы установили, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления интегрирования по кривой $L = AB$. Поэтому необходимо принять какую-то договорённость о том, что следует понимать под криволинейным интегралом второго рода по замкнутой кривой L. Поскольку указание на L начальной и (совпадающей с ней) конечной точки не определяет направления, в котором описывается эта кривая, то в каждом случае, за исключением плоского, нужно указывать, какое именно направление имеется в виду.

Обход контура называют *положительным*, если область внутри этого контура, остаётся по левую сторону по отношению к направлению движения. Обход контура в противоположном направлении называют *отрицательным*.

При этом договариваются, что в интегралах

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx, \quad \int\limits_L Q(x,y)\,dy, \quad \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{18.20}$$

по контуру L этот контур <u>всегда</u> обходится в положительном направлении. Это соглашение не мешает нам рассматривать интегралы, взятые в отрицательном направлении, но для них мы будем использовать обозначения

$$\int\limits_{\overline{L}} P(x,y)\,dx, \quad \int\limits_{\overline{L}} Q(x,y)\,dy, \quad \int\limits_{\overline{L}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где черта над L как раз и обозначает отрицательный обход контура L.

Криволинейный интеграл по контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом $\oint$, то есть (18.20) записывают в следующем виде:

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx, \quad \oint\limits_L Q(x,y)\,dy, \quad \oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Пример 18.6. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \oint\limits_L y^2\,dx - x^2\,dy$, *где* L *— окружность* $x^2 + y^2 = 1$.

Полагая $x = \cos t$, $y = \sin t$, замечаем, что когда t изменяется от 0 до 2π, контур L один раз обходится в положительном направлении. Поэтому, учитывая, что $y^2 = \sin^2 t$, $dy = \cos t$, $x^2 = \cos^2 t$ и $dx = -\sin t\ dt$, находим

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\sin^3 t - \cos^3 t\right)\, dt = -\int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t\right) \sin t\, dt - \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t\right)\, d(\cos t) - \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right)\, d(\sin t) =$$

$$= \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 18.7. *Вычислить криволинейный интеграл* $I = \oint\limits_L \left(x^2 - y\right)\, dx$, *где* L *— прямоугольник* $ABCD$, *с вершинами* $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$, $D(0,2)$.

Разбивая L на четыре части, получаем

$$I = \int\limits_{AB} \left(x^2 - y\right)\, dx + \int\limits_{BC} \left(x^2 - y\right)\, dx + \int\limits_{CD} \left(x^2 - y\right)\, dx + \int\limits_{DA} \left(x^2 - y\right)\, dx.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{BC} \left(x^2 - y\right)\, dx = 0, \quad \int\limits_{DA} \left(x^2 - y\right)\, dx = 0$$

так как это интегралы по отрезкам на которых x постоянна, и, следовательно нужно вычислить лишь интегралы по отрезкам AB и CD. Применяя формулу (18.13), находим

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 - y\right)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int\limits_{CD} \left(x^2 - y\right)\, dx = -\int_0^1 \left(x^2 - 2\right)\, dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_0^1 = -\left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $I = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3} = 2$.

18.3 Формула Грина

Здесь мы получим формулу, играющую большую роль в различных приложениях. А именно, мы установим формулу, связывающую двойной интеграл по области и криволинейный интеграл по её границе.

Теорема 18.3. *Пусть кусочно-гладкий контур* L *ограничивает область* G. *Если функции* P *и* Q *и их частные производные* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в замыкании* $\overline{G}$ *области* G, *то справедливо равенство*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\, dxdy = \int\limits_L P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy, \tag{18.21}$$

называемое формулой Грина.

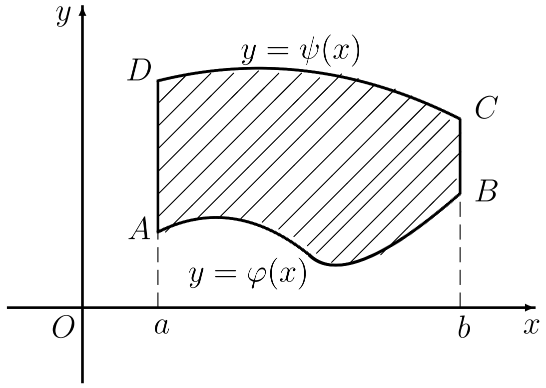

Рис. 36:

Доказательство. 1. Пусть сначала область G является криволинейной трапецией $ABCD$, ограниченной контуром L, состоящим из кривых AB (нижнее основание) и DC (верхнее основание), заданных уравнениями $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, $a \leq x \leq b$, и двух отрезков AD и BC, параллельных оси ординат (рис. 36).

Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dxdy$. По теореме Фубини о сведении кратного интеграла к повторному получаем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy. \tag{18.22}$$

Внутренний интеграл легко вычисляется. По формуле Ньютона-Лейбница находим

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy = P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)).$$

Подставляя это значение в (18.22), имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b P(x, \psi(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi(x))\, dx. \tag{18.23}$$

Но каждый из интегралов, стоящих в правой части (18.23), может быть заменен теперь криволинейным интегралом. Действительно, по теореме 18.2 (формула (18.13)), справедливы равенства

$$\int\limits_a^b P(x, \psi(x))\, dx = \int\limits_{DC} P(x, y)\, dx \tag{18.24}$$

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi(x))\, dx = \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx. \tag{18.25}$$

Из (18.23) - (18.25) следует, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dxdy = \int\limits_{DC} P(x, y)\, dx - \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = -\int\limits_{CD} P(x, y)\, dx - \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx.$$

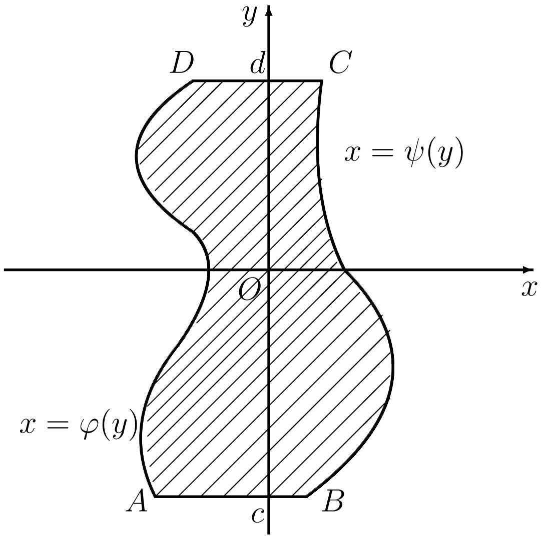

Рис. 37:

Вычтем из правой части еще два интеграла $\int\limits_{DA} P(x,y)\,dx$ и $\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx$, каждый из которых равен нулю, поскольку отрезки DA и BC параллельны оси ординат. Мы получим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{BC} P(x,y)\,dx - \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx - \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx.$$

Очевидно,что правая часть этого равенства представляет собой интеграл, взятый по всему контуру L, но в отрицательном направлении. Таким образом, нами получено следующее равенство:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)\,dx. \tag{18.26}$$

2. Формула (18.26) верна и для областей более сложного вида, чем рассмотренная. Предположим, что область G может быть разделена прямыми, параллельными оси Oy, на конечное множество криволинейных трапеций указанного вида. По доказанному, для каждой из частей справедлива формула (18.26). Сложив все равенства, мы получим слева двойной интеграл по всей области G, а справа сумму криволинейных интегралов по всем границам частичных криволинейных трапеций. Но очевидно, что эта сумма криволинейных интегралов равна одному криволинейному интегралу, взятому по контуру L, так как интегралы по каждому из вспомогательных отрезков равны нулю.

3. Аналогичными проведённым в пункте 1 рассуждениями устанавливается формула

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)\,dy, \tag{18.27}$$

где G — криволинейная трапеция, изображённая на рис. 37

4. Рассуждениями, аналогичным проведённым в пункте 2 устанавливается формула (18.27) в случае, когда область G может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций вида, изображённого на рис. 37.

5. Наконец, если область G одновременно может быть разбита на конечное множество криволинейных трапеций первого вида, и, независимо от этого, на конечное множество криволинейных трапеций второго вида, то для неё справедливы обе формулы (18.26) и

(18.27). Вычитая равенство (18.26) из равенства (18.27), получаем формулу (18.21), что и требовалось доказать. ■

Следствие 18.1. *Пусть G — односвязная область с кусочно гладкой границей L. Тогда её площадь может быть вычислена по формуле*

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy - y\,dx. \tag{18.28}$$

Доказательство. Рассмотрим в G функции $P(x,y) = -y$ и $Q(x,y) = x$. Эти функции в области G удовлетворяют условиям доказанной теоремы. Следовательно, по формуле Грина имеем

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dxdy = \int\limits_L (-y)\,dx + x\,dy. \tag{18.29}$$

Но поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1-(-1) = 2,$$

а $(-y)\,dx + x\,dy = x\,dy - y\,dx$, то из (18.29) следует равенство (18.28). ■

Пример 18.8. *Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл*

$$I = \oint\limits_L \left(x^2-y^2\right)\,dx + \left(x^2+y^2\right)\,dy,$$

где L — окружность $x^2+y^2=a^2$.

Окружность $x^2+y^2=a^2$ ограничивает открытый круг $K\colon x^2+y^2<a^2$. Так как функции $P(x,y)=x^2-y^2$, $Q(x,y)=x^2+y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x$ непрерывны в замкнутом круге $x^2+y^2\le a^2$, по формуле Грина получаем

$$I = \iint\limits_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy = \iint\limits_K (2x-(-2y))\,dx\,dy = 2\iint\limits_K (x+y)dx\,dy = 0,$$

в чём нетрудно убедиться или прямым вычислением, или приняв во внимание то обстоятельство, что круг центрально симметричен, а функция $x+y$ меняет знак при одновременной перемене знаков x и y.

Пример 18.9. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой*

$$x = a\cos^3 t,\ \ y = b\sin^3 t\ \ (0\le t\le 2\pi).$$

Поскольку $dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $dy = 3b\sin^2 t\cos t\,dt$, по формуле (18.28) получаем

$$\begin{aligned}S =& \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\left(3b\sin^2 t\cos t\right) - b\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)\right)\,dt = \\ =& \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(3ab\cos^4 t\sin^2 t + 3ab\sin^4 t\cos^2 t\right)\,dt = \frac{3ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \\ =& \frac{3ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3ab}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3ab}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3ab\pi}{8}.\end{aligned}$$

Формула Грина (18.21) верна не только для односвязных, но и для многосвязных областей.

Теорема 18.4. *Пусть граница L конечносвязной области G состоит из кусочно-гладкого контура L_0, ограничивающего область G извне, и m кусочно-гладких контуров L_1, L_2, $\ldots$, L_m, ограничивающих её изнутри. Если функции P и Q и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замыкании $\overline{G}$ области G, то справедлива формула Грина (18.21). При этом интеграл, стоящий в правой части (18.21), обозначает сумму интегралов по всем связным компонентам границы L, на которых указано такое направление обхода, при котором область G остается слева, то есть*

$$\int\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{L_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\overline{L}_k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{L_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{L_k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \quad (18.30)$$

Доказательство. Проведем гладкие кривые $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, соединяющие контур L_0 с контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m$ соответственно, произведем разрезы области по этим кривым. Тогда область, ограниченная кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_m$ и кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, является односвязной. Применяя теорему 18.3 и учитывая, что интегрирование по вспомогательным кривым $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ проводится дважды в противоположных направлениях, видим, что интеграл по границе этой области равен сумме интегралов, стоящей в правой части (18.30). ■

Следствие 18.2. *Пусть граница L конечносвязной области G состоит из кусочно-гладкого контура L_0, ограничивающего область G извне, и m кусочно-гладких контуров L_1, L_2, $\ldots$, L_m, ограничивающих ее изнутри. Площадь S области G может быть вычислена по формуле*

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{L} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{L_0} x\,dy - y\,dx + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\overline{L}_k} x\,dy - y\,dx \right). \quad (18.31)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству подобного утверждения для односвязной области.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема 18.5. *Пусть функции P, Q определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Для любого кусочно-гладкого контура L, расположенного в G, справедливо равенство* $\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$

2. *Для любых двух точек A и B области G значение интеграла*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования, лежащего в G.

3. *Существует дифференцируемая функция $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что всюду в области G выполняются равенства*

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

4. *В области G справедливо равенство* $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$

Доказательство. Начнем с импликации $1 \Longrightarrow 2$. Пусть A и B — произвольные точки области G. Рассмотрим две простые кусочно-гладкие кривые ACB и ADB, расположенные в области G.

Предположим сначала, что кривые ACB и ADB не пересекаются. Объединение этих кривых образует кусочно-гладкий контур $L = ACB \cup BDA$. По предположению

$$\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{BDA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Отсюда, применяя свойства криволинейного интеграла, получаем

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{ADB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Пусть теперь ACB и ADB — любые простые кусочно-гладкие кривые ACB и ADB, расположенные в области G и пересекающиеся в конечном числе точек. По доказанному значения интегралов по разным кривым совпадают на каждом участке между соседними точками пересечения, а это влечет равенство интегралов по кривым ACB и ADB.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Пусть $\displaystyle\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не зависит от пути интегрирования. Зафиксируем произвольную точку $A = A(x_0, y_0)$ и определим функцию $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ как функцию координат точки $B = B(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Докажем, что так определённая функция u дифференцируема в области G. Покажем сначала существование частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. По определению $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ находится как предел разностного отношения, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}. \tag{18.32}$$

Исходя из определения функции u, находим

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{18.33}$$

В силу независимости от пути последний интеграл можно рассматривать как интеграл по отрезку прямой. Но тогда $dy=0$, и из (18.33) имеем

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx. \tag{18.34}$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем значении. Согласно этой теореме, найдётся точка ξ, заключённая между x и $x+\Delta x$ такая, что

$$\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx = P(\xi,y)\cdot\Delta x.$$

Отсюда и из (18.34), получаем

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} = P(\xi,y). \tag{18.35}$$

Так как функция P непрерывна в точке (x,y), а $(\xi,y)\to(x,y)$ при $\Delta x\to 0$, то при этом условии $P(\xi,y)\to P(x,y)$. Следовательно, при $\Delta x\to 0$, предел правой части (18.35) существует и равен $P(x,y)$. Поэтому и предел левой части существует и равен $P(x,y)$. Отсюда и из (18.32) заключаем, что частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ существует и в каждой точке $(x,y)\in G$ справедливо равенство $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$.

Аналогично проводится доказательство существования частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и выполнения равенства $Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ каждой точке $(x,y)\in G$.

Поскольку функции P и Q непрерывны в области G, то по достаточному условию дифференцируемости функции нескольких переменных (теорема 10.7) функция u дифференцируема в каждой точке области G.

Докажем теперь импликацию $3\Longrightarrow 4$. Пусть u — функция удовлетворяющая утверждению 3. Так как в области G существуют частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то существуют и смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, поскольку из равенств

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad \text{и} \quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

следуют равенства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{18.36}$$

Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ непрерывны, поскольку по условию непрерывны $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то по достаточному условию равенства смешанных частных производных (теорема 10.7) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)$$

в каждой точке области G. Отсюда и из равенств (18.36) следует справедливость утверждения 4.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать справедливость импликации $4 \Longrightarrow 1$.

Итак, пусть выполняется утверждение 4. Возьмём произвольный кусочно-гладкий контур L, лежащий в области G. Пусть D есть область, ограниченная этим контуром. Применяя к области D формулу Грина, получаем

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.$$

В силу равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ интеграл $\displaystyle\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$ равен нулю. Следовательно, $\displaystyle\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. ■

Интегрирование полных дифференциалов

Пусть в односвязной области G определены функции P и Q, непрерывные в ней вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, причём всюду в области G выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В этом случае выражение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{18.37}$$

будем называть полным дифференциалом.

Как показано в теореме 18.5, полный дифференциал является дифференциалом функции $u : G \to \mathbb{R}$, определяемой формулой

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{18.38}$$

Любая другая функция $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, для которой выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ является дифференциалом, отличается от функции u лишь на некоторую постоянную C, то есть

$$\Phi(x,y) = u(x,y) + C. \tag{18.39}$$

Ввиду (18.38), имеем

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + C. \tag{18.40}$$

Равенство (18.40) позволяет определить все функции, имеющие подынтегральное выражение своим дифференциалом.

Заметим, что поскольку $u(x_0, y_0) = 0$, из (18.39) следует, что $C = \Phi(x_0, y_0)$. Учитывая это, из (18.40) выводим

$$\Phi(x, y) = \Phi(x_0, y_0) + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{18.41}$$

Формулу (18.41), как и в случае интегрирования по отрезку, будем называть формулой Ньютона-Лейбница.

Укажем теперь способ восстановления функции Φ по полному дифференциалу (18.37).

Будем отыскивать функцию Φ, используя формулу (18.40). Поскольку криволинейный интеграл не зависит от выбора пути интегрирования, то можно составлять путь, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y) из горизонтальных и вертикальных отрезков. В первом случае $dy = 0$, во втором $dx = 0$, так что, во-первых, от подинтегрального выражения остаётся только половина, а во-вторых, интеграл обращается фактически в обычный римановский интеграл по отрезку.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 18.10. *Показать, что выражение*

$$\left(15x^2y + 6x - y\right)\, dx + \left(5x^3 - x + 2y\right)\, dy \tag{18.42}$$

является полным дифференциалом некоторой функции Φ *и восстановить её.*

В этом выражении

$$P(x, y) = 15x^2y + 6x - y, \quad Q(x, y) = 5x^3 - x + 2y.$$

Находим:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 15x^2 - 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 15x^2 - 1.$$

Видим, что функции P, Q и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ всюду на $\mathbb{R}^2$ непрерывны и $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, выражение (18.42) есть полный дифференциал некоторой функции Φ.

Для определения этой функции воспользуемся формулой (18.40), принимая за (x_0, y_0) точку $(0, 0)$. Путь интегрирования выберем состоящим из двух отрезков: OA и AM. Отрезок OA соединяет точки $O(0; 0)$ и $A(x, 0)$, на нём $y = 0$ и $dy = 0$. Отрезок AM соединяет точки $A(x; 0)$ и $M(x; y)$, на нём $dx = 0$. Тогда

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,0)} P(x, y)\, dx + \int\limits_{(x,0)}^{(x,y)} Q(x, y)\, dy + C =$$

$$= \int\limits_{(0,0)}^{(x,0)} 6x dx + \int\limits_{(x,0)}^{(x,y)} (5x^3 - x + 2y)\, dy + C = 6\int\limits_0^x x dx + \int\limits_0^y (5x^3 - x + 2y) dy + C =$$

$$= 3x^2\Big|_0^x + (5x^3y - xy + y^2)\Big|_{y=0}^{y=y} + C = 3x^2 + 5x^3y - xy + y^2 + C = 5x^3y + 3x^2 - xy + y^2 + C.$$

Пример 18.11. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (2x+3y)\ dx + 3\left(x+y^2\right)\ dy.$

Здесь $P(x,y) = 2x+3y$, $Q(x,y) = 3\,(x+y^2)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3$ и $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3$. Ввиду непрерывности всех этих функций и равенства частных производных, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции Φ. Следовательно, данный интеграл не зависит от выбора пути интегрирования. Поэтому для его вычисления можно восстановить функцию Φ и воспользоваться формулой (18.41), а можно взять в качестве пути ломаную, состоящую из отрезков параллельных осям координат. Например,

$$\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (2x+3y)\ dx + 3\left(x+y^2\right)\ dy = \int\limits_{(1,1)}^{(2,1)} (2x+3)\,dx + \int\limits_{(2,1)}^{(2,3)} \left(6+3y^2\right)\ dy =$$

$$= (x^2+3x)\Big|_1^2 + (6y+y^3)\Big|_{y=1}^{y=3} = 4+6-1-3+18+27-6-1 = 44.$$

Глава IV

Четвертый семестр

19 Функции комплексного переменного

Комплексные числа вошли в математику в XVI веке в связи получением формул для решения квадратных, а затем и кубических уравнений. Сначала их не воспринимали как числа, называли мнимыми и отвергали. Однако со временем необходимость рассмотрения комплексных чисел и функций от них становилась всё более и более очевидной. Например, только над полем комплексных чисел многочлен разложим на линейные множители, обнаружилась связь между показательной и тригонометрическими, логарифмической и обратными тригонометрическими функциями.

Свой современный вид теория функций комплексного переменного приобрела к концу XIX века трудами Даламбера, Эйлера, Коши, Римана, Гаусса и других великих математиков.

19.1 Аналитические функции

Пусть дано множество комплексных чисел E.

Определение 19.1. *Правило f, по которому каждому $z \in E$ ставится в соответствие одно или* <u>*несколько*</u> *значений $w \in \mathbb{C}$ будем называть функцией комплексного переменного.*

Если каждому $z \in E$ ставится в соответствие одно значение w, то функция f называется однозначной, в противном случае — многозначной.

Для функций комплексного переменного будем употреблять те же обозначения и понятия, что и для функций действительного переменного. Например: запись $f : E \to \mathbb{C}$ означает, что на множестве E задана функция f, при этом множество E является её областью определения; число $w \in \mathbb{C}$, поставленное в соответствие функцией f числу $z \in E$, будем записывать в виде $w = f(z)$.

Пусть комплексные числа z и w записаны в алгебраической форме, $z = x+iy$, $w = u+iv$. Тогда, если $w = f(z)$ на множестве E, то $u = \operatorname{Re} f(z)$ и $v = \operatorname{Im} f(z)$ также являются функциями от z, определёнными на множестве $E \subset \mathbb{C}$, или функциями от x, y, определёнными на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$[1]. Следовательно, функцию комплексного переменного $f : E \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как отображение $(u, v) : E \to \mathbb{R}^2$. Справедливо и обратное: если задано отображение $(u, v) : E \to \mathbb{R}^2$, то правилом

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z) = f(z)$$

[1]Напоминаем, что при изучении темы "Метрические пространства" была показана изометрия пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$, поэтому комплексное число $z = x+iy$ можно представлять как пару (x, y) вещественных чисел и наоборот.

определена функция $f : E \to \mathbb{C}$.

Поэтому в дальнейшем мы будем при необходимости писать $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и наоборот без всяких дополнительных разъяснений.

Аналогично обстоит дело и в том случае когда или z, или w, или оба вместе записаны в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$.

Определение 19.1 функции комплексного переменного существенно отличается от определения функции действительного переменного отсутствием требования единственности числа w, поставленного в соответствие каждому $z \in E$. Это обстоятельство объясняется тем, что в вещественном случае возникающие непрерывные многозначные функции всегда можно представить в виде некоторого количества однозначных непрерывных ветвей, а в комплексном случае этого, как правило, не удаётся сделать. Рассмотрим несколько примеров.

1. Функция $y = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ имеет двузначную обратную $y = \pm\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, которая распадается на две изолированные непрерывные однозначные ветви $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$.

2. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет на отрезке $[-1;\ 1]$ двузначную неявную функцию $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, распадающуюся на две однозначные непрерывные ветви $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$.

3. Функция $y = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ имеет бесконечнозначную обратную $y = (-1)^n \arcsin x + \pi n$ $(x \in [-1;\ 1]\,,\ n \in \mathbb{Z})$, распадающуюся на бесконечное количество однозначных непрерывных ветвей $y = (-1)^n \arcsin x + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

А теперь рассмотрим несколько аналогичных примеров с функциями комплексного переменного.

4. Функция $w = \sqrt{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ двузначная. Её значения могут быть вычислены по формуле Муавра: если $z = re^{i\varphi}$, то $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$, $k = 0, 1$. При $k = 0$ получаем одну ветвь $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, при $k = 1$ — другую ветвь $w_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Однако отделить одну ветвь от другой, как это было сделано в примере 1 с аналогичной функцией действительного переменного, в комплексной плоскости невозможно. Покажем это.

Возьмём окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $z = 0$. На ней в точке $z = r$ зафиксируем одно из значений корня, скажем, $w_1(r) = \sqrt{r}$. Пусть теперь точка z, непрерывно перемещаясь по окружности, совершит полный оборот. Тогда её аргумент, тоже непрерывно изменяясь, будет находиться в промежутке $[0;\ 2\pi)$, поэтому взятые по непрерывности значения корня будут принадлежать первой ветви: $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} = w_1(z)$. Однако, когда точка z вернётся в исходное положение, её аргумент уже будет равным 2π, следовательно, значение $\sqrt{z}$ будет равно $\sqrt{r}e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{r} = w_2(r)$. Если точка z совершит второй оборот по окружности, то её аргумент, при условии непрерывного изменения, будет принадлежать промежутку $[2\pi;\ 4\pi)$. Представим его в виде $2\pi + \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, и вычислим значение $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{2\pi+\varphi}{2}} = w_2(z)$. Как видим, теперь значения $\sqrt{z}$ принадлежат второй ветви функции. А когда z возвратится в исходное положение $z = r$, то её аргумент станет равным 4π и $\sqrt{z}$ примет значение $\sqrt{r}e^{i\frac{4\pi}{2}} = w_1(r)$.

Итак, при обходе точки $z = 0$ по окружности и непрерывном изменении значений функции $\sqrt{z}$ одна ветвь корня переходит в другую. Нетрудно заметить, что то же самое имеет место при обходе вокруг точки $z = 0$ по любому контуру. Это означает, что в комплексной плоскости отделить одну ветвь функции $\sqrt{z}$ от другой невозможно, и что требование многозначности в определении 19.1 функции комплексного переменного оправданно.

Для того, чтобы всё-таки отделить одну ветвь $\sqrt{z}$ от другой, необходимо исключить возможность обхода точки $z = 0$, а для этого следует провести разрез (границу) от точки $z = 0$ до бесконечности. Тогда обход нуля становится невозможным, и в плоскости с разрезом функция $\sqrt{z}$ распадается на две однозначные ветви. Чаще всего в качестве разреза берут луч, но можно брать и любую простую кривую.

Риман предложил оригинальный способ превращения многозначной функции в однозначную: брать в качестве области определения многозначной функции не множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а геометрический объект, строящийся специально для каждой многозначной функции и называемый римановой поверхностью. Для функции $\sqrt{z}$ риманова поверхность строится следующим образом: берём два экземпляра комплексной плоскости $\mathbb{C}$, делаем на них одинаковый разрез от точки 0 до точки ∞ (например, по лучу $[0;\ +\infty)$), накладываем плоскости друг на друга и склеиваем "крест-накрест" (нижний край разреза каждой плоскости с верхним краем разреза другой плоскости. Риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ построена. Теперь точкам z, лежащим на одном листе римановой поверхности, ставим в соответствие значения $\sqrt{z}$, принадлежащие одной из ветвей, на другом листе — другой. Таким образом, каждой точке z ставится в соответствие одно значение $\sqrt{z}$. При обходе вокруг нуля теперь точка z перемещается с одного листа римановой поверхности на другой, соответственно, одна ветвь корня переходит в другую. Однозначность сохраняется.

5. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ — n-значная. Её ветви — $w_{k+1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. При обходе вокруг нуля один раз в положительном направлении каждая ветвь переходит в следующую, а последняя, n-ая, ветвь переходит в первую. Риманова поверхность функции $\sqrt[n]{z}$ строится следующим образом: берём n экземпляров комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разрезаем каждую по лучу $[0;\ +\infty)$, складываем стопкой и нумеруем снизу вверх и склеиваем нижний берег разреза нижележащей плоскости с верхним берегом разреза вышележащей плоскости, а нижний берег разреза последней, n-ой, плоскости — с верхним берегом разреза первой плоскости. Риманова поверхность построена. Теперь точкам z, расположенным на k-ом листе римановой поверхности ставим в соответствие значения $w_k(z)$. Получаем однозначную функцию.

6. Функция $w = \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z$ $(z \neq 0)$ — бесконечнозначная. Её k-ая ветвь задаётся формулой $w_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\arg z$ — главное значение аргумента, $0 \le \arg z < 2\pi$ (иногда полагают $-\pi < \arg z \le \pi$). Риманова поверхность функции $\mathrm{Ln}z$ строится следующим образом. Берём бесконечную в обе стороны стопку комплексных плоскостей с разрезом по лучу $[0;\ +\infty)$, выбираем среди них начальную и перенумеровываем плоскости в обе стороны от неё, используя вверх положительные номера, а вниз — отрицательные. Затем склеиваем нижний край разреза нижележащей плоскости с верхним краем разреза вышележащей плоскости, и риманова поверхность функции $\mathrm{Ln}z$ построена.

Определение 19.2. *Пусть $f : E \to \mathbb{C}$ — многозначная функция, c — внутренняя точка множества E и L — любой контур, содержащий внутри себя точку c и содержащийся в E вместе со внутренностью. Зафиксируем в какой-либо точке z_0 контура L одно из значений $f(z_0) = w_1$ функции f. Пусть точка z совершает обход точки c по контуру L. Если при возвращении в точку z_0 при условии непрерывного изменения значений функция f примет в точке z_0 другое значение $f(z_0) = w_2 \neq w_1$, то точка c называется точкой ветвления функции f.*

Как показывают примеры 4 — 6, точка $z = 0$ является точкой ветвления функций $\sqrt[n]{z}$ $(n \ge 2)$, $\mathrm{Ln}z$.

Предел последовательности комплексных чисел, предел и непрерывность функции комплексного переменного определяются точно так же, как и в вещественном случае, поэтому и все свойства пределов и непрерывных функций, не связанные с операцией сравнения, остаются в силе и в комплексном случае. А если учесть, что по своим метрическим свойствам комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с метрикой $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ тождественна вещественному пространству $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой, и что сходимость в $\mathbb{R}^2$ эквивалентна покоординатной сходимости, то очевидны следующие утверждения.

Предложение 19.1. *Пусть $(z_n) = (x_n + iy_n)$ — последовательность комплексных чисел и $c = a + ib \in \mathbb{C}$.*

$$z_n \to c \Leftrightarrow ((x_n \to a) \wedge (y_n \to b)).$$

Предложение 19.2. *Пусть $f : E \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, $z_0 = x_0+iy_0$ — предельная точка множества E, $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$.*

$$f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} w_0 \iff ((u(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} u_0) \wedge (v(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} v_0)).$$

Предложение 19.3. *Пусть $f : E \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, $z_0 = x_0+iy_0 \in E$. Функция f непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции u и v непрерывны в точке (x_0, y_0).*

И производная функции комплексного переменного определяется точно так же, как и производная функции действительного переменного. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, z_0 — внутренняя точка множества E, $f : E \to \mathbb{C}$.

Определение 19.3. *Назовём функцию f дифференцируемой в точке z_0, если существует конечный предел $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Число $f'(z_0)$ назовём производной функции f в точке z_0.*

Поскольку определение производной такое же, как в вещественном случае, и свойства пределов — те же, сохраняются правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, сложной и обратной функции. Сохраняются и формулы для производных основных элементарных функций. Однако, в отличие от вещественного случая, класс дифференцируемых функций комплексного переменного довольно узок. Это объясняется большим произволом в выборе способов стремления z к z_0. Если в вещественном случае $x \to x_0$ только или слева, или справа, то в комплексном случае z может стремиться к z_0 по любому лучу, по любой кривой.

Пример. Функция $\overline{z^2} = x^2 - y^2 - 2ixy$ не дифференцируема ни в одной точке $z_0 \neq 0$. Покажем это.

Возьмём точку $z_0 = x_0 + iy_0$, точку $z = x + iy$, положим

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$$

и составим и вычислим разность

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) =$$

$$= ((x_0 + \Delta x)^2 - (y_0 + \Delta y)^2 - 2i(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)) - (x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0) =$$
$$= 2(x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)) + (\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y)).$$

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\frac{x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{19.1}$$

Перейдём в (19.1) к пределу при $\Delta z \to 0$ двумя способами.

1) Пусть $\Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = 2 \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x_0\Delta x - iy_0\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 2(x_0 - iy_0).$$

2) Пусть $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-y_0\Delta y - ix_0\Delta y}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y^2}{i\Delta y} = -2(x_0 - iy_0).$$

Так как при двух различных способах стремления Δz к нулю получились разные значения, то $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует при $z \neq 0$. Рассматриваемая функция дифференцируема только в точке $z = 0$, при этом $f'(0) = 0$, поскольку, если $z_0 = 0$, то $\Delta f = \overline{z^2}$, $\Delta z = z$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z^2}}{z} = 0$.

Условия, при которых функция комплексного переменного дифференцируема, указаны в следующей теореме.

Теорема 19.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ — внутренняя точка множества E. Функция f дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{19.2}$$

Условия (19.2) носят название условий Коши-Римана (или Даламбера-Эйлера).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке z_0. Так как z_0 — внутренняя точка множества E, то найдётся $U_\delta(z_0) \subset E$. Возьмём любое приращение Δz, удовлетворяющее условию $|\Delta z| < \delta$. Тогда, ввиду дифференцируемости функции f, её приращение Δf представляется в виде

$$\Delta f = C\Delta z + \gamma\Delta z, \tag{19.3}$$

где

$$C = A + iB = f'(z_0), \tag{19.4}$$

а $\gamma = \gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta z) + i\beta(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Отделим в (19.3) вещественную часть от мнимой.

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = C\Delta z + \gamma\Delta z = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) =$$

$$= (A\Delta x - B\Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y) + (\alpha\Delta x - \beta\Delta y) + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y,\ \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y, \tag{19.5}$$

где α и β — бесконечно малые при $\Delta z \to 0$ (следовательно, и при $\Delta x, \Delta y \to 0$) функции (как вещественная и мнимая части бесконечно малой при $\Delta z \to 0$ функции γ).

Выполнение в точке (x_0, y_0) условий (19.5) означает, что эти функции дифференцируемы в указанной точке и, кроме того, из первого равенства следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -B$, а из второго — $\dfrac{\partial v}{\partial x} = B$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = A$. Сравнение этих равенств приводит к условиям Коши-Римана (19.2). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и их частные производные связаны в этой точке условиями Коши-Римана. Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A; \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = B$$

и запишем условия дифференцируемости функций u и v в точке (x_0, y_0).

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y, \ \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y,$$

где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — бесконечно малые при $\Delta x, \Delta y \to 0$ функции.

Умножим второе из равенств на i и сложим их. Тогда

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= (A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y) =$$
$$= ((A + iB)\Delta x + (-B + iA)\Delta y) + ((\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y).$$

Преобразуем отдельно каждое из двух слагаемых получившегося выражения. В первом из них заменим $-B$ на $i^2 B$. Тогда

$$(A + iB)\Delta x + (-B + iA)\Delta y = (A + iB)\Delta x + (i^2 B + iA)\Delta y =$$

$$= (A + iB)\Delta x + i(A + iB)\Delta y = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) = C\Delta z,$$

где $C = A + iB$.

Теперь займёмся вторым слагаемым. Умножим и разделим его на Δz. Тогда

$$(\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y = \gamma \Delta z,$$

где

$$\gamma = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y}{\Delta z} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta_1 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

— бесконечно малая при $\Delta z \to 0$ функция, так как $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right|, \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — бесконечно малые функции при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Итак, приращение функции f в точке z_0 представлено в виде

$$\Delta f = C\Delta z + \gamma \Delta z,$$

где $C = A + iB$ — число, а γ — бесконечно малая при $\Delta z \to 0$ функция. Из этого следует, что функция f дифференцируема в точке z_0, и что $f'(z_0) = C$. ■

Замечание 19.1. *Из равенства $C = A + iB$ и условий Коши-Римана вытекает, что производная функции f и частные производные её вещественной и мнимой частей u и v связаны в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равенствами*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{19.6}$$

Примеры.

1) Функция $w = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ имеет производную в каждой точке $z = x + iy$. Действительно, в данном случае $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$, следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Как видим, условия Коши-Римана выполняются, поэтому в силу (19.6)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i \cdot 6xy = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3z^2.$$

2) Функция $w = x + 2y + i(2x + y) = z + 2i\overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке, так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1$ и второе из условий Коши-Римана не выполняется.

Отметим, что нет нужды проверять каждый раз выполнение условий Коши-Римана, чтобы убедиться в существовании производной функции комплексного переменного. Как было отмечено выше, правила дифференцирования в комплексной плоскости такие же, как и в вещественном случае, поэтому функция z^n $(n \in \mathbb{N})$ является дифференцируемой как n-кратное произведение z на себя. Отсюда следует дифференцируемость многочлена $P_n(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \ldots + c_n$ как суммы степеней и рациональной функции как отношения многочленов. Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ были определены как суммы соответствующих степенных рядов. Так как в круге сходимости степенные ряды можно дифференцировать почленно, то, произведя дифференцирование, убеждаемся, что $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$. Логарифмическая и обратные тригонометрические функции дифференцируемы как обратные к соответствующим функциям. Таким образом, дифференцируемы все основные элементарные функции, следовательно, дифференцируемы и все функции, которые можно получить из них с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиции.

Введём одно из основных понятий в теории функций комплексного переменного.

Определение 19.4. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Однозначную в области D функцию или однозначную в области D ветвь многозначной функции будем называть аналитической в области D, если она имеет производную в каждой точке области.*

Множество всех аналитических в области D функций обозначим символом $A(D)$.

Так как дифференцируемые функции непрерывны, то всякая аналитическая в области D функция непрерывна в ней, то есть $A(D) \subset C(D)$.

Подчеркнём ещё раз, что *аналитичность определена для области.* Поэтому, если говорят об аналитичности функции на замкнутом множестве (в частности, в точке или на кривой), то подразумевают, что существует область, содержащая это множество, в которой рассматриваемая функция аналитична.

Аналитические функции тесно связаны с действительными функциями от двух переменных, называемыми гармоническими.

Определение 19.5. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$. Функцию $u : D \to \mathbb{R}$ назовём гармонической, если она имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{19.7}$$

Определение 19.6. *Две гармонические в области D функции u и v назовём сопряжёнными, если они связаны условиями Коши-Римана (19.2).*

Теорема 19.2. *Действительная и мнимая части функции, аналитической в области D, — сопряжённые гармонические в области D функции.*

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая в области D функция. Тогда в каждой точке области D в силу теоремы 19.1 выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продифференцируем[2] первое из равенств по x, второе по y и сложим получившиеся равенства. Получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если же продифференцируем первое равенство по y, а второе по x и вычтем, то получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема доказана. ■

Из доказанной теоремы следует, что в качестве вещественной или мнимой части аналитической функции нельзя взять любую дифференцируемую функцию двух переменных, а только лишь гармоническую. Например, функция $u(x, y) = x^2 + y^2$ не является вещественной частью никакой аналитической функции, а функция $u(x, y) = x^2 - y^2$ — является, но это станет ясно после доказательства следующей теоремы.

Теорема 19.3. *Пусть D — односвязная область и функция u — гармоническая в области D. Тогда существует аналитическая в области D функция f, для которой функция u служит действительной частью.*

Доказательство. Достаточно доказать существование определённой в области D гармонической функции v, сопряжённой к функции u.

Возьмём в области D фиксированную точку (x_0, y_0) и произвольную (x, y) и рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{19.8}$$

Функция u — гармоническая в D, поэтому имеет в ней непрерывные производные второго порядка. Положим $-\dfrac{\partial u}{\partial y} = P(x, y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y)$. Функции P и Q непрерывны вместе с производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области D и, в силу гармоничности функции u, выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда интеграл (19.8)(см. теорему 18.5) определяет в области D функцию v, которая, по той же теореме, дифференцируема в этой области, причём всюду в области

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x},$$

то есть функции u и v связаны в области D условиями Коши-Римана.

Но тогда функция $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ по теореме 19.1 является аналитической в области D. ■

[2]Позже, независимо от доказываемой сейчас теоремы, будет доказано, что аналитическая функция, а значит, и её действительная и мнимая части бесконечно дифференцируемы.

Замечание 19.2. *Функция v определяется в области D с точностью до постоянной, так как величина интеграла (19.8) зависит от выбора точки (x_0, y_0).*

Замечание 19.3. *Точно так же можно доказать, что, имея гармоническую в D функцию v, можно найти аналитическую в D функцию, для которой функция v будет служить мнимой частью.*

19.2 Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть $L = \smile{AB}$ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$ с началом в точке A и концом в точке B и функция f определена на кривой L. Разобьём L на части точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ и выберем на каждой дужке $M_{k-1}M_k$ по точке N_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Пусть точки M_k имеют координаты z_k, а точки N_k — координаты ζ_k. Составим сумму

$$\sigma = \sigma(f, \{M_k\}, \{N_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \tag{19.9}$$

и назовём её интегральной суммой (функции f по кривой L).

Положим $\Delta = \max\{|\Delta z_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$ и определим интеграл от функции f по кривой L следующим образом:

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\Delta \to 0} \sigma \tag{19.10}$$

при условии существования последнего. Предел интегральных сумм определяется так же, как и в вещественном случае. Так же доказывается (при условии существования интегралов), что интеграл обладает свойствами:

1) $\displaystyle\int_{BA} f(z)dz = -\int_{AB} f(z)dz;$

линейными свойствами

2) $\displaystyle\int_L (f(z) + g(z))\, dz = \int_L f(z)dz + \int_L g(z)dz;$

3) $\displaystyle\int_L cf(z)dz = c\int_L f(z)dz,\ c \in \mathbb{C};$

свойством аддитивности

4) $\displaystyle\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$, если $L = L_1 \bigcup L_2$ и два из трёх интегралов существуют.

Справедлива также оценка интеграла

5) $\displaystyle\left|\int_L f(z)dz\right| \le M|L|$, где $M:\ |f(z)| \le M\ (z \in L)$, а $|L|$ — длина дуги кривой L.

Докажем последнее свойство. Пусть число M таково, что $|f(z)| \le M$ $(z \in L)$. Тогда (см. (19.9))

$$|\sigma| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| \le M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le M|L|,$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ — длина вписанной в кривую L ломаной — не превосходит длины кривой L. Отсюда предельным переходом получаем свойство 4).

Теорема 19.4 (Теорема существования). *Если кривая L — гладкая, а функция f непрерывна на L, то $\int\limits_L f(z)dz$ существует и может быть вычислен по формуле*

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{19.11}$$

Доказательство. Напомним, что кривую L, определяемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \le t \le b, \tag{19.12}$$

называют гладкой, если функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, причём $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \ne 0$.

Запишем в (19.9) ζ_k как $\xi_k + i\eta_k$, $f(\zeta_k)$ как $u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)$, Δz_k как $\Delta x_k + i\Delta y_k$ и, произведя соответствующие преобразования, отделим действительную часть от мнимой.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\left(u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left((u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) + i(v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k).$$

Итак,

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \tag{19.13}$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k), \quad \sigma_2 = \sum_{k=1}^{n}(v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k).$$

Заметим, что суммы σ_1, σ_2 являются интегральными суммами для криволинейных интегралов второго рода, которые, как было показано (см. теорему 18.2), в случае непрерывности функций u и v и гладкости кривой L существуют. Следовательно, правая часть в (19.13), а вместе с ней и левая, имеют предел при $\Delta \to 0$. Совершив предельный переход, из (19.13) получим (19.11) ■

Следствие 19.1. *Если кривая L — кусочно гладкая, а функция f кусочно непрерывна на ней, то $\int\limits_L f(z)dz$ существует.*

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, достаточно разбить кривую L на такие части L_1, L_2, ..., L_m, каждая из которых является гладкой и функция f непрерывна на ней, после чего применить свойство 4.

Заметим, что мы не только доказали существование интеграла от функции комплексного переменного, но и получили способ его вычисления. Применим к (19.11) формулы

(18.13), (18.14), полученные при доказательстве теоремы 18.2 существования криволинейного интеграла второго рода. Тогда

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b (u(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) - v(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\,dt +$$

$$+ i\int\limits_a^b (v(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + u(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b (u(\varphi(t),\psi(t)) + iv(\varphi(t),\psi(t)))\,(\varphi'(t) + i\psi'(t))dt.$$

Итак,

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b f(\varphi(t) + i\psi(t))d(\varphi(t) + i\psi(t)). \tag{19.14}$$

Следовательно, для вычисления интеграла нужно найти параметрические уравнения (19.12) кривой L, сделать в интеграле подстановку $z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$ и вычислить получившийся определённый интеграл в пределах от a до b.

Докажем теорему, играющую фундаментальную роль во всей теории функций комплексного переменного.

Теорема 19.5 (Основная теорема Коши)**.** *Пусть D — односвязная область, функция $f \in A(D)$ и L — любой кусочно гладкий контур, содержащийся в D. Тогда*

$$\int\limits_L f(z)dz = 0. \tag{19.15}$$

Доказательство. Доказательство проведём, наложив на функцию f дополнительное условие: её производная f' непрерывна в области D. Наложение этого условия вызвано лишь желанием упростить доказательство. Существует принадлежащее Гурса доказательство данной теоремы, не использующее условия непрерывности производной функции f, но оно значительно более сложное.

Представим, воспользовавшись предыдущей теоремой, $\int\limits_L f(z)dz$ в виде (19.11) и покажем, что оба интеграла, стоящие справа в этой формуле, удовлетворяют условиям, при которых справедлива формула Грина (см. теорему 18.3)

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

В первом из интегралов $P(x,y) = u(x,y)$, $Q(x,y) = -v(x,y)$. Так как f' предположена непрерывной в области D, то в этой области непрерывны также функции u и v и все их частные производные (см. теорему 19.1 и замечание к ней). Поэтому формулу Грина применить можно.

Обозначим область, ограниченную контуром L, через D_0. Тогда

$$\int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint\limits_{D_0} \left(-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

в силу второго из условий Коши-Римана.

Совершенно аналогично показывается, что равен нулю и второй из интегралов в правой части формулы (19.11). ■

Следствие 19.2. *Пусть функция f является аналитической в односвязной области D, z_1 и z_2 — любые две точки, принадлежащие области D, и L_1, L_2 — произвольные кусочно гладкие кривые, соединяющие эти точки. Тогда*

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz.$$

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство первой части теоремы 18.5.

Из этого следствия вытекает, что при интегрировании от точки z_1 до точки z_2 вид кривой L, соединяющей эти точки, указывать не обязательно, а потому можно записывать интеграл в виде $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$. Из следствия вытекает также, что если взять фиксированную точку z_0 и любую точку z области D, то функция

$$\Phi: \ z \longrightarrow \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$$

однозначно определена в области D.

Теорема 19.6. *Если D — односвязная область, а функция f — аналитическая в ней, то функция*

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt \tag{19.16}$$

является первообразной функции f.

Доказательство. В соответствии с определением первообразной необходимо доказать, что в каждой точке z области D определена производная $\Phi'(z)$ и что $\Phi'(z) = f(z)$.

Возьмём любую точку z области D. Так как функция f в точке z непрерывна, то по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что окрестность $U_\delta(z) \subset D$ и для любого $|\Delta z| < \delta$ выполняется условие $|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$.

Пусть $|\Delta z| < \delta$. По определению производной

$$\Phi'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt - \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

Составим и оценим разность между $\dfrac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt$ и $f(z)$. Как нетрудно убедиться, исходя прямо из определения интеграла, $\Delta z = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} dt$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\cdot\Delta z\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\int\limits_{z}^{z+\Delta z} dt\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} (f(t)-f(z))dt\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon.$$

Из полученной оценки следует, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = f(z)$, что и требовалось доказать. ■

Доказанная теорема означает во-первых, что функция $\Phi(z)$ является аналитической в области D, а во-вторых, для аналитических в односвязной области функций справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

где F — любая первообразная функции f.

Теорема 19.7 (Теорема Коши для многосвязной области)**.** *Пусть D — $(m+1)$-связная область, ограниченная снаружи кусочно гладким контуром L_0 и изнутри — кусочно гладкими контурами L_k $(k = 1, 2, \dots, m)$. Пусть функция f аналитична в области D', содержащей область D вместе с границей. Тогда*

$$\int\limits_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{L_k} f(z)dz. \tag{19.17}$$

Доказательство. Разрежем область D по кусочно гладким кривым l_k, соединяющим внешнюю границу L_0 с внутренними границами L_k, так, чтобы разрезы не соприкасались друг с другом. Тогда область D превратится в односвязную область $\widetilde{D}$ с границей Γ, состоящей из внешнего контура L_0, внутренних контуров L_k и разрезов l_k. При этом при обходе области $\widetilde{D}$ по границе Γ в положительном направлении (область находится слева от направления движения) участки границы l_k проходятся дважды, сначала от внешней границы L_0 к соответствующей внутренней L_k, а потом, после обхода по L_k, назад к L_0.

Так как выполнены условия основной теоремы Коши (контур Γ — кусочно гладкий, а функция f аналитична в более широкой области, чем $\widetilde{D}$), то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{19.18}$$

Разобьём Γ на составляющие L_0, L_k, l_k $(k = 1, 2, \dots, m)$ и воспользуемся свойством аддитивности интеграла. Тогда

$$\int\limits_{L_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{L_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{l_k} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{l_k} f(z)dz = 0.$$

Знак "$-$" перед вторым слагаемым в этом равенстве стоит потому, что в (19.18) интегрирование по контурам L_k производится по часовой стрелке, а в последнем равенстве — против часовой стрелки согласно договорённости об интегрировании по замкнутым контурам, принятой в теме "криволинейные интегралы второго рода". Знак "$-$" перед последним слагаемым объясняется тем, что интегрирование по кривым l_k производится дважды: один раз — от L_0 к L_k, второй раз — обратно.

После взаимного уничтожения третьей и четвёртой сумм и переноса слева направо второй суммы получаем (19.17). ■

Следствие 19.3. *Пусть D — область и $f \in A(D)$. Если L_1 и L_2 — любые кусочно гладкие контуры, расположенные в области D так, что между ними, то есть в Int $L_1 \triangle$ Int L_2, функция f — аналитическая, то*

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz. \tag{19.19}$$

Доказательство. Если контуры L_1 и L_2 не пересекаются, то равенство (19.19) прямо следует из доказанной теоремы.

Если же контуры L_1 и L_2 пересекаются, то возьмём третий кусочно гладкий контур L_3 так, чтобы он лежал в области D, контуры L_1 и L_2 располагались внутри него и функция f была аналитической между ним и каждым из данных контуров. Это можно сделать, так как L_1 и L_2 расположены внутри D, а D — открытое множество, поэтому её граница не может соприкасаться с контурами L_1 и L_2. Тогда, опять же по доказанной теореме

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_3} f(z)dz, \quad \int\limits_{L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_3} f(z)dz,$$

откуда вытекает (19.19). ■

Приведённое следствие можно переформулировать следующим образом: *если кусочно гладкий контур L, лежащий в области аналитичности функции f, подвергнуть непрерывной деформации, не выводящей его за пределы области аналитичности f, то величина интеграла $\int\limits_L f(z)dz$ не изменится.*

19.3 Интегральная формула Коши

Интегральная теорема Коши позволяет вывести формулу, являющуюся основной во всей теории функций комплексного переменного.

Теорема 19.8. *Пусть D — односвязная область, $f \in A(D)$ и L — кусочно гладкий контур, расположенный в D. Тогда для любой точки z, лежащей внутри L, справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \tag{19.20}$$

называемая интегральной формулой Коши или, короче, интегралом Коши.

Доказательство. Возьмём внутри контура L любую точку z и окружность L_r с центром в точке z настолько малого радиуса r, чтобы она тоже располагалась внутри контура L.

Тогда функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ аналитична на контурах L и L_r и между ними, поэтому по следствию из теоремы 19.7

$$\int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z}dt = \int\limits_{L} \frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{19.21}$$

По тому же следствию величина интеграла, стоящего в (19.21) слева, не зависит от r, поэтому вычислим его, найдя предел при $r \to 0$. Но сначала положим в нём $t = z + re^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z}dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} f(z+re^{i\varphi})d\varphi.$$

Последний интеграл есть собственный интеграл, зависящий от параметра. Так как подынтегральная функция непрерывна (в силу аналитичности), то его предел можно найти предельным переходом под знаком интеграла. Итак,

$$\int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z}dt = i\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(z+re^{i\varphi})d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z+re^{i\varphi})d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} f(z)d\varphi = 2\pi i f(z).$$

Подставив найденное значение $\displaystyle\int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z}dt$ в (19.21) и разделив на $2\pi i$, получим интегральную формулу Коши. ■

Замечание 19.4. *Если точка z лежит вне контура L, то $\displaystyle\int\limits_{L} \frac{f(t)}{t-z}dt = 0$, так как в этом случае функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ — аналитическая внутри контура L и на нём самом, то есть удовлетворяет условию основной теоремы Коши.*

Следствие 19.4. *Пусть $f \in A(D)$, $z_0 \in D$ и $r > 0$ таково, что круг радиуса r с центром в точке z_0 содержится в D. Тогда справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi, \tag{19.22}$$

называемая формулой среднего значения.

Другими словами, значение аналитической функции в центре круга равно среднему её значений на границе этого круга.

Для доказательства формулы среднего значения заметим, что выполнены условия применимости интегральной формулы Коши, поэтому

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z_0}dt,$$

где L_r — окружность радиуса r с центром в точке z_0. Остаётся сделать замену $t = z_0 + re^{i\varphi}$.

Теорема 19.9 (Принцип максимума модуля). *Пусть D — ограниченная область, функция f — аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$. Тогда или $f(z) \equiv const$ в $\overline{D}$, или $|f(z)|$ достигает максимального значения на границе области D.*

Доказательство. Так как $\overline{D}$ — ограниченное и замкнутое, следовательно, компактное множество, а функция $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ непрерывна на $\overline{D}$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на $\overline{D}$ максимального значения. Положим

$$\max\left\{|f(z)| : \ z \in \overline{D}\right\} = M.$$

Если $M = 0$, то $|f(z)| \equiv 0$, следовательно, и $f(z) \equiv 0$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Рассмотрим случай $M > 0$. Предположим, что $|f(a)| = M$, где a — внутренняя точка области D, и покажем, что в таком случае $|f(z)| \equiv M$ на $\overline{D}$.

Сначала покажем, что $|f(z)| = M$ на любой окружности L_r с центром в точке a и радиуса r, лежащей вместе со внутренностью в области D. Если это не так, то на окружности L_r найдётся точка z_0 такая, что $|f(z_0)| < M$. Пусть $2\varepsilon = M - |f(z_0)|$. Тогда, в силу непрерывности на окружности L_r функции $|f(z)|$, найдётся дуга окружности $(\alpha;\, \beta)$, где α, β — координаты концов дуги в радианах относительно центра окружности, во всех точках t которой $|f(t)| < M - \varepsilon$. Оценим, используя формулу среднего значения (19.22) и свойство 5 интеграла, значение $f(a)$.

$$M = |f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{[0\,2\pi]} f(a + re^{i\varphi})d\varphi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{(\alpha;\beta)} f(a + re^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{[0\,2\pi]\setminus(\alpha;\beta)} f(a + re^{i\varphi})d\varphi\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left((M - \varepsilon)(\beta - \alpha) + M(2\pi - (\beta - \alpha))\right) = M - \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\varepsilon < M.$$

Противоречие возникло из-за предположения, что функция $|f|$ может принимать на окружности L_r значения, меньшие, чем M. Тем самым доказано, что если $|f(a)| = M$, то $|f(z)| = M$ в круге с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от неё до границы области D.

Докажем теперь, что $|f(z)| = M$ всюду в области D. Пусть z_0 — любая точка области. Соединим точки a и z_0 кривой Γ, проходящей по области D (это можно сделать, поскольку область — связное множество). Пусть

$$d = \min\left\{|z - t| : \ z \in \Gamma, t \in \partial D\right\}$$

(∂D — граница области D). Число d существует и положительно, так как $\Gamma \times \partial D$ — множество, очевидно, замкнутое и ограниченное, а функция $\rho(z,t) = |z - t|$, определённая на нём, непрерывна, поэтому по второй теореме Вейерштрасса достигает на нём точной нижней грани в некоторой точке (z', t'). Так как Γ и ∂D общих точек не имеют, то $z' \ne t'$, поэтому $d = |z' - t'| > 0$.

Возьмём открытый круг K_d радиуса d и поместим первоначально его центр в точку a. По доказанному, в круге K_d всюду $|f(z)| = M$. Если центр круга K_d сдвинуть по кривой Γ так, чтобы он остался внутри первоначального положения круга, то в нём, а значит, и во всём круге по-прежнему будет выполняться равенство $|f(z)| = M$. Следовательно, при непрерывном перемещении по кривой Γ центра круга K_d постоянно $|f(z)|$ в нём будет равен M. Будем перемещать центр круга K_d по кривой Γ до тех пор, пока он не достигнет точки z_0. Когда центр круга достигнет точки z_0, то будем иметь: $|f(z_0)| = M$. Так как z_0 — любая точка области D, то всюду в области D будем иметь: $|f(z)| = M$.

Теперь покажем, что и сама функция f постоянна в области D. Для этого рассмотрим функцию $g(z) = \mathrm{Ln} f(z)$. Поскольку $f(z) \ne 0$ в D, то функция g определена в области D и дифференцируема в ней как суперпозиция дифференцируемых функций, поэтому для неё во всех точках области D выполняются условия Коши-Римана. Имеем:

$$g(z) = \mathrm{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\mathrm{Arg} f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Но $|f(z)| = M$ в области D, поэтому и $\mathrm{Ln}|f(z)|$ — постоянная, следовательно, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$. Но тогда в силу условий Коши-Римана и $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ в D, поэтому $\psi(x,y) = \mathrm{Arg}f(z)$ тоже принимает в D постоянное значение.

Итак, функция $\mathrm{Ln}f(z)$ постоянна в D. Но тогда и функция $f(z) = e^{\mathrm{Ln}f(z)}$ тоже постоянна в D.

Ввиду непрерывности в $\overline{D}$ функция f постоянна и в $\overline{D}$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 19.5 (Принцип минимума модуля)**.** *Пусть область D ограничена, функция f — аналитическая в D, непрерывная и не обращающаяся в ноль в замыкании D. Если f — не тождественная постоянная, то она достигает минимума на границе области D.*

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно применить к функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ принцип максимума модуля.

Определение 19.7. *Пусть L — кусочно гладкая кривая, однозначная функция f кусочно непрерывна на кривой L. Тогда интеграл*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt,\ \ z \notin L, \tag{19.23}$$

называют интегралом типа Коши.

Отличие интеграла типа Коши от интеграла Коши заключается в том, что в интеграле Коши L — кусочно гладкий контур, расположенный в области аналитичности функции f, и точка z находится внутри контура. В интеграле же типа Коши кривая L может быть не замкнута, может иметь точки самопересечения, функция f определена лишь на кривой L, и точка z может располагаться где угодно вне кривой L. Так что интеграл Коши является интегралом типа Коши, но не наоборот.

Изучим свойства интеграла типа Коши.

Теорема 19.10. *Интеграл типа Коши является аналитической функцией в каждой связной части плоскости, ограниченной кривой L.*

Доказательство. Однозначность функции F, представленной интегралом (19.23), очевидна. Докажем дифференцируемость. Пусть $z \notin L$. Тогда существует $U_\delta(z)$, не содержащая точек кривой L. Возьмём любое такое приращение h, что $|h| < \dfrac{\delta}{2}$, и составим разностное отношение

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-(z+h)}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi h i}\int\limits_L f(t)\left(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}dt. \tag{19.24}$$

Покажем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt. \tag{19.25}$$

Для этого рассмотрим и оценим разность

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{hf(t)}{(t-z)^2(t-z-h)}dt.$$

Пусть $M = \max\{|f(t)| :\ t \in L\}$, $|L|$ — длина кривой L. Тогда, принимая во внимание, что $|t-z| > \delta$, а $|h| < \delta/2$, следовательно, $|t-z-h| \geq |t-z| - |h| > \delta/2$, имеем:

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{hf(t)}{(t-z)^2(t-z-h)}dt \right| \leq \frac{M|h|}{\pi\delta^3}|L|.$$

Из полученной оценки видно, что $\Delta \to 0$ при $h \to 0$, поэтому утверждение (19.25) справедливо, а тогда, переходя к пределу при $h \to 0$ в равенстве (19.24), будем иметь:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt. \tag{19.26}$$

Теорема доказана. ■

Следствие 19.6. *Так как интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши, то из доказанной теоремы вытекает, что интеграл Коши (19.20) можно дифференцировать под знаком интеграла и*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt. \tag{19.27}$$

Теорема 19.11. *Интеграл типа Коши — бесконечно дифференцируемая функция в каждой из областей его аналитичности. При этом*

$$F^{(l)}(z) = \frac{l!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+1}}dt,\ \ l = 1, 2, \dots\,. \tag{19.28}$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $l = 1$ доказываемая формула совпадает с (19.26), поэтому верна. Предположим, что формула верна для некоторого $l \geq 1$, и докажем её справедливость для следующего значения $l+1$.

При тех же предположениях, что и в предыдущей теореме, имеем:

$$\begin{aligned} F^{l+1}(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{F^{(l)}(z+h) - f^{(l)}(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l!}{2\pi i h}\left(\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z-h)^{l+1}}dt - \int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+1}}dt\right) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{l!}{2\pi i h}\int\limits_L f(t)\frac{(t-z)^{l+1} - (t-z-h)^{l+1}}{(t-z)^{l+1}(t-z-h)^{l+1}}dt = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{l!}{2\pi i}\int\limits_L f(t)\frac{\big((t-z)^l + (t-z)^{l-1}(t-z-h) + \ldots + (t-z-h)^l\big)}{(t-z)^{l+1}(t-z-h)^{l+1}}dt = \\ &= \frac{l!}{2\pi i}\int\limits_L f(t)\frac{(l+1)(t-z)^l}{(t-z)^{2l+2}}dt = \frac{(l+1)!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+2}}dt. \end{aligned} \tag{19.29}$$

Возможность перехода к пределу под знаком интеграла обосновывается так же, как и в предыдущей теореме. ■

Следствие 19.7. *Аналитическая в области D функция бесконечно дифференцируема в этой области. При этом в любой точке $z \in D$*

$$f^{(l)}(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+1}} dt, \ l = 1, 2, \ldots, \tag{19.30}$$

где L — любой кусочно гладкий контур, внутри которого находится точка z, и функция f аналитична на контуре и внутри него.

Таким образом, нами установлен следующий важный факт: из существования у функции f в некоторой области D производной первого порядка вытекает существование в этой области производных любого порядка и, следовательно, непрерывность всех производных, в том числе и производной первого порядка. Доказательство бесконечной дифференцируемости опиралось на интегральную формулу Коши, которая, в свою очередь, была выведена из основной теоремы Коши. Доказательство основной теоремы Коши использует лишь факт существования производной у функции комплексного переменного. То, что нами при её доказательстве была использована непрерывность производной, вызвано лишь желанием облегчить доказательство. Из бесконечной дифференцируемости аналитической функции и формул (19.6) вытекает бесконечная дифференцируемость в области D её вещественной и мнимой частей $u(x, y)$ и $v(x, y)$, следовательно, и любой гармонической функции.

19.4 Ряды аналитических функций

Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$, функции $u_k : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Будем считать, что в каждой точке z области D ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится. Тогда в области D определена функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z). \tag{19.31}$$

Свойства ряда (19.31) и его суммы описываются следующими двумя теоремами.

Теорема 19.12 (Вейерштрасс, 1-я). *Пусть члены ряда (19.31) — аналитические в области D функции и ряд сходится равномерно на каждом компакте K, содержащемся в области D. Тогда:*

1) сумма ряда $f(z)$ — аналитическая в области D функция;

2) ряд можно почленно дифференцировать в D любое число раз, то есть для любого $l \in \mathbb{N}$

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(l)}(z);$$

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(l)}(z)$ сходится равномерно на каждом компакте K, содержащемся в области D.

Доказательство. 1) Возьмём любую точку z области D, окружим её кусочно гладким контуром L, содержащимся вместе со внутренностью в области D, и покажем сначала, используя критерий Коши, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(t)}{t-z}$ равномерно сходится на кривой L.

Пусть $d = \min\{|t-z| : \ t \in L\}$ — расстояние от точки z до кривой L. Так как кривая L — замкнутое и ограниченное, то есть компактное множество, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ по условию равномерно сходится на любом компакте, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для любого $n \geq n_0$, для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(t)\right| < d\varepsilon$. Но тогда для тех же n и p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k(t)}{t-z}\right| = \frac{1}{|t-z|}\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right| < \frac{1}{d} \cdot d\varepsilon = \varepsilon,$$

что и требовалось.[3]

Тогда, используя интегральную формулу Коши, имеем:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{u_k(t)}{t-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования законно ввиду доказанной выше равномерной сходимости ряда.

В результате мы получили представление $f(z)$ в виде интеграла типа Коши. Так как функция f на контуре L непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, то по теореме 19.10 функция f является аналитической внутри контура L. Ввиду произвольности выбора z функция $f \in A(D)$.

2) Снова возьмём любую точку $z \in D$ и кусочно гладкий контур, содержащийся в D вместе с внутренностью. Так как $f, u_k (k \in \mathbb{N}) \in A(D)$, то по следствию 19.7 из теоремы 19.11

$$f^{(l)}(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+1}} dt, \; u_k^{(l)}(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{u_k(t)}{(t-z)^{l+1}} dt, \; l \in \mathbb{N},$$

поэтому

$$f^{(l)}(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{l+1}} dt = \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{dt}{(t-z)^{l+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{u_k(t)}{(t-z)^{l+1}} dt = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(l)}(z).$$

Возможность изменения порядка суммирования и интегрирования обосновывается так же, как и в пункте 1.

3) Пусть K — любой компакт, содержащийся в D. Так как компакт замкнут, а область D открыта, то компакт не соприкасается с границей области, поэтому можно подобрать кусочно гладкий контур L, содержащий внутри себя компакт K и содержащийся в области D вместе с внутренностью. Пусть $d = \min\{|z-t| : z \in K, t \in L\}$. (Существование и положительность d обосновываются так же, как в теореме 19.9.) Так как на компакте L ряд (19.31) сходится равномерно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(t)\right| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall t \in L. \tag{19.32}$$

[3]Фактически доказано общее утверждение: если члены равномерно сходящегося ряда умножить на одну и ту же ограниченную функцию, то он останется равномерно сходящимся.

Пусть n, p такие, как указано в (19.32), $z \in K$ и $l \in \mathbb{N}$ — любое. Проведём следующую оценку.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k^{(l)}(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{l!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{u_k(t)}{(t-z)^{l+1}} dt\right| =$$

$$= \frac{l!}{2\pi} \left|\int\limits_L \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(t) \frac{dt}{(t-z)^{l+1}}\right| \leq \frac{l!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{d^{l+1}} |L| = \frac{l!\,|L|}{2\pi\, d^{l+1}}\, \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, а остальные множители фиксированы, то из полученной оценки, согласно критерию Коши, следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(l)}(z)$.

Теорема полностью доказана. ■

Следствие 19.8. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *сходится в круге* $|z-a| < R$, *где* $0 < R \leq +\infty$. *Тогда его сумма*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

является аналитической в этом круге функцией.

Доказательство. Члены степенного ряда $c_k(z-a)^k$ — аналитические в круге сходимости функции, а по теореме 15.1 степенной ряд равномерно сходится в круге $|z-a| \leq r < R$ для каждого $r < R$.

Пусть K — любое компактное множество, содержащееся в круге $|z-a| < R$. Так как функция $f(x,y) = \rho(a,z) = |z-a|$ $(z = x+iy)$ непрерывна на K, то по второй теореме Вейерштрасса о непрерывных на компактах функциях она достигает на K своей точной верхней грани. Так как для любого $z \in K$ выполняется неравенство $f(x,y) = |z-a| < R$, то и $\sup\{f(x,y) : z \in K\} = r < R$. Следовательно, если компактное множество K содержится в круге $|z-a| < R$, то оно содержится и в круге $|z-a| \leq r$ при некотором $r < R$, а тогда степенной ряд равномерно сходится на K, поэтому к степенным рядам применима первая теорема Вейерштрасса. ■

Теорема 19.13 (Вейерштрасс, 2-я)**.** *Пусть область D ограничена, члены ряда (19.31) — аналитические в D и непрерывные в замыкании D функции. Если ряд сходится равномерно на границе области D, то он сходится равномерно в замыкании $\overline{D}$ области D.*

Доказательство. Если ряд (19.31) сходится равномерно на ∂D, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_0, что для любого $n \geq n_0$, для любого $p \in \mathbb{N}$ и для любого $z \in \partial D$ будет выполняться условие (19.32). Как конечная сумма функций, аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функция $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)$ обладает теми же свойствами, поэтому к ней можно применить принцип максимума модуля (теорема 19.9), согласно которому если неравенство (19.32) выполняется на ∂D, то оно выполняется и на $\overline{D}$. ■

19.5 Ряд Тейлора

Теорема 19.14. *Аналитическая в области D функция f в любой точке $a \in D$ разлагается в ряд Тейлора*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \ldots, \tag{19.33}$$

радиус сходимости которого не меньше расстояния от точки a до границы области D.

Доказательство. Пусть $d = \rho(a, \partial D)$ (расстояние от точки a до границы области D). Рассмотрим открытый круг K_d с центром в точке a, возьмём в нём любую точку z, выберем r так, чтобы $|z-a| < r < d$, и проведём окружность L_r радиуса r с центром в точке a. Так как окружность вместе со внутренностью лежит в области аналитичности функции f и точка z находится внутри неё, то можно написать интегральную формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{t-z} dt. \tag{19.34}$$

Рассмотрим ядро $\dfrac{1}{t-z}$ интеграла Коши и преобразуем его.

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = \frac{1}{(t-a)\left(1 - \dfrac{z-a}{t-a}\right)}.$$

Так как $|z-a| < r$, а $|t-a| = r$, то $\left|\dfrac{z-a}{t-a}\right| = q < 1$, поэтому $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{t-a}}$ можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(t-a)^{k+1}}. \tag{19.35}$$

Заметим, что ряд в правой части (19.35) сходится равномерно на L_r, поскольку он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{r} q^k$. Равномерная сходимость сохранится и после умножения обеих частей равенства (19.35) на $f(t)$ (см. примечание к теореме 19.12). Умножим обе части (19.35) на $f(t)$, подставим в (19.34) и проинтегрируем почленно. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(t-a)^{k+1}} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}} dt \cdot (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{19.36}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}} dt = \frac{1}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}} dt = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \tag{19.37}$$

если принять во внимание (19.30)

Итак, функция f представлена в круге K_d степенным рядом, который, ввиду (19.37), является её рядом Тейлора. ■

Пусть дана функция комплексного переменного f. Относительно неё все точки комплексной плоскости делятся на два вида: регулярные и особые.

Определение 19.8. *Точку $z = a$ будем называть регулярной (или правильной) точкой функции f, если в этой точке f аналитична. Все остальные точки плоскости $\mathbb{C}$ будем называть особыми для функции f.*

Примерами особых точек являются точки, в которых функция: не определена, например, $z = 0$ для функции $\dfrac{1}{z}$; не дифференцируема, например, любая точка комплексной плоскости для функции $|z|$; дифференцируема в точке, но не в её окрестности, например, $z = 0$ для функции $\overline{z}^2$; точки ветвления, например, $z = 0$ для функции $\sqrt{z}$.

Если известны особые точки функции f, то радиус сходимости её ряда Тейлора с центром в регулярной точке $z = a$ находится просто.

Теорема 19.15. *Если функция f разложена в ряд Тейлора в окрестности точки a , то его радиус сходимости равен расстоянию от точки a до ближайшей к ней особой точки функции.*

Доказательство. Особые точки функции являются граничными для её области аналитичности, поэтому по предыдущей теореме радиус сходимости не меньше расстояния от точки a до ближайшей к ней особой точки функции. Но радиус сходимости не может быть и больше этого расстояния, ибо в противном случае особая точка попала бы внутрь круга сходимости, а в круге сходимости сумма степенного ряда — аналитическая функция. ■

Примеры.

1) Радиус сходимости ряда Тейлора функции $\dfrac{1}{1+z^2}$ с центром в нуле равен 1, так как особые точки этой функции $z = \pm i$ (нули знаменателя). Если же за центр разложения принять точку $z = 1$, то радиус сходимости будет равен $\sqrt{2}$.

2) Для функции $\dfrac{1}{\cos z}$ радиус сходимости ряда Тейлора с центром в нуле равен $\dfrac{\pi}{2}$, так как $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3) Для функции $\sqrt{z^2+4}$ радиус сходимости ряда Тейлора с центром в нуле равен 2, так как у этой функции $z = \pm 2i$ — точки ветвления, а в круге $|z| < 2$ каждая из двух её ветвей является аналитической функцией.

Теорема 19.16. *Пусть функция f разложена в ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

радиус сходимости которого равен $R(> 0)$. Тогда для коэффициентов c_k справедлива оценка

$$|c_k| \le \frac{M(r)}{r^k}, \tag{19.38}$$

где $0 < r < R$ — любое, а $M(r)$ есть максимум модуля $f(z)$ на окружности $|z-a| = r$.

Доказательство. Используя представление (19.37) коэффициентов ряда Тейлора и оценку интеграла (свойство 5), имеем:

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}} dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{k+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^k}.$$

■

Теорема 19.17 (Лиувилль)**.** *Если функция f аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена на ней, то она постоянна.*

Доказательство. Если функция f ограничена на $\mathbb{C}$, то существует число $M > 0$ такое, что $|f(z)| \le M$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Разложим функцию f в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

и оценим, используя (19.38), коэффициенты c_k.

$$|c_k| \le \frac{M(r)}{r^k} \le \frac{M}{r^k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

В этих оценках можно взять любое r (ряд сходится на всей плоскости, потому что нет особых точек), поэтому, устремив r к бесконечности, получим:

$$c_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $f(z) = c_0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. ■

Теорема Лиувилля утверждает, что аналитическая на всей плоскости и отличная от постоянной функция не может быть ограниченной. В частности, в комплексной плоскости являются неограниченными тригонометрические функции $\cos z$ и $\sin z$. Но ещё более неожиданным следствием теоремы Лиувилля является основная теорема алгебры.

Теорема 19.18. *Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \ge 1$ имеет по крайней мере один корень.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда найдётся многочлен $P_n(z)$ степени $n \ge 1$, не имеющий корней, то есть $P_n(z) \ne 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$. Эта функция определена на всей комплексной плоскости и является аналитической на ней как частное аналитических функций. Покажем, что она ограничена.

Так как $P_n(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \infty$, то найдётся такое $R > 0$, что $|P_n(z)| > 1$, следовательно, $|f(z)| < 1$ при $|z| > R$. А в круге $|z| \le R$ функция f непрерывна, поэтому ограничена. Итак, функция f ограничена на всей плоскости. В таком случае по теореме Лиувилля функция f является постоянной. Но тогда постоянен и многочлен $P_n(z)$, что, очевидно, неверно. ■

Теорема 19.19 (Первая теорема единственности)**.** *Пусть $f, g \in A(D)$, (z_n) — последовательность точек области D, сходящаяся к точке a, тоже <u>принадлежащей</u> области, причём $z_n \ne a$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f(z_n) = g(z_n)$. Тогда*

$$f(z) \equiv g(z), \; z \in D.$$

Доказательство. Разложим функции f и g в ряд Тейлора с центром в точке a. Пусть

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots\,,$$

$$g(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + d_3(z-a)^3 + \ldots\,.$$

Оба эти ряда сходятся в круге K с центром в точке a, радиус которого не меньше расстояния от точки a до границы области D. Так как $z_n \to a$, то, начиная с некоторого номера n_0, все точки z_n содержатся в круге K, а потому

$$\begin{aligned} c_0 + c_1(z_n-a) + c_2(z_n-a)^2 + c_3(z_n-a)^3 + \ldots =& \\ = d_0 + d_1(z_n-a) + d_2(z_n-a)^2 + d_3(z_n-a)^3 + \ldots\,. \end{aligned} \tag{19.39}$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $c_0 = d_0$. Отбросим в (19.39) одинаковые слагаемые и разделим на $z_n - a$. Тогда

$$c_1 + c_2(z_n-a) + c_3(z_n-a)^2 + \ldots = d_1 + d_2(z_n-a) + d_3(z_n-a)^2 + \ldots\,.$$

Снова перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим $c_1 = d_1$ и так далее.

Продолжив описанный процесс до бесконечности, найдём, что $c_k = d_k$ для любого натурального k. Это означает, что ряды Тейлора функций f и g совпадают, а значит и функции f и g равны в круге K.

Доказательство завершается рассуждением, аналогичным проведённому в теореме 19.9 (принцип максимума модуля). Возьмём любую точку z_0 области D, соединим её с точкой a кривой L, проходящей по области, вычислим минимальное расстояние d между точками кривой L и границы ∂D области D и протянем круг K_d радиуса d по области так, чтобы его центр переместился по кривой L из точки a в точку z_0. При небольшом смещении из первоначального положения центр круга останется в первоначальном круге K, поэтому в некоторой окрестности центра сами функции f и g, а значит и все их производные, а значит и ряды Тейлора будут совпадать. Поэтому $f(z) = g(z)$ в смещённом круге K_d. Так как описанная ситуация при смещении круга K_d будет повторяться постоянно, то, когда круг K_d покроет точку z_0, мы получим, что $f(z_0) = g(z_0)$.

Теорема доказана. ■

Следствие 19.9. *Если две аналитические в области D функции принимают равные значения на некоторой кривой L, содержащейся в D, или в некоторой подобласти D_0 области D, то они тождественны в D.*

Действительно, в этом случае на кривой L или в подобласти D_0 можно выбрать последовательность точек, сходящуюся к внутренней точке области D.

Замечание 19.5. *Условие $a \in D$ в доказанной теореме существенно. При его невыполнении утверждение теоремы может нарушаться.*

Пример. Пусть $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$, $g(z) = \sin^2\dfrac{1}{z}$. В точках $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ обе функции равны нулю. Последовательность $z_n \to 0$, но функции f и g различны. Причина в том, что точка $z = 0$ не принадлежит области определения функций, а является граничной.

Первая теорема единственности может быть использована для доказательства сохранения формул при переходе с вещественной оси в комплексную плоскость. Рассмотрим два примера.

1) $\sin 2z = 2\sin z\cos z,\ z \in \mathbb{C}$.

Левая и правая части — аналитические в $\mathbb{C}$ функции, совпадающие на вещественной прямой. По следствию из первой теоремы единственности равенство имеет место всюду в $\mathbb{C}$.

2) $e^{u+v} = e^u \cdot e^v,\ u, v \in \mathbb{C}$.

Пусть сначала u — любое фиксированное вещественное число, а $v \in \mathbb{C}$. Тогда левая и правая части, рассматриваемые как функции от v, аналитические в $\mathbb{C}$. Для $v \in \mathbb{R}$ равенство справедливо, значит, оно справедливо и для любых $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$.

Теперь возьмём любое фиксированное $v \in \mathbb{C}$ и рассмотрим обе части равенства как функции от u. Обе они аналитические в $\mathbb{C}$. По доказанному, для $u \in \mathbb{R}$ равенство справедливо, значит, оно справедливо для любых $u, v \in \mathbb{C}$.

Теорема 19.20 (Вторая теорема единственности)**.** *Пусть $f, g \in A(D)$ и в некоторой точке $a \in D$ имеют место равенства $f(a) = g(a)$ и $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в области D.*

Доказательство. Разложим обе функции в ряд Тейлора с центром в точке a. В силу условий, наложенных на функции, их ряды Тейлора будут совпадать, следовательно, функции тождественны в круге сходимости. По следствию из первой теоремы единственности $f(z) \equiv g(z)$ в области D. ■

Определение 19.9. *Пусть $f \in A(D)$. Точку $a \in D$ назовём нулём функции f кратности l, если*

$$f(a) = 0,\ f'(a) = 0,\ \ldots,\ f^{(l-1)}(a) = 0,\ f^{(l)}(a) \neq 0.$$

Нуль первой кратности часто называют простым нулём функции.

Примеры.

1) $f(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 + 8z - 4$.

Проверкой убеждаемся, что $z = 1$ — нуль функции. Найдём его кратность.

$$f'(z) = 4z^3 - 6z^2 - 6z + 8,\ f'(1) = 4 - 6 - 6 + 8 = 0;$$

$$f''(z) = 12z^2 - 12z - 6,\ f''(1) = 12 - 12 - 6 = -6 \neq 0.$$

Следовательно, $z = 1$ — нуль функции кратности 2.

2) $f(z) = z - \sin z$.

Покажем, что $z = 0$ — нуль функции кратности 3. Имеем:

$$f'(z) = 1 - \cos z,\ f''(z) = \sin z,\ f'''(z) = \cos z;$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 1 \neq 0.$$

Теорема 19.21 (О нулях аналитической функции)**.** *Пусть f — аналитическая в D и не равная тождественному нулю функция. Если точка a из D является нулём функции f, то он имеет конечную кратность и изолирован от других нулей.*

Доказательство. Разложим функцию f в ряд Тейлора в точке a.

$$f(z) = f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \ldots$$

Все производные функции f в точке a не могут быть равными нулю, ибо тогда бы по второй теореме единственности функция f тождественно равнялась бы нулю в области D, что противоречит условию. Поэтому найдётся такое $l \geq 1$, что $f(a) = 0$ (по условию),

$f'(a) = 0, \ldots, f^{(l-1)}(a) = 0$, $f^{(l)}(a) \neq 0$. Это означает, во-первых, что a — нуль кратности l функции f, и, во-вторых, что её ряд Тейлора в точке a имеет вид

$$f(z) = \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(z-a)^l + \frac{f^{(l+1)}(a)}{(l+1)!}(z-a)^{l+1} + \ldots =$$
$$= (z-a)^l\left(\frac{f^{(l)}(a)}{l!} + \frac{f^{(l+1)}(a)}{(l+1)!}(z-a) + \ldots\right) = (z-a)^l\varphi(z). \quad (19.40)$$

Функция $\varphi(z)$, как сумма степенного ряда, аналитическая, следовательно, непрерывная в круге сходимости. Поскольку $\varphi(a) \neq 0$, то найдётся $U_\delta(a)$, в которой $\varphi(z) \neq 0$, поэтому в ней функция f других нулей, за исключением a, не имеет. Следовательно, a — изолированный нуль функции f. ■

19.6 Ряд Лорана

В некоторых случаях приходится рассматривать степенные ряды более общего вида, чем изучавшиеся ранее, именно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad (19.41)$$

в которых суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным степеням разности $z-a$. Установим область сходимости и свойства суммы таких рядов. С этой целью разобьём сумму (19.41) на две суммы, именно

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad (19.42)$$

первая из которых содержит отрицательные степени $z-a$, а вторая — неотрицательные.

Вторая сумма в правой части (19.42) — обычный степенной ряд, сходящийся абсолютно в круге $|z-a| < R_2$ $(0 < R_2 \leq +\infty)$[4], равномерно на каждом компактном множестве K, содержащемся в круге $|z-a| < R_2$ (теорема 15.1) и его сумма

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad (19.43)$$

является аналитической в круге $|z-a| < R_2$ функцией (следствие к теореме 19.12).

Теперь займёмся первой суммой в правой части (19.42). Сделаем в ней замену переменной, положив $z - a = \dfrac{1}{\zeta - a}$, и замену индекса суммирования $k = -l$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\frac{1}{(\zeta-a)^k} = \sum_{l=1}^{\infty} c_{-l}(\zeta-a)^l. \quad (19.44)$$

Снова получился обычный степенной ряд. Пусть он сходится в круге $|\zeta - a| < \dfrac{1}{R_1}$, где $\left(0 < \dfrac{1}{R_1} \leq +\infty\right)$ $\left(\text{при } \dfrac{1}{R_1} = +\infty \text{ считаем } R_1 = 0\right)$. Тогда он сходится в этом круге

[4]Случай $R_2 = 0$, когда ряд сходится только в точке $z = a$, для нас интереса не представляет.

абсолютно, равномерно на каждом компактном множестве K, содержащемся в нём, и его сумма

$$\varphi(\zeta) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{-l}(\zeta - a)^l$$

является аналитической в круге $|\zeta - a| < \dfrac{1}{R_1}$ функцией. Но тогда ряд, стоящий слева в равенстве (19.44), сходится абсолютно в области $|z - a| > R_1$, равномерно на каждом компактном множестве K, содержащемся в ней, и его сумма

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z - a)^k = \varphi\left(a + \frac{1}{z - a}\right)$$

— аналитическая в этой области как суперпозиция аналитических функций.

Если $R_1 < R_2$, то оба ряда, стоящие справа в равенстве (19.42), обладают перечисленными выше свойствами в кольце $R_1 < |z - a| < R_2$, следовательно, в этом кольце ряд (19.41) сходится абсолютно, сходится равномерно на каждом содержащемся в нём компактном множестве K и его сумма

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - a)^k = f_1(z) + f_2(z)$$

является аналитической в указанном кольце функцией.

Если $R_1 = R_2 = R$, то ряд (19.41) может сходиться лишь на каком-либо подмножестве точек окружности $|z - a| = R$.

Если $R_1 > R_2$, то пересечение круга $|z - a| < R_2$ и области $|z - a| > R_1$ пусто. Ряд (19.41) всюду в $\mathbb{C}$ расходится.

Следующая теорема является утверждением, обратным только что установленному, и будет играть в дальнейшем заметную роль.

Теорема 19.22. *Функцию f, аналитическую в кольце $R_1 < |z - a| < R_2$, можно разложить в этом кольце в ряд*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - a)^k. \tag{19.45}$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку z в указанном кольце и выберем две окружности L_{r_1} и L_{r_2} с центром в точке a так, чтобы выполнялись неравенства

$$R_1 < r_1 < |z - a| < r_2 < R_2\,. \tag{19.46}$$

Разрежем получившееся кольцо $r_1 < |z - a| < r_2$ по радиусу l, не проходящему через точку z. Кольцо с разрезом — односвязная область, функция f — аналитическая в этой области и на её границе, поэтому можно воспользоваться интегральной формулой Коши, по которой

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

где $\Gamma = L_{r_2} \bigcup \overline{L}_{r_1} \bigcup l \bigcup \bar{l}$ (черта означает изменение направления интегрирования).

Воспользуемся свойством аддитивности и распишем интеграл в виде суммы четырёх интегралов. При этом интегралы по l и $\overline{l}$ взаимно уничтожатся, а интегрирование по $\overline{L}_{r_1}$ заменим на положительное. Получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_2}} \frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_1}} \frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{19.47}$$

Рассмотрим каждый из интегралов в (19.47) отдельно.

С первым из них поступим точно так же, как с аналогичным интегралом в доказательстве теоремы 19.14. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_2}} \frac{f(t)}{t-z}dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \tag{19.48}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_2}} \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}}dt,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{19.49}$$

Займёмся вторым интегралом. Интегрирование в нём производится по внутренней окружности, следовательно, $|z-a| > |t-a|$, поэтому его ядро преобразуем несколько по другому.

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-a)^k}{(z-a)^{k+1}}.$$

Полученный ряд сходится равномерно на окружности L_{r_1} по признаку Вейерштрасса, так как точка z располагается вне окружности L_{r_1}, поэтому $\left|\dfrac{t-a}{z-a}\right| = \dfrac{r_1}{|z-a|} = q < 1$. Он останется равномерно сходящимся и после умножения на ограниченную на окружности функцию $f(t)$.

Подставим получившийся ряд вместо ядра Коши во второй из интегралов в (19.47) и проинтегрируем почленно. Тогда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_1}} \frac{f(t)}{t-z}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{-k-1}}{(z-a)^{k+1}},$$

где

$$c_{-k-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_1}} f(t)(t-a)^k dt,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Чтобы придать одинаковый вид полученным выражениям с правыми частями формул (19.48), (19.49), произведём замену индекса суммирования: $k = -k' - 1$. Тогда формулы примут вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_1}} \frac{f(t)}{t-z}dt = \sum_{k'=-1}^{-\infty} c_{k'}(z-a)^{k'}, \tag{19.50}$$

$$c_{k'} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{r_1}} \frac{f(t)}{(t-a)^{k'+1}}dt,\ k' = -1, -2, \ldots \tag{19.51}$$

Штрих в индексе k' в дальнейшем опускаем, подставляем (19.48), (19.50) в (19.47) и получаем (19.45).

Осталось разобраться с коэффициентами c_k. В (19.49) и (19.51) интегрирование происходит по разным окружностям. Но функция $\dfrac{f(t)}{(t-a)^{k+1}}$ является аналитической в кольце $R_1 < |t-a| < R_2$, поэтому по следствию из теоремы 19.7 (теоремы Коши для многосвязной области) при изменении радиуса окружности в пределах кольца аналитичности величины этих интегралов не изменятся. Следовательно, вместо формул (19.49) и (19.51) можно написать одну формулу

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}}dt,\ k \in \mathbb{Z}\,, \tag{19.52}$$

где $R_1 < r < R_2$ — любое. ■

Определение 19.10. *Ряд (19.45), коэффициенты c_k которого задаются формулами (19.52), будем называть рядом Лорана функции f.*

Замечание 19.6. *Ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана. Если функция f аналитическая в круге $|z-a| < R$, то при $k < 0$ интегралы в (19.51) равны нулю по основной теореме Коши, так как подынтегральная функция является аналитической в круге $|z-a| < R$. Следовательно, $c_k = 0$ при $k < 0$, и ряд Лорана превращается в ряд Тейлора.*

Теорема 19.23. *Если аналитическая в кольце $R_1 < |z-a| < R_2$ функция f представлена в нём рядом вида (19.41), то этот ряд является её рядом Лорана, другими словами, представление функции в виде (19.41) единственно.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить, что если имеет место представление (19.45), то коэффициенты c_k неизбежно вычисляются по формулам (19.52).

Итак, пусть аналитическая в кольце $R_1 < |z-a| < R_2$ функция f представлена в нём в виде (19.45). Правая часть в (19.45) есть сумма двух степенных рядов: один по степеням $z-a$, другой по степеням $\dfrac{1}{z-a}$. Как степенные ряды, они сходятся равномерно на любой окружности $L_r : |z-a| = r$, где $R_1 < r < R_2$ (см. теорему 15.1). Умножим обе части (19.45) на $(z-a)^{-(l+1)}$, отчего равномерная сходимость не нарушится, и проинтегрируем по окружности L_r.

$$\int\limits_{L_r}\frac{f(z)}{(z-a)^{l+1}}dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int\limits_{L_r}(z-a)^{k-l-1}dz. \tag{19.53}$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части этого равенства, для чего сделаем замену $z-a = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{L_r}(z-a)^{k-l-1}dz = \int\limits_0^{2\pi}\left(re^{i\varphi}\right)^{k-l-1} rie^{i\varphi}d\varphi = ir^{k-l}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)\varphi}d\varphi.$$

Рассмотрим два случая.

1) $k \neq l$. Тогда

$$\int\limits_{L_r}(z-a)^{k-l-1}dz = ir^{k-l}\cdot\frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

так как функция e^z имеет период $2\pi i$.

2) $k = l$. Тогда

$$\int_{L_r} (z-a)^{k-l-1} dz = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i\,.$$

Итак, в правой части равенства (19.53) все интегралы, кроме одного ($k = l$) равны нулю, поэтому равенство (19.53) принимает вид

$$\int_{L_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{l+1}} dz = c_l \cdot 2\pi i\,.$$

Отсюда следует то, что и требовалось доказать. ■

Доказанная теорема единственности служит оправданием для различных приёмов разложения функции в ряд Лорана. Так как вычисление коэффициентов c_k по формулам (19.52) — дело нереальное, то на практике используют представление разлагаемой функции в виде суммы или произведения функций, дифференцирование, интегрирование, известные степенные ряды и другие приёмы. Теорема 19.23 утверждает, что каким бы способом ни было получено представление функции f в виде (19.45), это будет её ряд Лорана.

Рассмотрим два примера.

Пример 19.1. *Функцию* $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-4z+3}$ *разложить в ряд Лорана в кольце* $1 < |z| < 3$.

Решение. Представим данную функцию в виде суммы простых дробей.

$$f(z) = \frac{3}{z-3} - \frac{2}{z-1}\,.$$

Первое слагаемое будем рассматривать как функцию, аналитическую в круге $|z| < 3$ и разложим в ряд по степеням z в этом круге. Второе слагаемое будем считать аналитической функцией в области $|z| > 1$ и разложим в ряд по степеням z в этой области. Сумма рядов будет сходиться как раз в заданном кольце.

Приступим к осуществлению задуманного.

1) $\dfrac{3}{z-3} = -\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\left(1 + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z^2}{9} + \ldots + \dfrac{z^k}{3^k} + \ldots\right);$

2) $-\dfrac{2}{z-1} = -\dfrac{2}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\dfrac{2}{z}\left(1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \ldots + \dfrac{1}{z^k} + \ldots\right).$

Сложим полученные ряды и получим искомое разложение.

$$\frac{z+3}{z^2-4z+3} = -1 - \frac{z}{3} - \frac{z^2}{9} - \ldots - \frac{z^k}{3^k} - \ldots - \frac{2}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \ldots - \frac{2}{z^k} - \ldots\,,\ 1 < |z| < 3.$$

■

Пример 19.2. *Функцию* $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z-2)^2}$ *разложить в ряд Лорана в кольце* $0 < |z| < 2$.

Решение. Будем рассматривать данную функцию как произведение двух функций: функции $\dfrac{1}{(z-2)^2}$, аналитической в круге $|z| < 2$, и функции $e^{1/z}$, аналитической в кольце

$0 < |z| < +\infty$. Разложим каждую из них в ряд по степеням z в указанных областях, затем полученные ряды перемножим.

Разложим сначала по степеням z в круге $|z| < 2$ функцию $\dfrac{1}{z-2}$.

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k .$$

Продифференцируем обе части полученного равенства.

$$-\frac{1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{z}{2}\right)^{k-1} .$$

Поменяем знаки и заменим $k-1$ на k. Получим окончательно:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} z^k, \;\; |z| < 2.$$

Вторая функция раскладывается совсем просто. Так как ряд Тейлора функции e^z сходится на всей плоскости, то, подставляя в него $\dfrac{1}{z}$ вместо z, получаем

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, z^k}\,, \;\; 0 < |z| < +\infty.$$

Перемножим полученные ряды, заменив предварительно индекс суммирования в первом случае на l, а во втором случае на m. Тогда

$$\frac{1}{(z-2)^2}\, e^{1/z} = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{2^l} z^l \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, z^m} = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{l+1}{2^l\, m!} z^{l-m}.$$

Теперь в получившейся двойной сумме следует привести подобные члены. Для этого зафиксируем показатель степени z, обозначив его индексом k, сложим все слагаемые, показатель степени z в которых $l - m = k$, и обозначим получившийся коэффициент символом c_k. Так как l и m независимо друг от друга пробегают натуральный ряд чисел, то $k = l - m$ будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Итак

$$\frac{1}{(z-2)^2}\, e^{1/z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \;\; 0 < |z| < 2\,.$$

Осталось подсчитать коэффициенты c_k. Они являются суммами коэффициентов при z в степени $k = l - m$. В качестве индекса суммирования можно взять или l, или m, выразив второй индекс через выбранный и k. В этом примере удобно взять в качестве индекса суммирования m, если $k \geq 0$, и l, если $k < 0$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k+m+1}{2^{k+m}\, m!}\,, \text{ если } k \geq 0; \quad c_k = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{l+1}{2^l\, (l-k)!}\,, \text{ если } k < 0.$$

Законность всех действий вытекает из теорем об абсолютной сходимости степенных рядов внутри области сходимости и умножении абсолютно сходящихся рядов. ■

Определение 19.11. *Особую точку $z = a$ функции f назовём изолированной особой точкой однозначного характера (сокращённо и.о.т.о.х.), если существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ точки a, в которой функция f аналитическая.*

Примеры.

1) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z^4-1}$.

Особые точки этой функции — нули знаменателя: $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$. Все они, очевидно, и.о.т.о.х.

2) $f(z) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$.

Особые точки — $z = 0$ и $z = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + \pi k}$ — нули $\cos\dfrac{1}{z}$. Последние являются и.о.т.о.х., а $z = 0$ — неизолированная особая точка.

3) $f(z) = \dfrac{\sqrt{z-1}}{z(z+2)}$.

Особые точки здесь $z = 0$, $z = -2$ — и.о.т.о.х. и $z = 1$ — точка ветвления.

Пусть $z = a$ — и.о.т.о.х. функции f. Так как $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, в которой функция f аналитическая, представляет из себя кольцо (с внутренним радиусом $R_1 = 0$), то в этой окрестности функция f, согласно теореме 19.22, разлагается в ряд Лорана.

Определение 19.12. *Если функция f разложена в ряд Лорана в окрестности и.о.т.о.х. $z = a$, то часть ряда Лорана, содержащая отрицательные степени $z - a$, называется <u>главной</u> частью, а часть, содержащая неотрицательные степени $z - a$, называется <u>регулярной</u> (или правильной) частью.*

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{гл.часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{рег.часть}}. \tag{19.54}$$

В зависимости от количества членов в главной части ряда Лорана и.о.т.о.х. классифицируются следующим образом.

Определение 19.13. *И.о.т.о.х. $z = a$ называется устранимой особой точкой, если главная часть ряда Лорана отсутствует.*

Определение 19.14. *И.о.т.о.х. $z = a$ называется полюсом, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, при этом порядком полюса называется модуль старшей отрицательной степени в главной части ряда Лорана.*

Полюс первого порядка называют простым полюсом.

Определение 19.15. *И.о.т.о.х. $z = a$ называется существенно особой точкой, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.*

Пример 19.3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

У этой функции $z = 0$ — и.о.т.о.х. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности нуля.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots .$$

Как видим, главная часть ряда Лорана отсутствует, следовательно, $z = 0$ — устранимая особая точка.

Пример 19.4. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$.

У этой функции $z = 0$ — полюс первого порядка, так как

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots .$$

Пример 19.5. $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z^5}$.

У этой функции $z = 0$ — и.о.т.о.х. Разложим её в ряд Лорана.

$$\frac{\ln(1+z)}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^7}{7} - \ldots\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{4z}}_{\textit{гл.часть}} + \frac{1}{5} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{7} - \ldots .$$

Как видим, главная часть содержит конечное число слагаемых. Старшая степень в главной части — четвёртая, поэтому $z = 0$ — полюс четвёртого порядка.

Пример 19.6. $f(z) = (z^3 - z + 2)e^{1/z}$.

Снова $z = 0$ — и.о.т.о.х. Разложим данную функцию в ряд Лорана.

$$(z^3 - z + 2)e^{1/z} = (z^3 - z + 2)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)z + \left(\frac{1}{6} - 1 + 2\right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} + 2\right)\frac{1}{z} +$$

$$+ \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + 1\right)\frac{1}{z^2} + \ldots = z^3 + z^2 - \frac{z}{2} + \frac{7}{6} + \underbrace{\frac{37}{24}\cdot\frac{1}{z} + \frac{101}{120}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots}_{\textit{гл.часть}} .$$

Главная часть содержит бесконечное число слагаемых, следовательно, для данной функции $z = 0$ — существенно особая точка.

Приведённая классификация особых точек может быть распространена и на бесконечно удалённую точку. Бесконечность — и.о.т.о.х. функции f, если существует такая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty)$, в которой функция f является аналитической. Поскольку эта окрестность есть кольцо $\delta < |z| < +\infty$, то по теореме 19.22 функция f может быть разложена в нём в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Так же ряд Лорана разбивается на главную и регулярную части, только теперь главная часть содержит положительные степени z, а регулярная — неположительные.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k}_{\text{гл.часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{-\infty} c_k z^k}_{\text{рег.часть}}.$$

Так же в зависимости от числа слагаемых в главной части бесконечность называется устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой, так же определяется порядок полюса.

Примеры.

1) Для функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ бесконечность является существенно особой точкой, так как ряд Тейлора этих функций сходится на всей плоскости, поэтому является одновременно и рядом Лорана на бесконечности. Число положительных степеней в нём — бесконечно.

2) Многочлен $P_n(z)$ степени n имеет на бесконечности полюс порядка n, так как по теореме единственности он совпадает со своим разложением в ряд Лорана, содержит конечное число положительных степеней, старшая из них — n.

Пример 19.7. *Для функции* $\sin\dfrac{1}{z}$ *бесконечность — устранимая особая точка, так как*

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

Как видим, главная часть ряда Лорана отсутствует.

Разложение в ряд Лорана с целью определения характера и.о.т.о.х. — дело довольно сложное, поэтому выведем достаточно легко проверяемые условия, позволяющие установить, какого типа и.о.т.о.х. данной функции. Ограничимся случаем конечных особых точек. Для бесконечно удалённой точки формулировки, да и доказательства, те же.

Сначала докажем вспомогательную теорему, имеющую, впрочем, и самостоятельный интерес.

Теорема 19.24 (Связь между нулями и полюсами)**.** *Пусть f — аналитическая, не равная тождественному нулю в некоторой области D функция, точка $a \in D$ и является нулём кратности l функции f. Тогда a — полюс функции $\dfrac{1}{f}$ порядка l. Обратно, если точка a — полюс функции f порядка l, то она является нулём кратности l функции $\dfrac{1}{f}$.*

Доказательство. Пусть $z = a$ — нуль функции f кратности l. Тогда (см. (19.40)) существует окрестность $U_\delta(a)$, в которой функция f представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^l \varphi(z),$$

причём φ — аналитическая в этой окрестности функция и $\varphi(z) \neq 0$. В таком случае в этой окрестности аналитической является и функция $\dfrac{1}{\varphi}$, поэтому её можно разложить в ней в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

причём $c_0 = \dfrac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Следовательно, в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^l}\left(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{c_0}{(z-a)^l} + \frac{c_1}{(z-a)^{l-1}} + \frac{c_2}{(z-a)^{l-2}} + \dots .$$

Из этого представления вытекает, что $z = a$ — полюс порядка l для функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Пусть теперь a — полюс функции f порядка l. Это означает, что существует $\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$, в которой функция f аналитическая, и в этой окрестности

$$f(z) = \frac{c_{-l}}{(z-a)^l} + \frac{c_{-l+1}}{(z-a)^{l-1}} + \frac{c_{-l+2}}{(z-a)^{l-2}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(z-a)^l}\left(c_{-l} + c_{-l+1}(z-a) + c_{-l+2}(z-a)^2 + \dots\right) = \frac{1}{(z-a)^l}\varphi(z).$$

Опять функция $\varphi(z)$ аналитическая в $U_\delta(a)$ как сумма степенного ряда и так как $c_{-l} \neq 0$, то и $\varphi(a) = c_{-l} \neq 0$. Но тогда существует $U_{\delta_1}(a)$ $(\delta_1 \leq \delta)$, в которой $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ — аналитическая функция, поэтому её можно разложить в указанной окрестности в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots,\ d_0 = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0.$$

Следовательно, в $U_{\delta_1}(a)$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^l\frac{1}{\varphi(z)} = d_0(z-a)^l + d_1(z-a)^{l+1} + d_2(z-a)^{l+2} + \dots .$$

Так как полученное представление есть ряд Тейлора функции $\dfrac{1}{f}$, то из него следует, что сама функция $\dfrac{1}{f}$ и все её производные до порядка $l-1$ включительно в точке a равны нулю, а производная порядка l отлична от нуля. Это означает, что функция $\dfrac{1}{f}$ имеет в точке a нуль кратности l. ■

Примеры.

1) Пусть $f(z) = \dfrac{(z-1)^2}{z^2+1}$. Тогда $\dfrac{1}{f(z)} = g(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-1)^2}$.

Для функции f точка $z = 1$ — нуль кратности два, значит, для функции g эта точка — полюс второго порядка.

Для функции g точки $z = \pm\, i$ — простые нули, значит, для функции f эти точки — простые полюса.

2) Пусть $f(z) = \dfrac{z+1}{z - \sin z}$.

Точка $z = 0$ — нуль знаменателя кратности три, так как $g(z) = z - \sin z$, $g'(z) = 1 - \cos z$, $g''(z) = \sin z$ равны нулю при $z = 0$, а $g'''(z) = \cos z \neq 0$ при $z = 0$. Поскольку числитель функции f в точке 0 отличен от нуля, то для функции f точка $z = 0$ — полюс третьего порядка.

3) Пусть $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z(z - \sin z)}$.

В этом примере $z = 0$ для знаменателя — ноль кратности четыре. Но и для числителя она тоже является нулём кратности два. Если разложить числитель и знаменатель в ряд Тейлора в окрестности нуля, то разложение числителя начнётся с члена $c_2 z^2$, а знаменателя — с члена $d_4 z^4$ $(c_2, d_4 \neq 0)$. После вынесения z^2 за скобку и сокращения в точке $z = 0$ числитель станет отличным от нуля, а знаменатель будет иметь ноль второй кратности. Следовательно, для рассматриваемой функции $z = 0$ — полюс второго порядка.

Теорема 19.25. *Для того чтобы и.о.т.о.х. $z = a$ была устранимой особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы существовала проколотая окрестность точки a, в которой функция f ограничена.*

Доказательство. Пусть $z = a$ — устранимая особая точка функции f. Тогда её ряд Лорана в этой точке имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_k(z-a)^k \ldots, \ 0 < |z-a| < R.$$

Как степенной ряд, состоящий только из неотрицательных степеней, он сходится и в точке $z = a$, его сумма непрерывна в круге $|z-a| < R$, следовательно, ограничена (1-я теорема Вейерштрасса) в круге $|z-a| \le r$ при любом $r < R$. Более того, ввиду возможности почленного перехода к пределу существует

$$\lim_{z \to a} f(z) = c_0.$$

Докажем обратное. Пусть $z = a$ — и.о.т.о.х. функции f и пусть функция ограничена в проколотой δ-окрестности точки a. Тогда:

1) функция f разлагается в окрестности точки a в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k, \ 0 < |z-a| < R \ (\delta \le R);$$

2) существует постоянная M такая, что $|f(z)| \le M$ в $\overset{\circ}{U}_\delta (a)$.

Оценим, используя (19.52), коэффициенты c_k с отрицательными номерами k. Возьмём любое $0 < r < \delta$. Тогда

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r} \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{k+1}} \cdot 2\pi r = M \cdot r^{-k}.$$

Если теперь устремить r к нулю, то из полученных оценок для отрицательных k получаем: $c_k = 0$. Следовательно, ряд Лорана функции f не содержит отрицательных степеней разности $z - a$, поэтому $z = a$ — устранимая особая точка функции. ■

Замечание 19.7. *Попутно доказано, что в случае устранимой особой точки существует конечный $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$. Если доопределить (или переопределить) функцию f в точке a, положив $f(a) = c_0$, то равенство*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$$

будет иметь место всюду в круге сходимости $|z-a| < R$. Как сумма степенного ряда, функция f будет аналитической всюду в круге сходимости, в том числе и в точке $z = a$. Особенность устранена. Отсюда название — устранимая особая точка.

Теорема 19.26. *Для того чтобы и.о.т.о.х. $z = a$ функции f была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Если $z = a$ — полюс l-го порядка, то разложение функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-l}}{(z-a)^l} + \frac{c_{-l+1}}{(z-a)^{l-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots \ , \ c_{-l} \neq 0.$$

Вынесем за скобки $\dfrac{1}{(z-a)^l}$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^l}\left(c_{-l} + c_{-l+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{l-1} + \ldots\right).$$

Отсюда видно, что при $z \to a$ первый множитель стремится к бесконечности, а вторая скобка имеет пределом число $c_{-l} \neq 0$, поэтому $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Достаточность. Пусть $z = a$ — и.о.т.о.х. функции f и пусть $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Тогда существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$ точки a, в которой функция f не обращается в ноль и является аналитической. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Эта функция, как частное аналитических функций с отличным от нуля знаменателем, является аналитической в $\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$. Следовательно, точка a для неё — и.о.т.о.х. Так как $\lim\limits_{z\to a} g(z) = 0$, то функция g в некоторой окрестности точки a ограничена и по предыдущей теореме a — устранимая особая точка для функции g. Доопределим функцию g в точке a, положив $g(a) = 0$. Тогда по замечанию, сделанному к той же теореме, функция g становится аналитической в $U_\delta(a)$, а по теореме о связи между нулями и полюсами (теорема 19.24), если a — нуль функции g, то a — полюс функции f. ■

Методом исключения убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 19.27. *Для того чтобы и.о.т.о.х. $z = a$ функции f была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы f в окрестности точки a была неограниченной, но не стремилась к бесконечности.*

Однако имеет место следующее, существенно усиливающее необходимую часть этой теоремы, утверждение.

Теорема 19.28 (Ю. В. Сохоцкий)**.** *Если $z = a$ — существенно особая точка функции f, то для любого комплексного C, включая и символ ∞, найдётся последовательность точек $z_n \to a$, по которой последовательность $f(z_n) \to C$.*

Другими словами, в любой окрестности существенно особой точки функция f неограничена и принимает значения, сколь угодно близкие к любому комплексному числу.

Доказательство. Так как в любой окрестности существенно особой точки функция неограничена, то последовательность $z_n \to a$, такая что $f(z_n) \to \infty$, очевидно, найдётся.

Пусть теперь $C \neq \infty$. Возможны два варианта.

1) Найдётся последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) = C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Как стационарная, последовательность $f(z_n) \to C$, поэтому для такого C утверждение теоремы справедливо.

2) Последовательность (z_n) с указанным свойством не найдётся. Последнее означает, что существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$, в которой $f(z) \neq C$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - C}\,.$$

Эта функция является аналитической в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ как частное аналитических функций с не обращающимся в ноль знаменателем. Точка $z = a$ для неё — и.о.т.о.х. Установим, какая именно.

а) Пусть a — устранимая особая точка. Тогда существует

$$\lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z) - C} = \gamma.$$

Но в таком случае, если $\gamma = 0$, то $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, а если $\gamma \neq 0$, то $\lim\limits_{z \to a} f(z) = C + \dfrac{1}{\gamma}$. Ни то, ни другое невозможно, потому что $z = a$ для f — существенно особая точка, поэтому данное предположение отпадает.

б) Пусть a — полюс функции g. Тогда

$$\lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z) - C} = \infty.$$

Но в таком случае $\lim\limits_{z \to a} f(z) = C$, чего, по условию, не может быть. Так что и это предположение отпадает.

в) Остаётся, что a — существенно особая точка, поэтому, как отмечено в начале доказательства, найдётся последовательность $z_n \to a$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} g(z_n) = \infty$. Но тогда $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = C$. ■

19.7 Теория вычетов

Одним из наиболее важных приложений теории аналитических функций к математическому анализу является применение её к вычислению определённых интегралов. Оно основано на понятии вычета аналитической функции относительно и.о.т.о.х. и его свойствах.

Определение 19.16. *Пусть $z = a$ — и.о.т.о.х. функции f. Назовём вычетом функции f относительно точки a и обозначим символом $\mathrm{Res}(f, a)$ делённый на $2\pi i$ интеграл по произвольному кусочно гладкому контуру L, лежащему в области аналитичности функции f, содержащему внутри себя точку a и никаких других особых точек функции,*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f(z)dz. \tag{19.55}$$

По следствию из теоремы Коши для многосвязной области (теорема 19.7) величина интеграла в (19.55) не зависит от кривой L.

Вычет относительно бесконечно удалённой точки определяется аналогично.

Определение 19.17. *Пусть $z = \infty$ — и.о.т.о.х. функции f.*

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f(z)dz, \tag{19.56}$$

где L — кусочно гладкий контур, расположенный в области аналитичности функции f, и вне контура других особых точек функции f, кроме $z = \infty$, нет.

Теорема 19.29 (Основная теорема теории вычетов). *Если L — кусочно гладкий контур, а функция f является аналитической в области, содержащей контур L, за исключением конечного числа и.о.т.о.х., ни одна из которых не лежит на контуре L, то*

$$\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_k), \tag{19.57}$$

где суммирование распространяется на все особые точки a_k, расположенные внутри контура L.

Доказательство. Заключим каждую точку a_k в кусочно гладкий контур L_k так, чтобы они лежали внутри L, не пересекались друг с другом и чтобы каждый содержал внутри только одну особую точку a_k. Тогда, применяя основную теорему Коши для многосвязной области и используя определение вычета, имеем:

$$\int\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_k).$$

■

От доказанной теоремы мало проку, если мы не научимся находить вычеты не по определению, а как-нибудь иначе. Как мы сейчас увидим, это можно сделать с помощью разложения функции в ряд Лорана, а зачастую и того проще.

Теорема 19.30. *Если $z = a$ — конечная и.о.т.о.х. функции f, то*

$$\mathrm{Res}(f, a) = c_{-1}; \tag{19.58}$$

если $z = \infty$ — и.о.т.о.х. функции f, то

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -c_{-1}. \tag{19.59}$$

Здесь c_{-1} — коэффициент при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности рассматриваемой точки.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы достаточно сравнить формулу (19.52) нахождения коэффициентов ряда Лорана для $k = -1$ с определением (19.55), (19.56) вычета и убедиться в их тождественности. ■

Примеры.

1) Для функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}e^{1/z}$ (см. пример 19.2)

$$\mathrm{Res}(f, 0) = c_{-1} = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\,2^l} = \frac{1}{4}\sqrt{e}.$$

2) Для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ из примера 19.3

$$\mathrm{Res}(f, 0) = c_{-1} = 0.$$

3) Для функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ из примера 19.4

$$\mathrm{Res}(f, 0) = c_{-1} = 1.$$

4) Для функции $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)}{z^5}$ из примера 19.5

$$\operatorname{Res}(f,0)=c_{-1}=-\frac{1}{4}.$$

5) Для функции $f(z)=(z^3-z+2)e^{1/z}$ из примера 19.6

$$\operatorname{Res}(f,0)=c_{-1}=\frac{37}{24}.$$

6) Для функции $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ из примера 19.7

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}=-1.$$

Следует обратить внимание на существенную разницу в определении вычета в конечной особой точке и в бесконечно удалённой. В случае конечной особой точки слагаемое $\dfrac{c_{-1}}{z-a}$ находится в главной части ряда Лорана, а в случае бесконечно удалённой $\dfrac{c_{-1}}{z}$ содержится в регулярной части. Поэтому в случае, когда a — конечная устранимая особая точка, то вычет равен нулю, так как главная часть ряда Лорана отсутствует (пример 2), а если бесконечность — устранимая особая точка, то вычет может быть отличен от нуля (пример 6).

Однако раскладывать функцию в ряд Лорана, и даже находить только коэффициент c_{-1}, бывает нелёгкой задачей, как показывают примеры 19.2, 19.6. Однако для полюсов можно предложить совсем лёгкий способ вычисления вычета.

Теорема 19.31. *Если $z=a$ — полюс порядка l функции f, то*

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(l-1)!}\lim_{z\to a}\left\{(z-a)^l f(z)\right\}^{(l-1)}. \tag{19.60}$$

Доказательство. Если $z=a$ — полюс порядка l функции f, то её разложение в ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид.

$$f(z)=\frac{c_{-l}}{(z-a)^l}+\frac{c_{-l+1}}{(z-a)^{l-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots.$$

Нам нужно найти коэффициент c_{-1}. Для этого умножим обе части равенства на $(z-a)^l$, продифференцируем $l-1$ раз и перейдём к пределу. Последовательно находим:

$$(z-a)^l f(z)=c_{-l}+c_{-l+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{l-1}+c_0(z-a)^l+c_1(z-a)^{l+1}+\ldots;$$

$$\left\{(z-a)^l f(z)\right\}^{(l-1)}=(l-1)!c_{-1}+l(l-1)\ldots 2c_0(z-a)+(l+1)l\ldots 3c_1(z-a)^2+\ldots;$$

$$\lim_{z\to a}\left\{(z-a)^l f(z)\right\}^{(l-1)}=(l-1)!c_{-1}.$$

Осталось разделить на $(l-1)!$, и формула (19.60) получена. ■

Следствие 19.10. *Если $z=a$ — простой полюс функции f, то*

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{19.61}$$

Эта формула получается из (19.60), если положить $l=1$.

Ещё более просто вычисляется вычет в следующем часто встречающемся случае.

Теорема 19.32. *Пусть* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, *где* φ *и* ψ — *аналитические в окрестности точки* $z = a$ *функции, причём* $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. *Тогда*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,. \tag{19.62}$$

Доказательство. Разложим функцию ψ в точке a в ряд Тейлора.

$$\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots =$$

$$= \psi'(a)(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots = (z-a)\left(\psi'(a) + c_2(z-a) + \ldots\right).$$

Как нетрудно убедиться, при выполнении условий теоремы точка a является для функции f простым полюсом, поэтому

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{(z-a)\left(\psi'(a) + c_2(z-a) + \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi'(a) + c_2(z-a) + \ldots} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,.$$

■

И, наконец, часто бывает полезной следующая теорема, которую называют теоремой о полной сумме вычетов.

Теорема 19.33. *Если аналитическая функция* f *имеет на всей комплексной плоскости лишь конечное число и.о.т.о.х. и никаких других особых точек не имеет, то сумма её вычетов относительно всех особых точек, включая и бесконечно удалённую, равна нулю.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все конечные особые точки функции f. Для единообразия положим $\infty = a_0$. Возьмём кусочно гладкий контур L так, чтобы все точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лежали внутри него. Тогда по основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f, a_k).$$

Но так как вне контура L функция f не имеет других особых точек, кроме бесконечности, то по определению вычета относительно бесконечно удалённой точки

$$\int\limits_L f(z)dz = -2\pi i\operatorname{Res}(f, \infty) = -2\pi i\operatorname{Res}(f, a_0).$$

Следовательно,

$$2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f, a_k) = -2\pi i\operatorname{Res}(f, a_0),$$

или

$$\sum_{k=0}^{m}\operatorname{Res}(f, a_k) = 0\,.$$

■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 19.8. *Найти вычеты функции* $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ *относительно всех и.о.т.о.х.*

Решение. Так как данная функция является рациональной, то её особыми точками являются нули знаменателя и бесконечность. Знаменатель обращается в ноль в точках $z = \pm i$, которые являются для него нулями кратности три, а для функции — полюсами третьего порядка (теорема 19.24). Бесконечность — устранимая особая точка, так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ (теорема 19.25).

Приступим к вычислению вычетов.

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left\{(z-i)^3 f(z)\right\}'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' =$$

$$= 6\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^5} = \frac{6}{(2i)^5} = \frac{6}{32i} = -\frac{3}{16}i\,.$$

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left\{(z+i)^3 f(z)\right\}'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{(z-i)^3}\right)'' =$$

$$= 6\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)^5} = \frac{6}{(-2i)^5} = \frac{6}{-32i} = \frac{3}{16}i\,.$$

Чтобы напрямую найти вычет на бесконечности, иного способа, кроме вычисления коэффициента c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана на бесконечности, в нашем распоряжении нет. В данном примере это не составляет никакого труда. Функция $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ убывает на бесконечности со скоростью $\dfrac{1}{z^6}$, поэтому её ряд Лорана в окрестности бесконечности имеет вид

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{c_{-6}}{z^6} + \frac{c_{-7}}{z^7} + \dots\,.$$

Член $\dfrac{c_{-1}}{z}$ отсутствует, поэтому $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$. ■

Замечание 19.8. *К функции из рассмотренного примера приложима теорема о полной сумме вычетов, поэтому можно было бы найти напрямую первый и третий вычеты, а второй, используя эту теорему.*

Пример 19.9. *Найти вычеты функции* $f(z) = \dfrac{z}{z^n - 1}$ ($n \geq 2$ — *целое*) *относительно всех и.о.т.о.х.*

Решение. И в этом примере особые точки — нули знаменателя и бесконечность. Приравняем знаменатель к нулю и найдём корни, используя формулу Муавра:

$$z^n = 1 = e^{0i},\ z_k = e^{\frac{2\pi k}{n}i},\ k = 0,1,\dots,n-1.$$

Для вычисления вычетов в точках z_k можно использовать формулу (19.62). Имеем:

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{nz_k^n} = \frac{1}{n}z_k^2 = \frac{1}{n}e^{\frac{4\pi k}{n}i},\ k = 0,1,\dots,n-1.$$

При вычислении вычета на бесконечности заметим, что

$$f(z) = \frac{z}{z^n-1} \asymp \frac{1}{z^{n-1}}\ (z\to\infty),$$

поэтому в окрестности бесконечности ряд Лорана имеет вид

$$\frac{z}{z^n - 1} = \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots .$$

Следовательно, при $n = 2$ $\mathrm{Res}(f, \infty) = -1$, а при $n > 2$ $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$. ■

Пример 19.10. *Найти вычеты функции $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ относительно всех и.о.т.о.х.*

Решение. Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = \infty$. Обе точки существенно особые, потому что функция e^z при $z \to \infty$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Начнём разложение функции в ряд Лорана в окрестности нуля, который одновременно будет и рядом Лорана в окрестности бесконечности ввиду отсутствия других особых точек, кроме указанных.

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots + \frac{1}{k!\,z^k} + \dots\right).$$

Нас интересует только коэффициент c_{-1}. Найдём его, умножая коэффициент при z^k из первой скобки на коэффициент при $\dfrac{1}{z^{k+1}}$ из второй скобки и складывая полученные произведения.

$$c_{-1} = \frac{1}{0!1!} + \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{2!3!} + \dots + \frac{1}{k!(k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} .$$

Итак,

$$\mathrm{Res}(f, 0) = c_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}, \quad \mathrm{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}.$$

■

Пример 19.11. *Вычислить $\displaystyle\int\limits_L \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$, где L — окружность $|z| = 2$.*

Решение. Применим основную теорему теории вычетов

$$\int\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_k).$$

Найдём особые точки функции. В данном случае это нули знаменателя $z_{1,2} = \pm i$. Обе они лежат внутри контура интегрирования, являются нулями первой кратности для знаменателя, то есть полюсами первого порядка для подынтегральной функции. Так как выполнены условия теоремы 19.32, то вычеты можно найти по формуле (19.62).

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{\sin i}{2i} = \frac{i \,\mathrm{sh}\, 1}{2i} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, 1, \quad \mathrm{Res}(f, -i) = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, 1.$$

Тогда

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, 1 = 2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1.$$

■

Пример 19.12. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+3)dz}{z^3(z^3+1)(z-3)}$.

Решение. Особые точки подынтегральной функции: $z = 0$ — полюс третьего порядка; три простых полюса— корни уравнения $z^3 + 1 = 0$; $z = 3$ — полюс первого порядка и $z = \infty$ — устранимая особая точка. Последние две особые точки лежат вне контура интегрирования, а все предыдущие — внутри. Легче посчитать вычеты относительно точек $z = 3$ и $z = \infty$ и воспользоваться теоремой о полной сумме вычетов.

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = 0,$$

потому что $f(z) \sim \dfrac{1}{z^5}$ $(z \to \infty)$, поэтому разложение функции f в ряд Лорана на бесконечности имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^5} + \frac{c_{-6}}{z^6} + \dots .$$

Вычет в точке $z = 3$ найдём по формуле (19.62), положив $\varphi(z) = \dfrac{z^2+3}{z^3(z^3+1)}$, $\psi(z) = z+3$.

$$\operatorname{Res}(f, 3) = \frac{3^2+3}{3^3(3^3+1)\cdot 1} = \frac{1}{63}\,.$$

Сумма вычетов относительно точек $z = 3$ и $z = \infty$ равна $\dfrac{1}{63}$, поэтому сумма вычетов относительно особых точек, расположенных внутри контура, равна $-\dfrac{1}{63}$, следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+3)dz}{z^3(z^3+1)(z-3)} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{63}\right) = -\frac{2\pi}{63}i\,.$$

■

19.8 Вычисление некоторых типов определённых интегралов

Рассмотрим некоторые виды определённых интегралов, при вычислении которых может быть использована теория вычетов.

I. Интегралы вида $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$. Будем считать, что R — рациональная функция, знаменатель которой на отрезке $[0;\,2\pi]$ не обращается в нуль.

Положим $e^{ix} = z$. Тогда $ie^{ix}dx = dz$ или $dx = \dfrac{dz}{iz}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\,, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\,.$$

При изменении x от 0 до 2π точка z, начиная от $z = 1$, совершает полный оборот вокруг нуля по окружности единичного радиуса. Произведём замену:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz.$$

Здесь $R_1(z) = R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}; \dfrac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\dfrac{1}{z}$ — рациональная функция, имеющая лишь конечное число полюсов, ни один из которых не лежит на окружности $|z|=1$ (так как R не имеет особенностей на $[0;\,2\pi]$), следовательно, получившийся интеграл может быть вычислен с помощью теории вычетов.

Пример 19.13. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx.$

Решение. Проверяем выполнение всех оговоренных условий и производим подстановку $z=e^{ix}$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx = \int\limits_{|z|=1}\frac{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}{2-\dfrac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz} = -\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\,dz.$$

Подынтегральная функция имеет три простых полюса: $z_0=0$ и корни уравнения

$$z^2-4iz-1=0$$

$z_1=i(2+\sqrt{3})$, $z_2=i(2-\sqrt{3})$. Внутри контура лежат полюса z_0 и z_2. Вычислим вычеты:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to0} z\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}=-1;$$

$$\operatorname{Res}(f,z_2)=\lim_{z\to0}(z-z_2)\frac{z^2+4z+1}{z(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{z_2^2+4z_2+1}{z_2(z_2-z_1)}=\frac{-(2-\sqrt{3})^2+4i(2-\sqrt{3})+1}{i(2-\sqrt{3})(-2i\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{-6+4\sqrt{3}+4i(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})+4i(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\,i\,.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx=-\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\,dz=-2\pi i\left(-1+\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

■

Пример 19.14. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\operatorname{tg}x+2i}\,.$

Решение. Сначала преобразуем немного подынтегральную функцию.

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x+2i}=\frac{1}{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{i\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}+2i}=\frac{i\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{-e^{ix}-3e^{ix}}=\frac{ie^{-ix}\left(e^{2ix}+1\right)}{-e^{-ix}\left(e^{2ix}+3\right)}=-i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}+3}\,.$$

А теперь произведём замену $e^{2ix}=z$. Тогда $2ie^{2ix}dx=dz$ или $dx=\dfrac{dz}{2iz}$. При изменении x от нуля до π точка z опишет окружность $|z|=1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\operatorname{tg}x+2i}=-i\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}+3}dx=-i\int\limits_{|z|=1}\frac{z+1}{z+3}\cdot\frac{dz}{2iz}=-\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1}\frac{z+1}{z(z+3)}dz.$$

Особые точки подынтегральной функции $z = 0$ и $z = -3$ — простые полюса. Внутри контура лежит только точка $z = 0$. Найдём вычет относительно неё, а затем вычислим интеграл:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{z+1}{z(z+3)} = \frac{1}{3}\,; \qquad \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{3}\, i.$$

■

II. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где f — рациональная функция.

Для того чтобы интеграл существовал, необходимо предположить, что знаменатель функции f не обращается в нуль на вещественной оси и его степень по крайней мере на две единицы больше степени числителя.

Для обоснования предлагаемого ниже способа вычисления интеграла нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 19.1. *Пусть функция f определена и непрерывна в окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$. Тогда*

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{L_R} f(z)dz = 0, \tag{19.63}$$

где L_R — окружность $|z| = R$ или любая её часть.

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и подберём по нему такое $R_0 > 0$, чтобы при $|z| > R_0$ выполнялось условие $|zf(z)| < \varepsilon$.

Пусть $R > R_0$ и L_R — какая-либо дуга окружности $|z| = R$. Произведём в интеграле $\int\limits_{L_R} f(z)dz$ замену $z = Re^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{L_R} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi} d\varphi$$

(α, β —концы дуги L_R, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$). В силу выбора R

$$\left| Re^{i\varphi} f(Re^{i\varphi}) \right| = |zf(z)| < \varepsilon,$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{L_R} f(z)dz \right| = \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi} d\varphi \right| < \varepsilon(\beta - \alpha) \le 2\pi\varepsilon$$

как только $R > R_0$. Лемма доказана. ■

Займёмся вычислением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Продолжим f с вещественной оси $\mathbb{R}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, заменив вещественный аргумент x на комплексный z. Так как

f — рациональная функция, то она имеет в комплексной плоскости лишь конечное число особых точек, являющихся полюсами, причём ни один из них, в силу наложенных на f условий, не лежит на вещественной оси. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все особые точки f, расположенные в верхней полуплоскости.

Рассмотрим замкнутый кусочно гладкий контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R;\, R]$ вещественной оси и верхней полуокружности L_R. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Разобьём интеграл по Γ_R на два интеграла.

$$\int\limits_{-R}^{R} f(z)dz + \int\limits_{L_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, a_k).$$

В первом интеграле заменим z на x. Второй интеграл по лемме 19.1 стремится к нулю при $R \to +\infty$, поэтому, совершив предельный переход, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, a_k). \tag{19.64}$$

Подчеркнём ещё раз, что суммирование в (19.64) распространяется на те особые точки функции f, у которых $\operatorname{Im} a_k > 0$.

Пример 19.15. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^4+1}dx$.

Решение. Оба оговоренные выше условия выполнены: знаменатель на вещественной оси в нуль не обращается, степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя. Поэтому к интегралу применима формула (19.64).

Распространим функцию f на комплексную плоскость, $f(z) = \dfrac{(z-1)^2}{z^4+1}$, и найдём особые точки, для чего знаменатель приравняем к нулю:

$$z^4 + 1 = 0, \quad z^4 = -1 = e^{i\pi}, \quad z = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}.$$

Полагая $k = 0$ и $k = 1$, найдём особые точки, расположенные выше вещественной оси: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Обе они являются простыми полюсами. Вычеты можно найти по формуле (19.62). Найдём вычет относительно точки z_1:

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{(z_1-1)^2}{4z_1^3} = \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right)^2}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(2i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2}{4} = i\sin^2\frac{\pi}{8}\,.$$

В ходе преобразований в числителе из скобки был вынесен множитель $e^{i\frac{\pi}{8}}$ и использована формула $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ или $e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z$.

Аналогично находим вычет относительно точки z_2:

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{(z_2-1)^2}{4z_2^3} = \frac{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1\right)^2}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(e^{i\frac{3\pi}{8}} - e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)^2}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)^2}{4} = -i\sin^2\frac{3\pi}{8}\,.$$

По формуле (19.64)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^4+1} dx = 2\pi i \cdot i \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) = \pi \left(2\sin^2 \frac{3\pi}{8} - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \pi \left(1 - \cos \frac{3\pi}{4} - 1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

■

Пример 19.16. *Вычислить* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$

Решение. Так как подынтегральная функция является чётной, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$$

Степень числителя подынтегральной функции на две единицы меньше степени знаменателя, знаменатель на вещественной оси в нуль не обращается, поэтому для вычисления последнего интеграла можно использовать формулу (19.64).

Найдём особые точки функции $f(z) = \dfrac{z^4+1}{z^6+1}$. Имеем:

$$z^6 + 1 = 0, \quad z^6 = -1 = e^{i\pi}, \quad z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}, \ k = \overline{0,5}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2$, найдём особые точки, расположенные в верхней полуплоскости:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = -e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Все они, очевидно, являются полюсами первого порядка и при вычислении вычетов можно использовать формулу (19.62). Поэтому, учитывая, что $z_k^6 = -1$, имеем

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{z_k^4+1}{6z_k^5} = \frac{(z_k^4+1)}{6z_k^6} = -\frac{1}{6}\left(z_k^5 + z_k\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) &= -\frac{1}{6}\left(e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot i \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{6} i = \frac{1}{6i}; \\
\operatorname{Res}(f, z_2) &= -\frac{1}{6}\left(i^5 + i\right) = -\frac{1}{3} i = \frac{1}{3i}; \\
\operatorname{Res}(f, z_3) &= -\frac{1}{6}\left(-e^{-i\frac{5\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot i \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{6} i = \frac{1}{6i}.
\end{aligned}$$

По формуле (19.64)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(\frac{1}{6i} + \frac{1}{3i} + \frac{1}{6i}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

■

III. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$.

Будем предполагать, что: а) f — рациональная функция, знаменатель которой на вещественной оси в нуль не обращается; б) степень числителя по крайней мере на единицу меньше степени знаменателя; в) $a > 0$. Как легко установить, используя признак Дирихле, при этих условиях рассматриваемые интегралы существуют. Для обоснования предлагаемого ниже метода их вычисления нам понадобится следующая лемма.

Лемма 19.2 (Жордан)**.** *Пусть f непрерывна в окрестности бесконечно удалённой точки и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Тогда при $a > 0$*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{L_R} f(z)e^{iaz}dz = 0, \tag{19.65}$$

где L_R — верхняя полуокружность радиуса R с центром в точке $z = 0$ или любая её часть.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и подберём по нему такое R_0, чтобы при $|z| > R_0$ выполнялось условие $|f(z)| < \varepsilon$. Пусть $R > R_0$ и L_R — дуга окружности радиуса R с центром в точке $z = 0$, угловые координаты концов которой равны α и β $(0 \le \alpha < \beta \le \pi)$. Рассмотрим

$$\int\limits_{L_R} f(z)e^{iaz}dz.$$

Сделаем в нём подстановку $z = Re^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{L_R} f(z)e^{iaz}dz = iR\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(Re^{i\varphi})e^{iaR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{i\varphi}d\varphi = iR\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(Re^{i\varphi})e^{iaR\cos\varphi}e^{-aR\sin\varphi}e^{i\varphi}d\varphi.$$

Теперь проведём оценку, учитывая, что $|f(z)| < \varepsilon$ при $|z| > R_0$, и что $|e^{ix}| = 1$ при вещественном x.

$$\left|\int\limits_{L_R} f(z)e^{iaz}dz\right| < \varepsilon R\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \le \varepsilon R\int\limits_{0}^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi = 2\varepsilon R\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi <$$

$$< 2\varepsilon R\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = -\varepsilon\frac{\pi}{a}e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\pi/2} = \varepsilon\frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) < \varepsilon\frac{\pi}{a}. \tag{19.66}$$

При проведении оценки (19.66) было использовано:

1) из равенства $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ следует, что

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi;$$

2) функция $\sin\varphi$ строго вогнута на $[0;\ \pi/2]$, поэтому её график расположен над хордой, соединяющей концы графика, следовательно, $\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi$ на $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Из оценки (19.66), ввиду произвольности ε, следует (19.65). ■

Теперь можно заняться вычислением интегралов. Введём в рассмотрение функцию

$$F(z) = f(z)e^{iaz}$$

и проинтегрируем её по такому же контуру Γ_R, что и в предыдущем случае. Если R, как и выше, выбрано сразу настолько большим, чтобы все особые точки функции f, расположенные в верхней полуплоскости, попали внутрь Γ_R, то

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(F, a_k)\,,$$

где суммирование распространяется на <u>все</u> особые точки функции f, лежащие выше вещественной оси.

Далее проделываем то же, что и в предыдущем случае: разбиваем контур Γ_R на отрезок $[-R;\, R]$ и полуокружность L_R, расписываем интеграл на два интеграла и устремляем R к $+\infty$. По лемме 19.2

$$\int\limits_{L_R} f(z)e^{iaz}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0,$$

так что в пределе получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(F, a_k). \tag{19.67}$$

Применив формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, расписываем интеграл в (19.67) как сумму двух интегралов и, отделяя в этом равенстве вещественную часть от мнимой, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(F, a_k)\right\}, \tag{19.68}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(F, a_k)\right\}, \tag{19.69}$$

где $F(z) = f(z)e^{iaz}$.

Пример 19.17. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2+2x+17}dx.$

Решение. Подынтегральная Функция удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям: на вещественной оси особенностей нет; степень числителя рациональной части меньше степени знаменателя; $a = 2 > 0$. Следовательно, для вычисления интеграла можно использовать формулу (19.68).

Особые точки функции $F(z) = \dfrac{(z-1)e^{2iz}}{z^2+2z+17}$ — нули знаменателя. Найдём их:

$$z^2 + 2z + 17 = 0, \quad z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm 4i\,.$$

В верхней полуплоскости лежит точка $z_1 = -1 + 4i$, являющаяся, как нетрудно заметить, полюсом первого порядка. Для вычисления вычета используем формулу (19.62).

$$\operatorname{Res}(F, z_1) = \frac{(z_1 - 1)e^{2iz_1}}{2z_1 + 2} = \frac{(-2 + 4i)e^{2i(-1+4i)}}{-2 + 8i + 2} = \frac{(-2 + 4i)e^{-8}e^{-2i}}{8i} =$$

$$= \frac{(-2 + 4i)(\cos 2 - i \sin 2)}{8e^8 i} = \frac{1}{4e^8 i}\left((-\cos 2 + 2\sin 2) + i(\sin 2 + 2\cos 2)\right).$$

Используя формулу (19.68), получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2 + 2x + 17}dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \cdot \frac{1}{4e^8 i}\left((-\cos 2 + 2\sin 2) + i(\sin 2 + 2\cos 2)\right)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2e^8}(2\sin 2 - \cos 2).$$

■

Пример 19.18. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 1}dx.$

Решение. Подынтегральная функция — чётная, поэтому

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 1}dx.$$

Так как условия применимости формулы (19.69) выполнены, то составляем функцию $F(z) = \dfrac{ze^{3iz}}{z^4 + 1}$ и находим её особые точки, приравнивая знаменатель к нулю:

$$z^4 + 1 = 0, \;\; z^4 = -1 = e^{i\pi}, \;\;\; z = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}, \; k = 0, 1, 2, 3.$$

Все найденные точки — полюса первого порядка, в верхней полуплоскости находятся точки $z_1 = e^{i\,\pi/4}$ и $z_2 = e^{i\,3\pi/4}$. Вычеты будем находить по формуле (19.62).

$$\operatorname{Res}(F, z_1) = \frac{z_1 e^{3iz_1}}{4z_1^3} = \frac{1}{4(e^{i\,\pi/4})^2}e^{3i(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{4i}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\operatorname{Res}(F, z_2) = \frac{z_2 e^{3iz_2}}{4z_2^3} = \frac{1}{4(e^{i\,3\pi/4})^2}e^{3i(cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} = -\frac{1}{4i}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Найдём сначала сумму вычетов, затем, используя формулу (19.69), искомый интеграл.

$$\operatorname{Res}(F, z_1) + \operatorname{Res}(F, z_2) = \frac{1}{4i}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} \cdot 2i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\} = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

■

IV. Интегралы с особенностями на контуре.

До сих пор мы рассматривали интегралы от таких функций, которые на кривой интегрирования особых точек не имели. Здесь же на примерах посмотрим, как может быть использована теория вычетов в тех случаях, когда подынтегральная функция имеет особые точки на кривой, по которой производится интегрирование. Собираясь применять теорию вычетов, мы ограничимся рассмотрением только аналитических функций.

Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 19.3. *Пусть a — точка комплексной плоскости, из которой под углом*[5] *α друг к другу выходят две гладкие кривые Γ_1 и Γ_2. Пусть f — аналитическая функция, для которой точка a является полюсом первого порядка. Тогда*

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{L_r} f(z)dz = \alpha i \operatorname{Res}(f,a), \tag{19.70}$$

где L_r — часть окружности $|z-a| = r$, заключённая между кривыми Γ_1 и Γ_2.

Доказательство. Так как a — полюс функции f, то существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$, в которой функция f разлагается в ряд Лорана, имеющий следующий вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots = \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z),$$

где $g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$ — аналитическая в $U_\delta(a)$ функция.

Пусть $0 < r < \delta$ и L_r — часть окружности $|z-a| = r$, заключённая между кривыми Γ_1 и Γ_2. Тогда

$$\int\limits_{L_r} f(z)dz = c_{-1}\int\limits_{L_r}\frac{dz}{z-a} + \int\limits_{L_r} g(z)dz.$$

В первом из интегралов справа сделаем замену $z - a = re^{i\varphi}$ и обозначим угловые координаты концов дуги L_r через $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ соответственно. Получим:

$$\int\limits_{L_r} f(z)dz = ic_{-1}\int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} d\varphi + \int\limits_{L_r} g(z)dz = ic_{-1}(\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) + \int\limits_{L_r} g(z)dz.$$

Устремим r к нулю. Тогда разность $\varphi_2(r)-\varphi_1(r)$, непрерывно изменяясь (ввиду гладкости кривых Γ_1, Γ_2), примет предельное значение α, а второе слагаемое устремится к нулю, так как функция g, как аналитическая, ограничена, а длина L_r, равная $(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))r$, стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{L_r} f(z)dz = ic_{-1}\alpha.$$

■

Пусть L — ограниченная простая кусочно гладкая кривая, а функция f — аналитическая в некоторой области, содержащей кривую L, за исключением точки a, являющейся

[5] Углом между двумя кривыми называют угол между касательными, проведёнными к ним в точке пересечения.

внутренней точкой[6] кривой L, и точка a — полюс первого порядка функции f. При этих условиях $\int\limits_L f(z)dz$ — расходящийся несобственный интеграл, поскольку функция f имеет в точке a особенность порядка $p = 1$. Однако он существует "в смысле главного значения". Определим этот термин и докажем существование интеграла в этом смысле.

Возьмём настолько малое δ_0, чтобы проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$ содержалась в области аналитичности функции f и чтобы часть l_{δ_0} кривой L, содержащаяся в этой окрестности, была связной (то есть, чтобы кривая L, пройдя через точку a и покинув окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, снова не возвращалась в неё).

Определение 19.18. *Интегралом в смысле главного значения по кривой L от функции f называется предел при $\delta \to 0$ интеграла по $L \setminus l_\delta$.*

То, что интеграл понимается в смысле главного значения, указывается знаком $(v.p.)$ перед интегралом. Таким образом,

$$(v.p.)\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{L\setminus l_\delta} f(z)dz. \tag{19.71}$$

Теорема 19.34. *Пусть L — ограниченная простая кусочно гладкая кривая, а функция f является аналитической в области, содержащей кривую L, за исключением точки a, являющейся внутренней точкой кривой L и простым полюсом функции f. Тогда интеграл по кривой L от функции f существует в смысле главного значения.*

Доказательство. Выберем δ_0, как указано перед определением 19.18. Пусть $\delta < \delta_0$. Удалим часть l_δ кривой L, содержащуюся в $U_\delta(a)$, и соединим образовавшиеся концы кривой L дугой γ_δ окружности $|z-a| = \delta$. При этом выберем ту из двух дуг окружности, которая обходит (в направлении интегрирования) точку a в положительном (против часовой стрелки) направлении. Получившуюся кусочно гладкую кривую обозначим через L_δ. Кривая L_δ лежит в области аналитичности функции f, поэтому $\int\limits_{L_\delta} f(z)dz$ существует и по следствию из теоремы 19.5 не зависит от δ. Пусть

$$\int\limits_{L_\delta} f(z)dz = I.$$

Разобьём L_δ на $L \setminus l_\delta$ и γ_δ. Тогда

$$\int\limits_{L\setminus l_\delta} f(z)dz = I - \int\limits_{\gamma_\delta} f(z)dz. \tag{19.72}$$

По лемме 19.3 существует

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\gamma_\delta} f(z)dz = \alpha i \operatorname{Res}(f,a),$$

где α — угол между двумя частями кривой L в точке a. Поэтому в (19.72) можно перейти к пределу при $\delta \to 0$, в результате чего получим

$$(v.p.)\int\limits_L f(z)dz = I - \alpha i \operatorname{Res}(f,a).$$

---
[6] Под внутренней точкой кривой понимается точка, лежащая на кривой, но не совпадающая ни с одним из её концов.

Теорема доказана. ■

Пример 19.19. *Вычислить* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$, продолженная в комплексную плоскость, имеет особые точки $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Все они являются простыми полюсами, z_1 располагается выше вещественной оси, z_3 — ниже, а $z_2 = -1$ лежит на вещественной оси. Так как на бесконечности скорость убывания подынтегральной функции достаточная, но на пути интегрирования имеется полюс первого порядка, то данный интеграл существует в смысле главного значения.

Вычислим вычеты в точках z_1 и z_2 с помощью формулы (19.62). Они нам понадобятся в дальнейшем.

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{3z_1^2} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}; \quad \mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{3z_2^2} = \frac{1}{3}\,.$$

С целью вычисления интеграла рассмотрим контур $\Gamma_{R,r}$, состоящий из двух отрезков $[-R;\ -1-r]$ и $[-1+r;\ R]$ вещественной оси и верхних полуокружностей l_r с центром в точке -1 радиуса r и L_R с центром точке 0 радиуса R ($R > 2$, $r < 1$). Контур $\Gamma_{R,r}$ замкнут, содержит внутри себя полюс z_1, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\,r}} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_1) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Теперь разобьём контур на составляющие части, интегралы по отрезкам оставим слева, а интегралы по полуокружностям перенесём в правую часть равенства. Тогда

$$\int\limits_{[-R;\,-1-r]} f(x)dx + \int\limits_{[-1+r;\,R]} f(x)dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} + \int\limits_{l_r} f(z)dz - \int\limits_{L_R} f(z)dz\,.$$

(Обращаем внимание читателей на то обстоятельство, что интегрирование по полуокружности l_r в составе контура $\Gamma_{R,r}$ осуществлялось в отрицательном по отношению к точке -1 направлении, поэтому справа интеграл по l_r стоит со знаком "+".)

Устремим R к бесконечности, а r к нулю. Тогда по лемме 19.1 интеграл по L_R стремится к нулю, а по лемме 19.3 интеграл по l_r стремится к $\pi i \mathrm{Res}(f, z_2)$. Слева же получим искомый интеграл в смысле главного значения. Итак,

$$(v.p.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} + \pi i \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}i\left(2e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 1\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

■

Пример 19.20. *Вычислить* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$

Решение. Это интеграл Дирихле. Он был вычислен в главе "Интегралы, зависящие от параметра". Сейчас мы убедимся, что с помощью теории вычетов он вычисляется значительно проще.

Так как подынтегральная функция — чётная, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$. У этой функции имеется единственная конечная особая точка $z = 0$ — полюс первого порядка. По формуле (19.62) $\mathrm{Res}(f, a) = 1$. Проинтегрируем функцию f по контуру $\Gamma_{R,r}$, состоящему из отрезков $[-R;\, -r]$, $[r;\, R]$ вещественной оси и верхних полуокружностей l_r, L_R с центром в нуле и радиусами r, R $(r < R)$. Так как внутри контура $\Gamma_{R,r}$ функция f особых точек не имеет, то

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\,r}} f(z) dz = 0.$$

Разобьём контур $\Gamma_{R,r}$ на составляющие части и перенесём интегралы по полуокружностям в правую часть равенства.

$$\int\limits_{[-R;\,-r]} f(x) dx + \int\limits_{[r;\,R]} f(x) dx = \int\limits_{l_r} f(z) dz - \int\limits_{L_R} f(z) dz.$$

Совершим предельный переход при $r \to 0$, $R \to +\infty$. Первый интеграл справа при этом стремится к $\pi i \mathrm{Res}(f, 0) = \pi i$ по лемме 19.3, а второй — к нулю по лемме 19.2 (Жордана). Получим;

$$(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi i.$$

Поскольку $\dfrac{\sin x}{x} = \mathrm{Im} f(x)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\, \mathrm{Im}\, \pi i = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\Big($Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ в нуле особенности не имеет, поэтому интеграл от неё существует как обычный несобственный интеграл первого рода.$\Big)$ ■

Пример 19.21. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx.$

Решение. Здесь прежде всего нужно установить, что данный интеграл сходится. У него есть две особых точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Покажем, что $x = 0$ — устранимая особая точка подынтегральной функции, разложив её в степенной ряд.

$$\frac{\cos x - e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots - 1 + x - \frac{x^2}{2} - \ldots\right) = 1 - x + \ldots\,.$$

Как видим, подынтегральная функция имеет конечный предел при $x \to 0$. При исследовании на сходимость на бесконечности можно отступить от нуля разбить интеграл на два.

Первый из них, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$, сходится по признаку Дирихле, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$ сходится по признаку сравнения: $\frac{e^{-x}}{x} < e^{-x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится. Итак, сходимость интеграла установлена, можно приступать к вычислению.

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Для неё $z = 0$ — простой полюс и $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. Проинтегрируем выбранную функцию по контуру $\Gamma_{R,r}$, состоящему из отрезка $[r;\, R]$ действительной оси, отрезка $[ir;\, iR]$ мнимой оси и связывающих их, расположенных в первой четверти дуг окружностей l_r, L_R с центром в нуле и радиусами r и R $(r < R)$. Так как внутри контура $\Gamma_{R,r}$ функция f особых точек не имеет, то

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\,r}} f(z)dz = 0.$$

Разобьём интеграл на четыре слагаемых, интегрируя по каждой составляющей контура $\Gamma_{R,r}$ отдельно.

$$\int\limits_{[r;\,R]} \frac{e^{ix}}{x}dx - \int\limits_{[ir;\,iR]} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int\limits_{L_R} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int\limits_{l_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку $z = ix$, после чего объединим его с первым, а третий и четвёртый интегралы перенесём в правую часть равенства.

$$\int\limits_{[r;\,R]} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x}dx = \int\limits_{l_r} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int\limits_{L_R} \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Перейдём к пределу, устремив r к нулю, а R к бесконечности. Тогда первый из интегралов справа по лемме 19.3 стремится к $\frac{\pi}{2}\, i \operatorname{Res}(f, 0)$, а второй стремится к нулю по лемме Жордана. В пределе получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x}dx = \frac{\pi}{2}\, i.$$

Распишем e^{ix} по формуле Эйлера и отделим в интеграле вещественную часть от мнимой.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}dx + i \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\, i.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}dx = 0; \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Мы не только вычислили данный нам интеграл, но и попутно нашли ещё и значение интеграла Дирихле. ■

V. Интегралы от многозначных функций.

Рассмотрим несколько определённых интегралов, подынтегральная функция которых при продолжении её в комплексную плоскость становится многозначной.

Пример 19.22. *Вычислить* $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}}{1+x}dx.$

Решение. Этот интеграл сходится при $0 < p < 1$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z^{p-1}}{1+z} = \dfrac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}$. Если рассматривать эту функцию в плоскости с разрезом от нуля до плюс бесконечности, то есть по положительной части вещественной оси, и под $\ln z$ подразумевать главную ветвь функции $\mathrm{Ln} z$, то есть считать, что на верхнем берегу разреза $\arg z = 0$, то функция f является однозначной аналитической (за исключением точки $z = -1$) функцией, совпадающей на верхнем берегу разреза с подынтегральной функцией. Точка $z = -1$ для неё — полюс первого порядка. Найдём вычет, он понадобится нам позднее.

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} e^{(p-1)\ln z} = e^{(p-1)\ln(-1)} =$$

$$= e^{(p-1)(\ln|-1|+i\arg(-1))} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{\pi p i}.$$

Проинтегрируем функцию f по замкнутому кусочно гладкому контуру $\Gamma_{r,R}$, состоящему из отрезка $[r;\, R]$ $(0 < r < 1 < R < +\infty)$ верхнего берега разреза, окружности L_R радиуса R с центром в нуле, отрезка $[r;\, R]$ нижнего берега разреза и окружности l_r с центром в нуле радиуса r. По основной теореме теории вычетов [7]

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f, -1) = 2\pi i \cdot (-e^{\pi p i}) = -2\pi i e^{\pi p i}.$$

Распишем интеграл в виде суммы четырёх интегралов.

$$\int\limits_{[r;\,R]} [f(z)]_{\text{в}}dz + \int\limits_{L_R} f(z)dz - \int\limits_{[r;\,R]} [f(z)]_{\text{н}}dz - \int\limits_{l_r} f(z)dz = -2\pi i e^{\pi p i}. \qquad (19.73)$$

Здесь $[f(z)]_{\text{в}}$ — значения функции f на верхнем берегу разреза, $[f(z)]_{\text{н}}$ — на нижнем. На верхнем берегу разреза $z = x$ и, как отмечено выше, $[f(x)]_{\text{в}} = \dfrac{x^{p-1}}{1+x}$. На нижний берег разреза z попадает, совершив полный оборот по окружности L_R против часовой стрелки, следовательно, на нижнем берегу разреза $\arg z = 2\pi$, поэтому $z = xe^{2\pi i}$ и

$$[f(z)]_{\text{н}} = \frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} = \frac{x^{p-1}e^{2\pi i(p-1)}}{1+x} = \frac{x^{p-1}}{1+x}\,e^{2\pi p i}.$$

Подставим вычисленные значения $[f(z)]_{\text{в}}$ и $[f(z)]_{\text{н}}$ в соответствующие интегралы в (19.73).

$$\int\limits_{[r;\,R]} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int\limits_{L_R} f(z)dz - e^{2\pi p i}\int\limits_{[r;\,R]} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx - \int\limits_{l_r} f(z)dz = -2\pi i e^{\pi p i}. \qquad (19.74)$$

Покажем, что при $R \to +\infty$ и $r \to 0$ интегралы по L_R и l_r стремятся к нулю. На L_R $z = Re^{i\varphi}$, поэтому

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\right| = \left|\frac{e^{(p-1)(\ln R + i\varphi)}}{1+z}\right| = \left|\frac{R^{p-1}e^{i(p-1)\varphi}}{1+z}\right| \le \frac{R^{p-1}}{R-1}$$

[7]Условие "контур интегрирования располагается в области аналитичности функции" выполнено, поскольку функция определена и аналитична на римановой поверхности.

и

$$\left|\int\limits_{L_R} f(z)dz\right| \le \frac{R^{p-1}}{R-1}\cdot 2\pi R = 2\pi\frac{R^p}{R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

так как $p<1$.

Аналогично, так как $z = re^{i\varphi}$ на l_r, то

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\right| = \left|\frac{e^{(p-1)(\ln r+i\varphi)}}{1+z}\right| = \left|\frac{r^{p-1}e^{i(p-1)\varphi}}{1+z}\right| \le \frac{r^{p-1}}{1-r}$$

и

$$\left|\int\limits_{l_r} f(z)dz\right| \le \frac{r^{p-1}}{1-r}\cdot 2\pi r = 2\pi\frac{r^p}{1-r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

так как $p>0$.

После предельного перехода в (19.74) получим:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx - e^{2\pi pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = (1-e^{2\pi pi})\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = -2\pi i e^{\pi pi}.$$

Разделив на множитель $1-e^{2\pi pi}$, найдём значение интеграла.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = -\frac{2\pi i e^{\pi pi}}{1-e^{2\pi pi}} = \frac{2\pi i e^{\pi pi}}{e^{\pi pi}(e^{\pi pi}-e^{-\pi pi})} = \frac{\pi}{\sin\pi p}\,.$$

■

Замечание 19.9. *Вычислив данный интеграл, мы тем самым доказали формулы дополнения для гамма- и бета- функций Эйлера*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}\ (0<p<1) \tag{19.75}$$

(*см. свойство 7 гамма-функции и свойство 8 бета-функции*).

Пример 19.23. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2+1}$.

Решение. В плоскости с разрезом по лучу $[0;+\infty)$ рассмотрим функцию $\frac{\ln z}{z^2+1}$, где в качестве $\ln z$ рассматривается главная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ 0\le\arg z\le 2\pi.$$

Пусть $\Gamma_{r,R}$ — контур, состоящий из отрезков $[-R;\,-r]$, $[r;\,R]$ вещественной оси и верхних полуокружностей l_r и L_R $(0<r<1<R<+\infty)$. Так как условия применимости основной теоремы теории вычетов выполнены, то

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i\frac{\ln i}{2i} = \pi\ln i = \frac{\pi^2}{2}i.$$

Разобьём контур на четыре компоненты.

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{\ln x dx}{x^2+1} - \int\limits_{l_r} f(z)dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{\ln x dx}{x^2+1} + \int\limits_{l_r} f(z)dz = \frac{\pi^2}{2} i \,. \tag{19.76}$$

В первом интеграле $\arg x = \pi$, так как на отрицательную часть вещественной оси z попадает с положительной, совершив полуоборот по L_R против часовой стрелки, поэтому в нём $\ln x = \ln |x| + \pi i$. Кроме того, совершим в первом интеграле подстановку $x = -t$. Тогда

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{\ln x dx}{x^2+1} dx = \int\limits_{-R}^{-r} \frac{\ln |x| + \pi i}{x^2+1} dx = \int\limits_{r}^{R} \frac{\ln t + \pi i}{t^2+1} dt \,. \tag{19.77}$$

Оценим второй и четвёртый интегралы в (19.76). На l_r

$$|f(z)| = \frac{|\ln r + i \arg z|}{|z^2+1|} \leq \frac{\sqrt{\ln^2 r + \pi^2}}{1 - r^2} \,,$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{l_r} f(z)dz \right| \leq \frac{\sqrt{\ln^2 r + \pi^2}}{1 - r^2} \cdot \pi r \xrightarrow[r \to 0]{} 0,$$

так как при $r \to 0$ функция $\ln r$ возрастает по абсолютной величине медленнее, чем любая положительная степень $\dfrac{1}{r}$. На L_R

$$|f(z)| = \frac{|\ln R + i \arg z|}{|z^2+1|} \leq \frac{\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}}{R^2 - 1} \,,$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{L_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}}{R^2 - 1} \cdot \pi R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0,$$

так как при $R \to +\infty$ функция $\ln R$ возрастает медленнее, чем любая положительная степень R.

Подставим в (19.76) правую часть (19.77), заменив t на x, и устремим r к нулю, а R к бесконечности. Тогда получим:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x + \pi i}{x^2+1} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = \frac{\pi^2}{2} i,$$

или

$$2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx + \pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi^2}{2} i,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0, \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \,.$$

■

Несмотря на разнообразие рассмотренных примеров вычисления интегралов с помощью теории вычетов, можно отметить два общих момента: выбор подходящей функции и подходящего контура, по которому производится интегрирование.

19.9 Принцип аргумента

Пусть функция f является аналитической в некоторой области D, за исключением конечного числа полюсов. Предположим также, что f имеет в области D конечное число нулей. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,. \tag{19.78}$$

Эту функцию называют *логарифмической производной* функции f, а вычеты в особых точках функции g называют *логарифмическими вычетами* функции f.

Определим особые точки функции g и найдём вычеты. Так как f и f' — аналитические функции, то особыми точками функции g могут быть только нули и полюса функции f. В остальных точках области D функция g аналитическая как частное аналитических функций.

Пусть z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — нули функции f, расположенные в области D, и пусть n_k — кратность нуля z_k. Тогда (см. (19.40)) функцию f в некоторой окрестности точки z_k можно представить в виде $f(z) = (z - z_k)^{n_k}\varphi_k(z)$, где функция φ_k аналитическая в этой окрестности и $\varphi_k(z) \neq 0$. Поэтому для g в указанной окрестности имеем:

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k(z - z_k)^{n_k - 1}\varphi_k(z) + (z - z_k)^{n_k}\varphi_k'(z)}{(z - z_k)^{n_k}\varphi_k(z)} = \frac{n_k}{z - z_k} + \frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)}\,. \tag{19.79}$$

Из представления (19.79), в силу того, что второе слагаемое есть аналитическая в окрестности z_k функция, следует, что точка z_k для функции g — полюс первого порядка, и что

$$\operatorname{Res}(g, z_k) = n_k. \tag{19.80}$$

Пусть z_j' $(j = 1, 2, \ldots, p)$ — полюса функции f, расположенные в области D, и пусть p_j — порядок полюса z_j'. Тогда функцию f в некоторой окрестности точки z_j' можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\psi_j(z)}{(z - z_j')^{p_j}}$, где функция ψ_j аналитическая в этой окрестности и $\psi_j(z) \neq 0$. Поэтому для g в указанной окрестности имеем:

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p_j(z - z_j')^{-p_j - 1}\psi_j(z) + (z - z_j')^{-p_j}\psi_j'(z)}{(z - z_j')^{-p_j}\psi_j(z)} = \frac{-p_j}{z - z_j'} + \frac{\psi_j'(z)}{\psi_j(z)}\,. \tag{19.81}$$

Из этого представления следует, что точка z_j' для функции g — полюс первого порядка, и что

$$\operatorname{Res}(g, z_j') = -p_j. \tag{19.82}$$

Проделанные вычисления позволяют доказать следующую важную теорему.

Теорема 19.35. *Пусть функция f аналитическая в некоторой односвязной области D, за исключением конечного числа полюсов, и не равна тождественному нулю. Пусть L — кусочно гладкий контур, содержащийся в D, и функция f не имеет на L ни нулей, ни полюсов. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P, \tag{19.83}$$

где N, P — соответственно число нулей и полюсов функции f, находящихся внутри контура L, причём каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, а полюс столько раз, каков его порядок.

Доказательство. Как было отмечено выше, особыми точками функции $\dfrac{f'}{f}$ могут быть только нули и полюса функции f. По условию функция f имеет внутри контура L конечное число полюсов. Нулей тоже может быть лишь конечное число, так как в противном случае у нулей существовала бы предельная точка и по первой теореме единственности (теорема 19.19) функция f обязана была бы быть тождественным нулём. А так как у функции $\dfrac{f'}{f}$ внутри контура L имеется лишь конечное число и.о.т.о.х., то к интегралу (19.83) можно применить основную теорему теории вычетов. Сохраняя введённые выше обозначения и используя полученные формулы (19.80), (19.82), имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(g, z_k) + \sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}(g, z_j') = \sum_{k=1}^{n} n_k + \sum_{j=1}^{p}(-p_j) = N - P,$$

где

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k, \quad P = \sum_{j=1}^{p} p_j\,. \tag{19.84}$$

■

Следствие 19.11. *Разность между числом нулей и полюсов функции f, находящихся внутри контура L, равна делённому на 2π приращению аргумента функции f вдоль контура L,*

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\big[\operatorname{Arg} f(z)\big]\Big|_L\,. \tag{19.85}$$

Приращение функции f вдоль замкнутой кривой L, $\operatorname{Var} f(z)\big|_L$, следует понимать так. Выбираем точку $a \in L$ и фиксируем в ней значение функции $[f(a)]_1$. Затем перемещаем точку z по контуру L против часовой стрелки и непрерывно изменяем значения $f(z)$. При возвращении в точку a получаем значение $[f(a)]_2$. Тогда

$$\operatorname{Var} f(z)\Big|_L = [f(a)]_2 - [f(a)]_1.$$

Ясно, что если функция f однозначна в области, содержащей контур L, то $\operatorname{Var} f(z)\big|_L = 0$.
Доказательство следствия. По доказанной теореме разность $N - P$ вычисляется с помощью интеграла (19.83). Так как $\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = d(\operatorname{Ln} f(z))$, то

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d(\operatorname{Ln} f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Var}\big[\operatorname{Ln} f(z)\big]\Big|_L =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\operatorname{Var}\big[\ln|f(z)|\big]\Big|_L + i\operatorname{Var}\big[\operatorname{Arg} f(z)\big]\Big|_L\right)\,.$$

Так как $\ln|f(z)|$ — функция однозначная, то отсюда следует (19.85). ■

Следствие 19.12. *Если D — односвязная область, а функция f аналитическая в ней и отлична от тождественной постоянной, то число нулей функции f с учётом их кратности, содержащихся внутри кусочно гладкого контура, расположенного в D, может быть подсчитано по одной из формул*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\big[\operatorname{Arg} f(z)\big]\Big|_L\,, \tag{19.86}$$

при условии, что на самом контуре нулей функции f не имеется.

Действительно, так как функция f не имеет полюсов, то в формулах (19.83), (19.85) $P = 0$.

Подсчёт числа нулей часто облегчает следующая теорема.

Теорема 19.36 (Руше). *Пусть f и g — аналитические в односвязной области D функции и L — кусочно гладкий контур, содержащийся в D. Если на контуре L выполняется неравенство*

$$|g(z)| < |f(z)|, \tag{19.87}$$

то внутри контура L

$$N(f+g) = N(f), \tag{19.88}$$

где $N(f)$ — число нулей функции f, а $N(f+g)$ — число нулей функции $f+g$.

Доказательство. На контуре L функции f и $f+g$ в нуль не обращаются, поскольку $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, $|f(z)+g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, поэтому для них справедлива формула (19.86). Тогда

$$\begin{aligned} N(f+g) =& \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}(f(z)+g(z))\big]\Big|_L = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}\,(f(z)\,(1+\varphi(z)))\big]\Big|_L = \\ =& \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}\,(f(z))\big]\Big|_L + \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}\,(1+\varphi(z))\big]\Big|_L. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ и использовано свойство: аргумент произведения комплексных чисел равен сумме их аргументов.

Покажем, что $\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}(1+\varphi(z))\big]\Big|_L = 0$. Пусть $w = 1+\varphi(z)$. Тогда

$$|w-1| = |\varphi(z)| < 1,$$

и когда точка z совершает обход по контуру L, то точка w описывает замкнутую (функция φ однозначна!) кривую, расположенную в открытом круге $|w-1| < 1$, следовательно, точка $w = 1+\varphi(z)$ не совершает обхода вокруг нуля, поэтому её аргумент не получает приращения. Так как, очевидно, приращение суммы равно сумме приращений, то из проведённого рассуждения вытекает, что

$$N(f+g) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg} f(z)\big]\Big|_L + \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg}(1+\varphi(z))\big]\Big|_L = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\big[\mathrm{Arg} f(z)\big]\Big|_L = N(f).$$

■

Пример 19.24. *Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.*

Решение. Представим левую часть уравнения в виде суммы двух функций: $f(z) = -5z^5$ и $g(z) = z^8 - 2z + 1$. На окружности $|z| = 1$ имеем:

$$|f(z)| = |5z^5| = 5, \quad |g(z)| = |z^8 - 2z + 1| \leq |z|^8 + 2|z| + 1 = 4.$$

Следовательно, $|g(z)| < |f(z)|$.

Функция f имеет в круге $|z| < 1$ один нуль кратности 5. По теореме Руше функция $f+g$ имеет в круге $|z| < 1$ столько же нулей, сколько и f.

Ответ: уравнение $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ имеет в круге $|z| < 1$ пять корней (с учётом кратности). ■

В качестве второго примера использования теоремы Руше снова докажем основную теорему алгебры.

Теорема 19.37. *Любой многочлен степени* $n(\geq 1)$ *имеет в комплексной плоскости ровно* n *нулей (с учётом их кратности).*

Доказательство. Представим многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \ (n \geq 1)$$

в виде $P_n(z) = f(z) + g(z)$, где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как, очевидно,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}{a_0 z^n} = 0,$$

то найдётся такое R_0, что для всех значений $z: \ |z| \geq R_0$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ или $|g(z)| < |f(z)|$.

Так как на окружности $|z| = R_0$ выполняется неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, то по теореме Руше в круге $|z| < R_0$ многочлен $P_n(z)$ имеет столько же нулей, сколько и функция $f(z) = a_0 z^n$, то есть n, а в области $|z| \geq R_0$ многочлен $P_n(z)$ нулей иметь не может, так как в ней $|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n|$. ■

19.10 Задачи

1. Найти точки ветвления и построить римановы поверхности следующих функций:
   a) $w = \sqrt{z(1-z)}$; b) $w = \sqrt{z^2+1}$; c) $w = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$.

2. Проверить на дифференцируемость функции: a) $w = z\overline{z}$; b) $w = z^2 + \overline{z}^2$;
   c) $w = x^3 + y + i(x + y^3)$; d) $w = x^3 + 3xy^2 - i(3x^2 y + y^3)$;
   e) $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 3x^2 + 3y^2 - 4y + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 - 6xy + 4x)$;
   f) $2x^5 - 20x^3y^2 + 10xy^4 + 3x^2y - y^3 + 3x + i(10x^4y - 20x^2y^3 + 2y^5 - x^3 + 3xy^2 + 3y)$;
   g) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^3 - 6xy^2 + i(4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3)$;
   h) $e^{2x}\cos 2y - 2e^{-3y}\cos 3x + i(e^{2x}\sin 2y - 2e^{-3y}\sin 3x)$;
   i) $e^{2y}\cos 2x + e^x(x\cos x - y\sin x) + i(-e^{2y}\sin 2x + e^x(x\sin x + y\cos x))$;
   j) $\cos x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} 2x \cos 2y - i(\sin x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} 2x \sin 2y)$;
   k) $\sin 3x \operatorname{ch} 3y - 3\operatorname{ch} x \cos y + i(\cos 3x \operatorname{sh} 3y - 3\operatorname{sh} x \sin y)$;
   l) $\operatorname{ch} 2x \cos 2y + x\sin x \operatorname{ch} y - y\cos x \operatorname{sh} y + i(\operatorname{sh} 2x \sin 2y + x\cos x \operatorname{sh} y + y\sin x \operatorname{ch} y)$.

3. Можно ли найти аналитическую функцию, у которой действительная часть равна $\sqrt{x^2+y^2}$?

4. Можно ли найти аналитическую функцию, у которой мнимая часть равна $e^x \sin y$?

5. Доказать существование аналитической функции с данной вещественной частью и найти её, если:
   a) $u(x,y) = e^x\cos y + 2\cos x \operatorname{ch} y$; b) $u(x,y) = (e^{-x} - 2\operatorname{ch} x)\cos y$;
   c) $u(x,y) = e^{-y}\cos x - 3\sin x \operatorname{ch} y$; d) $u(x,y) = e^y \cos x + 3\operatorname{sh} x \cos y$.

6. Доказать существование аналитической функции с данной мнимой частью и найти её, если:
   a) $v(x,y) = e^x \sin y - 2\sin x \operatorname{sh} y$; b) $v(x,y) = (e^{-x} + 2\operatorname{sh} x)\sin y$;
   c) $v(x,y) = e^{-y}\sin x - 3\cos x \operatorname{sh} y$; d) $v(x,y) = e^y \sin x - 3\operatorname{ch} x \sin y$.

7. При каких условиях функция $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической?

8. Любая частная производная $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^l}$ $(m \in \mathbb{N},\ k + l = m)$ гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции u — гармоническая в D функция. Доказать.

9. Пусть D — ограниченная область, функция f — аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, отлична от тождественной постоянной и на границе ∂D области D выполняется условие $|f(z)| \equiv c \neq 0$. Тогда найдётся $a \in D$ такая, что $f(a) = 0$. Доказать.

10. Пусть f — аналитическая функция в круге $|z| < R$ и $f(z) \not\equiv const$. Тогда функция $M(r) = \max\{|f(z)| :\ |z| = r\}$ возрастает на $[0;\, R)$.

11. Если $f \in A(D)$ и принимает постоянное значение на некоторой дуге $L \subset D$, то она постоянна в D. Доказать.

12. Если $f \in A(D)$ и принимает в D действительные значения, то $f(z) \equiv c$. Доказать.

13. Существует ли аналитическая в круге $|z| < 2$ функция, такая что $f(1/k) = 1/2$ $(k \in \mathbb{N})$?

14. Нули функции $\sin \dfrac{1}{1-z}$ образуют последовательность, сходящуюся к точке $z = 1$, но функция не равна тождественно нулю. Почему это не противоречит первой теореме единственности?

15. Не используя теорию вычетов, вычислить:
a) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos 2z}{(z+2)^2} dz$; b) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{-z} + \cos z}{z^2 + 2z} dz$; c) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos 3z}{(z-2i)^2} dz$;
d) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z \cos z}{z^2 - z} dz$; e) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=2} \dfrac{\cos 4z}{(z^2+9)(z+9)} dz$; f) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin 2z}{(z+2i)^2} dz$;
g) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z - \sin z}{z^2 - 2iz} dz$; h) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^{-z} \sin z}{z^2 + iz} dz$.

16. Установить кратность нуля $a = 0$ функции:
a) $f(z) = \left(e^{-z} - e^{-z^2}\right) \ln(1+z)$; b) $f(z) = \left(e^{z^3} - e^{z^2}\right) \ln(1 - z^2)$;
c) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z} - e^{\sin z}$; d) $f(z) = e^{\sin^2 z} - e^{1 - \cos z}$;
e) $f(z) = \left(e^{z} - e^{-z^2}\right) \ln^2(1 - z)$; f) $f(z) = \left(e^{-z^3} - e^{z^2}\right) \ln(1 - z^2)$;
g) $f(z) = e^{2 \operatorname{tg} z} - e^{-\sin 2z}$; h) $f(z) = \sin^3 z - \operatorname{tg} z(1 - \cos z)$.

17. Точка a — нуль функций f и g кратностей m и l. Чем она является для функции fg?

18. Точка a — нуль функций f и g кратностей m и l. Чем она является для функции f/g?

19. Точка a — нуль функций f и g кратностей m и l. Чем она является для функции $f + g$?

20. Точка a — полюс порядков m и l для функций f и g. Чем она является для функции f/g?

21. Точка a — полюс порядков m и l для функций f и g. Чем она является для функции fg?

22. Точка a — полюс порядков m и l для функций f и g. Чем она является для функции $f-g$?

23. Точка a — полюс порядка m для функции f и нуль порядка l для функции g. Чем она является для функции fg?

24. Точка a — полюс порядка m для функции f и нуль порядка l для функции g. Чем она является для функции f/g?

25. Каков характер особой точки $z=\infty$ функции:
a) $f(z)=\dfrac{z^2+z\sin(1/z)}{\cos z-2}$; b) $f(z)=\dfrac{z^2\sin(1/z)}{\sin(z+2)}$; c) $f(z)=\dfrac{z^3-3z^2}{e^z-i}$; d) $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{\operatorname{ch} z+1}$;
e) $f(z)=\dfrac{\cos(2/z)}{e^z+2}$; f) $f(z)=\dfrac{z^3\operatorname{sh}(2/z)}{\operatorname{ch} z+1}$; g) $f(z)=\dfrac{\cos(1/z)-z}{3-\operatorname{ch} z}$; h) $f(z)=\dfrac{e^z-2}{\operatorname{sh}(z+1)}$?

26. Найти и классифицировать все особые точки функции:
a) $f(z)=\sin(\sin^{-1}(z^{-1}))$; b) $f(z)=(z^3\sin(z^{-1}))^{-1}$;

c) $\dfrac{z^3\sin(1/z)}{\sin(\cos(1/(z-2)))}$; d) $f(z)=\dfrac{(z-1)^5\sin(1/z)}{\cos(1/(z-1))}$;

e) $f(z)=\sin(\cos^{-1}(z-\pi)^{-1})$; f) $f(z)=(z-1)^6\sin^{-1}(z-1)^{-1}$;

g) $\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos(1/(z-2))}$; h) $f(z)=\dfrac{(z-2)^5\sin(1/z)}{\cos(1/(z-1))}$.

27. Показать, что значения, принимаемые функцией $w=ze^z-\sin z$ не могут находиться только лишь в верхней полуплоскости.

28. Показать, что значения функции $w=(z+3)\operatorname{ch}^2 z+1$ не могут все находиться вне круга $|w|\le 1$.

29. Показать, что все значения функции $w=e^{-z^2}-2$ не могут располагаться в левой полуплоскости.

30. Показать, что все значения функции $w=\sin z-z\cos z$ не могут располагаться в круге $|z-2|<3$.

31. Показать, что все значения функции $w=\operatorname{sh}2z-z\operatorname{ch} z$ не могут располагаться в правой полуплоскости.

32. Показать, что все значения функции $w=e^{-z}+\cos z$ не могут располагаться вне круга $|w|\le 2$.

33. Показать, что все значения функции $w=e^z+2shz$ не могут располагаться в нижней полуплоскости.

34. Показать, что все значения функции $w=\cos 2z+2z\sin z$ не могут располагаться в круге $|z-1|<2$.

35. Найти логарифмический вычет функции f относительно контура C:
a) $f(z) = \dfrac{z}{1+z^3}$, $C: \ |z| = 2$; b) $f(z) = \cos z + \sin z$, $C: \ |z| = 4$;
c) $f(z) = (e^z - 2)^2$, $C: \ |z| = 8$; d) $f(z) = \operatorname{th} z$, $C: \ |z| = 8$;
e) $f(z) = \operatorname{tg}^3 z$, $C: \ |z| = 6$; f) $f(z) = 1 - \operatorname{th}^2 z$, $C: \ |z| = 2$.

36. Определить число корней уравнения, находящихся в правой полуплоскости:
a) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$; b) $z^3 - 2z - 5 = 0$;
c) $z^3 - 4z^2 + 5 = 0$; d) $2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0$;
e) $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$; f) $z^{12} - z + 1 = 0$.

37. Найти количество лежащих в круге $|z| < 1$ корней уравнения:
a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$; b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$;
c) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$; d) $z^4 - 5z + 1 = 0$;
e) $z^4 - 8z + 10 = 0$; f) $e^z - 4z^5 + 1 = 0$;
g) $z^{10} + az^2 + bz + c = 0$, если $|a| > |b| + |c| + 1$;.

38. Найти количество лежащих в круге $|z| < 2$ корней уравнения:
a) $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$; b) $z^5 + z^2 + 1 = 0$; c) $27z^{11} - 18z + 10 = 0$.

39. Найти количество корней уравнения $z^3 + z + 1 = 0$ в круге $|z| < \dfrac{1}{2}$.

40. Определить количество корней уравнения
a) $z^4 - 5z + 1 = 0$ в кольце $1 < |z| < 2$;
b) $z^4 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$;
c) $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$ в кольце $2 < |z| < 3$;
d) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ в кольце $1 < |z| < 2$;
e) $z^6 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$?

41. Определить количество корней уравнения
a) $z^2 - \cos z = 0$ в круге $|z| < 2$;
b) $z^4 - \sin z = 0$ в круге $|z| < \pi$;
c) $z^2 + \operatorname{ch}(iz) = 0$ в круге $|z| < 0,5$;
d) $\operatorname{ch} z = z^2 - 4z$ в круге $|z| < 1$.

42. Сколько корней имеет в круге $|z| < 1$ уравнение $z = \varphi(z)$, если при $|z| \leq 1$ функция $\varphi(z)$ аналитична и удовлетворяет неравенству $|\varphi(z)| < 1$?

20 Мера и интеграл Лебега

Классическое понятие интеграла (интеграл Римана), сформировавшееся к середине девятнадцатого столетия, оказалось недостаточным для некоторых, возникших позднее областей математики и физики. Например, в некоторых задачах математической физики необходимо рассматривать сходимость последовательности функций $f_n(x)$ к функции $f(x)$ "в среднем скажем, на отрезке $[a;\ b]$, то есть таким образом, чтобы

$$\int\limits_a^b \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но можно придумать пример последовательности функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;\ b]$, удовлетворяющих условию Коши "в среднем то есть,

$$\int_a^b \big|f_n(x) - f_m(x)\big| dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

но не имеющей предельной функции среди интегрируемых по Риману.

Класс функций, интегрируемых по Риману, оказывается, таким образом, неполным. А требование полноты класса интегрируемых функций необходимо во многих задачах современного анализа, например, при доказательстве существования решений уравнений математической физики. Указанная причина — не единственная, делающая недостаточным понятие интеграла Римана и подтолкнувшая исследователей к разработке более общей концепции интеграла, именно, интеграла Лебега. Изложению теории интеграла Лебега и посвящена настоящая глава.

20.1 Сравнение множеств

Отправной точкой теории, излагаемой в этом параграфе, является следующий вопрос. Пусть даны два множества. Спрашивается, какое из них содержит большее количество элементов?

На этот вопрос нетрудно ответить, если оба множества содержат конечное (к тому же, сравнительно небольшое) количество элементов, или если одно множество конечно, а второе — бесконечно. Но как ответить на поставленный вопрос, если оба множества бесконечны или содержат большое количество элементов, так что подсчитать их количество затруднительно или же вовсе невозможно? Например, каких чисел больше: натуральных или чётных; целых или рациональных; рациональных или иррациональных? Как будет показано ниже, казалось бы очевидный ответ на подобные вопросы часто оказывается неправильным. Получить правильный ответ на поставленные здесь и подобные вопросы помогает понятие взаимно однозначного соответствия.

Определение 20.1. *Два множества A и B назовём эквивалентными, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть, если существует биективное отображение $f : A \leftrightarrow B$ множества A на множество B.*

Если множества A и B эквивалентны, то будем писать: $A \sim B$.

Определение 20.2. *Если множества A и B эквивалентны, то будем говорить, что их мощности равны, и писать: $Card\ A = Card\ B$.*

Для конечных множеств равенство мощностей означает, что они содержат одинаковое число элементов. Отталкиваясь от этого, будем считать и говорить, что если два бесконечных множества эквивалентны, то они содержат одинаковое количество элементов.

Пример 20.1. *Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество чётных чисел $2\mathbb{N} = \{2n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Отображение $f :\ \mathbb{N} \leftrightarrow 2\mathbb{N}$, ставящее в соответствие натуральному числу n число $2n$, есть, очевидно, биекция, поэтому множества $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$ эквивалентны, то есть, содержат одинаковое количество элементов.*

Определение 20.3. *Будем говорить, что мощность множества A меньше либо равна мощности множества B, и писать*

$$Card\ A \leq Card\ B,$$

если множество A эквивалентно некоторому подмножеству B_0 множества B (может быть, всему множеству B).

Определение 20.4. *Будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B и писать*

$$Card\ A < Card\ B,$$

если A эквивалентно некоторому подмножеству B_0 множества B, но не эквивалентно всему множеству B.

Определение 20.5. *Мощность множества натуральных чисел назовём счетной мощностью и обозначим буквой a, $Card\ \mathbb{N} = a$.*

Определение 20.6. *Множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, будем называть счётными множествами.*

Таким образом, если A — счётное множество, $Card\ A = a$, то каждому элементу $a \in A$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие натуральное число n. Другими словами, элементы счётного множества можно перенумеровать, то есть, расположить в последовательность. Итак, если A — счётное множество, то его можно записать в виде

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ ,\ \ldots\}.$$

Счётная мощность — наименьшая из мощностей бесконечных множеств. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 20.1. *Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.*

Доказательство. Выберем во множестве A два различных элемента и обозначим их a_1 и b_1. Выберем во множестве $A\backslash\{a_1,\ b_1\}$ снова два разных элемента и обозначим их a_2 и b_2. Это можно сделать, потому что множество $A\backslash\{a_1,\ b_1\}$, как и множество A, бесконечно. Предположим, что описанным способом из множества A выделены элементы $a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ \ldots;\ a_{n-1},\ b_{n-1}$. Рассмотрим множество

$$A\backslash\big\{\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}\}\bigcup\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1}\}\big\}.$$

Оно, как и множество A, бесконечно, поэтому из него можно выбрать два разных элемента и обозначить их a_n и b_n.

Продолжая описанный процесс бесконечно, получим две последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;\ \ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

различных между собой элементов множества A. Введём обозначения:

$$A_1 = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\},\ \ B_1 = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}.$$

Множество A_1 — счётное и содержится в A. Теорема, если принять во внимание определение 20.3, доказана. ■

Замечание 20.1. *Доказательство проведено так, что доказано больше, чем требовалось в формулировке теоремы, именно: из любого бесконечного множества можно выделить счётное подмножество так, что оставшееся множество будет бесконечным.*

Действительно, $A\backslash A_1 = B_1 \bigcup (A\backslash(A_1 \bigcup B_1))$ содержит счётное множество B_1, поэтому является бесконечным.

Это замечание будет использовано в дальнейшем.

Не все бесконечные множества являются счётными, что подтверждает следующая теорема.

Теорема 20.2 (Кантор)**.** *Множество точек отрезка* $[0;1]$ *несчётно.*

Доказательство. То, что $Card\ [0;\ 1] \geq a$, следует из того, что отрезок $[0;\ 1]$ содержит счётное подмножество $\{1/n:\ n \in \mathbb{N}\}$ (можно было сослаться и на предыдущую теорему). Предположим, что $Card\ [0;\ 1] = a$. Тогда точки отрезка $[0;\ 1]$ можно перенумеровать, то есть, представить отрезок $[0;\ 1]$ в виде: $[0;\ 1] = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots\}$. Для получения противоречия применим процедуру Кантора. Обозначим отрезок $[0;\ 1]$ символом Δ_0 и разобьём его на три равных (по длине) отрезка. Из трёх отрезков выберем тот, которому не принадлежит точка x_1 и обозначим его через Δ_1. (Если точка x_1 не принадлежит двум отрезкам, то выбираем любой из них.) Разобьём отрезок Δ_1 на три равных отрезка и обозначим через Δ_2 тот из них, который не содержит точку x_2. И так далее. На n-ом шаге отрезок Δ_{n-1} разобьём на три равных отрезка и обозначим через Δ_n тот из них, который не содержит точку x_n. И так далее.

В результате получим последовательность вложенных отрезков

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots,$$

длины которых стремятся к нулю. По теореме Кантора о последовательности вложенных отрезков (теорема 2.15) существует единственная точка x_0, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Точка x_0 как точка отрезка $[0;\ 1]$, по предположению, занумерована, то есть, существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 = x_m$. Но тогда, с одной стороны, $x_m = x_0 \in \Delta_m$, а с другой стороны, по построению $x_m \overline{\in} \Delta_m$. Полученное противоречие показывает, что точки отрезка $[0;\ 1]$ нельзя перенумеровать. Теорема доказана. ■

Определение 20.7. *Мощность множества точек отрезка* $[0;\ 1]$ *обозначим буквой c и назовём мощностью континуума,* $Card\ [0;\ 1] = c$.

Среди мощностей бесконечных множеств нет наибольшей, как вытекает из следующей теоремы.

Теорема 20.3. *Мощность множества всех подмножеств любого множества больше мощности исходного множества.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$ — некоторое множество, $M = \{m\}$ — множество всех его подмножеств. Напомним, что пустое множество $\varnothing$ и само множество A считаются подмножествами множества A. Очевидно взаимно однозначное соответствие между элементами a множества A и одноэлементными множествами $m = \{a\}$ множества M, поэтому $Card\ M \geq Card\ A$. Методом "от противного" покажем, что на самом деле $Card\ M > Card A$. Пусть $Card\ M = Card\ A$. Тогда существует биекция $f:\ M \leftrightarrow A$. Это означает, что каждый элемент a множества A можно записать в виде $a = f(m)$, причём элемент m множества M определяется однозначно.

Разобьём элементы множества A на два класса. К первому классу отнесём элементы a множества A, принадлежащие множеству m, которому они соответствуют, $a = f(m) \in m$. Ко второму классу отнесём элементы a множества A, не принадлежащие множеству m, которому они соответствуют, $a = f(m) \overline{\in} m$. В силу взаимной однозначности отображения

f каждый элемент множества A относится к одному и только одному из рассматриваемых классов.

Рассмотрим множество m_0 элементов второго класса. Как подмножество множества A, $m_0 \in M$, и биекция f определяет элемент $a_0 = f(m_0)$ множества A. К какому классу относится элемент a_0? Если a_0 — элемент первого класса, то $a_0 = f(m_0) \in m_0$, но m_0 — множество элементов второго класса. Противоречие. Если же a_0 — элемент второго класса, то $a_0 = f(m_0) \overline{\in} m_0$, но в m_0 собраны <u>все</u> элементы второго класса. Опять противоречие.

Таким образом, элемент a_0 не может быть отнесён ни к первому классу, ни ко второму, следовательно, биекция $f:\ M \leftrightarrow A$ невозможна, и теорема доказана. ■

Если множество A конечное, состоящее из n элементов, $Card\ A = n$, то множество M содержит $1 = C_n^0$ пустое множество, $n = C_n^1$ одноэлементных множеств, C_n^2 двуэлементных множеств, ..., $1 = C_n^n$ множество A. Так как

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n$$

(это следует из разложения $(1+1)^n$ по формуле бинома Ньютона), то $Card\ M = 2^n$. По аналогии с этим, если A — бесконечное множество и $Card\ A = \alpha$, а M — множество всех его подмножеств, то полагают

$$Card\ M = 2^{\alpha}.$$

Можно показать, что $2^a = c$.

Можно показать, что любые две мощности сравнимы между собой, то есть, для любых двух множеств A и B справедливо одно и только одно из утверждений: $Card\ A = Card\ B$, $Card\ A < Card\ B$, $Card\ A > Card\ B$.

Доказательства этих утверждений и изложение многих других вопросов, связанных с понятием мощности множества, можно найти в [24], [17] и других книгах.

Теорема 20.4. *Объединение не более чем счётного множества не более чем счётных множеств есть множество, не более чем счётное.*

Доказательство. В формулировке теоремы содержится четыре утверждения. Рассмотрим каждое из них в отдельности.

1) *Объединение конечного множества конечных множеств — конечное множество.*

Это утверждение очевидно.

2) *Объединение счётного множества конечных множеств — множество, не более чем счётное.*

Пусть даны множества

$$A_1 = \{a_{1\,1},\ a_{1\,2},\ a_{1\,3},\ \ldots,\ a_{1\,n_1}\},$$

$$A_2 = \{a_{2\,1},\ a_{2\,2},\ a_{2\,3},\ \ldots,\ a_{2\,n_2}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_k = \{a_{k\,1},\ a_{k\,2},\ a_{k\,3},\ \ldots,\ a_{k\,n_k}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Образуем множество $A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ и покажем, что оно не более чем счётно. Для этого достаточно показать, что элементы множества A можно перенумеровать, или, что то же, расположить в последовательность.

Упорядочим элементы множества A следующим образом: сначала выпишем элементы множества A_1, затем элементы множества A_2, опуская те, которые содержатся во множестве A_1, и так далее. На k-ом шаге выпишем элементы множества A_k, опуская те, которые содержатся в предыдущих множествах.

$$A = \{a_{1\,1},\ a_{1\,2},\ \ldots,\ a_{1\,n_1};\ a_{2\,1},\ a_{2\,2},\ \ldots,\ a_{2\,n_2};\ \ldots;\ a_{k\,1},\ a_{k\,2},\ \ldots,\ a_{k\,n_k};\ \ldots\}.$$

Как нетрудно заметить, при таком способе выписывания элементов каждый элемент каждого множества A_k рано или поздно будет выписан, так что действительно получится множество A. Остаётся перенумеровать подряд элементы множества A. Если для нумерации будет использовано конечное число номеров, то множество A — конечное (это случится, если начиная с некоторого момента все элементы всех оставшихся множеств уже были выписаны ранее). Если же для нумерации придётся использовать весь натуральный ряд чисел, то множество A — счётное.

3) *Объединение конечного числа счётных множеств — счётное множество.*

Пусть даны множества

$$A_1 = \{a_{1\,1},\ a_{1\,2},\ a_{1\,3},\ \ldots,\ a_{1\,n},\ \ldots\},$$
$$A_2 = \{a_{2\,1},\ a_{2\,2},\ a_{2\,3},\ \ldots,\ a_{2\,n},\ \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = \{a_{k\,1},\ a_{k\,2},\ a_{k\,3},\ \ldots,\ a_{k\,n},\ \ldots\},$$

Образуем множество $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ и докажем, что оно счётное. На этот раз расположим элементы множества A в следующей последовательности: сначала выпишем первые элементы всех множеств, затем вторые, третьи и так далее, не забывая опускать те элементы, которые встретились ранее.

$$A = \{a_{1\,1},\ a_{2\,1},\ \ldots,\ a_{k\,1};\ a_{1\,2},\ a_{2\,2},\ \ldots,\ a_{k\,2};\ \ldots;\ a_{1\,n},\ a_{2\,n},\ \ldots,\ a_{k\,n};\ \ldots\}.$$

Опять ясно, что при выбранном способе выписывания элементов ни один элемент никакого множества потерян не будет, и, перенумеровав элементы множества A, убедимся, что оно счётное.

В рассматриваемом случае необязательно требовать, чтобы все множества A_i были счётными. Некоторые из них (но не все, иначе получится случай 1) могут быть и конечными.

4) *Объединение счётного множества счётных множеств — счётное множество.*

Пусть даны множества

$$A_1 = \{a_{1\,1},\ a_{1\,2},\ a_{1\,3},\ \ldots,\ a_{1\,n},\ \ldots\},$$
$$A_2 = \{a_{2\,1},\ a_{2\,2},\ a_{2\,3},\ \ldots,\ a_{2\,n},\ \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = \{a_{k\,1},\ a_{k\,2},\ a_{k\,3},\ \ldots,\ a_{k\,n},\ \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Образуем множество $A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$. На этот раз применим способ выписывания элементов множества "по диагоналям опуская те элементы, которые уже были выписаны ранее.

$$A = \{a_{1\,1};\ a_{1\,2}, a_{2\,1};\ a_{1\,3}, a_{2\,2}, a_{3\,1};\ \ldots;\ a_{1\,n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \ldots, a_{n\,1};\ \ldots\}.$$

Снова каждый элемент каждого множества A_k рано или поздно будет выписан. При нумерации элементов множества A будут использованы все натуральные числа, поскольку множество A, очевидно, бесконечное. Счётность множества A установлена.

И в этом случае, как и в предыдущем, не обязательно, чтобы все множества A_k были счётными. ■

При конечном объединении конечных множеств, не имеющих попарно общих элементов, их мощности складываются. Распространяя это правило на бесконечные множества и используя доказанную теорему, получаем следующие равенства:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k + \ldots = a;$$

$$a + a + \ldots + a = a;$$

$$a + a + \ldots + a + \ldots = a.$$

Пример 20.2. *$Card\ \mathbb{Z} = a$; $Card\ \mathbb{Q} = a$.*

Первое утверждение следует из того, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ есть объединение трёх множеств: множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, множества отрицательных целых чисел $-\mathbb{N} = \{-1;\ -2;\ -3;\ \ldots;\ -n;\ \ldots\}$ и множества $\{0\}$, $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\bigcup(-\mathbb{N})\bigcup\{0\}$.

Второе же утверждение есть результат того, что множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{m/n:\ m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}\}$ можно представить как счётное объединение множеств $\mathbb{Q}_n = \{m/n:\ m \in \mathbb{Z}\}$ рациональных чисел с фиксированным знаменателем n, $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n$.

Теорема 20.5. *Из любого бесконечного множества можно выделить счётное подмножество так, что оставшаяся часть будет эквивалентна всему множеству.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Выделим из него два счётных множества A_1 и B_1, как это сделано в доказательстве теоремы 20.1. Тогда

$$A = (A_1 \cup B_1) \cup (A \setminus (A_1 \cup B_1)),$$

$$A \setminus A_1 = B_1 \cup (A \setminus (A_1 \cup B_1)).$$

Первые слагаемые в правых частях обоих равенств — счётные множества, а потому эквивалентны между собой. Вторые же слагаемые одинаковы, следовательно, тоже эквивалентны. Так как первые и вторые слагаемые в правых частях обоих равенств общих элементов не содержат, то эквивалентность отдельно первых и отдельно вторых слагаемых означает эквивалентность множеств A и $A \setminus A_1$. ■

Теорема 20.6. *Декартово произведение конечного числа счётных множеств — счётное множество.*

Доказательство. Пусть сначала даны два счётных множества

$$A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots\},\quad B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m;\ \ldots\}.$$

Рассмотрим их декартово произведение

$$A \times B = \{(a_n, b_m):\ a_n \in A,\ b_m \in B\}.$$

Образуем множества $C_m = \{(a_n, b_m) : \ n \in \mathbb{N}\}$, $m \in \mathbb{N}$. Множества C_m — счётные ввиду очевидной биекции $f : \ (a_n, b_m) \leftrightarrow a_n$. Так как

$$A \times B = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m,$$

то по четвёртой части теоремы 20.4 декартово произведение двух счётных множеств — счётное множество.

Применив метод индукции, убеждаемся в справедливости теоремы для любого конечного числа счётных множеств. ■

Пример 20.3. *$Card\ \mathbb{Q}^m = a$.*

Множество m-мерных векторов с рациональными координатами счётно, потому что

$$\mathbb{Q}^m = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{m}.$$

Пример 20.4. *Множество многочленов с рациональными коэффициентами счётно.*

Пусть

$$P = \{P_m(t) = r_0 t^m + r_1 t^{m-1} + \ldots + r_m : \ r_0, r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Q}; \ m \in \mathbb{N}\} -$$

множество многочленов с рациональными коэффициентами. Каждый многочлен $P_m(t)$ взаимно однозначно определяется своими коэффициентами $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$, поэтому, если P_m — множество многочленов степени m, то $P_m \sim \mathbb{Q}^{m+1}$, то есть счётно, а $P = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P_m$ счётно как счётное объединение счётных множеств.

Определение 20.8. *Вещественное число t назовём алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена $P_m(t)$ с целыми коэффициентами.*

Пример 20.5. *Множество алгебраических чисел счётно.*

Любой многочлен имеет конечное число корней. Множество многочленов с целыми коэффициентами счётно. Но тогда множество алгебраических чисел, как объединение счётного множества конечных множеств, счётно.

Определение 20.9. *Вещественное число t, не являющееся алгебраическим, будем называть трансцендентным.*

Трансцендентные числа существуют, так как множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность, не меньшую, чем мощность континуума, а отсутствие трансцендентных чисел означало бы, что все вещественные числа — алгебраические, то есть, $Card\ \mathbb{R} = a$.

Доказано, что числа π и e являются трансцендентными, но доказательство их трансцендентности гораздо сложнее, чем доказательство существования трансцендентных чисел вообще.

Теорема 20.7. *Если $Card\ A \geq a$, $Card\ B \leq a$, то $Card(A \bigcup B) = Card A$.*

Доказательство. Можно считать, что множества A и B не содержат общих элементов. В противном случае можно заменить B на $B \setminus A$, что не изменит $A \bigcup B$.

Используя теорему 20.1, выделим из множества A счётное подмножество A_0. Тогда

$$A = A_0 \bigcup (A \setminus A_0)\,,$$

$$A \bigcup B = \Big(A_0 \bigcup B\Big) \bigcup (A \setminus A_0)\,.$$

Множества A_0 и $A_0 \cup B$ оба счётные, поэтому $A_0 \sim (A_0 \cup B)$. Вторые же слагаемые в обоих представлениях одинаковы, а потому тоже эквивалентны. Так как первые и вторые слагаемые общих элементов не содержат, то установлено, что $A \sim A \bigcup B$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 20.8. *Если $Card\ A > a$, $Card\ B \le a$, то $Card(A \setminus B) = Card A$.*

Доказательство. Множество $A \setminus B$ не может быть конечным или счётным, ибо тогда множество $A = (A \setminus B) \bigcup B$ тоже было бы конечным или счётным. Если предположить, что $Card(A \setminus B) < Card A$, то, поскольку $A = (A \setminus B) \bigcup B$, по предыдущей теореме

$$Card A = Card(A \setminus B) < Card A.$$

Противоречие. ■

Пример 20.6. $Card\ (0;\ 1) = Card\ (0;\ 1] = Card\ [0;\ 1) = c.$

Пример 20.7. $Card\ [a;\ b] = Card\ (a;\ b) = Card\ (a;\ b] = Card\ [a;\ b) = c\ (b > a).$

Отображение $y = a + (b - a)x$, очевидно, устанавливает биекцию между отрезками $[a;\ b]$ и $[0;\ 1]$, поэтому $Card\ [a;\ b] = c$. Следовательно, любой отрезок, интервал, полуинтервал имеют мощность континуума.

Пример 20.8. $Card\ \mathbb{R} = c.$

Отображение $y = \operatorname{arctg} x$ устанавливает биекцию между $\mathbb{R}$ и интервалом $(-\pi/2;\ \pi/2)$, следовательно, $Card\ \mathbb{R} = c$.

Теорема 20.9. *Множество последовательностей, составленных из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть A — множество последовательностей, составленных из нулей и единиц,

$$A = \big\{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots) :\ a_n \in \{0;\ 1\},\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Наряду с множеством A рассмотрим множество двоичных дробей

$$F = \big\{0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots :\ a_n \in \{0;\ 1\},\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Каждая такая дробь определяет вещественное число

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

принадлежащее отрезку $[0;\ 1]$, так как наименьшая из двоичных дробей множества F

$$0,000 \ldots 0 \ldots = 0,$$

а наибольшая
$$0,111\ldots1\ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots = 1.$$

Как известно, справедливо и обратное: каждое вещественное число x из отрезка $[0;\ 1]$ можно представить в виде двоичной дроби
$$x = 0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$
однако для некоторых двоичных дробей, именно, для дробей вида $m/2^n$ существует два представления, одно из которых имеет периодом единицу, а второе — нуль. Например,
$$\frac{1}{2} = 0,100\ldots0\ldots = 0,011\ldots1\ldots.$$

Разобьём поэтому множество F на два подмножества: F_1 и F_2, включив в F_1 двоичные дроби с нулём в периоде, за исключением дроби $0,000...0...$, а в F_2 — все остальные. Очевидно, $F_2 \sim [0;\ 1]$, поэтому $Card\ F_2 = c$. Множество же F_1 эквивалентно множеству дробей вида $m/2^n$, где $0 < m < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, являющемуся бесконечным подмножеством множества рациональных чисел, поэтому $Card\ F_1 = a$. По предыдущей теореме $Card\ F = Card\ (F_1 \bigcup F_2) = c$.

Так как, очевидно, $A \sim F$, то $Card\ A = c$. ■

Пример 20.9. *Канторово множество.*

Пусть $P_0 = [0;\ 1]$. Разделим отрезок $[0;\ 1]$ на три равные части точками $1/3$ и $2/3$ и удалим средний интервал $(1/3;\ 2/3)$. Получившееся множество обозначим через P_1. Два оставшихся отрезка, составляющие множество P_1, снова разделим на три равные части каждый точками $1/3^2$, $2/3^2$; $7/3^2$, $8/3^2$ и удалим средние интервалы. Получившееся множество, состоящее из четырёх отрезков, обозначим через P_2. Продолжим описанный процесс неограничено. На n-ом шаге, если множество P_{n-1} уже построено, разделим каждый из составляющих его 2^{n-1} отрезков на три равные части, удалим средние интервалы и обозначим оставшееся множество, состоящее из 2^n отрезков, через P_n. После неограниченного продолжения описанного процесса получится последовательность множеств $(P_n)_{n=0}^{\infty}$. Обозначим через P их пересечение,
$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Множество P и есть канторово множество. Изучим некоторые его свойства.

1) $Card\ P = c$.

Для установления этого факта прибегнем к представлению чисел из отрезка $[0;\ 1]$ в виде троичных дробей: $x = 0, a_1\ a_2\ a_3\ldots a_n\ldots$, где каждая из цифр a_n принимает значение либо 0, либо 1, либо 2. Очевидно, удаление на первом шаге построения канторова множества среднего интервала означает удаление тех чисел отрезка $[0;\ 1]$, у которых первая цифра в представлении в виде троичной дроби есть 1. На втором шаге удаляются числа со второй цифрой 1 в троичном представлении и так далее. Следовательно, канторово множество P состоит из чисел, представление которых в виде троичной дроби не содержит цифры 1, то-есть каждый троичный знак — либо 0, либо 2. Но таких чисел ровно столько же, сколько последовательностей, составленных из нулей и двоек, а последних столько же, сколько последовательностей из нулей и единиц, то-есть, континуум.

2) *Канторово множество P замкнуто.*

Каждое множество P_n замкнуто как объединение конечного числа отрезков. И так как пересечение любого множества замкнутых множеств есть замкнутое множество, то P замкнуто.

3) *"Длина" канторова множества P равна нулю.*

Точное определение "длины" (меры) множества будет дано позже. Сейчас же подсчитаем сумму длин интервалов, удаляемых при построении канторова множества.

На первом этапе удаляется один интервал длины $1/3$, на втором — два интервала длины $1/3^2$ каждый, на третьем — четыре интервала длины $1/3^3$ каждый, и так далее. Поэтому сумма длин удаляемых интервалов равна

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

20.2 Теория меры

Кольца и алгебры множеств

Мы будем рассматривать далее системы множеств, элементами которых, в свою очередь, являются множества. Как правило, будет предполагаться, что все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого основного множества, но это обстоятельство без особой нужды оговариваться не будет.

Определение 20.10. *Непустую систему множеств $\mathcal{K}$ будем называть кольцом, если она обладает следующими свойствами:*

1)$A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \bigcup B \in \mathcal{K}$;

2)$A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Кольцо $\mathcal{K}$ обладает также следующими свойствами.

3) $\varnothing \in \mathcal{K}$;

4) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{K}$;

5) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \vartriangle B \in \mathcal{K}$;

Эти свойства вытекают из свойств 1, 2 и легко проверяемых равенств: $\varnothing = A \setminus A$ $(A \in \mathcal{K})$, $A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \vartriangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Таким образом, кольцо — это непустая система множеств, содержащая пустое множество и замкнутая относительно операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности.

Определение 20.11. *Множество $E \in \mathcal{K}$ назовём единицей кольца $\mathcal{K}$, если $A \bigcap E = A$ для любого $A \in \mathcal{K}$.*

Определение 20.12. *Кольцо, содержащее единицу, назовём алгеброй.*

Алгебру будем обозначать, как правило, буквой $\mathcal{A}$.

Для алгебры имеет место ещё одно, очевидное, свойство.

6) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow CA = E \setminus A \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 20.10. *Пусть X — некоторое непустое множество. Тогда система $\mathcal{A} = \{X, \varnothing\}$ — алгебра с единицей $E = X$.*

Пример 20.11. *Пусть X — некоторое непустое множество. Тогда система $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X — алгебра с единицей $E = X$.*

Пример 20.12. *Пусть снова X — непустое множество, $\mathcal{P}_k(X)$ — совокупность всех конечных подмножеств множества X. $\mathcal{P}_k(X)$ — кольцо. $\mathcal{P}_k(X)$ является алгеброй только в том случае, если множество X конечно. Впрочем, в этом случае $\mathcal{P}_k(X)$ совпадает с $\mathcal{P}(X)$.*

Пример 20.13. *Пусть $\mathcal{P}_o(\mathbb{R})$ — совокупность всех ограниченных подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}_o(\mathbb{R})$ — кольцо без единицы.*

Справедливость утверждений, приведённых в этих примерах, читатель без труда установит самостоятельно.

Следующий пример требует предварительной подготовки, нетривиален и важен для дальнейшего.

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Назовём кирпичом (n-мерным кирпичом, n-мерным параллелепипедом) множество

$$K = \big\{x = (x_i)_{i=1}^n : \ a_i < x_i < b_i \vee a_i \le x_i < b_i \vee a_i < x_i \le b_i \vee a_i \le x_i \le b_i, \\ i = 1, 2, \ldots, n\big\}. \quad (20.1)$$

В (20.1) считаем, что для каждого i выполняется $a_i \le b_i$ и что при различных i могут иметь место неравенства различного типа из перечисленных. В число кирпичей, таким образом, входят: пустое множество ($a_i = b_i$ хотя бы для одного i и требуется, чтобы $a_i < x_i < b_i$), точки ($a_i = b_i$ при всех i и требуется, чтобы $a_i \le x_i \le b_i$), всевозможные конечные промежутки (i $a_i < b_i$ для какого либо одного i, а для остальных $a_i = b_i$), всевозможные прямоугольники (с границами, параллельными координатным осям), всевозможные трёхмерные параллелепипеды и так далее вплоть до невырожденных n-мерных параллелепипедов.

Определение 20.13. *Множество $B \in \mathbb{R}^n$ назовём элементарным, если оно представимо в виде конечного объединения кирпичей,*

$$B = \bigcup_{s=1}^{p} K_s\,. \quad (20.2)$$

Совокупность всех элементарных множеств пространства $\mathbb{R}^n$ обозначим символом $\mathcal{E}^n$.

Отметим, что представление элементарного множества в виде (20.2) не единственно и составляющие кирпичи K_s могут иметь друг с другом непустое пересечение. Однако всегда можно указать представление элементарного множества в виде конечного объединения попарно не пересекающихся кирпичей. Для этого достаточно взять любое представление (20.2) и каждый кирпич K_s рассечь гиперплоскостями, проходящими через все грани всех остальных кирпичей. Проделав это, получим представление

$$B = \bigcup_{t=1}^{q}\!\!\cdot\;\; K'_t, \quad (20.3)$$

где знак $\dot\bigcup$ будем использовать для обозначения объединения попарно непересекающихся множеств (в данном случае $K'_{t_1} \bigcap K'_{t_2} = \varnothing$ $(t_1 \ne t_2)$).

Теорема 20.10. *$\mathcal{E}^n$ — кольцо.*

Доказательство. Пересечение двух кирпичей есть, очевидно, кирпич. Поэтому, если

$$B = \bigcup_{s=1}^{p} K_s, \quad C = \bigcup_{t=1}^{q} K'_t \; -$$

два элементарных множества, то

$$B \bigcap C = \left(\bigcup_{s=1}^{p} K_s\right) \bigcap \left(\bigcup_{t=1}^{q} K'_t\right) = \bigcup_{s=1}^{p} \bigcup_{t=1}^{q} \left(K_s \bigcap K'_t\right) \; -$$

тоже элементарное множество.

Разность двух кирпичей, как легко проверить, есть элементарное множество. Следовательно, если K — кирпич, а $B = \bigcup\limits_{s=1}^{p} K_s$ — элементарное множество, то разность

$$K \setminus B = K \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{p} K_s\right) = \bigcap_{s=1}^{p} (K \setminus K_s) \; -$$

элементарное множество.

Пусть теперь B и C — элементарные множества. Как конечные объединения кирпичей (ограниченных множеств) они ограничены, следовательно, найдётся кирпич K, содержащий оба эти множества. Поэтому

$$B \bigcup C = K \setminus \left(K \setminus \left(B \bigcup C\right)\right) = K \setminus \left((K \setminus B) \bigcap (K \setminus C)\right),$$

$$B \setminus C = B \bigcap (K \setminus C) \; -$$

элементарные множества. Теорема доказана. ■

Кольцо $\mathcal{E}^n$ не является алгеброй, так как не содержит единицы. Однако, если рассмотреть совокупность $\mathcal{E}^n(K)$ всех элементарных множеств, содержащихся в некотором кирпиче K, то, очевидно, $\mathcal{E}^n(K)$ — тоже кольцо и K является его единицей. Таким образом, $\mathcal{E}^n(K)$ — алгебра.

Определение 20.14. *Алгебру $\mathcal{A}$ назовём σ-алгеброй (сигма-алгеброй), если она замкнута относительно счётного объединения своих элементов, то есть, обладает свойством*

7) $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, то она обладает также и свойством

8) $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Действительно, если $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, то в силу законов двойственности

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = C\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k\right) \in \mathcal{A}.$$

Здесь $CA = E \setminus A$, E — единица алгебры $\mathcal{A}$.

Таким образом, σ-алгебра — это алгебра, замкнутая относительно счётного числа операций объединения и пересечения.

Для колец ситуация несколько иная. Необходимо различать

σ-кольцо (кольцо, замкнутое относительно счётного объединения элементов) и

δ- кольцо (кольцо, замкнутое относительно счётного пересечения элементов).

Из рассмотренных выше примеров только система $\mathcal{P}(X)$ из примера 20.11 является σ-алгеброй.

Пусть X — некоторое множество и $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств, являющихся подмножествами множества X.

Определение 20.15. *Множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов множества X, каждый из которых принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности (A_k), назовём верхним пределом последовательности (A_k) и будем писать $\overline{A} = \overline{\lim}\ A_k$.*

Таким образом, множество $\overline{A}$ является верхним пределом последовательности множеств A_k в том и только том случае, когда для каждого $x \in \overline{A}$ найдётся последовательность индексов (k_j) такая, что $x \in A_{k_j}, j = 1,\ 2,\ \ldots$.

Определение 20.16. *Множество $\underline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов множества X, каждый из которых принадлежит всем множествам A_k, начиная с некоторого номера, назовём нижним пределом последовательности (A_k) и будем писать $\underline{A} = \underline{\lim}\ A_k$.*

Таким образом, множество $\underline{A}$ является нижним пределом последовательности множеств A_k в том и только том случае, когда для каждого $x \in \underline{A}$ найдётся $k_0 = k_0(x)$ такое, что $x \in A_k$ для любого $k \geq k_0$.

Непосредственно из этих определений со всей очевидностью вытекает, что всякая последовательность множеств имеет как верхний, так и нижний пределы (может быть, пустые множества) и что $\underline{A} \subset \overline{A}$. Вложение может быть и строгим, как показывает следующий тривиальный пример.

Пример 20.14. *Пусть $A_k = [0;\ 1 + 1/k]$, $k = 2l - 1$, и $A_k = [1 - 1/k;\ 2]$, $k = 2l$. Тогда, как нетрудно видеть, $\overline{\lim}\ A_k = [0;\ 2]$, $\underline{\lim}\ A_k = \{1\}$.*

Определение 20.17. *Последовательность множеств (A_k) назовём сходящейся, если*

$$\underline{\lim}\ A_k = \overline{\lim}\ A_k = A.$$

В этом случае будем писать $\lim\ A_k = A$.

Лемма 20.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l \right), \quad \underline{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{l=k}^{\infty} A_l \right). \tag{20.4}$$

Доказательство. Докажем первое из соотношений (20.4). Пусть $x \in \overline{A}$. Тогда по определению найдётся последовательность индексов (k_j) такая, что $x \in A_{k_j}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$. Но тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся $l = k_j \geq k$ и $x \in \bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l$ при любом $k \in \mathbb{N}$, следовательно, $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l \right)$.

Наоборот, пусть $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l \right)$. Тогда $x \in \bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, а это означает, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдётся $l \geq k$ такое, что $x \in A_l$, то есть x принадлежит бесконечному числу множеств A_k.

Теперь докажем второе из соотношений (20.4). Пусть $x \in \underline{A}$. Тогда по определению найдётся такое $k = k(x)$, что $x \in A_l$ для любого $l \geq k$. Но тогда $x \in \bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l$, и, следовательно, $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l \right)$.

Наоборот, пусть $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l\right)$. Это означает, что найдётся такое k, что $x \in \bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l$, то есть x принадлежит каждому A_l при $l \geq k$. ■

Если $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, то она обладает свойством

9) $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\lim} A_k,\ \underline{\lim} A_k \in \mathcal{A}$; *если же последовательность* (A_k) *сходится, то* $\lim A_k \in \mathcal{A}$.

Это свойство — простое следствие свойств 7, 8 и представлений (20.4).

Определение 20.18. *Последовательность множеств* $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ *будем называть монотонной, если*:

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ (*возрастающая последовательность*);

или

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ (*убывающая последовательность*).

Лемма 20.2. *Монотонная последовательность множеств сходится. При этом: если последовательность* (A_k) *возрастает, то* $\lim A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, *а если последовательность* (A_k) *убывает, то* $\lim A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Доказательство. Пусть последовательность (A_k) — возрастающая. Тогда $\bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} A_l$, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} A_l\right) = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} A_l$, следовательно (см. (20.4)) $\overline{A} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} A_l$.

С другой стороны, $\bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l = A_k$, поэтому $\underline{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{l=k}^{\infty} A_l\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Итак, $\overline{A} = \underline{A}$, поэтому возрастающая последовательность сходится и $\lim A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Для убывающих последовательностей доказательство проводится совершенно аналогично. Рекомендуем читателям провести его самостоятельно. ■

Общая теория меры

Понятие меры множества является естественным обобщением понятий: длины отрезка, площади плоской фигуры, объёма тела, приращения $\varphi(b) - \varphi(a)$ неубывающей на отрезке $[a;\ b]$ функции φ, интеграла от неотрицательной функции, взятому по некоторой области и многих других понятий. Это понятие, возникшее в теории функций действительного переменного, перешло затем во многие другие области математики, в частности, в теорию вероятностей.

Пусть $\mathcal{K}$ — кольцо.

Определение 20.19. *Функцию* $\mu :\ \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+ = [0;\ +\infty)$ *назовём мерой, если она обладает свойством*

1) $\mu(A_1 \dot\bigcup A_2) = \mu A_1 + \mu A_2,\ \ A_1, A_2 \in \mathcal{K}$.

Свойство 1) называют свойством аддитивности меры.

Изучим свойства меры.

2) $\mu\varnothing = 0$.

Действительно, $\mu\varnothing = \mu\,(\varnothing \dot\bigcup\ \varnothing) = \mu\varnothing + \mu\varnothing = 2\mu\varnothing$, откуда и вытекает требуемое.

3) $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$.

Это свойство называют свойством монотонности меры.

Так как $B = A \dot{\bigcup} (B \setminus A)$ и $B \setminus A \in \mathcal{K}$, то в силу аддитивности и неотрицательности меры

$$\mu B = \mu A + \mu(B \setminus A) \geq \mu A.$$

4) $A \subset B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

Это свойство вытекает из равенства, полученного при доказательстве предыдущего свойства.

5) $\mu\left(A \bigcup B\right) = \mu A + \mu B - \mu\left(A \bigcap B\right)$.

Действительно, $A \bigcup B = A \dot{\bigcup} (B \setminus (A \bigcap B))$. Доказательство завершает использование свойств 1 и 4.

6) $\mu\left(\dot{\bigcup}\limits_{k=1}^{l} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{l} \mu A_k$.

Это свойство называют свойством конечной аддитивности меры. Оно выводится из свойства 1 методом индукции.

7) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{l} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{l} \mu A_k$.

Это свойство называют свойством конечной полуаддитивности меры.

Введём в рассмотрение множества $A'_1 = A_1$, $A'_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j\right)$ $(k = 2, 3, \ldots l)$. Так как из каждого множества удаляются все элементы, принадлежащие предыдущим множествам, то $A'_k \subset A_k$ для каждого k и $A'_k \bigcap A'_j = \varnothing$ при $k \neq j$. Однако объединение всех множеств при переходе от множеств A_k к множествам A'_k, очевидно, сохраняется. Поэтому, используя свойства 4 и 3, получаем:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{l} A_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{l}} A'_k\right) = \sum_{k=1}^{l} \mu A'_k \leq \sum_{k=1}^{l} \mu A_k.$$

8) Если $A \supset \dot{\bigcup}\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_k (k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{K}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$ сходится и $\mu A \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$.

Так как для каждого $l \in \mathbb{N}$ имеет место вложение $A \supset \dot{\bigcup}\limits_{k=1}^{l} A_k$, то по свойствам 3 и 6

$$\mu A \geq \mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{l}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{l} \mu A_k. \tag{20.5}$$

Из этой оценки следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$ сходится (частичные суммы ряда с неотрицательными членами ограничены сверху). Остаётся в (20.5) устремить l к ∞, и свойство доказано.

Этим исчерпываются свойства аддитивной меры, определённой на кольце множеств $\mathcal{K}$. Однако во многих случаях понятие аддитивной меры оказывается недостаточным. Введём более сильное понятие σ-аддитивной меры.

Определение 20.20. *Меру μ, определённую на кольце $\mathcal{K}$, назовём счётно аддитивной или σ-аддитивной мерой, если она обладает свойством*

9) *Если $A = \dot{\bigcup}\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_k (k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{K}$, то*

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \tag{20.6}$$

Сформулируем ещё два определения.

Определение 20.21. *Меру μ, определённую на кольце $\mathcal{K}$, назовём счётно полуаддитивной или σ-полуаддитивной мерой, если она обладает свойством*

10) *Если $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_k (k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{K}$, то*

$$\mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \tag{20.7}$$

Определение 20.22. *Меру μ, определённую на кольце $\mathcal{K}$, назовём непрерывной, если она обладает свойством*

11) *Если последовательность $(A_k)_{k=1}^{\infty} (\subset \mathcal{K})$ монотонна и $\lim A_k \in \mathcal{K}$, то*

$$\mu(\lim A_k) = \lim \mu A_k. \tag{20.8}$$

Теорема 20.11. *Свойства σ-аддитивности, σ-полуаддитивности и непрерывности меры эквивалентны.*

Доказательство. Теорема утверждает, таким образом, что если мера обладает одним из свойств 9 — 11, то она обладает и остальными двумя.

Сначала докажем, что свойство 9 эквивалентно свойству 10.

Пусть мера μ σ-аддитивна. Рассмотрим любую последовательность $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ и любое множество $A \in \mathcal{K}$ такое, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Образуем множества

$$A'_1 = A_1 \bigcap A, \ A'_k = \left(A_k \bigcap A\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A'_j\right).$$

Тогда, как нетрудно проверить, $A'_k \in \mathcal{K}$ $(k \in \mathbb{N})$, $A'_k \bigcap A'_j = \varnothing$ $(k \neq j)$, $A'_k \subset A_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $A = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} A'_k$. Поэтому по свойству 3 $\mu A'_k \leq \mu A_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и по свойству 9

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A'_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Тем самым установлено, что из σ-аддитивности меры следует её σ-полуаддитивность.

Докажем обратное. Пусть мера μ σ-полуаддитивна и пусть последовательность множеств $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$, $A_k \bigcap A_j = \varnothing$ $(k \neq j)$ и $A = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} A_k \in \mathcal{K}$. Тогда справедливо включение $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и по предположению о σ-полуаддитивности меры имеем:

$$\mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \tag{20.9}$$

С другой стороны, справедливо и включение $A \supset \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} A_k$, а тогда по свойству 8

$$\mu A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \tag{20.10}$$

Сравнение (20.9) и (20.10) позволяет заключить, что если мера σ-полуаддитивна, то она и σ-аддитивна.

Первая часть теоремы доказана. Теперь докажем эквивалентность свойств σ-аддитивности и непрерывности меры.

Пусть мера μ σ-аддитивна. Покажем, что тогда она непрерывна. Пусть последовательность множеств $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ $(\subset \mathcal{K})$ монотонна (см. определение 20.18) и $A = \lim A_k \in \mathcal{K}$.

Если последовательность (A_k) возрастает, то (см. лемму 20.2)

$$A = \lim A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} (A_k \setminus A_{k-1}) \quad (A_0 = \varnothing),$$

поэтому, используя предположение о σ-аддитивности меры и свойства 4 и 2, имеем:

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

Пусть теперь последовательность (A_k) убывает. Тогда последовательность $(A_1 \setminus A_k)$ возрастает и при этом

$$\lim(A_1 \setminus A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = A_1 \setminus \lim A_k.$$

Тогда, по доказанному выше,

$$\mu(A_1 \setminus \lim A_k) = \lim \mu(A_1 \setminus A_k),$$

или

$$\mu A_1 - \mu(\lim A_k) = \lim(\mu A_1 - \mu A_k) = \mu A_1 - \lim \mu A_k,$$

или

$$\mu(\lim A_k) = \lim(\mu A_k).$$

Итак, доказано, что если мера μ σ-аддитивна, то она и непрерывна.

Покажем обратное. Пусть мера μ непрерывна. Возьмём любую последовательность $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств, такую что $A = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} A_k \in \mathcal{K}$. Образуем множества $A'_k = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{k}} A_j$ $(k \in \mathbb{N})$. Ясно, что последовательность (A'_k) возрастает и что

$$A = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k = \lim A'_k.$$

Поэтому, используя непрерывность и конечную аддитивность меры, имеем:

$$\mu A = \lim \mu A'_k = \lim \mu \left(\dot{\bigcup_{j=1}^{k}} A_j \right) = \lim \sum_{j=1}^{k} \mu A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j \,.$$

Итак, доказано, что непрерывность меры влечёт её σ-аддитивность.

Эквивалентность свойств σ-полуаддитивности и непрерывности меры есть следствие того, что они оба эквивалентны свойству σ-аддитивности меры.

Теорема доказана полностью. ■

Теорема 20.12. *Пусть μ — σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$, и $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность элементов алгебры $\mathcal{A}$. Тогда имеют место свойства*

12) $\mu(\overline{\lim}\ A_k) \geq \overline{\lim}\ \mu A_k$;

13) $\mu(\underline{\lim}\ A_k) \leq \underline{\lim}\ \mu A_k$;

14) *если последовательность (A_k) сходится, то*

$$\mu(\lim\ A_k) = \lim\ \mu A_k.$$

Доказательство. Докажем свойство 12. По первому из равенств (20.4)

$$\overline{A} = \overline{\lim}\ A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l\right)$$

. Рассмотрим последовательность множеств $B_k = \bigcup\limits_{l=k}^{\infty} A_l$ $(k \in \mathbb{N})$. Так как $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, то $(B_k) \subset \mathcal{A}$. С увеличением k объединение может только сузиться, поэтому последовательность (B_k) — убывающая и $\overline{\lim}\ A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \lim\ B_k$. Поскольку по предыдущей теореме мера μ непрерывна, то

$$\mu\left(\overline{\lim}\ A_k\right) = \lim\ \mu B_k. \tag{20.11}$$

Рассмотрим последовательность $(\mu\ A_k)_{k=1}^{\infty}$. Эта последовательность ограничена сверху числом μE (E — единица алгебры $\mathcal{A}$), поэтому существует конечный $\overline{\lim}\ \mu A_k$. Из последовательности (μA_k) выделим подпоследовательность $(\mu A_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся к $\overline{\lim}\ \mu A_k$. Так как, очевидно, $B_{k_j} \supset A_{k_j}$, то из равенства (20.11) и монотонности меры (свойство 3) получим:

$$\mu(\overline{\lim}\ A_k) = \lim_k\ \mu B_k = \lim_j \mu B_{k_j} \geq \lim_j\ \mu A_{k_j} = \overline{\lim}\ \mu A_k,$$

и свойство 12 доказано.

Свойство 13 доказывается совершенно аналогично. Рекомендуем читателям самим провести это доказательство.

Свойство 14 есть простое следствие свойств 12 и 13. ■

Определение 20.23. *Если на кольце $\mathcal{K}$ определена мера μ, то множества, принадлежащие кольцу, будем называть измеримыми по мере μ, или μ-измеримыми.*

Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

Мера Лебега является прямым обобщением понятий длины промежутка, площади плоской фигуры, объёма тела и расширением меры Жордана на более широкий класс множеств с приобретением, к тому же, свойства σ-аддитивности. Мы проведём построение меры Лебега в три этапа: сначала определим меру на кирпичах, потом распространим её на кольцо элементарных множеств $\mathcal{E}^n$ и, наконец, продолжим на более широкий класс множеств, которые назовём измеримыми по Лебегу.

I. *Мера на кирпичах.*

Пусть K — кирпич (см. (20.1)). Назовём мерой кирпича число

$$m'K = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \tag{20.12}$$

Из (20.12) видно, что $m'K$ при $n = 1$ есть длина промежутка, при $n = 2$ — площадь прямоугольника, при $n = 3$ — объём прямоугольного параллелепипеда. Видно также, что если кирпич вырожденный, то есть $b_i = a_i$ хотя бы при одном i, то $m'K = 0$.

Введённая равенством (20.12) мера кирпича обладает свойствами:

1) $m'K \geq 0$;

2) $K = \overset{l}{\underset{j=1}{\dot\bigcup}} K_j \Rightarrow m'K = \sum\limits_{j=1}^{l} m'K_j$.

Свойство 1 очевидно, доказательство же свойства 2 проведём для случая $n = 2$, чтобы избежать ненужной громоздкости изложения.

Пусть сначала кирпич K разбит на кирпичи K_j вертикальными

$$x = x_s,\ 0 \leq s \leq p,\ x_0 = a_1,\ x_p = b_1,$$

и горизонтальными

$$y = y_t,\ 0 \leq t \leq q,\ y_0 = a_2,\ y_q = b_2,\ pq = l,$$

прямыми. Тогда

$$\sum_{j=1}^{l} m'K_j = \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}(x_s - x_{s-1})(y_t - y_{t-1}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = m'K.$$

В общем случае каждый из кирпичей K_j разобьём на меньшие кирпичи вертикальными и горизонтальными прямыми, проходящими через все стороны всех кирпичей K_j. Полученные кирпичи обозначим через K'_r $(1 \leq r \leq m)$. Тогда

$$K = \dot{\bigcup_{j=1}^{l}} K_j = \dot{\bigcup_{r=1}^{m}} K'_r$$

и, как показано выше,

$$m'K = \sum_{r=1}^{m} m'K'_r = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{r:\, K'_r \subset K_j} m'K'_r\right) = \sum_{j=1}^{l} m'K_j\,.$$

Замечание 20.2. *Строго говоря, меру на кирпичах не следовало бы называть мерой, потому что совокупность кирпичей не является кольцом. Однако можно ввести понятие полукольца множеств, каковым является совокупность кирпичей, и меры на полукольце. Подробно об этом можно прочесть в* [24].

II. *Мера на кольце элементарных множеств.*

Теперь зададим меру на кольце $\mathcal{E}^n$ элементарных множеств. Если B — элементарное множество, то (см. (20.3)) его можно представить в виде

$$B = \dot{\bigcup_{s=1}^{p}} K_s.$$

Положим

$$mB = \sum_{s=1}^{p} m'K_s\,. \tag{20.13}$$

Прежде всего нужно показать, что мера элементарного множества определена корректно, то есть, величина mB не зависит от разложения B на составляющие кирпичи, и что для кирпичей $mK = m'K$.

Пусть
$$B = \dot{\bigcup_{s=1}^{p}} K_s = \dot{\bigcup_{t=1}^{q}} K'_t.$$
Нужно показать, что
$$\sum_{s=1}^{p} m' K_s = \sum_{t=1}^{q} m' K'_t. \tag{20.14}$$

Положим
$$K_{s,\,t} = K_s \bigcap K'_t \ \ (s = 1, 2, \ldots, p\,;\ t = 1, 2, \ldots, q).$$
Множество $K_{s,\,t}$, как пересечение двух кирпичей, есть кирпич, и поскольку множества K_s и множества K'_t попарно не пересекаются, то и
$$K_{s,\,t} \bigcap K_{s',\,t'} = \varnothing,$$
если $(s,\, t) \neq (s',\, t')$.

Очевидно, что $K_s = \dot{\bigcup\limits_{t=1}^{q}} K_{s,t}$ для каждого $s = 1, 2, \ldots, p$ и $K'_t = \dot{\bigcup\limits_{s=1}^{p}} K_{s,t}$ для каждого $t = 1, 2, \ldots, q$. Ввиду аддитивности меры m' на кирпичах имеем:
$$m' K_s = \sum_{t=1}^{q} m' K_{s,t}\ (s = 1, 2, \ldots, p), \quad m' K'_t = \sum_{s=1}^{p} m' K_{s,t}\ (t = 1, 2, \ldots, q).$$
Поэтому
$$\dot{\bigcup_{s=1}^{p}} K_s = \dot{\bigcup_{s=1}^{p}} \left(\dot{\bigcup_{t=1}^{q}} K_{s,\,t} \right) = \dot{\bigcup_{s=1}^{p}} \dot{\bigcup_{t=1}^{q}} K_{s,\,t} = \dot{\bigcup_{t=1}^{q}} \left(\dot{\bigcup_{s=1}^{p}} K_{s,\,t} \right) = \dot{\bigcup_{t=1}^{q}} K'_t.$$
Отсюда, ввиду аддитивности меры на кирпичах, следует, что
$$\sum_{s=1}^{p} m' K_s = \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{t=1}^{q} m' K_{s,\,t} \right) = \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} m' K_{s,\,t} = \sum_{t=1}^{q} \left(\sum_{s=1}^{p} m' K_{s,\,t} \right) = \sum_{t=1}^{q} m' K'_t\,,$$
и равенство (20.14) установлено.

Из (20.14) вытекает, в частности, что для кирпичей
$$mK = m'K,$$
поскольку тождество $K = K$ есть одно из представлений множества K в виде конечного объединения кирпичей. Следовательно, мера m является продолжением меры m'.

Мера m, как и мера m', обладает свойствами:

1) $mB \geq 0 \ \ \forall B \in \mathcal{E}^n$;

2) $B = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{l}} B_k \Rightarrow mB = \sum\limits_{k=1}^{l} mB_k\,.$

Свойство 1 очевидно, а свойство 2 в силу определения 20.19 достаточно доказать для случая $l = 2$. Пусть $B_k = \dot{\bigcup\limits_{s=1}^{p_k}} K_{k,\,s}$ $(k = 1, 2)$. Тогда
$$B = B_1 \dot{\bigcup} B_2 = \dot{\bigcup_{k=1}^{2}} \left(\dot{\bigcup_{s=1}^{p_k}} K_{k,\,s} \right) = \dot{\bigcup_{k=1}^{2}} \dot{\bigcup_{s=1}^{p_k}} K_{k,\,s}$$

и
$$mB = \sum_{k=1}^{2} \sum_{s=1}^{p_k} m'K_{k,\,s} = \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{s=1}^{p_k} m'K_{k,\,s} \right) = mB_1 + mB_2\,.$$

Таким образом, функция m на кольце $\mathcal{E}^n$ является мерой в смысле определения 20.19, а значит, обладает и свойствами меры 2 — 8.

Теорема 20.13. *Мера m на кольце $\mathcal{E}^n$ σ-полуаддитивна.*

Доказательство. Необходимо доказать, что если B и B_k ($k \in \mathbb{N}$) — элементарные множества и $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то
$$mB \le \sum_{k=1}^{\infty} mB_k. \tag{20.15}$$

Если ряд в правой части равенства (20.15) расходится, то доказывать нечего. Предположим поэтому, что указанный ряд сходится и выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для множества B по числу $\varepsilon/2$ подберём замкнутое элементарное множество $\overline{B}_0 \subset B$ так, чтобы выполнялось условие
$$m\overline{B}_0 > mB - \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{20.16}$$

Этого можно добиться следующим образом. Пусть $B = \bigcup\limits_{s=1}^{p}{}^{\cdot}\, K_s$. В каждый кирпич K_s впишем замкнутый кирпич $\overline{K}_{0,\,s}$ так, чтобы
$$m'\overline{K}_{0,\,s} > m'K_s - \frac{\varepsilon}{2p}\,,$$

и положим
$$\overline{B}_0 = \dot{\bigcup_{s=1}^{p}} \overline{K}_{0,\,s}\,.$$

Тогда
$$m\overline{B}_0 = \sum_{s=1}^{p} m'\overline{K}_{0,\,s} > \sum_{s=1}^{p} \left(m'K_s - \frac{\varepsilon}{2p} \right) = \sum_{s=1}^{p} m'K_s - \frac{\varepsilon}{2} = mB - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Далее, для каждого $k \in \mathbb{N}$ по числу $\varepsilon/2^{k+1}$ подберём открытое элементарное множество $\widetilde{B}_k \supset B_k$ так, чтобы
$$m\widetilde{B}_k < mB_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \tag{20.17}$$

(Это можно сделать способом, аналогичным описанному выше.)

Тогда
$$\overline{B}_0 \subset B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k\,.$$

По теореме Гейне-Бореля из покрытия замкнутого множества $\overline{B}_0$ открытыми множествами $\widetilde{B}_k$ можно выделить конечное покрытие, то есть, указать множества $\widetilde{B}_{k_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) такие, что
$$\overline{B}_0 \subset \bigcup_{j=1}^{l} \widetilde{B}_{k_j}\,.$$

Но тогда по свойству конечной полуаддитивности меры (свойство 7) имеем:

$$m\overline{B}_0 \le \sum_{j=1}^{l} m\widetilde{B}_{k_j}\,.$$

Далее, используя (20.16) и (20.17), находим:

$$mB < m\overline{B}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{j=1}^{l} m\widetilde{B}_{k_j} + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{B}_k + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{\infty}\left(mB_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} mB_k + \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует неравенство (20.15).

Теорема доказана. ■

Простым следствием теорем 20.13 и 20.11 является

Теорема 20.14. *Мера m на кольце $\mathcal{E}^n$ σ-аддитивна.*

Итак, на кольце элементарных множеств $\mathcal{E}^n$ равенством (20.13) определена σ-аддитивная мера m. Наша следующая задача — распространить понятие меры на более широкое кольцо, сохранив при этом свойство σ-аддитивности меры.

III. *Внешняя мера.*

Пусть $A(\subset \mathbb{R}^n)$ — произвольное множество.

Определение 20.24. *Внешней мерой множества A назовём число*

$$\mu^* A = \inf\left\{\sum_s m'K_s :\ A \subset \bigcup_s K_s\right\}. \tag{20.18}$$

Подчеркнём, что точная нижняя грань в 20.18 берётся по всевозможным покрытиям множества A конечными или счётными системами кирпичей. Заметим также, что μ^*A может принимать бесконечное значение (например, в случае $A = \mathbb{R}^n$).

Изучим свойства внешней меры.

1) $\mu^*A \ge 0$.

Это свойство очевидно.

2) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^*A_1 \le \mu^*A_2$ (*Внешняя мера монотонна*).

Так как каждое покрытие множества A_2 является также и покрытием множества A_1, то

$$\mu^*A_1 = \inf\left\{\sum_s m'K_s :\ A_1 \subset \bigcup_s K_s\right\} \le \inf\left\{\sum_s m'K_s :\ A_2 \subset \bigcup_s K_s\right\} = \mu^*A_2\,.$$

3) $A \subset \bigcup\limits_k A_k \Rightarrow \mu^*A \le \sum\limits_k \mu^*A_k$ (*Внешняя мера σ-полуаддитивна*).

Здесь (A_k) — конечная или счётная система множеств.

Как сказано выше, внешняя мера множества может быть бесконечной. Если в правой части доказываемого неравенства хотя бы одно слагаемое бесконечно, или все слагаемые конечны, но бесконечна их сумма, то неравенство справедливо. Рассмотрим тот случай, когда $\mu^*A_k < +\infty$ для каждого k и их сумма тоже конечна.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры для каждого k найдётся такая система кирпичей $(K_{k,s})$ (конечная или счётная), что $A_k \subset \bigcup\limits_s K_{k,s}$ и

$$\mu^*A_k > \sum_s m'K_{k,s} - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда $A \subset \bigcup\limits_k A_k \subset \bigcup\limits_k \bigcup\limits_s K_{k,\,s}$ и, снова по определению внешней меры,

$$\mu^* A \le \sum_k \sum_s m' K_{k,\,s} = \sum_k \left(\sum_s m' K_{k,\,s} \right) < \sum_k \left(\mu^* A_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \le \sum_k \mu^* A_k + \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности ε, получаем свойство 3.

4) $A \in \mathcal{E}^n \Rightarrow \mu^* A = mA$ (*на элементарных множествах функции μ^* и m совпадают*).

Пусть $A = \dot{\bigcup\limits_{t=1}^{q}} K_t$ — элементарное множество.

Так как $\dot{\bigcup\limits_{t=1}^{q}} K_t$ есть покрытие множества A, а $\mu^* A$ есть точная нижняя грань по всевозможным покрытиям, то

$$\mu^* A \le \sum_{t=1}^{q} m' K_t = mA. \tag{20.19}$$

С другой стороны, если $\bigcup\limits_s K_s$ — произвольное покрытие множества A, то в силу σ-полуаддитивности меры m (теорема 20.13)

$$mA \le \sum_s m K_s = \sum_s m' K_s,$$

следовательно,

$$mA \le \inf \left\{ \sum_s m' K_s : \; A \subset \bigcup_s K_s \right\} = \mu^* A. \tag{20.20}$$

Из неравенств (20.19) и (20.20) и вытекает свойство 4.

Пример 20.15. *Пусть $A = \{a_s : \; a_s \in \mathbb{R}^n, \; s \in \mathbb{N}\}$ — счётное множество. Тогда $\mu^* A = 0$.*

Для доказательства возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $s \in \mathbb{N}$ подберём кирпич $K_s \ni a_s$ так, чтобы выполнялось $m' K_s < \varepsilon / 2^s$ (можно взять n-мерный кубик с центром в точке a_s и ребром, меньшим, чем $\sqrt[n]{\varepsilon/2^s}$). Тогда $A \subset \bigcup\limits_s K_s$ и

$$\mu^* A \le \sum_{s=1}^{\infty} m' K_s < \varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \varepsilon.$$

Введём в рассмотрение класс множеств, имеющих конечную внешнюю меру, обозначив его $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$, то есть

$$\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n : \; \mu^* A < +\infty\}. \tag{20.21}$$

Из свойств 2 и 3 внешней меры следует, что класс $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ является кольцом, так как если $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$, то есть имеют конечную внешнюю меру, то и множества $A_1 \bigcup A_2$, $A_1 \setminus A_2 (\subset A_1)$ тоже имеют конечную внешнюю меру, то есть принадлежат $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$.

IV. *Мера Лебега.*

Наконец мы готовы к решению основной задачи — выделению класса измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$ и изучению свойств этого класса и меры на нём.

Определение 20.25. *Множество $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ назовём измеримым по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество B, что*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{20.22}$$

Класс всех измеримых по Лебегу множеств обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 20.26. *Функцию μ^*, рассматриваемую только на классе $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, назовём мерой Лебега и обозначим символом μ.*

Ближайшая наша задача — показать, что система множеств $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ есть кольцо, и что функция μ на этом кольце является мерой в смысле определения 20.19, а следовательно, обладает всеми свойствами меры на кольце. Но сначала выясним геометрический смысл определения измеримого по Лебегу множества. Как следует из (20.22), измеримое по Лебегу множество с любой степенью точности аппроксимируется элементарным множеством в том смысле, что для измеримого множества A можно подобрать элементарное множество B так, чтобы ни A, ни B не слишком "выступали за пределы друг друга".

Приступая к решению объявленной задачи, отметим, прежде всего, следующие свойства функции μ.

1) *Для любого* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ $\mu A \geq 0$.

Это свойство очевидно.

2) $\mathcal{E}^n \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *и если* $A \in \mathcal{E}^n$, *то* $\mu A = mA$.

Действительно, если $A \in \mathcal{E}^n$, то по свойству 4 внешней меры $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$, поскольку $\mu^* A = mA < +\infty$. Положим $B = A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\mu^*(A \vartriangle B) = \mu^* \varnothing = 0 < \varepsilon.$$

Следовательно, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, а по свойству 4 внешней меры $\mu A = \mu^* A = mA$.

Лемма 20.3. *Справедливы включения*:

a) $(A_1 \bigcup A_2) \vartriangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2)$;

b) $(A_1 \bigcap A_2) \vartriangle (B_1 \bigcap B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2)$;

c) $(A_1 \backslash A_2) \vartriangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2)$;

d) $(A_1 \vartriangle A_2) \vartriangle (B_1 \vartriangle B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2)$.

Доказательство. Все четыре включения доказываются одинаково, поэтому проверим включения a) и c), а проверку двух оставшихся включений предлагаем провести самостоятельно.

a) Пусть $x \in (A_1 \bigcup A_2) \vartriangle (B_1 \bigcup B_2)$. Тогда или $x \in A_1 \bigcup A_2$, но $x \overline{\in} B_1 \bigcup B_2$, или, напротив, $x \in B_1 \bigcup B_2$, но $x \overline{\in} A_1 \bigcup A_2$. Если имеет место первая ситуация, то $x \in A_1$ или $x \in A_2$, но $x \overline{\in} B_1$ и $x \overline{\in} B_2$. Тогда $x \in A_1 \vartriangle B_1$ или $x \in A_2 \vartriangle B_2$ и включение a) установлено. Вторая ситуация симметрична первой.

c) Пусть $x \in (A_1 \backslash A_2) \vartriangle (B_1 \backslash B_2)$. Тогда или $x \in A_1 \backslash A_2$, но $x \overline{\in} B_1 \backslash B_2$, или, наоборот, $x \overline{\in} A_1 \backslash A_2$, но $x \in B_1 \backslash B_2$. В первом случае $x \in A_1$, но $x \overline{\in} A_2$, и либо $x \in B_1$ и $x \in B_2$, либо $x \overline{\in} B_1$ и $x \overline{\in} B_2$. Это означает, что или $x \in A_2 \vartriangle B_2$, или $x \in A_1 \vartriangle B_1$ и включение установлено. Второй случай полностью аналогичен первому. ■

Лемма 20.4. *Для любых* $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ *справедлива оценка*

$$|\,\mu^* A_1 - \mu^* A_2| \leq \mu^*(A_1 \vartriangle A_2). \tag{20.23}$$

Доказательство. В силу полуаддитивности внешней меры из легко проверяемого включения $A_1 \subset A_2 \bigcup (A_1 \vartriangle A_2)$ следует, что

$$\mu^* A_1 \leq \mu^* A_2 + \mu^*(A_1 \vartriangle A_2)$$

или

$$\mu^* A_1 - \mu^* A_2 \leq \mu^*(A_1 \vartriangle A_2).$$

Поменяв местами множества A_1 и A_2, будем иметь

$$\mu^* A_2 - \mu^* A_1 \leq \mu^*(A_1 \vartriangle A_2).$$

Объединив два последние неравенства, получаем (20.23). ■

Теорема 20.15. *$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ — кольцо.*

Доказательство. По определению кольца, достаточно доказать, что если множества $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, то $A_1 \bigcup A_2$, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Для доказательства используем лемму 20.3. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и по $\varepsilon/2$ подберём элементарные множества B_1 и B_2 так, чтобы выполнялось:

$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введём обозначения: $A = A_1 \bigcup A_2$, $B = B_1 \bigcup B_2$. Как отмечено выше, $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$. Множество B, как объединение элементарных множеств, является элементарным множеством. По лемме 20.3

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2),$$

и по свойству полуаддитивности внешней меры

$$\mu^*(A \vartriangle B) \leq \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

следовательно, $A = A_1 \bigcup A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство того, что $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, ничем не отличается от только что приведённого, и читатель легко проделает его сам. ■

Замечание 20.3. *С помощью всё той же леммы 20.3 можно показать также, что вместе с множествами A_1 и A_2 совокупности $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ принадлежат множества $A_1 \bigcap A_2$ и $A_1 \triangle A_2$, однако в этом нет необходимости, потому что принадлежность указанных множеств $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ вытекает из свойств кольца.*

Теорема 20.16. *Функция μ аддитивна на $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Необходимо показать, что если $A = A_1 \dot{\bigcup} A_2$, то

$$\mu A = \mu A_1 + \mu A_2. \tag{20.24}$$

Итак, пусть A_1, $A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ и $A = A_1 \dot{\bigcup} A_2$. Так как внешняя мера полуаддитивна, а мера на $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с внешней мерой, то

$$\mu A \leq \mu A_1 + \mu A_2. \tag{20.25}$$

Для доказательства противоположного неравенства выберем $\varepsilon > 0$ и подберём элементарные множества B_1 и B_2 так, чтобы выполнялись условия

$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \frac{\varepsilon}{6}\,, \quad \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{20.26}$$

Положим $B = B_1 \bigcup B_2$. По условию $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, однако множества B_1 и B_2 этим свойством могут и не обладать. Но нетрудно проверить, что

$$B_1 \bigcap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2),$$

поэтому

$$m\left(B_1 \bigcap B_2\right) = \mu^*\left(B_1 \bigcap B_2\right) \leq \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Отсюда по свойству 5 меры на кольцах следует, что

$$mB = mB_1 + mB_2 - m\left(B_1 \bigcap B_2\right) > mB_1 + mB_2 - \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{20.27}$$

По лемме 20.4

$$mB_1 \geq \mu A_1 - \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) > \mu A_1 - \frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{20.28}$$

Аналогично,

$$mB_2 > \mu A_2 - \frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{20.29}$$

Наконец, в силу включения $A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2)$ (лемма 20.3) и полуаддитивности внешней меры имеем:

$$\mu^*(A \vartriangle B) \leq \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

откуда, снова по лемме 20.4, следует, что

$$\mu A \geq mB - \mu^*(A \vartriangle B) > mB - \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{20.30}$$

Воспользовавшись теперь оценками (20.27), (20.28), (20.29), получим из (20.30)

$$\mu A > mB - \frac{\varepsilon}{3} > mB_1 + mB_2 - \frac{2\varepsilon}{3} > \mu A_1 + \mu A_2 - \varepsilon\,,$$

откуда, в силу произвольности ε, следует, что

$$\mu A \geq \mu A_1 + \mu A_2\,.$$

Последнее неравенство вместе с (20.25) даёт требуемое равенство. ■

Теорема 20.17. *Мера μ на кольце $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ σ-аддитивна.*

Доказательство. Мера μ, как сужение внешней меры μ^*, обладает свойством σ-полуаддитивности, а следовательно, по теореме 20.11, и свойством σ-аддитивности. ■

Теорема 20.18. *Если $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$, то и $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

Другими словами, если множество A имеет конечную внешнюю меру и представимо в виде счётного объединения измеримых по Лебегу множеств, то оно тоже измеримо по Лебегу.

Доказательство. Положим $A_0 = \varnothing$ и $A'_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ $(k \in \mathbb{N})$. Этим построением мы удаляем из каждого множества A_k точки, принадлежащие предыдущим множествам, поэтому $A'_k \bigcap A'_l = \varnothing$ при $k \neq l$. В то же время каждая точка множества A в каком-либо из множеств A'_k сохраняется. Таким образом, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A'_k$ сходится. Поскольку $\bigsqcup\limits_{k=1}^{l} A'_k \subset A$, для любого $l \in \mathbb{N}$, то по свойствам монотонности внешней меры и аддитивности меры Лебега

$$\sum_{k=1}^{m} \mu A'_k = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A'_k\right) = \mu^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A'_k\right) \leq \mu^* A.$$

А если частичные суммы ряда с неотрицательными членами ограничены сверху, то он сходится.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём m_0 так, чтобы остаток ряда

$$\sum_{k=m_0+1}^{\infty} \mu A'_k < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Множество $\dot{\bigcup\limits_{k=1}^{m_0}} A'_k$, как конечное объединение измеримых по Лебегу множеств, измеримо по Лебегу, поэтому для него найдётся элементарное множество B такое, что

$$\mu^*\left(\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{m_0}} A'_k\right) \triangle B\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Нетрудно проверить, что

$$A \triangle B \subset \left(\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{m_0}} A'_k\right) \triangle B\right) \bigcup \left(\dot{\bigcup_{k=m_0+1}^{\infty}} A'_k\right),$$

поэтому по свойству σ-полуаддитивности внешней меры

$$\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*\left(\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{m_0}} A'_k\right) \triangle B\right) + \sum_{k=m_0+1}^{\infty} \mu A'_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Теорема доказана. ■

Определение 20.27. *Меру μ на кольце $\mathcal{K}$ называют полной, если любое подмножество любого множества нулевой меры измеримо по мере μ.*

Таким образом, если мера μ на кольце $\mathcal{K}$ — полная, то в силу свойства монотонности меры любое подмножество любого множества нулевой меры тоже имеет нулевую меру.

Теорема 20.19. *Мера Лебега полна.*

Доказательство. Пусть $\mu A = 0$. Возьмём любое $A_0 \subset A$, любое $\varepsilon > 0$ и $B = \varnothing \in \mathcal{E}^n$. Тогда

$$\mu^*(A_0 \triangle B) = \mu^*(A_0 \triangle \varnothing) = \mu^* A_0 \leq \mu^* A = \mu A = 0 < \varepsilon\,.$$

По определению A_0 измеримо. ■

V. *Расширение понятия измеримости. Класс измеримых множеств.*

Построенная в предыдущем пункте мера Лебега обладает существенным недостатком: измеримыми могут быть только множества, имеющие конечную внешнюю меру. Поэтому многие "хорошие" бесконечные множества оказываются неизмеримыми (например, $\mathbb{R}^n$, квадрант, полоса, внутренность параболы). Устраним этот недостаток.

Пусть K_l —n-мерный куб с центром в нуле и ребром $2l$, именно:

$$K_l = \{x = (x_i)_{i=1}^n : \ |x_i| \leq l,\ i = 1, 2, \ldots, n\}\,,\ l \in \mathbb{N}.$$

Определение 20.28. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовём измеримым по Лебегу в широком смысле, или σ-измеримым, если для любого $l \in \mathbb{N}$ измеримо множество $A \bigcap K_l$.*

Если множество A σ-измеримо, то положим

$$\mu A = \lim\, \mu\left(A \bigcap K_l\right). \tag{20.31}$$

Совокупность всех σ-измеримых множеств обозначим $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Так как последовательность $(A \bigcap K_l)$ возрастает, то и последовательность $\mu\,(A \bigcap K_l)$ тоже возрастает, поэтому предел в (20.31), конечный или бесконечный, существует.

Теорема 20.20. *$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $l \in \mathbb{N}$ множество $A \bigcap K_l$, как пересечение двух измеримых по Лебегу множеств, измеримо по Лебегу. По определению 20.28 множество A σ-измеримо и теорема доказана. ■

Отметим, что так как $A = \lim A \bigcap K_l$, то в силу непрерывности меры Лебега

$$\mu A = \lim \mu(A \bigcap K_l),$$

поэтому значение μA, введённое определением 20.26, совпадает со значением μA в широком смысле, введённым равенством (20.31).

Теорема 20.21. *Если множество $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и имеет конечную (в смысле (20.31)) меру, то $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $A_m = A \bigcap K_m$. Последовательность A_m возрастает и

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \dot{\bigcup_{m=1}^{\infty}}\ (A_m \setminus A_{m-1})\ (A_0 = \varnothing).$$

Существование предела μA_m означает сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m \setminus A_{m-1}),$$

так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m \setminus A_{m-1}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \lim_{m\to\infty} \mu A_m\,.$$

Но тогда в силу σ-полуаддитивности внешней меры

$$\mu^* A \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m \setminus A_{m-1}) < +\infty\,,$$

и по теореме 20.18 множество $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. ■

Из доказанной теоремы следует, что расширение $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ до $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ происходит только за счёт множеств бесконечной меры.

Нетрудно показать, что $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ является σ-алгеброй, единицей которой является множество $\mathbb{R}^n$.

Теперь обсудим вопрос о том, насколько широк класс σ-измеримых множеств.

Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ σ-измеримо, так как оно может быть представлено в виде конечного или счётного объединения открытых кубов. В самом деле, если $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, то для каждой точки $x \in G$ можно указать открытый куб с центром в точке x и ребром $2r_x$ (открытый шар $B_1(x, r_x)$ в метрике ρ_1), содержащий эту точку. Радиус r_x можно считать рациональным, так как его всегда можно уменьшить. По точке x подберём точку $y \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $\rho_1(x, y) < r_x/2$. Тогда легко проверить, что $x \in B_1(y, r_x/2) \subset B_1(x, r_x) \subset G$. Это означает, что $G = \bigcup B_1(y, r_x/2)$. Так как множество кубов с центрами в рациональных точках и рёбрами рациональной длины на основании теорем 20.4, 20.6 является счётным, то множество G как счётное объединение σ-измеримых множеств σ-измеримо.

Любое замкнутое множество $F \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ σ-измеримо как дополнение до открытого.

Так как $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебра, то σ-измеримы также и все множества, которые могут быть получены из открытых и замкнутых множеств с помощью конечного или счётного числа операций объединения и пересечения, взятых в произвольном порядке (такие множества называют борелевскими).

Измеримо также (в широком смысле) любое множество, получающееся из борелевского путём добавления или удаления любого множества нулевой меры.

Можно показать, что этим набор σ-измеримых множеств и ограничивается, то есть, что для любого σ-измеримого множества A найдётся такое борелевское множество B, что $\mu(A \vartriangle B) = 0$.

Однако не следует думать, что любое множество в $\mathbb{R}^n$ σ-измеримо.

Пример 20.16. (неизмеримого множества) Для удобства полуинтервал $[0,\ 2\pi)$ свернём в окружность Γ радиуса 1 и поместим её в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, совместив центр окружности с началом координат. Тогда каждая точка $\varphi \in [0;\ 2\pi)$ становится комплексным числом $z = e^{i\varphi}$. Выберем иррациональное число α и введём на Γ отношение эквивалентности, полагая $z_2 \sim z_1$, если $z_2 = z_1 e^{\pi k\alpha i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Легко убедиться, что введённое отношение $z_2 \sim z_1$ рефлексивно $(z \sim z)$, симметрично $(z_2 \sim z_1 \Rightarrow z_1 \sim z_2)$ и транзитивно $(z_2 \sim z_1,\ z_3 \sim z_2 \Rightarrow z_3 \sim z_1)$, поэтому окружность Γ разбивается этим отношением на классы эквивалентности (каждый класс эквивалентности, очевидно, состоит из счётного множества точек). Образуем множество Φ_0, включив в него по одному представителю от каждого класса эквивалентности и множества Φ_m, получающиеся из Φ_0 поворотом на угол $\pi\alpha m$ $(m \in \mathbb{Z})$. Покажем, что

$$\Gamma = \dot{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}}} \Phi_m\,. \tag{20.32}$$

В самом деле, с одной стороны, $\Phi_m \bigcap \Phi_l = \varnothing$ $(m \neq l)$, ибо если одновременно $z \in \Phi_m$ и $z \in \Phi_l$, то $z = z_0 e^{\pi\alpha m i}$ и $z = z_0' e^{\pi\alpha l i}$, где $z_0, z_0' \in \Phi_0$. Тогда получаем, что $z_0 e^{\pi\alpha m i} = z_0' e^{\pi\alpha l i}$, или $z_0' = z_0 e^{\pi\alpha(m-l)i}$, то есть, $z_0' \sim z_0$. Но так как в Φ_0 содержится только по одному представителю от каждого класса, то $z_0' = z_0$, или $e^{\pi\alpha l i} = e^{\pi\alpha m i}$, или $e^{\pi\alpha(m-l)i} = 1$, или $\pi\alpha(m-l)i = 2\pi k i$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\alpha = 2k/(m-l)$. Но последнее означает, что α — число рациональное, что противоречит его выбору.

С другой стороны, каждая точка $z \in \Gamma$ принадлежит некоторому классу эквивалентности, следовательно, $z \sim z_0 \in \Phi_0$, или $z = z_0 e^{\pi\alpha k i}$, или $z \in \Phi_k$.

Этими двумя рассуждениями (20.32) установлено.

Допустим, что множество Φ_0 измеримо. Тогда каждое множество Φ_m тоже измеримо и $\mu\Phi_m = \mu\Phi_0$ $(m \in \mathbb{Z})$, так как Φ_m получается из Φ_0 поворотом (на прямой — сдвигом), а мера Лебега, очевидно, инвариантна относительно сдвигов. Тогда по свойству σ-аддитивности меры Лебега

$$\mu\Gamma = 2\pi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu\Phi_m\,.$$

Однако последнее равенство невозможно, так как сумма ряда в его правой части либо равна нулю (если $\mu\Phi_0 = 0$), либо равна бесконечности (если $\mu\Phi_0 = a > 0$).

Итак, множество Φ_0 неизмеримо.

VI. *Другие меры.*

В этом пункте мы рассмотрим две меры, играющие важную роль в теории вероятностей.

a) *Мера Лебега-Стилтьеса.*

Пусть $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая и непрерывная слева в каждой точке функция. Определим с её помощью меру промежутка, положив

$$m'_F(a;\ b) = F(b) - F(a+0),$$

$$m'_F[a;\ b] = F(b+0) - F(a),$$
$$m'_F(a;\ b] = F(b+0) - F(a+0),$$
$$m'_F[a;\ b) = F(b) - F(a).$$

Как нетрудно видеть, определённая таким образом мера промежутка неотрицательна и аддитивна. Отметим, что система промежутков по введённой ранее терминологии есть не что иное как система кирпичей в пространстве $\mathbb{R}^1$. Отметим также, что мера m' на кирпичах, введённая в пункте I, при $n = 1$ является частным случаем меры m'_F, введённой в настоящем пункте (если $F(t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$).

Применив к мере m'_F два процесса продолжения меры, описанные в пунктах II — IV, мы выделим на прямой кольцо $\mathcal{M}_F$ множеств, измеримых относительно σ-аддитивной меры μ_F, являющейся продолжением меры m'_F и называемой мерой Лебега-Стилтьеса. Кольцо $\mathcal{M}_F$ измеримых по мере μ_F множеств, вообще говоря, зависит от функции F, но в любом случае это кольцо содержит все ограниченные борелевские множества. Если функция F имеет на $\mathbb{R}$ ограниченное изменение, то есть, $F(+\infty) - F(-\infty) < +\infty$, то, очевидно, $\mathcal{M}_F$ является σ-алгеброй с единицей $\mathbb{R}$ и $\mu_F(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)$. Если, в частности, $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$, то меру μ_F называют нормированной, а если при этом $F(-\infty) = 0$, а $F(+\infty) = 1$, то ещё и вероятностной.

Ещё раз подчеркнём, что если $F(t) = t$, то $\mu_F = \mu$ — обычная мера Лебега.

b) *Дискретная мера.*

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — произвольное счётное множество, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty$. Для любого подмножества A множества X положим

$$mA = \sum_{k:\ x_k \in A} p_k\,. \tag{20.33}$$

Равенством (20.33) на σ-алгебре $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X определена σ-аддитивная мера m.

Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$, то мы можем связать с этим множеством функцию $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив

$$F(x) = \sum_{k:\ x_k < x} p_k\,. \tag{20.34}$$

Такая функция F называется функцией скачков, потому что

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k\,,$$

а на промежутках, не содержащих точек x_k, функция F постоянна.

По функции F, определяемой равенством (20.34) можно построить меру Лебега-Стилтьеса μ_F. Такая мера μ_F носит название дискретной меры.

20.3 Измеримые функции

Пусть X — некоторое множество, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X)$ — σ-алгебра подмножеств множества X, которое является единицей этой σ-алгебры, и μ — заданная на $\mathcal{M}$ полная σ-аддитивная мера. В дальнейшем тройку $(X,\ \mathcal{M},\ \mu)$ будем называть пространством с мерой.

Определение 20.29. *Функцию $f:\ X \to \mathbb{R}$ назовём измеримой на множестве X относительно меры μ (μ-измеримой), если для любого вещественного числа c измеримо множество $\{x \in X:\ f(x) > c\}$.*

Множество всех измеримых на X относительно меры μ функций обозначим символом $S(X,\ \mathcal{M},\ \mu)$.

Если из контекста ясно, относительно какой меры измерима функция f, будем просто называть её измеримой и совокупность всех измеримых функций будем обозначать $S(X)$. Договоримся также для краткости писать $X(f > c)$ вместо $\{x \in X:\ f(x) > c\}$ и аналогично в других подобных случаях.

Пример 20.17. *Пусть $\mu X = 0$. Тогда любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима на X, так как в силу полноты меры для любого $c \in \mathbb{R}$ множество*

$$X(f > c) \in \mathcal{M}(X).$$

Лемма 20.5. *Для того чтобы $f \in S(X)$, необходимо и достаточно выполнения для любого $c \in \mathbb{R}$ одного из следующих условий:*

$$X(f \geq c) \in \mathcal{M}; \tag{20.35}$$

$$X(f \leq c) \in \mathcal{M}; \tag{20.36}$$

$$X(f < c) \in \mathcal{M}. \tag{20.37}$$

Доказательство. Пусть $f \in S(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ — любое число. Покажем справедливость равенства

$$X(f \geq c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X\left(f > c - \frac{1}{k}\right). \tag{20.38}$$

В самом деле,

$$x \in X(f \geq c) \iff f(x) \geq c \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ f(x) > c - \frac{1}{k} \iff$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}\ x \in X\left(f > c - \frac{1}{k}\right) \iff x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X\left(f > c - \frac{1}{k}\right).$$

Если $f \in S(X)$, то каждое из множеств в правой части равенства (20.38) измеримо, следовательно, измеримо и их пересечение, поскольку $\mathcal{M}(X)$ — σ-алгебра.

Равенство (20.38) устанавливает необходимость условия (20.35). Его достаточность следует из столь же легко проверяемого равенства

$$X(f > c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} X\left(f \geq c + \frac{1}{k}\right),$$

установить справедливость которого читателям предлагается самостоятельно.

Необходимость и достаточность условия (20.36) следует из очевидных тождеств

$$X(f \le c) = X \setminus X(f > c);\ \ X(f > c) = X \setminus X(f \le c).$$

Необходимость и достаточность условия (20.37) вытекает из тождеств

$$X(f < c) = X \setminus X(f \ge c);\ \ X(f \ge c) = X \setminus X(f < c)$$

и уже доказанной необходимости и достаточности условия (20.35).

Лемма доказана. ■

Лемма 20.5 утверждает, что выполнение любого из условий (20.35), (20.36), (20.37) можно положить в основу определения измеримой функции.

Следствие 20.1. *Если $f \in S(X)$, то для любых $a, b \in \mathbb{R}$ измеримы множества*

$$X(a \le f \le b),\ X(a < f \le b),\ X(a \le f < b),\ X(a < f < b),\ X(f = a).$$

Доказательство. Действительно,

$$X(a \le f \le b) = X(f \le b) \bigcap X(f \ge a) \in \mathcal{M}(X).$$

Остальное проверяется аналогично. ■

Пример 20.18. *Пусть $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m}\!\!\cdot\ X_k$. Построим функцию $h : X \to \mathbb{R}$, положив $h(x) = c_k$, если $x \in X_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где c_k — произвольные вещественные числа (их можно считать различными при разных k, но не обязательно). Такую функцию будем называть ступенчатой.*

Если все множества X_k измеримы, то для любого $c \in \mathbb{R}$

$$X(h > c) = \bigcup_{k:\ c_k > c} X_k$$

измеримо как объединение конечного числа измеримых множеств (если $c \ge c_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, m$, то $X(h > c) = \varnothing$), поэтому измерима и функция h.

Если же все c_k различны, то измеримость всех c_k становится, в силу следствия из леммы 20.5, и необходимым условием измеримости функции h.

Пример 20.19. *Пусть $X = \mathbb{R}$ (или любой промежуток из $\mathbb{R}$), $f :\ X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X. Тогда f измерима на X по мере Лебега.*

Для доказательства этого утверждения рассмотрим сначала множество X_0 внутренних точек промежутка X (тот же промежуток, но с удалёнными концами), возьмём любое $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество $X_0(f > c)$. Если это множество — пустое, то оно измеримо. Рассмотрим тот случай, когда множество $X_0(f > c) \ne \varnothing$. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X_0(f > c)$. По числу $\varepsilon = (f(x_0) - c)/2$ в силу непрерывности функции f найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X_0 \bigcap (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Раскрывая модуль и беря левую часть получающегося двойного неравенства, будем иметь: $f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$, или

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0) - c) = \frac{1}{2}(c + f(x_0)) > c.$$

Поскольку δ можно уменьшить, то можно считать, что интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ целиком располагается во множестве X_0, а по доказанному выше, и во множестве $X_0(f>c)$, поэтому множество $X_0(f>c)$ — открытое, следовательно, измеримое. Множество же $X(f>c)$, быть может, отличается от множества $X_0(f>c)$ на одну или две точки (концы промежутка X). А так как одноточечные множества (вырожденные промежутки) измеримы по мере Лебега, то множество $X(f>c)$ измеримо.

Изучим свойства измеримых функций.

1) $f\in S(X),\ l\in\mathbb{R}\Rightarrow f+l\in S(X)$.

Очевидно, $X(f+l>c)=X(f>c-l)\in\mathcal{M}$ для любого вещественного c, что и доказывает свойство 1.

2) $f\in S(X),\ k\in\mathbb{R}\Rightarrow kf\in S(X)$.

Это свойство следует из легко проверяемого равенства

$$X(kf>c)=\begin{cases} X(f>c/k), & k>0,\\ X(f<c/k), & k<0,\\ \quad X, & k=0,\ c<0,\\ \quad \varnothing, & k=0,\ c\ge 0.\end{cases}$$

Так как множества, стоящие в этом равенстве справа, в любом из случаев измеримы, то измеримо для любого вещественного c и множество, стоящее слева.

Для доказательства следующего свойства нам понадобится

Лемма 20.6. *Если $f,g\in S(X)$, то $X(f>g)\in\mathcal{M}(X)$.*

Доказательство. Перенумеруем все рациональные числа (это можно сделать, так как множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счётно). Итак, пусть $\mathbb{Q}=\{r_k:\ k\in\mathbb{N}\}$. Покажем, что

$$X(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(X(f>r_k)\bigcap X(g<r_k)\Big). \tag{20.39}$$

Пусть $x\in X(f>g)$, то есть, $f(x)>g(x)$. Тогда найдётся такое рациональное число r_k, что будет справедливо неравенство $f(x)>r_k>g(x)$. Следовательно,

$$x\in X(f>r_k)\bigcap X(g<r_k).$$

Этим установлено вложение левой части (20.39) в правую. Обратное вложение очевидно. Так как $\mathcal{M}(X)$ — σ-алгебра, то правая часть в (20.39) — измеримое множество. Лемма доказана. ■

3) $f,g\in S(X)\Rightarrow f+g\in S(X)$.

Справедливость этого свойства вытекает из того, что множество

$$X(f+g>c)=X(f>-g+c)$$

в силу леммы 20.6 и свойств 1 и 2 измеримо для любого $c\in\mathbb{R}$.

4) $f\in S(X)\Rightarrow f^2\in S(X)$.

Действительно, множество

$$X(f^2>c)=\begin{cases} X(f>\sqrt{c})\bigcup X(f<-\sqrt{c}), & c\ge 0,\\ \qquad X, & c<0.\end{cases}$$

измеримо для любого $c\in\mathbb{R}$.

Отметим, что обратное утверждение неверно. Если квадрат некоторой функции — измеримая функция, то сама функция не обязательно измерима.

Пример 20.20. *Пусть $X = [0;\ 1]$, X_0 — неизмеримое (по мере Лебега) подмножество X (существование неизмеримых множеств выше было доказано), и пусть*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_0\,, \\ -1, & x \in X \setminus X_0\,. \end{cases}$$

Тогда f неизмерима на X, поскольку множество $X(f = 1) = X_0$ неизмеримо, в то время как функция $f^2(x) \equiv 1$ — измерима на X.

5) $f, g \in S(X) \Rightarrow f \cdot g \in S(X)$.

Измеримость произведения следует из тождества

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

и свойств 2, 3, 4.

6) $f, g \in S(x),\ g(x) \neq 0\ (x \in X) \Rightarrow f/g \in S(X)$.

Сначала докажем, что если $g \in S(X)$ и не обращается в ноль на X, то $1/g \in S(X)$. Действительно,

$$X\left(\frac{1}{g} > c\right) = \begin{cases} X(0 < g < 1/c), & c > 0, \\ X(g > 0), & c = 0, \\ X(g > 0) \bigcup X(g < 1/c), & c < 0. \end{cases}$$

Из этого равенства следует, что функция $1/g$ измерима на X, но тогда по свойству 5 измерима и функция $f/g = f \cdot (1/g)$.

Из свойств 2 — 6 следует, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций.

Определение 20.30. *Назовём положительной частью функции f, определённой на множестве X, функцию*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases}$$

и отрицательной частью функции f функцию

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0, \\ -f(x), & f(x) \leq 0. \end{cases}$$

7) $f \in S(X) \Rightarrow |f|, f^+, f^- \in S(X)$.

Измеримость $|f|$ следует из равенства

$$X(|f| > c) = \begin{cases} X(f < -c) \bigcup X(f > c), & c \geq 0, \\ X, & c < 0, \end{cases}$$

а измеримость f^+ и f^- из равенств

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Последний пример показывает, что измеримость функции $|f|$ не влечёт за собой измеримость f.

8) $f \in S(X),\ X_0 \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow f \in S(X_0)$.

Доказательство этого свойства опирается на следующее предложение, которое читателям полезно проверить самим: *если $\mathcal{A}(X)$ — σ-алгебра с единицей X, $X_0 \in \mathcal{A}(X)$, то $\mathcal{A}(X_0) = \{A \bigcap X_0 :\ A \in \mathcal{A}(X)\}$ тоже σ-алгебра с единицей X_0.*

Тогда для любого $c > 0$ имеем:

$$X_0(f > c) = X_0 \bigcap X(f > c) \in \mathcal{M}(X_0)$$

и свойство установлено.

9) *Если* $f : X \to \mathbb{R}$, $X = \bigcup\limits_k X_k$, *где* $X_k \in \mathcal{M}(X)$ *при всех* k, *которых может быть как конечное, так и счётное множество, и для каждого* k *функция* $f \in S(X_k)$, *то* $f \in S(X)$.

Свойство 9 следует из столь же легко, как и все предыдущие, проверяемого равенства

$$X(f > c) = \bigcup_k X_k(f > c).$$

Далее мы будем изучать свойства измеримых функций, связанные с операцией предельного перехода. Поскольку при предельном переходе могут получаться бесконечные значения, то расширим множество допускаемых к рассмотрению функций, именно, будем рассматривать функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty;\ +\infty]$. Так как над рассматриваемыми функциями нам придётся производить алгебраические операции, то условимся о следующих правилах действия с бесконечными значениями:

1) $a + (\pm\infty) = \pm\infty,\ a \in \mathbb{R}$; 2) $a - (\pm\infty) = \mp\infty,\ a \in \mathbb{R}$;
3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; 4) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
5) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,\ a > 0$; 6) $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,\ a < 0$; 7) $0 \cdot (\pm\infty) = 0$;
8) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$; 9) $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$;
10) $|\pm\infty| = +\infty$; 11) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

Символы $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $\dfrac{a}{0}$ будем считать не имеющими смысла.

Для функций $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ оставим прежним определение измеримости. Тогда и все ранее рассмотренные свойства сохранятся при условии выполнимости соответствующих операций.

Теорема 20.22. *Пусть* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность измеримых на множестве* X *функций. Тогда на множестве* X *измеримы функции* $\sup\{f_k\}$, $\inf\{f_k\}$, $\overline{\lim}\, f_k$, $\underline{\lim}\, f_k$ *и* $\lim\, f_k$ *при условии существования последнего.*

Все операции, указанные в формулировке теоремы, производятся поточечно. Например, функция $f^* = \sup\{f_k\}$ определяется следующим образом:

$$f^*(x) = \sup\{f_k(x) :\ k \in \mathbb{N}\}\ (x \in X).$$

Доказательство. Докажем измеримость $f^* = \sup\{f_k\}$. Для этого убедимся в справедливости равенства

$$X(f^* \le c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X(f_k \le c). \tag{20.40}$$

Пусть $x \in X(f^* \le c)$. Тогда $f^*(x) \le c$, и так как

$$f^*(x) = \sup\{f_k(x) :\ k \in \mathbb{N}\},$$

то $f_k(x) \le c$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X(f_k \le c)$. Этим доказано вложение левой части (20.40) в правую.

Наоборот, если $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X(f_k \le c)$, то $f_k(x) \le c$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда и

$$\sup\{f_k(x):\ k \in \mathbb{N}\} = f^*(x) \le c,$$

то есть, $x \in X(f^* \le c)$. Следовательно, и правая часть (20.40) содержится в левой.

Из равенства (20.40) с помощью леммы 20.5 получаем измеримость функции f^*.

Измеримость $\inf\{f_k\}$ следует из очевидного равенства

$$\inf\{f_k\} = -\sup\{-f_k\}.$$

Теперь докажем измеримость функции $\overline{f} = \overline{\lim} f_k$. Как было показано в главе "Предел последовательности" (см. теорему 2.26), для каждого $x \in X$

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim} f_k(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{l \ge k} \{f_l(x)\} \right\}. \tag{20.41}$$

Так как измеримость $\sup\{f_k\}$ и $\inf\{f_k\}$ уже доказана, то измерима и функция $\overline{\lim}\ f_k$.

Измеримость функции $\underline{\lim}\ f_k$ получим, используя равенство

$$\underline{\lim}\ f_k = -\overline{\lim}(-f_k)\,.$$

Измеримость функции $\lim\ f_k$ следует из того, что при условии существования

$$\lim\ f_k = \overline{\lim}\ f_k = \underline{\lim}\ f_k\,.$$

Теорема доказана. ■

Определение 20.31. *Будем говорить, что некоторое свойство имеет место "почти всюду" на множестве X, если мера множества тех точек из X, для которых указанное свойство не выполняется, равна нулю.*

Например, утверждение "*функция f почти всюду на множестве X равна нулю* " означает, что $\mu X(f \ne 0) = 0$.

Определение 20.32. *Две функции f и g, определённые на множестве X, назовём эквивалентными и будем писать $f \sim g$, если их значения совпадают почти всюду на множестве X, то есть, если*

$$\mu X(f \ne g) = 0.$$

Лемма 20.7. *Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f \in S(X)$ и $g \sim f$, то $g \in S(X)$.*

Доказательство. Пусть $X_0 = X(f \ne g)$. По условию, $\mu X_0 = 0$. Положим $X_1 = X \setminus X_0$. Множество X_1 измеримо как разность двух измеримых множеств. Тогда $X = X_0 \bigsqcup X_1$ и

$$X(g > c) = X_0(g > c) \bigsqcup X_1(g > c) = X_0(g > c) \bigsqcup X_1(f > c).$$

Множество $X_0(g > c)$ измеримо как подмножество множества нулевой меры (мера μ предполагается полной!), а множество $X_1(f > c)$ измеримо по свойству 8, поэтому множество $X(g > c)$ измеримо для любого вещественного c. ■

Определение 20.33. *Будем говорить, что функциональная последовательность $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на множестве X к функции f, и писать $f_k \xrightarrow{п.в.} f$, если*

$$\mu X(f_k \not\to f) = 0.$$

Пример 20.21. *Пусть* $X = [0;1]$, μ *— мера Лебега,* $f_k(x) = x^k$, $f(x) \equiv 0$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 0$ при $0 \le x < 1$, а $\lim\limits_{k\to\infty} 1^k = 1$, то $X(f^k \not\to f) = \{1\}$. Одноточечное множество имеет нулевую лебегову меру, поэтому $f_k \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.

Теорема 20.23. *Если последовательность* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *измеримых на множестве* X *функций сходится почти всюду на* X *к функции* f*, то предельная функция* f *тоже измерима.*

Доказательство. Положим $X_1 = X(f_k \to f)$ и $X_0 = X(f_k \not\to f)$. По условию X_0 — множество нулевой меры, поэтому $X_1 = X \setminus X_0$ измеримо. Введём в рассмотрение функции

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \in X_1, \\ 0, & x \in X_0, \end{cases} \quad g_0(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in X_1, \\ 0, & x \in X_0. \end{cases}$$

Так как $\mu X_0 = 0$, то $f_k \sim g_k$ $(k \in \mathbb{N})$, $f_0 \sim g_0$. При этом $g_k \to g_0$ всюду на X. По лемме 20.7 все функции g_k измеримы на X, по теореме 20.23 функция g_0 измерима на X, снова по лемме 20.7 измерима на X и функция f_0. ∎

Теорема 20.24 (Егоров)**.** *Пусть последовательность измеримых и почти всюду конечных на множестве* X *функций* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду на* X *к почти всюду конечной на* X *функции* f*. Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдётся измеримое множество* $X_\delta \subset X$ *такое, что* $\mu X_\delta < \delta$ *и последовательность* (f_k) *сходится к* f *равномерно на множестве* $X \setminus X_\delta$*.*

Доказательство. По предыдущей теореме предельная функция f измерима на множестве X.

Введём обозначения:

$$X_0 = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X(f_k = \pm\infty)\right) \bigcup X(f_k \not\to f), \quad X_1 = X \setminus X_0 .$$

Множество X_0 измеримо как счётное объединение измеримых множеств и в силу свойства σ-полуаддитивности меры $\mu X_0 = 0$, так как X_0 есть счётное объединение множеств нулевой меры. Тогда множество X_1 измеримо, все функции; f и f_k $(k \in \mathbb{N})$ принимают на X_1 конечные значения и $f_k \to f$ всюду на X_1.

Рассмотрим последовательность функций

$$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Функции $g_k(x)$ неотрицательны и измеримы на X_1 и $g_k(x) \to 0$ для каждого $x \in X_1$.

Пусть $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Положим

$$X_{k,j} = \bigcap_{l=k}^{\infty} X_1(g_l < \varepsilon_j). \tag{20.42}$$

Последовательность $(X_{k,j})$ по индексу k возрастает, поскольку

$$X_{k,j} = \bigcap_{l=k}^{\infty} X_1(g_l < \varepsilon_j) \subset \bigcap_{l=k+1}^{\infty} X_1(g_l < \varepsilon_j) = X_{k+1,j} .$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} X_{k,j} = X_1 \ (j = 1, 2, \ldots). \tag{20.43}$$

Пусть $x \in X_1$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$, то по $\varepsilon_j > 0$ найдётся номер k_0 такой, что при всех $k \geq k_0$ будет выполняться неравенство $g_k(x) < \varepsilon_j$. Это означает, что

$$x \in \bigcap_{l=k_0}^{\infty} X_1(g_l < \varepsilon_j) = X_{k_0,j}\,,$$

следовательно,

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{k,j} = \lim_{k\to\infty} X_{k,j}\,.$$

Этим установлено включение $X_1 \subset \lim\limits_{k\to\infty} X_{k,j}$. Поскольку обратное включение очевидно, то равенство (20.43) доказано.

По свойству непрерывности меры из (20.43) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mu X_{k,j} = \mu X_1 \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

поэтому для любого $j \in \mathbb{N}$ найдётся номер $k(j)$ такой, что

$$\mu(X_1 \setminus X_{k(j),\,j}) < \frac{\delta}{2^j}\,,$$

где δ — любое заранее выбранное положительное число.

Пусть

$$X_\delta = X_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (X_1 \setminus X_{k(j),\,j}) \right).$$

Покажем, что X_δ — искомое множество. Имеем:

$$\mu X_\delta \leq \mu X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_1 \setminus X_{k(j),\,j}) < 0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Пусть теперь $x \in X \setminus X_\delta$. Тогда x не принадлежит X_0 и не принадлежит ни одному из множеств $X_1 \setminus X_{k(j),j}$. Но так как $x \notin X_0$, то $x \in X_1$, а так как x не принадлежит разности $X_1 \setminus X_{k(j),j}$, то $x \in X_{k(j),\,j}$ для каждого $j \in \mathbb{N}$, следовательно (см. (20.42)),

$$|f_l(x) - f_0(x)| = g_l(x) < \varepsilon_j \quad (l \geq k(j)).$$

Поскольку номер $k(j)$ зависит только от ε_j, то равномерная сходимость последовательности f_k на множестве $X \setminus X_\delta$ доказана. ■

Пример 20.22. *Рассмотрим на отрезке* $[0;\,1]$ *с мерой Лебега последовательность функций* $f_k(x) = \sin^k \pi x$, $k \in \mathbb{N}$.

Как нетрудно видеть, эта последовательность в каждой точке x отрезка $[0;\,1]$, за исключением точки $x = \dfrac{1}{2}$, стремится к нулю, следовательно, $f_k \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Выберем δ так, чтобы $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ и положим $X_\delta = \left[0;\, \dfrac{1}{2} - \delta\right] \bigcup \left[\dfrac{1}{2} + \delta;\, 1\right]$. Так как, очевидно, для любого $x \in X_\delta$ выполняется неравенство $0 \leq \sin^k \pi x \leq \sin^k \left(\pi\left(\dfrac{\pi}{2} - \delta\right)\right)$, а $\sin^k \left(\pi\left(\dfrac{\pi}{2} - \delta\right)\right) \to 0$ при $k \to \infty$, то последовательность (f_k) на множестве X_δ сходится равномерно.

Для последовательности измеримых на множестве X функций можно ввести ещё один вид сходимости: сходимость по мере.

Определение 20.34. *Будем говорить, что последовательность измеримых на множестве X функций $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится на множестве X к измеримой на множестве X функции f_0 по мере и писать $f_k \xrightarrow{\text{п.м.}} f_0$, если для любого $\sigma > 0$*

$$\mu X(|f_k - f_0| \geq \sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Установим соотношение между сходимостями почти всюду и по мере.

Теорема 20.25. *Если последовательность измеримых на множестве X функций $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится на X к функции f_0 почти всюду, то она сходится к функции f_0 на множестве X и по мере.*

Доказательство. По теореме 20.23 функция f_0 измерима на X. Допустим, что последовательность (f_k) не сходится к функции f_0 по мере на множестве X. Тогда для некоторого $\sigma_0 > 0$ найдутся $\delta_0 > 0$ и последовательность номеров $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ такие, что

$$\mu X(|f_{k_j} - f_0| \geq \sigma_0) \geq \delta_0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$X' = \overline{\lim}\, X(|f_{k_j} - f_0| \geq \sigma_0).$$

Тогда (теорема 20.12) $\mu X' \geq \delta_0$ и если $x \in X'$, то, по определению верхнего предела последовательности множеств, среди номеров k_j найдётся бесконечное число таких номеров, что $x \in X(|f_{k_j} - f_0| \geq \sigma_0)$. Но это означает, что для бесконечного числа номеров k выполняется неравенство $|f_k(x) - f_0(x)| \geq \sigma_0$, то есть, $f_k(x) \not\to f_0(x)$.

Таким образом, $f_k \not\to f_0$ на множестве X' положительной меры, что противоречит условию теоремы. ■

Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 20.23. *Пусть $X = [0;\ 1]$ и μ — мера Лебега. Положим*

$$\varphi_{l,j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\dfrac{j-1}{l};\ \dfrac{j}{l}\right], \\[2ex] 0, & x \notin \left[\dfrac{j-1}{l};\ \dfrac{j}{l}\right], \end{cases}$$

где $l = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots, l$.

Запишем эти функции в виде одной последовательности, нумеруя их в порядке возрастания первого индекса, а при одинаковом первом индексе — в порядке возрастания второго. Получим последовательность $f_1(x) = \varphi_{1,1}(x)$, $f_2(x) = \varphi_{2,1}(x)$, $f_3(x) = \varphi_{2,2}(x)$, $f_4(x) = \varphi_{3,1}(x)$, ...

Нетрудно убедиться, что построенная последовательность сходится по мере на отрезке $[0,\ 1]$ к функции $f_0(x) \equiv 0$. В самом деле, каждая функция f_k принадлежит к группе функций $\varphi_{l,j}$ с фиксированным первым индексом l, каждая из которых отлична от нуля только на отрезке $\left[\dfrac{j-1}{l};\ \dfrac{j}{l}\right]$ длины $1/l$, поэтому, взяв $\sigma < 1$ имеем

$$\mu X(|f_k - f_0| \geq \sigma) = 1/l \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

В то же время при $l > 2$ для каждого $x \in [0;\ 1]$ в группе функций $\varphi_{l,j}$ с фиксированным индексом l имеются как функции, принимающие в этой точке значение 1, так и функции, принимающие значение 0, то есть, последовательность $(f_k(x))$ содержит бесконечное число как нулей, так и единиц, поэтому сходиться не может.

Итак, построенная последовательность $f_k(x)$ сходится по мере на отрезке $[0;\ 1]$, но не сходится ни в одной точке.

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 20.26. *Из любой последовательности измеримых на множестве X функций f_k, сходящейся по мере к измеримой на X функции f_0, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f_0 почти всюду на X.*

Доказательство. Пусть $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ — последовательности положительных чисел, такие что

$$\varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j < +\infty.$$

Выделим последовательность номеров

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$$

следующим образом. Номер k_1 подберём так, чтобы

$$\mu X(|f_{k_1} - f_0| \geq \varepsilon_1) < \eta_1\,.$$

Затем подберём номер $k_2 > k_1$ так, чтобы

$$\mu X(|f_{k_2} - f_0| \geq \varepsilon_2) < \eta_2\,.$$

Пусть номера $k_1 < k_2 < \ldots < k_{j-1}$ уже выбраны. Номер $k_j > k_{j-1}$ подберём так, чтобы

$$\mu X(|f_{k_j} - f_0| \geq \varepsilon_j) < \eta_j\,.$$

Для каждого j номер k_j найдётся, поскольку по условию $f_k \xrightarrow{п.м.} f_0$.

Так как описанный процесс можно продолжить неограничено, то в результате получим подпоследовательность $(f_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Покажем, что эта подпоследовательность искомая, то есть, что $f_{k_j} \xrightarrow{п.в.} f_0$.

Обозначим для краткости $X_j = X(|f_{k_j} - f_0| \geq \varepsilon_j)$ $(j \in \mathbb{N})$ и положим

$$X_0 = \overline{\lim}\, X_j = \bigcap_{l=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=l}^{\infty} X_j \right).$$

Поскольку для каждого $l = 1, 2, \ldots$ множество $X_0 \subset \bigcup\limits_{j=l}^{\infty} X_j$, то

$$\mu X_0 \leq \mu \left(\bigcup_{j=l}^{\infty} X_j \right) \leq \sum_{j=l}^{\infty} \mu X_j < \sum_{j=l}^{\infty} \eta_j\,.$$

Так как ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j$ сходится, то его остаток стремится к нулю, поэтому из последней оценки следует, что $\mu X_0 = 0$.

Покажем, что если $x \notin X_0$, то $f_{k_j}(x) \to f_0(x)$. Если $x \notin X_0$, то найдётся номер l такой, что $x \notin \bigcup\limits_{j=l}^{\infty} X_j$, то есть, $x \notin X_j$ $(j \geq l)$. Но тогда при всех $j \geq l$ выполняется неравенство

$$|f_{k_j}(x) - f_0(x)| < \varepsilon_j\,,$$

а поскольку $\varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, то из него следует, что

$$f_{k_j}(x) \to f_0(x).$$

Теорема доказана. ■

В последнем приведённом примере подпоследовательностью, которую можно выделить согласно доказанной теореме, является, например, подпоследовательность, составленная из функций $\varphi_{l,j}$, у которых второй индекс $j = 1$. Эта подпоследовательность сходится к нулю во всех точках отрезка $[0,\ 1]$, кроме точки $x = 0$.

В примере 20.18 было введено понятие ступенчатой функции, которое будет играть важную роль в построении интеграла Лебега. Напомним его.

Определение 20.35. *Пусть* $X = \bigsqcup_{k=1}^{m} X_k$. *Определим функцию* $h : X \to \mathbb{R}$ *следующим образом:* $h(x) = c_k$, *если* $x \in X_k$, *где* $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$. *Функцию* h *будем называть ступенчатой и записывать в виде*

$$h = (X_1, c_1; X_2, c_2; \dots ; X_m, c_m). \tag{20.44}$$

В представлении (20.44) не обязательно считать все значения c_k различными, однако этого всегда можно достигнуть следующим способом. Пусть $c'_1, c'_2, \dots, c'_l$ — все различные значения c_k в представлении (20.44) ступенчатой функции h. Положим $X'_j = \bigcup_{k\colon c_k = c'_j} X_k$ $(j = 1, 2, \dots, l)$. Так как множества X_k не имеют попарно общих точек, то и множества X'_j обладают этим свойством. Тогда для функции h получаем, очевидно, единственное представление

$$h = (X'_1, c'_1; X'_2, c'_2; \dots, X'_l, c'_l), \tag{20.45}$$

в котором все c'_j различны.

Как было отмечено в примере 20.18, если все множества X_k в представлении (20.44) ступенчатой функции h измеримы, то и функция h измерима, а измеримость всех множеств X'_j в представлении (20.45) является необходимым и достаточным условием её измеримости.

Теорема 20.27 (об аппроксимации)**.** *Всякую неотрицательную измеримую на множестве* X *функцию можно представить как предел неубывающей последовательности неотрицательных измеримых ступенчатых функций.*

Доказательство. Пусть $f \in S^+(X)$, где символом $S^+(X) = S^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ обозначено множество неотрицательных измеримых на X функций. Разобьём луч $\mathbb{R}_+$ (область изменения функции f) на полуинтервал $[0,\ n)$ и луч $[n,\ +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Полуинтервал $[0,\ n)$ разобьём на полуинтервалы $[l-1,\ l)$ $(l = 1, 2, \dots, n)$ единичной длины, каждый из которых, в свою очередь, разобьём на 2^n равных полуинтервалов, содержащих левый и не содержащих правый конец.

Построим множества

$$X_{n,0} = X(f \geq n)$$

и

$$X_{n,k} = X\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right),\ k = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n.$$

Из определения множеств $X_{n,k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n)$ очевидным образом следует, что

$$X = X_{n,0} \dot\bigcup \left(\dot\bigcup_{k=1}^{n \cdot 2^n} X_{n,k} \right).$$

Положим

$$h_n(x) = \begin{cases} n, & x \in X_{n,0}, \\ (k-1)/2^n, & x \in X_{n,k}. \end{cases}$$

Проверим, что последовательность $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ — искомая.

а) Множества $X_{n,k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n)$ по следствию из леммы 20.5 измеримы, их конечное число, поэтому функция h_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ — измеримая неотрицательная ступенчатая функция.

б) Сравним h_n и h_{n+1}.

Если x такой, что $f(x) < n$, то найдётся k $(1 \le k \le n \cdot 2^n)$: $x \in X_{n,k}$ и $h_n(x) = \dfrac{k-1}{2^n}$. При переходе от n к $n+1$ каждый полуинтервал $\left[\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k}{2^n}\right)$ разбивается на два, поэтому либо $x \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right)$ и тогда $h_{n+1}(x) = \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} = \dfrac{k-1}{2^n}$, либо $x \in \left[\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right)$ и тогда $h_{n+1}(x) = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$. В обоих случаях $h_{n+1}(x) \ge h_n(x)$.

Если же $f(x) \ge n$, то $h_n(x) = n$, а $h_{n+1}(x) \ge n = h_n(x)$.

Итак, для каждого $x \in X$ последовательность $(h_n(x))$ не убывает.

в) Покажем, что $h_n(x) \to f(x)$ для каждого $x \in X$.

Если $f(x) = +\infty$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$h_n(x) = n \to +\infty = f(x).$$

Если же $f(x) < +\infty$, то найдётся n_0 такое, что при $n \ge n_0$ будет выполняться неравенство $f(x) < n$. Но тогда для каждого $n \ge n_0$ найдётся значение $k = k(n)$ такое, что $(k-1)/2^n \le f(x) < k/2^n$. При этом $h_n(x) = (k-1)/2^n$, поэтому

$$0 \le f(x) - h_n(x) < \frac{1}{2^n}, \tag{20.46}$$

следовательно, $h_n(x) \to f(x)$.

Теорема доказана. ■

Следствие 20.2. *Если f — неотрицательная измеримая ограниченная на X функция, то найдётся неубывающая последовательность ступенчатых измеримых функций, сходящаяся к f равномерно на X.*

Доказательство. Если f ограничена на X, то найдётся такое n_0, что $f(x) \le n_0$ всюду на X. Но тогда для последовательности (h_n), построенной при доказательстве теоремы, для каждого $n > n_0$ и для каждого $x \in X$ имеем (20.46), откуда и вытекает сформулированное утверждение. ■

20.4 Интеграл

Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том,что, в отличие от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это позволяет расширить класс интегрируемых функций. Кроме того, интеграл Лебега вводится совершенно одинаково на любом пространстве с мерой, в то время как интеграл Римана вводится сначала для функций одной переменной, а затем уже переносится на случай функций нескольких переменных. Для функций же, определённых на абстрактном пространстве с мерой, римановский интеграл вообще не может быть определён.

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, которая по-прежнему предполагается σ-аддитивной и полной, а $S(X, \mathcal{M}, \mu) = S(X)$ — множество измеримых по мере μ на множестве X функций. В дальнейшем, если не оговорено противное, все рассматриваемые множества предполагаются принадлежащими σ-алгебре $\mathcal{M}$, а функции — измеримыми.

Построение интеграла Лебега будет произведено в три приёма: сначала определим интеграл для ступенчатой функции, затем распространим его на неотрицательные измеримые функции, а затем уже — на произвольные измеримые функции.

Интеграл от ступенчатой функции

Пусть h — измеримая ступенчатая функция, причём в её представлении 20.44 все множества X_k измеримы.

Определение 20.36. *Назовем интегралом от ступенчатой функции h по множеству X и мере μ выражение*

$$\int\limits_X h(x)d\mu = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu X_k. \tag{20.47}$$

Отметим прежде всего, что определение интеграла от ступенчатой функции корректно в том смысле, что его величина не зависит от представления 20.44 функции h. Действительно, среди всех представлений функции h имеется единственное представление 20.45, в котором все c'_j различны. Поэтому, следуя описанному выше переходу от представления 20.44 к представлению 20.45 и используя аддитивность меры, имеем:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mu X_k = \sum_{j=1}^{l} c'_j \left(\sum_{k:\, c_k = c'_j} \mu X_k \right) = \sum_{j=1}^{l} c'_j \ \mu \left(\bigcup_{k:\, c_k = c'_j} X_k \right) = \sum_{j=1}^{l} c'_j \ \mu X'_j \ .$$

Таким образом, интеграл от ступенчатой функции не зависит от её представления.

Изучим свойства интеграла от ступенчатой функции.

1) *Если $\mu X = 0$, то* $\int\limits_X h(x)d\mu = 0.$

Это свойство очевидно.

2) $\int\limits_X \alpha h(x)d\mu = \alpha \int\limits_X h(x)d\mu.$

И это свойство очевидно.

3) $\int\limits_X (h_1(x) + h_2(x))\, d\mu = \int\limits_X h_1(x)d\mu + \int\limits_X h_2(x)d\mu.$

Пусть $h_1 = (X_k, c_k)_{k=1}^m$, $h_2 = (X'_j, c'_j)_{j=1}^l$. Введём в рассмотрение множества

$$X_{k,j} = X_k \bigcap X'_j \ (k = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, l).$$

Очевидно, что

$$X_k = \bigcup_{j=1}^{l}{}^{\cdot}\ X_{k,j}, \quad X'_j = \bigcup_{k=1}^{m}{}^{\cdot}\ X_{k,j}, \quad X = \bigcup_{k=1}^{m}{}^{\cdot}\ \bigcup_{j=1}^{l}{}^{\cdot}\ X_{k,j}$$

и что $h_1(x) + h_2(x) = c_k + c'_j$, если $x \in X_{k,j}$ $(k = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, l)$. Поэтому функция $h_1 + h_2$ — ступенчатая и

$$\int\limits_X [h_1(x) + h_2(x)]d\mu = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(c_k + c'_j)\mu X_{k,j} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} c'_j\,\mu X_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{l}\mu X_{k,j} + \sum_{j=1}^{l} c'_j \sum_{k=1}^{m}\mu X_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} c_k\,\mu X_k + \sum_{j=1}^{l} c'_j\,\mu X'_j = \int\limits_X h_1(x)d\mu + \int\limits_X h_2(x)d\mu.$$

4) *Если* $X = X' \bigcup\limits^{\cdot} X''$, *то*

$$\int\limits_X h(x)d\mu = \int\limits_{X'} h(x)d\mu + \int\limits_{X''} h(x)d\mu.$$

Пусть $h = (X_k, c_k)_{k=1}^m$. Положим

$$X'_k = X' \bigcap X_k\,, \quad X''_k = X'' \bigcap X_k\,, \quad k = 1, 2, \dots, m\,.$$

Тогда $X_k = X'_k \bigcup\limits^{\cdot} X''_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ и

$$\int\limits_X h(x)d\mu = \sum_{k=1}^{m} c_k\,\mu X_k = \sum_{k=1}^{m} c_k(\mu X'_k + \mu X''_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k\,\mu X'_k + \sum_{k=1}^{m} c_k\,\mu X''_k = \int\limits_{X'} h(x)d\mu + \int\limits_{X''} h(x)d\mu\,.$$

5) *Если всюду на* X *выполняется неравенство* $h_1(x) \le h_2(x)$, *то и*

$$\int\limits_X h_1(x)d\mu \le \int\limits_X h_2(x)d\mu\,.$$

Если $h(x) \ge 0$ на X, то из определения интеграла от ступенчатой функции (см. (20.47)) следует, что $\int\limits_X h(x)d\mu \ge 0$. Поэтому $\int\limits_X \big(h_2(x) - h_1(x)\big)d\mu \ge 0$. Далее применяем свойства 2 и 3.

6) *Если последовательность неотрицательных функций* $(h_n)_{n=1}^\infty$ *не возрастает и сходится к нулю почти всюду на множестве* X, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_n(x)d\mu = 0\,. \tag{20.48}$$

Если $\mu X = 0$, то доказывать нечего, так как все интегралы равны нулю. Предположим поэтому, что $\mu X > 0$. Так как ступенчатая функция h_1 имеет конечное число значений, то она ограничена, поэтому существует $M > 0$ такое, что $h_1(x) \le M$ на множестве X. Тогда, ввиду невозрастания и неотрицательности последовательности $(h_n)_{n=1}^\infty$, будем иметь

$$0 \le h_n(x) \le M \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in X). \tag{20.49}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$. По теореме Егорова (теорема 20.24) найдётся измеримое множество $X_\delta \subset X$ такое, что $\mu X_\delta < \delta$ и последовательность (h_n) сходится к нулю равномерно на множестве $X \setminus X_\delta$. Но тогда найдётся n_0 такое, что при $n > n_0$ будет выполняться условие

$$0 \le h_n(x) < \frac{\varepsilon}{2\mu X} \quad (x \in X \setminus X_\delta)\,. \tag{20.50}$$

Образуем ступенчатую функцию h_ε, положив $h_\varepsilon(x) = M$, если $x \in X_\delta$, и $h_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{2\mu X}$, если $x \in X \setminus X_\delta$. Ввиду (20.49) и (20.50) выполняется условие $h_n(x) \le h_\varepsilon(x)$ при $n > n_0$ и любом $x \in X$, поэтому по свойству 5 при $n > n_0$ имеем:

$$0 \le \int\limits_X h_n(x)d\mu \le \int\limits_X h_\varepsilon(x)d\mu = M \cdot \mu X_\delta + \frac{\varepsilon}{2\mu X} \cdot \mu(X \setminus X_\delta) <$$

$$< M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2\mu X} \cdot \mu X = M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Свойство 6 доказано.

7) *Если последовательность неотрицательных функций* $(h_n)_{n=1}^\infty$ *не возрастает и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu = 0,$$

то эта последовательность сходится к нулю почти всюду на X.

Снова будем считать, что $\mu X > 0$, так как в противном случае это свойство столь же очевидно, как и все предыдущие. Так как последовательность (h_n) не возрастает и ограничена снизу, то она сходится в каждой точке x множества X. Пусть

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \quad (x \in X)\,.$$

Так как $h_n(x) \ge 0$ при всех n, то и $g(x) \ge 0$. Покажем, что $g(x) = 0$ почти всюду на X. Очевидно,

$$X_0 = X(g \ne 0) = \bigcup_{m=1}^\infty X\left(g \ge \frac{1}{m}\right) = \bigcup_{m=1}^\infty X_m\,.$$

Пусть мера хотя бы одного из множеств X_m положительна, скажем, $\mu X_{m_0} = \delta_0 > 0$. Введём ступенчатую функцию h_0, положив $h_0(x) = 1/m_0$, если $x \in X_{m_0}$, и $h_0(x) = 0$, если $x \in X \setminus X_{m_0}$. Тогда

$$h_n(x) \ge g(x) \ge h_0(x) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in X)$$

и по свойству 5

$$\int\limits_X h_n(x)d\mu \ge \int\limits_X h_0(x)d\mu = \frac{1}{m_0} \cdot \mu X_0 + 0 \cdot \mu(X \setminus X_0) = \frac{1}{m_0} \cdot \delta_0 > 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

что противоречит условию.

Итак, для каждого $m \in \mathbb{N}$ $\mu X_m = 0$ и по свойству σ-полуаддитивности меры

$$\mu X_0 \le \sum_{m=1}^\infty \mu X_m = 0\,.$$

Свойство 7 доказано.

Интеграл от неотрицательной измеримой функции

Если $f \in S^+(X)$, то по теореме об аппроксимации (теорема 20.27) найдётся неубывающая последовательность $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных измеримых ступенчатых функций, сходящаяся к f на множестве X. По свойству 5 интеграла от ступенчатой функции последовательность интегралов $\left(\int\limits_X h_n(x)d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ в таком случае тоже не убывает и потому имеет предел (конечный или бесконечный).

Определение 20.37. *Назовём интегралом от функции f по множеству X и мере μ выражение*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu\,. \tag{20.51}$$

Если $\int\limits_X f(x)d\mu$ принимает конечное значение, то функцию f будем называть интегрируемой (или суммируемой) на множестве X и множество всех таких функций будем обозначать символом $L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ или, короче, $L^+(X)$, если мера μ была определена ранее.

Ещё раз подчеркнём, что интеграл существует для каждой неотрицательной измеримой функции, но может быть равным бесконечности.

Прежде чем изучать свойства интеграла от неотрицательной измеримой функции, необходимо доказать корректность его определения, то есть, независимость значения интеграла от выбора последовательности $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых функций. Докажем более общее утверждение.

Лемма 20.8. *Пусть $f, g \in S^+(X)$ и $f(x) \le g(x)$ $(x \in X)$. Пусть $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательности измеримых неотрицательных ступенчатых функций, не убывая сходящиеся на X к функциям f и g соответственно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x)d\mu\,. \tag{20.52}$$

Доказательство. Рассмотрим разность $h_m - k_n$ при зафиксированном $m \in \mathbb{N}$ и переменном n. Так как $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает, то разность $h_m - k_n$ не возрастает, поэтому имеет предел при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \big(h_m(x) - k_n(x)\big) \le \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - k_n(x)\big) = f(x) - g(x) \le 0$$

для каждого $x \in X$.

Но тогда последовательность положительных частей $(h_m - k_n)^+$ тоже не возрастает и

$$\lim_{n\to\infty} \big(h_m(x) - k_n(x)\big)^+ = 0$$

всюду на X.

По свойству 6 интегралов от ступенчатых функций

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \big(h_m(x) - k_n(x)\big)^+ d\mu = 0\,.$$

Но тогда, так как $h_m(x) - k_n(x) \le \big(h_m(x) - k_n(x)\big)^+$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \big(h_m(x) - k_n(x)\big) d\mu \le 0$$

(поскольку последовательность интегралов не возрастает, то предел, конечный или равный $-\infty$, существует). Из последнего неравенства находим, что

$$\int\limits_X h_m(x) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x) d\mu\,.$$

Отсюда после предельного перехода по m получаем (20.52). ■

Полагая в лемме $f(x) = g(x)$ $(x \in X)$ и беря две последовательности измеримых неотрицательных ступенчатых функций, не убывая сходящихся к f, будем иметь с одной стороны

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x) d\mu\,,$$

а с другой, ввиду полной симметрии,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x) d\mu\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x) d\mu\,.$$

Этим установлена корректность определения интеграла от неотрицательной измеримой функции.

А из корректности определения интеграла следует, что для неотрицательной измеримой ступенчатой функции интеграл по определению 20.37 совпадает с интегралом по определению 20.36. Для проверки этого утверждения достаточно положить $h_n(x) = h(x)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Приступим к изучению свойств интеграла от неотрицательных измеримых функций.

1) *Если $\mu X = 0$, то $\int\limits_X f(x) d\mu = 0$ для любой неотрицательной функции.*

На множестве нулевой меры любая функция измерима, так как мера μ предполагается полной, поэтому все подмножества множества X измеримы. Для ступенчатых функций свойство очевидно. Для любых неотрицательных функций оно устанавливается предельным переходом.

2) *Если $\alpha \ge 0$, то*

$$\int\limits_X \alpha f(x) d\mu = \alpha \int\limits_X f(x) d\mu\,,$$

при этом, если $f \in L^+(X)$, то и $\alpha f \in L^+(X)$.

Если $f \ge 0$, то и $\alpha f \ge 0$ $(x \in X)$. Если $h_n \nearrow f$, то и $\alpha h_n \nearrow \alpha f$ $(x \in X)$, поэтому

$$\int\limits_X \alpha f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \alpha h_n(x) d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x) d\mu = \alpha \int\limits_X f(x) d\mu\,.$$

Второе утверждение очевидно.

3) *Если* $f, g \in S^+(X)$, *то*

$$\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu\,,$$

при этом, если $f, g \in L^+(X)$, *то и* $f+g \in L^+(X)$.

Пусть $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$ $(x \in X)$. Тогда $h_n + k_n \nearrow f+g$ на X и

$$\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \big(h_n(x)+k_n(x)\big)d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X k_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu\,.$$

Второе утверждение очевидным образом вытекает из доказанного равенства.

4) *Если* $X = X' \bigsqcup X''$, *где* $X', X'' \in \mathcal{M}$, *то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_{X'} f(x)d\mu + \int\limits_{X''} f(x)d\mu\,.$$

При этом, если $f \in L^+(X)$, *то* $f \in L^+(X'), L^+(X'')$, *и наоборот.*

Если $h_n \nearrow f$ на X, то $h_n \nearrow f$ как на X', так и на X''. Наоборот, если $h'_n \nearrow f$ на X' и $h''_n \nearrow f$ на X'', то, положив $h_n(x) = h'_n(x)$, если $x \in X'$, и $h_n(x) = h''_n(x)$, если $x \in X''$, получим: $h_n \nearrow f$ на X. Далее используем свойство 3 интеграла от ступенчатых функций и совершаем предельный переход.

5) *Если* $f(x) \le g(x)$ $(x \in X)$, *то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu \le \int\limits_X g(x)d\mu\,,$$

в частности, если $g \in L^+(X)$, *то и* $f \in L^+(X)$.

Это свойство фактически есть лемма 20.8.

6) *Если* $f \in L^+(X)$, *то* $\mu X(f = +\infty) = 0$. *Другими словами, неотрицательная интегрируемая на множестве* X *функция почти всюду на множестве* X *принимает конечные значения.*

Предположим, что это не так. Тогда $\mu X_0 = \mu X(f = +\infty) = a > 0$. Построим последовательность функций

$$h_n(x) = \begin{cases} n, & x \in X_0, \\ 0, & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Поскольку $f(x) \ge h_n(x)$ $(x \in X,\ n \in \mathbb{N})$, то по предыдущему свойству

$$\int\limits_X f(x)d\mu \ge \int\limits_X h_n(x)d\mu = n \cdot a.$$

Так как здесь $a > 0$, а $n \in \mathbb{N}$ — любое, то $\int\limits_X f(x)d\mu$ не может быть конечным, что противоречит условию.

7) (Неравенство Чебышёва) *Если* $f \in L^+(X)$*, то*

$$\mu X(f \geq c) \leq \frac{1}{c} \int\limits_X f(x) d\mu \ (c > 0)\,.$$

Пусть $c > 0$. Положим $X_c = X(f \geq c)$. Тогда

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_{X_c} f(x) d\mu + \int\limits_{X \setminus X_c} f(x) d\mu \geq \int\limits_{X_c} f(x) d\mu \geq c \cdot \mu X_c\,.$$

Разделив на c, получим неравенство Чебышёва.

8) *Если* $f \in S^+(X)$ *и* $\int\limits_X f(x) d\mu = 0$*, то* $f(x) = 0$ *почти всюду на* X*.*

Легко проверить, что $X(f > 0) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X\left(f \geq \frac{1}{n}\right)$. По неравенству Чебышёва

$$\mu X\left(f \geq \frac{1}{n}\right) \leq n \cdot \int\limits_X f(x) d\mu = 0.$$

Тогда по свойству σ-полуаддитивности меры $\mu X(f > 0) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu X\left(f \geq \frac{1}{n}\right) = 0$.

9) *Если* $f \sim g$*, то*

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X g(x) d\mu\,,$$

следовательно, если одна из функций интегрируема на множестве X*, то и другая тоже.*

Пусть $X' = X(f \neq g)$, $X'' = X \setminus X'$. По условию $\mu X' = 0$, по построению $f(x) = g(x)$, если $x \in X''$. Используя свойства 4 и 1, имеем:

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_{X'} f(x) d\mu + \int\limits_{X''} f(x) d\mu = \int\limits_{X'} g(x) d\mu + \int\limits_{X''} g(x) d\mu = \int\limits_X g(x) d\mu\,.$$

Теорема 20.28 (Леви́). *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$*, где функции* f_k $(k \in \mathbb{N})$ *неотрицательны и измеримы на* X*. Тогда* f *измерима на* X *и*

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x) d\mu\,. \tag{20.53}$$

Доказательство. Пусть $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Функции s_n измеримы на X для любого $n \in \mathbb{N}$ по свойству 3 измеримых функций, поэтому функция f измерима на X по теореме 20.22 как предел последовательности измеримых функций. Остаётся доказать равенство (20.53).

Так как $f(x) \geq s_n(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$, то по свойствам 5 и 3

$$\int\limits_X f(x) d\mu \geq \int\limits_X s_n(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k(x) d\mu\,.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu\,. \tag{20.54}$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Пусть последовательность ступенчатых функций $h_{k,\,j} \nearrow f_k$ при $j \to \infty$ и любых $x \in X$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} h_{k,\,n}(x)\,.$$

Функции g_n, как суммы неотрицательных измеримых ступенчатых функций, суть неотрицательные измеримые ступенчатые функции. Последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает, поскольку

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} h_{k,\,n+1}(x) \geq \sum_{k=1}^{n} h_{k,\,n}(x) = g_n(x)\,,$$

поэтому последовательность (g_n) сходится на X к некоторой функции g, очевидно, неотрицательной и измеримой по теореме 20.22.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и возьмём любое $p \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} h_{k,\,n+p}(x) \leq \sum_{k=1}^{n+p} h_{k,\,n+p}(x) = g_{n+p}(x) \leq \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) \leq f(x)\,.$$

Устремив p к ∞, получим отсюда

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq g(x) \leq f(x)\,.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, то из последнего неравенства заключаем, что $g(x) = f(x)$ $(x \in X)$. Следовательно,

$$g_n \nearrow f \quad (x \in X)\,.$$

Но тогда

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} h_{k,\,n}(x)d\mu \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} f_k(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu\,.$$

Отсюда и из (20.54) следует (20.53).

Теорема доказана. ■

Следствие 20.3. *Если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — монотонно не убывающая последовательность неотрицательных измеримых функций и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$, то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu\,. \tag{20.55}$$

Доказательство. Введём функции $\varphi_1(x) = f_1(x)$, $\varphi_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$ $(k \geq 2)$. Функции φ_k измеримы и неотрицательны на X, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$, поэтому по теореме Леви

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_k(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X \varphi_k(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu\,.$$

■

Замечание 20.4. *Как в* (20.53), *так и в* (20.55) *обе части равенства могут быть бесконечными.*

Замечание 20.5. *Часто следствие из теоремы Леви называют теоремой Леви и наоборот.*

Теорема 20.29 (Фату́). *Пусть* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность неотрицательных измеримых на* X *функций. Тогда*

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n(x)d\mu \leq \underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu\,. \tag{20.56}$$

Доказательство. По теореме 2.26 из темы "Предел последовательности" для каждого $x \in X$ имеем:

$$\underline{\lim}\, f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \inf_{k\geq n} \{f_k(x)\} \right\}.$$

Положим $g_n(x) = \inf\limits_{k\geq n} \{f_k(x)\}$. Тогда, очевидно,

$$g_n(x) \leq f_n(x)\ \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{20.57}$$

Так как с увеличением номера n число элементов во множестве $\{f_k(x) : k \geq n\}$ становится меньше, то последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает, поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, причём

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n(x)\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \inf_{k\geq n} \{f_k(x)\} \right\} = \underline{\lim}\, f_n(x)\,.$$

Используя следствие из теоремы Леви, получаем:

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n(x)d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu\,. \tag{20.58}$$

Рассмотрим $\left(\int\limits_X f_n(x)d\mu \right)_{n=1}^{\infty}$. Эта последовательность имеет (конечный или равный $+\infty$) нижний предел, поэтому найдётся последовательность номеров $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$\underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \lim_{j\to\infty} \int\limits_X f_{n_j}(x)d\mu\,. \tag{20.59}$$

Продолжая (20.58) с использованием (20.59) и (20.57), получим:

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu = \lim_{j\to\infty} \int\limits_X g_{n_j}(x)d\mu \leq \lim_{j\to\infty} \int\limits_X f_{n_j}(x)d\mu = \underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu\,.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 20.4. *Пусть* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных измеримых на* X *функций, сходящаяся почти всюду на* X *к неотрицательной функции* f_0*, и*

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu \le C \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Тогда и

$$\int\limits_X f_0(x)d\mu \le C .$$

Доказательство. Функция $\underline{\lim}\, f_n$ по условию неотрицательна, по теореме 20.22 — измерима. Поскольку по условию функция f_0 эквивалентна функции $\underline{\lim}\, f_n$, то она по лемме 20.7 тоже измерима.

Используя свойство 9 интеграла от неотрицательной функции и теорему Фату, имеем:

$$\int\limits_X f_0(x)d\mu = \int\limits_X \underline{\lim}\, f_n(x)d\mu \le \underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu \le C ,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 20.6. *В* (20.56) *возможно строгое неравенство.*

В качестве примера на отрезке $[0;\ 1]$ с мерой Лебега рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 \le x \le 1/n, \\ 0, & 1/n < x \le 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu = n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = 1 \ (n \in \mathbb{N}) ,$$

следовательно, и $\underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu = 1$. Но так как

$$f_0(x) = \underline{\lim}\, f_n(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

то $f_0(x) \sim g(x) \equiv 0$, поэтому $\int\limits_X f_0(x)d\mu = \int\limits_X g(x)d\mu = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n(x)d\mu < \underline{\lim} \int\limits_X f_n(x)d\mu .$$

Интеграл от произвольной измеримой функции

Пусть f — произвольная измеримая на множестве X функция. Тогда (см. определение 20.30) её можно представить в виде

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) .$$

Функции f^+ и f^- неотрицательны и по свойству 7 измеримых функций измеримы на множестве X.

Определение 20.38. *Интегралом от функции f по множеству X и мере μ назовём выражение*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f^+(x)d\mu - \int\limits_X f^-(x)d\mu\,. \tag{20.60}$$

Из этого определения видно, что интеграл определён не всегда. Возможны четыре случая.

1) Интегралы $\int\limits_X f^+(x)d\mu$ и $\int\limits_X f^-(x)d\mu$ оба принимают конечные значения. В этом случае $\int\limits_X f(x)d\mu$ тоже принимает конечное значение.

2) Интеграл $\int\limits_X f^+(x)d\mu$ бесконечен, а интеграл $\int\limits_X f^-(x)d\mu$ конечен. В этом случае $\int\limits_X f(x)d\mu = +\infty$.

3) Наоборот, интеграл $\int\limits_X f^+(x)d\mu$ конечен, а интеграл $\int\limits_X f^-(x)d\mu$ бесконечен. В этом случае $\int\limits_X f(x)d\mu = -\infty$.

4) Интегралы $\int\limits_X f^+(x)d\mu$ и $\int\limits_X f^-(x)d\mu$ оба бесконечны. В этом случае $\int\limits_X f(x)d\mu$ не существует.

Определение 20.39. *Назовем функцию f интегрируемой или суммируемой* (*по Лебегу*) *на множестве X по мере μ, если $\int\limits_X f(x)d\mu$ существует и конечен.*

Множество всех интегрируемых на X по мере μ функций обозначим символом $L(X, \mathcal{M}, \mu)$ или, короче, $L(X)$.

Очевидно, $L^+(X) \subset L(X)$.

Из вышесказанного следует, что $f \in L^(X)$ тогда и только тогда, когда $f^+, f^- \in L^+(X)$.

Изучим свойства интеграла.

1) *Если $\mu X = 0$, то для любой функции f*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = 0.$$

Справедливость этого свойства следует из аналогичного свойства интеграла от неотрицательных функций.

2) *Функция f интегрируема на X тогда и только тогда, когда на X интегрируема функция $|f|$. При этом*

$$\left|\int\limits_X f(x)d\mu\right| \le \int\limits_X |f(x)|d\mu\,. \tag{20.61}$$

Пусть $f \in L(X)$. Тогда $f^+, f^- \in L^+(X)$. Так как $|f| = f^+ + f^-$, то по свойству 3 интеграла от неотрицательной функции $|f| \in L^+(X)$.

Наоборот, пусть $|f| \in L^+(X)$. Поскольку $f^+(x), f^-(x) \le |f(x)|$, то по свойству 5 интеграла от неотрицательных функций $f^+, f^- \in L^+(X)$, следовательно, $f \in L(X)$.

Неравенство (20.61) следует из того, что $\int\limits_X f(x)d\mu$ есть разность двух неотрицательных чисел, а $\int\limits_X |f(x)|d\mu$ — их сумма.

3) *Если $f \sim g$ и интеграл от f существует, то существует и интеграл от g и*

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu\,.$$

Если $f \sim g$, то, очевидно, $f^+ \sim g^+$, $f^- \sim g^-$. Остаётся воспользоваться определением интеграла и свойством 9 интеграла от неотрицательных функций.

Следствие 20.5. *Если $f \in L(X)$, $g \sim f$, то $g \in L(X)$.*

4) *Если $f \in L(X)$, то $\mu X(f = \pm\infty) = 0$.*

Если $f \in L(X)$, то $f^+, f^- \in L^+(X)$, поэтому по свойству 8 интеграла от неотрицательных функций $\mu X(f^+ = +\infty) = 0$, $\mu X(f^- = +\infty) = 0$. Но тогда

$$\mu X(f = \pm\infty) = \mu\left(X(f^+ = +\infty) \bigcup\!\!\cdot\; X(f^- = +\infty)\right) = 0$$

в силу аддитивности меры.

5) *Если $X = X' \bigcup\!\!\cdot\; X''$ $(X', X'' \in \mathcal{M}(X))$ и интеграл $\int\limits_X f(x)d\mu$ существует, то существуют и интегралы $\int\limits_{X'} f(x)d\mu$, $\int\limits_{X''} f(x)d\mu$ и*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_{X'} f(x)d\mu + \int\limits_{X''} f(x)d\mu\,. \tag{20.62}$$

Если существует $\int\limits_X f(x)d\mu$, то хотя бы один из интегралов $\int\limits_X f^+(x)d\mu$, $\int\limits_X f^-(x)d\mu$, например первый, конечен. Но тогда конечны и интегралы $\int\limits_{X'} f^+(x)d\mu$, $\int\limits_{X''} f^+(x)d\mu$, поэтому оба интеграла в правой части равенства (20.62) существуют. Само равенство (20.62) теперь следует из определения интеграла и свойства 4 интеграла от неотрицательных функций.

Замечание 20.7. *Существование каждого из интегралов в правой части равенства (20.62) не влечёт за собой существования $\int\limits_X f(x)d\mu$.*

Пример 20.24. *Пусть $f(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in X', \\ -\infty, & x \in X'', \end{cases}$ $(\mu X', \mu X'' > 0)$. Тогда $\int\limits_{X'} f(x)d\mu = +\infty$, $\int\limits_{X''} f(x)d\mu = -\infty$, а $\int\limits_X f(x)d\mu$, как нетрудно заметить, не существует.*

Следствие 20.6. *Если $f \in L(X)$ $(X = X' \bigcup\limits^{\cdot} X'')$, то $f \in L(X')$ и $f \in L(X'')$. Наоборот, если $f \in L(X')$ и $f \in L(X'')$, то $f \in L(X)$. В обоих случаях справедливо равенство (20.62).*

В справедливости этого утверждения легко убедиться, если использовать свойство 4 интеграла от неотрицательных функций и определение интеграла.

6) *Если существует $\int\limits_X f(x)d\mu$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то существует и $\int\limits_X \alpha f(x)d\mu$, причём*

$$\int\limits_X \alpha f(x)d\mu = \alpha \int\limits_X f(x)d\mu\,.$$

Если существует $\int\limits_X f(x)d\mu$, то в правой части равенства

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f^+(x)d\mu - \int\limits_X f^-(x)d\mu$$

один из интегралов конечен, например, первый. Поскольку

$$\alpha f(x) = \begin{cases} \alpha f^+(x) - \alpha f^-(x), & \alpha \geq 0, \\ |\alpha| f^-(x) - |\alpha| f^+(x), & \alpha < 0, \end{cases}$$

то, по определению,

$$\int\limits_X \alpha f(x)d\mu = \begin{cases} \int\limits_X \alpha f^+(x)d\mu - \int\limits_X \alpha f^-(x)d\mu, & \alpha \geq 0, \\ \int\limits_X |\alpha| f^-(x)d\mu - \int\limits_X |\alpha| f^+(x)d\mu, & \alpha < 0. \end{cases}$$

По свойству 2 интеграла от неотрицательных функций в правой части последнего равенства конечен интеграл, содержащий $f^+(x)$, поэтому интеграл слева существует. По тому же свойству

$$\int\limits_X \alpha f(x)d\mu = \begin{cases} \alpha \int\limits_X f^+(x)d\mu - \alpha \int\limits_X f^-(x)d\mu, & \alpha \geq 0, \\ |\alpha| \int\limits_X f^-(x)d\mu - |\alpha| \int\limits_X f^+(x)d\mu, & \alpha < 0. \end{cases} =$$

$$= \alpha \left(\int\limits_X f^+(x)d\mu - \int\limits_X f^-(x)d\mu \right) = \alpha \int\limits_X f(x)d\mu\,.$$

Следствие 20.7. *Если $f \in L(X)$, то $\alpha f \in L(X)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.*

7) *Если существуют интегралы $\int\limits_X f(x)d\mu$ и $\int\limits_X g(x)d\mu$ и хотя бы один из них конечен, то $\int\limits_X \big(f(x) + g(x)\big)d\mu$ существует и*

$$\int\limits_X \big(f(x) + g(x)\big)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu\,. \tag{20.63}$$

Пусть конечен $\int\limits_X f(x)d\mu$. Тогда конечны $\int\limits_X f^+(x)d\mu$ и $\int\limits_X f^-(x)d\mu$, а также один из интегралов $\int\limits_X g^+(x)d\mu$ или $\int\limits_X g^-(x)d\mu$, например, первый. По свойству 4 интеграла от неотрицательных функций интегралы от указанных функций по любому измеримому подмножеству множества X будут также конечны. Нам нужно доказать, что один из интегралов $\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)^+d\mu$, $\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)^-d\mu$ конечен, а затем установить равенство (20.63).

Разобьём множество X на шесть подмножеств:

$$X_1 = X(f \ge 0, g \ge 0)\,, \quad X_4 = X(f < 0, g < 0)\,,$$

$$X_2 = X(f \ge 0, g < 0, f+g \ge 0)\,, \quad X_5 = X(f \ge 0, g < 0, f+g < 0)\,,$$
$$X_3 = X(f < 0, g \ge 0, f+g \ge 0)\,, \quad X_6 = X(f < 0, g \ge 0, f+g < 0)\,.$$

Очевидно, что $X = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{6}} X_i$, и что

$$(f+g)^+(x) = \begin{cases} f(x)+g(x), & x \in \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{3}} X_i\,, \\ 0, & x \in \dot{\bigcup\limits_{i=4}^{6}} X_i\,, \end{cases}$$

$$(f+g)^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{3}} X_i\,, \\ -\big(f(x)+g(x)\big), & x \in \dot{\bigcup\limits_{i=4}^{6}} X_i\,. \end{cases}$$

На множестве X_1 функции f и g неотрицательны, поэтому по свойству 3 интеграла от неотрицательных функций

$$\int\limits_{X_1} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_1} f(x)d\mu + \int\limits_{X_1} g(x)d\mu\,, \tag{20.64}$$

причём все интегралы, по предположению, конечны.

На множестве X_2 $-g(x) \le f(x)$, $\int\limits_{X_2} f(x)d\mu$, по предположению, конечен, поэтому конечен и $\int\limits_{X_2} \big(-g(x)\big)d\mu$, или, по свойству 6, $\int\limits_{X_2} g(x)d\mu$. Далее, в равенстве

$$f(x) = \big(f(x)+g(x)\big) + \big(-g(x)\big)$$

обе функции справа неотрицательны, поэтому по свойству 3 интеграла от неотрицательных функций и свойству 6

$$\int\limits_{X_2} f(x)d\mu = \int\limits_{X_2} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu - \int\limits_{X_2} g(x)d\mu$$

или

$$\int\limits_{X_2} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_2} f(x)d\mu + \int\limits_{X_2} g(x)d\mu\,, \tag{20.65}$$

причём все интегралы в этом равенстве конечны.

На множестве X_3 $g(x) = \big(f(x)+g(x)\big) + \big(-f(x)\big)$, поэтому, как и выше,

$$\int\limits_{X_3} g(x)d\mu = \int\limits_{X_3} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu - \int\limits_{X_3} f(x)d\mu$$

или

$$\int\limits_{X_3} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_3} f(x)d\mu + \int\limits_{X_3} g(x)d\mu\,, \tag{20.66}$$

и снова все интегралы в равенстве (20.66), по предположению, конечны.

Тогда, по свойству 4 интеграла от неотрицательных функций,

$$\int\limits_{X} \big(f(x)+g(x)\big)^+ d\mu =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{3} X_i} \big(f(x)+g(x)\big)^+ d\mu + \int\limits_{\bigcup\limits_{i=4}^{6} X_i} 0\cdot d\mu = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{X_i} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu\,, \tag{20.67}$$

причём, как следует из выше сказанного, этот интеграл конечен.

На множестве X_4 $-\big(f(x)+g(x)\big) = \big(-f(x)\big) + \big(-g(x)\big)$, поэтому по тем же свойствам 3 интеграла от неотрицательных функций и 6

$$\int\limits_{X_4} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_4} f(x)d\mu + \int\limits_{X_4} g(x)d\mu\,. \tag{20.68}$$

По предположению, $\int\limits_{X_4} f(x)d\mu$ конечен, $\int\limits_{X_4} g(x)d\mu$ может быть равен $-\infty$, поэтому и интеграл слева или конечен, или равен $-\infty$.

Рассуждая аналогично, для множеств X_5, X_6 тоже получим равенства

$$\int\limits_{X_5} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_5} f(x)d\mu + \int\limits_{X_5} g(x)d\mu\,, \tag{20.69}$$

$$\int\limits_{X_6} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_{X_6} f(x)d\mu + \int\limits_{X_6} g(x)d\mu\,, \tag{20.70}$$

причём интеграл слева в (20.69) может быть равен $-\infty$, а в (20.70), по сделанным предположениям, конечен.

Тогда по свойствам 4 интеграла от неотрицательных функций и 6

$$\int\limits_{X} \big(f(x)+g(x)\big)^- d\mu =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{3} X_i} 0\cdot d\mu + \int\limits_{\bigcup\limits_{i=4}^{6} X_i} \Big(-\big(f(x)+g(x)\big)\Big)d\mu = -\sum_{i=4}^{6} \int\limits_{X_i} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu\,, \tag{20.71}$$

при этом в силу сказанного выше интеграл слева или конечен, или равен $+\infty$.

Таким образом, существование $\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)d\mu$ доказано. Применяя свойство 5, получаем из равенств (20.64) — (20.71)

$$\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \int\limits_X (f+g)^+(x)d\mu - \int\limits_X (f+g)^-(x)d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{X_i} \big(f(x)+g(x)\big)d\mu = \sum_{i=1}^{6} \left(\int\limits_{X_i} f(x)d\mu + \int\limits_{X_i} g(x)d\mu \right) = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu\,.$$

Остальные возможные ситуации рассматриваются совершенно аналогично. Рекомендуем читателям рассмотреть их самостоятельно.

Замечание 20.8. *В условиях свойства 7 мы можем столкнуться с ситуацией, когда в некоторых точках множества X сумма $f(x)+g(x)$ не определена (например, $f(x)=+\infty$, а $g(x)=-\infty$). Но в силу свойства 4 множество таких точек имеет меру нуль (например, при сделанных при доказательстве предположениях $\mu X(f=\pm\infty)=0$), поэтому, пользуясь свойством 3, можно ту функцию, интеграл от которой конечен, заменить эквивалентной ей всюду конечной функцией, оставив для неё прежнее обозначение. Теперь сумма определена всюду на X, а значения интегралов остались прежними.*

Следствие 20.8. *Если $f, g \in L(X)$, то $f+g \in L(X)$.*

8) *Если $f(x) \le g(x)$ почти всюду на X, то*

$$\int\limits_X f(x)d\mu \le \int\limits_X g(x)d\mu\,,$$

если оба интеграла существуют.

Переопределив одну или обе функции на множестве нулевой меры, можно считать, что $f(x) \le g(x)$ всюду на X. На существовании и величине интегралов, как следует из свойства 3, это не отразится. Нетрудно проверить, что

$$f^+(x) \le g^+(x), \quad f^-(x) \ge g^-(x) \quad (x \in X).$$

По свойству 5 интеграла от неотрицательных функций

$$\int\limits_X f^+(x)d\mu \le \int\limits_X g^+(x)d\mu, \quad \int\limits_X f^-(x)d\mu \ge \int\limits_X g^-(x)d\mu\,.$$

Вычитая из первого неравенства второе, получим требуемое.

9) *Если $|f(x)| \le g(x)$ почти всюду на X и $g \in L(X)$, то и $f \in L(X)$. При этом*

$$\left|\int\limits_X f(x)d\mu\right| \le \int\limits_X g(x)d\mu\,.$$

Переопределив, если нужно, функцию f на множестве меры нуль, можем считать, что неравенство $|f(x)| \le g(x)$ выполняется всюду на X. Осталось применить свойство 5 интеграла от неотрицательных функций и свойство 2.

Следствие 20.9. *Ограниченная почти всюду и измеримая на множестве X функция f интегрируема на X. При этом, если $m \le f(x) \le M$ почти всюду на X, то*

$$m \cdot \mu X \le \int_X f(x) d\mu \le M \cdot \mu X \, .$$

Интегрируемость f следует из того, что $|f(x)| \le \max\{|m|, \ |M|\} = c$, а ступенчатая функция $h(x) = (X, c)$, безусловно, интегрируема. Для доказательства неравенства введём в рассмотрение ступенчатые функции: $h_1(x) = (X, m)$ и $h_2(x) = (X, M)$. Тогда $h_1(x) \le f(x) \le h_2(x)$ почти всюду на X, и требуемое неравенство вытекает из доказанного свойства.

10) (Абсолютная непрерывность интеграла.) *Если $f \in L(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что*

$$\left| \int_{X_\delta} f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

по любому измеримому подмножеству $X_\delta \subset X$, такому, что $\mu X_\delta < \delta$.

В силу свойства 2 доказательство достаточно провести для неотрицательной интегрируемой функции. Итак, пусть $f \in L^+(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению интеграла от неотрицательной функции найдётся неотрицательная измеримая ступенчатая функция h такая, что $h(x) \le f(x)$ на X и

$$\int_X f(x) d\mu - \int_X h(x) d\mu = \int_X \big(f(x) - h(x) \big) d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Пусть $h(x) = (X_k \, , c_k)_{k=1}^m$ и $M = \max\{c_k : \ k = 1, 2, \ldots, m\}$. Положим $\delta = \varepsilon / 2M$ и возьмём любое $X_\delta \subset X$ такое, что $\mu X_\delta < \delta$. Тогда, полагая $h_\delta(x) = M \ (x \in X_\delta)$, имеем: $h(x) \le h_\delta(x) \ (x \in X_\delta)$ и по свойству 4 интеграла от ступенчатых функций

$$\int_{X_\delta} h(x) d\mu \le \int_{X_\delta} h_\delta(x) d\mu = M \cdot \mu X_\delta < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Но тогда

$$\int_{X_\delta} f(x) d\mu = \int_{X_\delta} f(x) d\mu - \int_{X_\delta} h(x) d\mu + \int_{X_\delta} h(x) d\mu = \int_{X_\delta} \big(f(x) - h(x) \big) d\mu +$$

$$+ \int_{X_\delta} h(x) d\mu \le \int_X \big(f(x) - h(x) \big) d\mu + \int_{X_\delta} h(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

Свойство доказано.

11) (Полная аддитивность интеграла.) *Пусть $f \in L(X)$ и множество X представлено в виде $X = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} X_k$, где все множества X_k измеримы. Тогда*

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f(x) d\mu \, .$$

Пусть сначала $f \in L^+(X)$. Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_k, \\ 0, & x \in X \setminus X_k\,. \end{cases}$$

Все функции f_k неотрицательны, измеримы по свойству 9 измеримых функций и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in X)\,.$$

В таком случае, по теореме Леви,

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f(x)d\mu\,.$$

Если теперь f — произвольная интегрируемая на X функция, то $f = f^+ - f^-$. Функции f^+ и f^- интегрируемы и неотрицательны на X, поэтому

$$\int\limits_X f^+(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f^+(x)d\mu\,, \quad \int\limits_X f^-(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f^-(x)d\mu\,.$$

Так как оба ряда, стоящие в правых частях, сходятся, то, вычитая из первого равенства второе, имеем:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f^+(x)d\mu - \int\limits_X f^-(x)d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{X_k} f^+(x)d\mu - \int\limits_{X_k} f^-(x)d\mu \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f(x)d\mu\,.$$

Теорема 20.30 (Лебег). *Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность интегрируемых на X функций, сходящаяся почти всюду на X к функции f_0. Если почти всюду на X выполняется неравенство $f_n(x) \le g(x)$ $(n \in \mathbb{N})$, где g — интегрируемая на X функция, то f_0 тоже интегрируема на X и*

$$\int\limits_X f_0(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu\,. \tag{20.72}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $|f_0(x)| \le g(x)$ почти всюду на X, поэтому по свойству 9 функция f_0 интегрируема на X. Переопределив, если нужно, функции f_n и f_0 на множестве нулевой меры (на значениях интегралов это не отразится) можно считать, что последовательность f_n сходится к f_0 всюду на X и неравенство $|f_n(x)| \le g(x)$ выполняется тоже всюду на X.

Рассмотрим последовательность функций $(g + f_n)_{n=1}^{\infty}$. Так как функции этой последовательности неотрицательны, то к ней можно применить теорему Фату, согласно которой

$$\int\limits_X \underline{\lim}\big(g(x) + f_n(x)\big)d\mu \le \underline{\lim} \int\limits_X \big(g(x) + f_n(x)\big)d\mu\,. \tag{20.73}$$

Но так как $f_n(x) \to f_0(x)$, то

$$\underline{\lim}\big(g(x) + f_n(x)\big) = \lim\big(g(x) + f_n(x)\big) = g(x) + \lim f_n(x) = g(x) + f_0(x)\,,$$

поэтому левую часть (20.73) можно переписать в виде:

$$\int\limits_X g(x)d\mu + \int\limits_X f_0(x)d\mu\,.$$

Правой же части (20.73) можно придать вид

$$\int\limits_X g(x)d\mu + \varliminf \int\limits_X f_n(x)d\mu\,.$$

Учитывая это, из (20.73) получаем:

$$\int\limits_X f_0(x)d\mu \le \varliminf \int\limits_X f_n(x)d\mu\,. \tag{20.74}$$

Рассмотрев последовательность $\left(g - f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ и рассуждая точно так же, получим неравенство

$$-\int\limits_X f_0(x)d\mu \le \varliminf \left(-\int\limits_X f_n(x)d\mu\right)\,,$$

или

$$\int\limits_X f_0(x)d\mu \ge \varlimsup \int\limits_X f_n(x)d\mu\,. \tag{20.75}$$

Сравнение (20.74) и (20.75) позволяет сделать вывод о существовании $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$ и равенстве (20.72). ■

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Сравнение интегралов Римана и Лебега можно провести лишь в том случае, когда определены оба интеграла, то есть, если X — кубируемое множество в $\mathbb{R}^n$ и μ — мера Лебега. Для простоты ограничимся случаем $X = [a;\ b]$. Если интегрирование производится по мере Лебега, то вместо обозначения $\int\limits_{[a;\ b]} f(x)d\mu$ принято писать $(L)\int\limits_a^b f(x)dx$, опуская знак (L), если из контекста ясно, что речь идёт об интеграле Лебега. Чтобы отличить римановский интеграл от лебеговского, его обозначают символом $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$.

При определении интеграла по Риману разбивается на части область интегрирования, в каждой части выбирается по точке и составляется интегральная сумма $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Существование интеграла, то есть, сходимость интегральных сумм, обеспечивается тогда, когда произвол в выборе точек ξ_k мало влияет на величину интегральной суммы, то есть, когда подынтегральная функция "не слишком разрывна".

Подход Лебега к определению интеграла был принципиально иным. Изложим его вкратце.

Пусть f — ограниченная измеримая по мере Лебега на отрезке $[a;\ b]$ функция, $m = \inf\bigl\{f(x)\,:\,x \in [a;\ b]\bigr\}$, $M = \sup\bigl\{f(x)\,:\,x \in [a;\ b]\bigr\}$. Разобьём отрезок $[m;\ M]$ на части точками $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$, положим $X_k = \big\{x \in [a;\ b] :\ y_{k-1} \le f(x) < y_k\big\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $X_n = \big\{x \in [a;\ b] :\ y_{n-1} \le f(x) \le y_n\big\}$, выберем $\xi_k \in X_k$ и составим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mu X_k$.

Далее вводятся нижние, $s = \sum\limits_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot \mu X_k$, и верхние, $S = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \cdot \mu X_k$, интегральные суммы, изучаются их свойства, аналогичные свойствам нижних и верхних сумм Дарбу, и доказывается, что для любой ограниченной измеримой по мере Лебега на отрезке $[a;\ b]$ функции при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[m;\ M]$

$$\lim s = \lim S = (L)\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Таким образом, любая ограниченная измеримая функция оказывается интегрируемой.

Определение интеграла Лебега, данное нами для неотрицательной функции есть определение интеграла как предела нижних интегральных сумм.

Как видно из изложенного, при лебеговском подходе к построению интеграла разбиение на части области интегрирования производится по признаку близости значений функции, а не аргумента, что и позволяет значительно расширить класс интегрируемых функций. Так, например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\bigcap[a;\ b], \\ 0, & x \in [a;\ b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

по Риману не интегрируема (пример ?). С лебеговской же точки зрения эта функция является ступенчатой: $D(x) = (X_0, 1;\ X_1, 0)$, $X_0 = \mathbb{Q}\bigcap[a;\ b]$, $X_1 = [a;\ b] \setminus \mathbb{Q}$, и поэтому

$$(L)\int\limits_a^b D(x)dx = 1 \cdot \mu X_0 + 0 \cdot \mu X_1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Следующая теорема показывает, что класс функций, интегрируемых по Лебегу, включает в себя класс функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 20.31. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ по Риману, то она интегрируема на $[a;\ b]$ и по Лебегу и*

$$(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (R)\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Доказательство. Пусть $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность разбиений отрезка $[a; b]$, имеющих узлами точки $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b$, причём каждое следующее из разбиений является продолжением предыдущего и $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, где Δ_n — параметр разбиения T_n. Положим

$$m_i^{(n)} = \inf\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]\big\}, \quad M_i^{(n)} = \sup\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]\big\}\,,$$

где $i = 1, 2, \ldots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть, далее, $s_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \Delta x_i$ — нижняя сумма Дарбу функции f по разбиению T_n, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \Delta x_i$ — соответственно верхняя сумма Дарбу. Интегрируемость по Риману означает, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = (R)\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Построим две последовательности ступенчатых функций:

$$h_n(x) = m_i^{(n)}\,, \quad x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right)\,,\ i = 1, 2, \ldots, k_n\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$$

$$k_n(x) = M_i^{(n)}\,, \quad x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right)\,,\ i = 1, 2, \ldots, k_n\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$$

В точках деления эти функции можно определить как угодно (для каждого n их будет конечное число, для всех $n \in \mathbb{N}$ — счётное множество, то есть, множество нулевой меры).

Функции h_n и k_n измеримы. Так как каждое следующее разбиение является продолжением предыдущего, то есть к уже имеющимся узлам разбиения добавляются новые, то функции h_n могут только возрастать, а функции k_n — только убывать (почти всюду), поэтому почти всюду на $[a;\ b]$ существуют пределы

$$g_1(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,, \quad g_2(x) = \lim_{n\to\infty} k_n(x)\,,$$

причём по теореме 20.23 функции g_1 и g_2 измеримы.

Так как почти всюду на $[a;\ b]$

$$h_n(x) \le f(x) \le k_n(x)\,,$$

то в пределе почти всюду на $[a;\ b]$

$$g_1(x) \le f(x) \le g_2(x)\,. \tag{20.76}$$

Рассмотрим последовательность функций $(k_n - h_n)_{n=1}^{\infty}$. Эта последовательность сходится почти всюду на $[a;\ b]$ к функции $g_2 - g_1$ и мажорируется интегрируемой функцией $k_1 - h_1$, поэтому к ней может быть применена теорема Лебега. По теореме Лебега

$$(L)\int\limits_a^b \big(g_2(x) - g_1(x)\big)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \big(k_n(x) - h_n(x)\big)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b k_n(x)dx - \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0\,.$$

Поскольку $g_2(x) - g_1(x) \ge 0$ почти всюду на $[a;\ b]$, то отсюда следует (свойство 8 интеграла от неотрицательных функций), что $g_2(x) - g_1(x) = 0$ почти всюду на $[a;\ b]$. Но тогда из (20.76) следует, что $f \sim g_1$, то есть, f измерима.

Как измеримая и ограниченная, функция f интегрируема по Лебегу. Так как $h_n \nearrow f$, то по следствию из теоремы Леви

$$(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = (R)\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Теорема доказана. ■

Замечание 20.9. *В следствии из теоремы Леви требуется неотрицательность функций последовательности $f_n \nearrow f$. Это ограничение легко снять, ибо если (f_n) — произвольная последовательность, такая что $f_n \nearrow f$, то $f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, и последовательность $(f_n - f_1)$ состоит из неотрицательных функций.*

20.5 Пространства интегрируемых функций

Пространства интегрируемых функций являются одними из важнейших в анализе классами метрических и линейных нормированных пространств. В этом разделе мы введём эти пространства и изучим их главные свойства, прежде всего, докажем их полноту. Но предварительно выведем два необходимых нам неравенства.

Неравенства Гёльдера и Минковского

На плоскости (ξ, η) рассмотрим кривую $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi \geq 0,\ p > 1)$.

Свяжем с числом p ещё одно число q соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{20.77}$$

Числа p и q, связанные равенством (20.77) называют сопряжёнными показателями.

Из (20.77) находим, что $q - 1 = \dfrac{1}{p-1}$. Отсюда нетрудно сделать вывод, что если $p > 1$, то и $q > 1$ и что уравнение кривой $\eta = \xi^{p-1}$ можно переписать в виде $\xi = \eta^{q-1}$.

Выберем произвольно два положительных числа $a,\ b$. Пусть S_1 — площадь фигуры, ограниченной осью $O\xi$, графиком функции $\eta = \xi^{p-1}$ и прямой $\xi = a$, а S_2 — площадь фигуры, ограниченной осью $O\eta$, графиком функции $\eta = \xi^{p-1}$ и прямой $\eta = b$. Очевидно, что

$$S_1 + S_2 \geq ab\,, \tag{20.78}$$

причём знак равенства имеет место только в случае $b = a^{p-1}$.

Вычислим площади S_1 и S_2.

$$S_1 = \int\limits_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}\,, \quad S_2 = \int\limits_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}\,.$$

Подставляя найденные значения S_1 и S_2 в (20.78), получим неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,, \tag{20.79}$$

называемое неравенством Юнга. Подчеркнём ещё раз, что так же, как и в неравенстве (20.78), в неравенстве Юнга знак равенства имеет место только в случае $b = a^{p-1}$.

Пусть теперь $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, которую, как и прежде, будем считать полной и σ-аддитивной. Пусть f и g — измеримые на X функции, такие что $|f|^p, |g|^q$ интегрируемы на X. Положим в неравенстве Юнга

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p}}\,, \quad b = \frac{|g(x)|}{\left(\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu\right)^{1/q}}\,.$$

Тогда оно примет вид

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu\right)^{1/q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu} + \frac{|g(x)|^q}{q\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu}\,.$$

Правая часть последнего неравенства, по условию, интегрируема на множестве X, следовательно, и левая часть тоже интегрируема (свойство 9 интеграла). Интегрируя по множеству X и учитывая, что p и q — сопряжённые показатели, получим неравенство

$$\int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu\right)^{1/q}, \tag{20.80}$$

называемое неравенством Гёльдера.

Замечание 20.10. *Рассуждения, проведённые при доказательстве неравенства Гёльдера, законны, если интегралы* $\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu$, $\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu$ *не равны нулю. Но если, например,* $\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu = 0$, *то по свойству 8 интеграла от неотрицательных функций* $f(x) = 0$ *почти всюду на* X, *но тогда в* (20.80) *левая часть равна нулю вместе с правой, поэтому неравенство остаётся в силе.*

Замечание 20.11. *При выводе неравенства Гёльдера было предположено, что оба интеграла в его правой части конечны. Можно отказаться от этого предположения. Тогда неравенство Гёльдера останется в силе, но будет совершенно бесполезным. Смысл неравенства Гёльдера заключается именно в том, что если интегрируемы функции* $|f|^p$, $|g|^q$, *то интегрируемо и произведение* $|fg|$.

Замечание 20.12. *Как отмечалось выше, знак равенства в неравенстве Юнга имеет место только в случае* $a^p = b^q$, *следовательно, в неравенстве Гёльдера знак равенства имеет место только в случае, если почти всюду на* X $|f(x)|^p = K\,|g(x)|^q$, *где* K — *неотрицательная постоянная.*

Пусть теперь f и g измеримы на X и функции $|f(x)|^p$, $|g(x)|^p$ интегрируемы на X. Имеем:

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu = \int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)|\, d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|\, d\mu + \int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|\, d\mu\,.$$

К каждому из интегралов в правой части применим неравенство Гёльдера. Получим, учитывая, что $(p-1)q = p$:

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu \leq$$

$$\leq \left(\left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p}\right)\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/q}.$$

Разделив на второй множитель в правой части и принимая во внимание, что $1-\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, получим неравенство Минковского:

$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p}. \tag{20.81}$$

Замечание 20.13. *Рассуждения, приведшие к неравенству Минковского, законны при выполнении условия* $\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu \neq 0$. *Но если этот интеграл равен нулю, то неравенство* (20.81) *очевидно.*

Замечание 20.14. *Вывод неравенства Минковского основан на неравенстве Гёльдера, которое верно при* $p > 1$. *Но неравенство Минковского справедливо при* $p \geq 1$, *так как при* $p = 1$ *оно очевидно.*

Пространства интегрируемых функций

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, предполагаемой по прежнему полной и σ-аддитивной. Разобьём множество $S(X)$ всех измеримых на X функций на классы эквивалентных функций. Это можно сделать, поскольку отношение $f_1 \sim f_2$ рефлексивно ($f \sim f$), симметрично ($f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$) и транзитивно ($f_1 \sim f_2,\ f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$). Договоримся, чтобы не усложнять обозначений, в дальнейшем класс функций, эквивалентных f, обозначать той же буквой f, или, иначе говоря, договоримся не различать эквивалентные между собой функции, или ещё иначе, рассматривая некоторый класс эквивалентности, будем выбирать представляющую его функцию, безразлично какую, и работать с ней.

Определение 20.40. *Будем называть метрическим пространством* $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ *совокупность классов эквивалентности, состоящих из тех измеримых на* X *функций, для которых выполняется условие*

$$\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu < +\infty\,, \tag{20.82}$$

определив расстояние между ними формулой

$$\rho(f,g) = \left(\int\limits_X |f(x)-g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{20.83}$$

Замечание 20.15. *Функция* $\rho(f,g)$ *формулой* (20.83) *определена корректно, так как, во-первых, правая часть её не зависит от выбора представителей классов, поскольку эквивалентные функции обладают одинаковыми интегралами, во-вторых, если функции* f, g *удовлетворяют условию* (20.82), *то в силу неравенства Минковского правая часть в* (20.83) *конечна.*

Замечание 20.16. *Вместо обозначения* $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ *будем употреблять более короткое* $L_p(X)$ *в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям.*

Проверим, что функция $\rho(f,g)$ удовлетворяет аксиомам расстояния.

1) $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.

Если $f = g$, то подынтегральная функция в (20.83) почти всюду на X равна нулю, следовательно, $\rho(f,g) = 0$. Наоборот, если $\rho(f,g) = 0$, то по свойству 8 интеграла от неотрицательных функций подынтегральная функция в (20.83) почти всюду на X равна нулю, следовательно, функции f и g определяют один и тот же класс.

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$.

Это свойство очевидно.

3) $\rho(f,g) \leq \rho(f,u) + \rho(u,g)$.

Неравенство треугольника есть следствие неравенства Минковского, если в последнем заменить $f(x)$ на $f(x) - u(x)$, а $g(x)$ на $u(x) - g(x)$.

Итак, все три аксиомы расстояния выполняются, поэтому определение метрического пространства $L_p(X)$ оправдано. Подчеркнём ещё раз, что элементами пространства $L_p(X)$ служат классы эквивалентных измеримых на множестве X функций.

Определение 20.41. *Сходимость по метрике пространства $L_p(X)$ будем называть сходимостью в среднем с показателем p. При $p = 1$ будем употреблять термин "сходимость в среднем а при $p = 2$ — термин "сходимость в среднем квадратическом".*

Доказательству теоремы о полноте пространства $L_p(X)$ предпошлём лемму, которая может быть полезной и в иных случаях.

Лемма 20.9. *Если функция f измерима на множестве X и функция $|f(x)|^p$ интегрируема на X при некотором показателе $p > 1$, то функция $|f(x)|^{p_1}$ интегрируема на X при любом показателе $p_1 : \ 1 \le p_1 < p$. При этом справедлива оценка*

$$\left(\int\limits_X |f(x)|^{p_1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \le \left(\mu X\right)^{\frac{p-p_1}{p_1 p}} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{20.84}$$

Доказательство. Применим к интегралу $\int\limits_X |f(x)|^{p_1}\, d\mu$ неравенство Гёльдера с показателями $\dfrac{p}{p_1}$ и сопряжённым к нему $\dfrac{p}{p-p_1}$ (проверьте!), взяв в качестве второй функции тождественную единицу. Имеем:

$$\int\limits_X |f(x)|^{p_1}\, d\mu = \int\limits_X |f(x)|^{p_1} \cdot 1 d\mu \le$$

$$\le \left(\int\limits_X |f(x)|^{p_1 \cdot \frac{p}{p_1}}\, d\mu\right)^{\frac{p_1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X 1^{\frac{p}{p-p_1}} d\mu\right)^{\frac{p-p_1}{p}} = \left(\mu X\right)^{\frac{p-p_1}{p}} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{p_1}{p}}.$$

Возводя левую и правую части этого неравенства в степень $\dfrac{1}{p_1}$, получим (20.84). ■

Теорема 20.32. $L_p(X)$ *— полное метрическое пространство.*

Доказательство. Напомним, что полным называется метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность элементов сходится.

Итак, пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность элементов пространства $L_p(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что

$$\int\limits_X |f_m(x) - f_n(x)|^p\, d\mu < \varepsilon^p \quad (m, n > n_0)\,. \tag{20.85}$$

Используя (20.84) при $p_1 = 1$, получим:

$$\int\limits_X |f_m(x) - f_n(x)|\, d\mu < (\mu X)^{(p-1)/p} \cdot \varepsilon \quad (m, n > n_0)\,,$$

откуда следует, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной и в пространстве $L_1(X)$.

Выберем из последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ столь редкую подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_X \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| d\mu < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{20.86}$$

Сделать это можно следующим образом. По числу $\varepsilon = 1/2^k$ подберём номер $n_0(k)$ так, чтобы при $m, n > n_0(k)$ выполнялось

$$\int\limits_X |f_m(x) - f_n(x)|\, d\mu < \frac{1}{2^k}\,.$$

Возьмём теперь $k = 1$ и выберем номер $n_1 > n_0(1/2)$. Положим $k = 2$ и выберем номер $n_2 > \max\{n_0(2), n_1\}$. И так далее. Пусть номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже выбраны. Тогда выбираем $n_k > \max\{n_0(k), n_{k-1}\}$. И так далее. Продолжив описанный процесс неограничено, получим требуемую последовательность номеров.

Обозначим через g функцию

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|\,. \tag{20.87}$$

В силу леммы 20.9 все члены ряда (20.87) — интегрируемые функции. По теореме Леви

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_X |f_{n_1}(x)|d\mu + \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_X |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|d\mu <$$

$$< \int\limits_X |f_{n_1}(x)|d\mu + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \int\limits_X |f_{n_1}(x)|d\mu + 1 < +\infty\,.$$

Поэтому по свойству 6 интеграла от неотрицательных функций функция g почти всюду на множестве X конечна, другими словами, ряд в (20.87) сходится почти всюду на X. Но тогда почти всюду на X сходится и ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)\right)\,,$$

сумма которого $f_0(x)$ есть, тем самым, измеримая почти всюду конечная на множестве X функция.

По определению суммы ряда

$$f_0(x) = \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_1}(x) + \sum_{j=2}^{k} \left(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right)\right) = \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_k}(x)\right)\,,$$

откуда следует, что подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ почти всюду на X сходится к функции f_0.

Вернёмся к неравенству (20.85). Положим в нём $m = n_k$. Так как при $k \to \infty$

$$|f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p \to |f_0(x) - f_n(x)|^p$$

почти всюду на X, то по следствию из теоремы Фату

$$\int\limits_X |f_0(x) - f_n(x)|^p \, d\mu \le \varepsilon^p \quad (n > n_0)\,. \tag{20.88}$$

Докажем теперь, что построенная нами функция f_0 принадлежит пространству $L_p(X)$, и что $f_n \to f_0$ по расстоянию в $L_p(X)$.

Зафиксируем $n > n_0$ и используем неравенство Минковского и (20.88). Тогда

$$\left(\int\limits_X |f_0(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int\limits_X |(f_0(x) - f_n(x)) + f_n(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int\limits_X |(f_0(x) - f_n(x))|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |f_n(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon + M_n < +\infty\,,$$

где $M_n^p = \int\limits_X |f_n(x)|^p \, d\mu$. Отсюда следует, что $f_0 \in L_p(X)$.

Возведя обе части (20.88) в степень $1/p$, получим:

$$\rho(f_n, f_0) \le \varepsilon \quad (n > n_0)\,,$$

а это означает, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу f_0 в пространстве $L_p(X)$.

Итак, всякая фундаментальная последовательность элементов пространства $L_p(X)$ сходится. ■

Замечание 20.17. *Доказательство теоремы о полноте пространства $L_p(X)$ проведено для случая $p > 1$. Но оно остаётся в силе и для $p = 1$, если отбросить ненужное в этом случае начало — использование леммы 20.9.*

На множестве $L_p(X)$ можно ввести линейные операции, назвав произведением класса f на число λ класс, содержащий функцию λf, и суммой классов f и g класс, содержащий функцию $f + g$. Если $f \in L_p(X)$, то, очевидно, $\lambda f \in L_p(X)$, а то, что $f + g \in L_p(X)$, если $f, g \in L_p(X)$, следует из неравенства Минковского. Таким образом, $L_p(X)$ есть линейное множество.

На $L_p(X)$ можно ввести и норму, положив

$$\|f\| = \rho(f, 0) = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{20.89}$$

Аксиомы нормы проверяются без труда, поэтому $L_p(X)$ — полное (по теореме 20.32) линейное нормированное пространство.

Соотношение между различными видами сходимости последовательностей функций

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на X функций и f_0 — измеримая на X функция. Нам известны четыре вида сходимости последовательности функций (f_n) к функции f_0.

1) Равномерная сходимость на множестве X.

2) Сходимость почти всюду на множестве X (или поточечная сходимость).

3) Сходимость в пространстве $L_p(X)$ (или сходимость в среднем с показателем p).

4) Сходимость по мере.

Рассмотрим вопрос о том, как эти виды сходимости соотносятся друг с другом.

I. *Равномерная сходимость последовательности функций на множестве X влечёт за собой любую другую из рассматриваемых сходимостей.*

а) Если последовательность сходится равномерно на множестве X, то она сходится в каждой точке множества, то есть, всюду (почти всюду) на X.

б) По определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что при $n > n_0$ для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon\,.$$

Но тогда

$$\rho(f_n, f_0) = \left(\int\limits_X |f_n(x) - f_0(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon\, (\mu X)^{1/p}\,,$$

следовательно, последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f_0 в среднем с показателем p.

в) Заменив в определении сходимости по мере σ на ε, имеем:

$$X\,(|f_n - f_0| \ge \varepsilon) = \varnothing$$

при $n > n_0$. Отсюда следует, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f_0 по мере на множестве X.

В то же время никакой другой из рассматриваемых видов сходимости последовательности функций не влечёт равномерной сходимости.

Пример 20.25. *Рассмотрим на множестве $X = [0;\ 1]$ с мерой Лебега последовательность функций $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Эта последовательность сходится к функции $f_0(x) \equiv 0$ почти всюду на $[0,\ 1]$ (всюду, за исключением точки $x = 1$); в среднем в любой степени $p \ge 1$, поскольку

$$\rho(f_n, f_0) = \left(\int\limits_0^1 |x^n - 0|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{np+1}\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

и по мере, так как при $0 < \sigma < 1$

$$\mu X(|f_n - f_0| \ge \sigma) = 1 - \sqrt[n]{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Однако равномерно на отрезке $[0,\ 1]$ эта последовательность не сходится, так как она не удовлетворяет первому критерию равномерной сходимости (теорема 14.1), поскольку

$$\sup\{|f_n(x) - f_0(x)| : x \in [0,\ 1]\} = \sup\{x^n :\ x \in (0,\ 1)\} = 1 \nrightarrow 0\,.$$

II. *Сходимости почти всюду и в среднем с показателем p не сравнимы.*

Пример 20.26. *Последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/p}, & 0 \le x \le 1/n, \\ 0, & 1/n < x \le 1 \end{cases}$$

сходится на $[0,\ 1]$ *с мерой Лебега к функции* $f_0(x) \equiv 0$ *почти всюду, но не сходится в среднем с показателем* p, *так как*

$$\rho(f_n, f_0) = \left(\int\limits_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^{1/n} n \cdot dx \right)^{1/p} = 1 \not\to 0\,.$$

Пример 20.27. *На том же отрезке* $[0,\ 1]$ *с мерой Лебега рассмотрим последовательность функций*

$$\varphi_{k,m}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\dfrac{m-1}{k}, \dfrac{m}{k}\right], \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{m-1}{k}, \dfrac{m}{k}\right], \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, k$. *Перенумеровав их подряд в порядке возрастания* k, *а при одинаковых* k — *в порядке возрастания* m, *получим последовательность функций* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, *которая сходится на отрезке* $[0,\ 1]$ *к функции* $f_0(x) \equiv 0$ *в среднем с любым показателем* p, *поскольку*

$$\rho(f_n, f_0) = \left(\int\limits_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int\limits_{(m-1)/k}^{m/k} 1 \cdot dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{k} \right)^{1/p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(*очевидно,* $k \to \infty \Leftrightarrow n \to \infty$), *но не сходится ни в одной точке отрезка* $[0,\ 1]$.

III. *Сходимость почти всюду влечёт за собой сходимость по мере, но не наоборот.*

Эти утверждения суть содержание теоремы 20.25 и примера к ней 20.23.

IV. *Сходимость в среднем с показателем* p_2 *влечёт за собой сходимость в среднем с показателем* p_1 *для любого* $1 \le p_1 < p_2$.

Это утверждение следует из доказанной в лемме 20.9 оценки (20.84).

Обратное утверждение неверно. Сходимость в среднем в меньшей степени не влечёт сходимости в среднем в большей степени.

Пример 20.28. *Пусть* $X = [0,\ 1]$ *с мерой Лебега,*

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{\ln n}\right)^{1/p}, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0\,, & \dfrac{1}{n} < x \le 1, \end{cases} \qquad p \ge 1$$

и $f_0(x) \equiv 0$.

Тогда

$$\rho_p(f_n, f_0) = \left(\int\limits_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^{1/n} \frac{n}{\ln n} dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\ln n} \right)^{1/p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

то есть, $f_n \to f_0$ в среднем с показателем p на множестве $[0,\ 1]$.

В то же время при любом $p_1 > p$

$$\rho_{p_1}(f_n, f_0) = \left(\int\limits_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|^{p_1}\, dx\right)^{1/p_1} = \left(\int\limits_0^{1/n} \Big(\frac{n}{\ln n}\Big)^{p_1/p} dx\right)^{1/p_1} =$$

$$= \Big(\frac{n}{\ln n}\Big)^{1/p} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p_1} = \left(\frac{n^{1-\frac{p}{p_1}}}{\ln n}\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\,,$$

следовательно, рассматриваемая последовательность не сходится в среднем с показателем p_1 ни при каком $p_1 > p$.

V. *Сходимость в среднем с показателем* p $(p \geq 1)$ *влечёт за собой сходимость по мере.*

Так как сходимость в среднем с показателем p влечёт за собой сходимость в среднем, достаточно показать, что из сходимости в среднем следует сходимость по мере.

Пусть $f_n \to f_0$ в среднем на множестве X. Возьмём любые $\sigma > 0$, $\delta > 0$ и положим $\varepsilon = \sigma \cdot \delta$. Тогда найдётся номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при $n > n_0$ будет выполняться условие

$$\rho_1(f_n, f_0) = \int\limits_X |f_n(x) - f_0(x)| d\mu < \varepsilon\,.$$

Отсюда, применив неравенство Чебышёва (свойство 7 интеграла от неотрицательных функций), получим:

$$\mu X\left(|f_n - f_0| \geq \sigma\right) \leq \frac{1}{\sigma}\int\limits_X |f_n(x) - f_0(x)| d\mu < \frac{1}{\sigma}\cdot\varepsilon = \delta\ (n > n_0)\,.$$

Следовательно, последовательность $f_n \to f_0$ по мере на множестве X.

То, что обратное утверждение неверно, показывает следующий пример.

Пример 20.29. *Пусть* $X = [0,\ 1]$ *и* μ *- мера Лебега. Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0, & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Последовательность $f_n \to f_0$, $f_0(x) \equiv 0$, по мере на отрезке $[0,\ 1]$, так как для любого $\sigma > 0$

$$\mu X(|f_n - f_0| \geq \sigma) \leq \frac{1}{n}\,,$$

но не сходится в среднем, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(f_n, f_0) = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f_0(x)| dx = 1 \not\to 0.$$

20.6 Задачи

1. Установить непосредственно с помощью биекции эквивалентность:
   а) отрезка $[0;\ 1]$ и интервала $(0;\ 1)$;
   б) отрезка $[0;\ 1]$ и полуинтервала $(0;\ 1]$;
   в) полуинтервалов $(0; 1]$ и $[0; 1)$;
   г) отрезка $[0;\ 1]$ и интервала $(a; b)$ $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Установить непосредственно с помощью биекции эквивалентность:
   а) $\mathbb{R}$ и отрезка $[-1;\ 1]$;
   б) $\mathbb{R}$ и интервала $(-a; a)$ $(a > 0)$.

3. Доказать равномощность границы квадрата с вершинами $A(1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(-1; -1)$ и окружности $\{(x; y) :\ x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Доказать равномощность окружности $\{(x; y) :\ x^2 + y^2 = 4\}$ и эллипса $\{(x; y) :\ 2x^2 + 4y^2 = 16\}$.

5. Доказать равномощность множества $M = \{(x; y) :\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ и круга $\{(x; y) :\ x^2 + y^2 \le 9\}$.

6. Доказать равномощность множества $M = \{(x; y) :\ 4x^2 + 8y^2 \le 16\}$ и круга $\{(x; y) :\ x^2 + y^2 \le 25\}$.

7. Доказать, что множество точек разрыва монотонной на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ функции не более чем счётно.

8. Доказать счётность множества всех отрезков на вещественной оси, концы которых имеют рациональные координаты.

9. Доказать счётность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты.

10. Доказать, что множество точек окружности $\{(x; y) :\ x^2 + y^2 = 1\}$ имеет мощность континуума.

11. На $\mathbb{R}^2$ задано множество открытых кругов, не имеющих попарно общих точек. Доказать, что это множество не более чем счётно.

12. Пусть множество A конечное, а множество B счётное. Доказать, что объединение $A \bigcup B$ множеств A и B эквивалентно множеству $\mathbb{Z}$ (множеству всех целых чисел).

13. Пусть множество A конечное, а множество B счётное. Доказать, что объединение $A \bigcup B$ множеств A и B эквивалентно множеству всех чисел вида 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

14. Доказать, что если $A = B \bigcup C$ и $Card\ A = c$, то хотя бы одно из множеств B или C имеет мощность c.

15. Доказать, что определение кольца эквивалентно следующему: *непустую систему множеств $\mathcal{K}$ будем называть кольцом, если она обладает следующими свойствами*:
    1) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{K}$;
    2) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \vartriangle B \in \mathcal{K}$.

16. Пусть $X = \{a, b, c\}$ (множество, состоящее из трёх элементов), $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X.

    а) Опишите кольца, которые можно построить из элементов $\mathcal{P}(X)$.

    б) Опишите алгебры, которые можно построить из элементов $\mathcal{P}(X)$.

17. Показать, что:

    а) пересечение колец — кольцо;

    б) пересечение алгебр — алгебра;

    в) пересечение σ-алгебр — σ-алгебра.

18. Пусть $\mathcal{A}(X)$ — σ-алгебра с единицей X, $X_0 \in \mathcal{A}(X)$. Показать, что $\mathcal{A}(X_0) = \{A \bigcap X_0 : \ A \in \mathcal{A}(X)\}$ — σ-алгебра.

19. Пусть X — множество, $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность множеств, таких что $E_n \subset X$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$X \setminus \left(\overline{\lim}\, E_n\right) = \underline{\lim}\,(X \setminus E_n); \quad X \setminus (\underline{\lim}\, E_n) = \overline{\lim}\,(X \setminus E_n).$$

20. Пусть $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств, содержащихся в $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$, причём $\mu A_k = +\infty$ $(k \in \mathbb{N})$. Может ли множество $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ иметь:

    а) бесконечную меру;

    б) конечную меру;

    в) нулевую меру?

21. На отрезке $[0,\ 1]$ заданы два множества A_1 и A_2, измеримых по Лебегу и таких, что $\mu A_1 + \mu A_2 > 1$. Доказать, что $\mu\,(A_1 \bigcap A_2) > 0$.

22. На отрезке $[0,\ 1]$ заданы n множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$, измеримых по Лебегу и таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k > n - 1$. Доказать, что $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$.

23. Пусть $A(\in \mathbb{R})$ — неизмеримое по Лебегу множество, $A_0(\in \mathbb{R})$ — множество лебеговой меры нуль. Доказать, что множество $A \bigcap (CA_0)$ неизмеримо по Лебегу.

    Останется ли это утверждение справедливым, если предположить, что $A, A_0 \in \mathbb{R}^n$?

24. Если множество $A(\in \mathbb{R}^n)$ измеримо по Жордану, то оно измеримо и по Лебегу и жорданова и лебегова мера равны.

    (Множество $X \in \mathbb{R}^n$ называют измеримым по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные множества P и Q такие, что $P \subset X \subset Q$ и $m(Q \setminus P) < \varepsilon$. При этом $mX = \inf\{mQ : \ Q \supset X\}$.)

25. Показать, что множество $\mathbb{Q}_{[0,\ 1]}$ рациональных точек отрезка $[0,\ 1]$ измеримо по Лебегу и неизмеримо по Жордану и найти его лебегову меру.

26. Найти меру Лебега подмножества точек отрезка $[0,\ 1]$, в десятичной записи которых не встречается цифра 2.

27. Найти меру Лебега подмножества отрезка $[0,\ 1]$, состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

28. Найти меру Лебега подмножества точек единичного квадрата на плоскости $(\{(x, y) : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\})$, состоящего из точек (x, y), таких что $0 \le \sin x \le 1/2$, а $\cos(x + y)$ — иррациональное число.

29. Найти меру Лебега подмножества точек единичного квадрата на плоскости $(\{(x, y) : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\})$, декартовы и полярные координаты которых иррациональны.

30. Пусть на множестве X определена σ-аддитивная мера. Доказать, что подмножества нулевой меры множества X образуют σ-кольцо.

31. Доказать, что если f измерима и неотрицательна на X, то функция $\sqrt{f}$ тоже измерима на X.

32. Если $f \in S(X)$, то $\sqrt[3]{f} \in S(X)$. Доказать.

33. Измерима ли на X функция $\operatorname{sgn} f$, если функция f измерима?

34. Пусть $[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \le n, \\ 0, & |f(x)| > n. \end{cases}$ Является ли $[f]_n$ измеримой на X, если f измерима?

35. Доказать, что если для любого $r \in \mathbb{Q}$ множество $X(f > r)$ измеримо, то f измерима на X.

36. Доказать, что если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ множества $X(a \le f \le b)$, или множества $X(a < f \le b)$, или множества $X(a \le f < b)$, или множества $X(a < f < b)$ измеримы, то f измерима на X.

37. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функции $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — измеримы. Доказать, что функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённая равенством $h(x) = f\left(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\right)$, измерима.

38. Доказать, что если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на множестве X функций, то измеримо множество тех точек $x \in X$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

39. Пусть функция $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $[0; 1]$. Доказать, что её производная (функция $f' : [0; 1] \to \mathbb{R}$) измерима по мере Лебега.

40. Комплекснозначная функция $f : X \to \mathbb{C}$ $\ (f(x) = u(x) + iv(x),\ u, v : X \to \mathbb{R})$ называется измеримой, если измеримы её вещественная и мнимая части u и v. Доказать измеримость модуля и аргумента комплекснозначной измеримой функции f.

41. Пусть последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на X к функциям f и g. Доказать, что $f \sim g$.

42. Пусть последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере на X к функциям f и g. Доказать, что $f \sim g$.

43. Пусть μ — мера Лебега на $[0,\ 1]$ и $f_n(x) = e^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_0(x) \equiv 0$. Доказать, что $f_n \to f_0$ по мере на $[0,\ 1]$.

44. Пусть $X = [0,\ \pi]$, μ — мера Лебега, $f_k(x) = (\sin kx)^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Доказать, что последовательность $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю по мере. Сходится ли она к нулю почти всюду на $[0,\ \pi]$?

45. Для каждого $\delta > 0$ указать явно "множество Егорова" X_δ, на котором последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = \dfrac{n \sin x}{1 + n^2 \sin^2 x}$, $x \in [0,\ \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно.

46. Для каждого $\delta > 0$ указать явно "множество Егорова" $X_\delta \subset X$, где $X = [0;\ 1]$, на котором последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции $f \equiv 0$, если:

$$a)\ f_n(x) = e^{-n(1-x)}; \quad b)\ f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2}\,; \quad c)\ f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}\,;$$

$$d)\ f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n},\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n},\\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 1, \end{cases}\quad n=2,3,\ldots\ .$$

47. Для каждого $\delta>0$ указать явно "множество Егорова" X_δ, на котором последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $x\in[0;\ 1]$, сходится равномерно.

48. Построить неубывающую последовательность измеримых по мере Лебега ступенчатых функций, сходящуюся к функции f:
а) $f(x)=e^{-(3x+1)}$, $X=[0;+\infty)$;
б) $f(x)=e^{2x+1}$, $X=[1;+\infty)$;
в) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $X=(2;20]$;
г) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)(2x+3)}$, $X=[0;+\infty)$.

49. Интегрируема ли функция $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,\ 1],\\ x^3, & x\in[0,\ 1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ по Риману на отрезке $[0,\ 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу? Если да, то чему равен её интеграл?

50. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,\ 1],\\ \sqrt{x}, & x\in[0,\ 1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ интегрируема на $[0,\ 1]$ по мере Лебега и найти интеграл от неё.

51. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu$, где $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ \cos x, & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ а μ — мера Лебега.

52. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{[0,\pi/2]} f(x)d\mu$, где $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ \sin^2 x, & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ а μ — мера Лебега.

53. Вычислить интегралы (μ — мера Лебега, а $[x]$ — целая часть x):
а) $\displaystyle\int\limits_{(0;\,+\infty)} e^{-[x]}d\mu$; б) $\displaystyle\int\limits_{(3;\,+\infty)} e^{-[3x+1]}d\mu$; в) $\displaystyle\int\limits_{(4;\,+\infty)} e^{[2x+2]}d\mu$.

54. Вычислить интегралы (μ — мера Лебега, а $[x]$ — целая часть x):
а) $\displaystyle\int\limits_{(0;+\infty)} \frac{d\mu}{[x+1]\cdot[x+2]}$; б) $\displaystyle\int\limits_{(0;+\infty)} \frac{d\mu}{[2x+1]\cdot[2x+3]}$; в) $\displaystyle\int\limits_{(3;+\infty)} \frac{d\mu}{[3x+1]}$;
г) $\displaystyle\int\limits_{(3;+\infty)} \frac{(-1)^{[x]}}{[x+1]\cdot[x+2]}\,d\mu$; д) $\displaystyle\int\limits_{(0;+\infty)} \frac{(-1)^{[x]}}{[2x+1]\cdot[2x+2]}\,d\mu$.

55. Существует ли интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0;+\infty)} \frac{(-1)^{[x]}}{[x+1]}\,d\mu$, где μ — мера Лебега?

56. Вычислить $\int\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)d\mu$, где $f(x,y)=\begin{cases} 1, & xy\notin\mathbb{Q}, \\ 0, & xy\in\mathbb{Q}, \end{cases}$, μ — мера Лебега, а $\mathcal{D}=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

57. Доказать, что интеграл Лебега от неотрицательной функции f по сегменту $[0;1]$ совпадает с мерой Лебега множества

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}.$$

58. Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых неотрицательных ограниченных на множестве X функций, такая что

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следует ли отсюда, что $f_n\to 0$ почти всюду на множестве X?

59. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f интегрируема на множестве X тогда и только тогда, когда для всех простых функций h, не превосходящих f, интегралы $\int\limits_X h(x)d\mu$ ограничены в совокупности.

60. Пусть f измерима на X и $X_n=X(n-1\le f<n)$. Доказать, что $f\in L(X)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|n|\cdot\mu X_n$.

61. Пусть $\mu X<+\infty$, функция $f:X\to\mathbb{R}$ измерима на X и существуют постоянные $A>0$ и $\alpha>1$ такие, что для каждого $\varepsilon>0$ справедлива оценка $\mu\{x\in X:\ |f(x)|>\varepsilon\}<\dfrac{A}{\varepsilon^{\alpha}}$. Доказать, что f интегрируема на X по мере μ.

62. Доказать, что если $f\in L(X)$ и $X_n=X(|f|\ge n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\mu X_n=0$.

63. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ не интегрируема на отрезке $[0,\ 1]$ по мере Лебега.

64. Пусть f — неограниченная интегрируемая на X функция. Положим

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le n, \\ n, & |f(x)|>n, \end{cases}\qquad [f(x)]_n^0=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le n, \\ 0, & |f(x)|>n. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\int\limits_X f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_X [f(x)]_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_X [f(x)]_n^0 d\mu.$$

65. Пусть $f\in L^+(X)$, а g — измерима и ограничена на X. Доказать, что существует K, $\inf\{g(x):\ x\in X\}\le K\le\sup\{g(x):\ x\in X\}$, такое, что

$$\int\limits_X f(x)g(x)d\mu=K\int\limits_X f(x)d\mu\,.$$

66. Доказать, что если последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на множестве X условиям теоремы Лебега, а функция g почти всюду на X ограничена, то есть, существуют постоянная M и подмножество X_0 множества X, имеющее нулевую меру, такие, что $|g(x)| \leq M$ на множестве $X \setminus X_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)g(x)d\mu\,.$$

67. Пусть $f \in L(X)$, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — монотонно убывающая последовательность измеримых множеств, $X_0 = \lim X_n$. Справедливо ли равенство

$$\int\limits_{X_0} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)d\mu\,?$$

68. Доказать, что если $\int\limits_X f(x)g(x)d\mu$ существует и конечен для любой интегрируемой функции f, то g ограничена почти всюду на X.

69. Доказать, что если $\int\limits_X f(x)g(x)d\mu \geq 0$ для любой неотрицательной функции f, то $g(x) \geq 0$ почти всюду на X.

70. Пусть $f_n \to f_0$ в среднем на множестве X. Показать, что $|f_n| \to |f_0|$ в среднем на X.

71. Пусть $f_n \to f_0$ в среднем на X и $f_n \to g_0$ почти всюду на X. Показать, что $f_0 \sim g_0$ на множестве X.

72. Показать, что если $f_n \to f_0$ по мере на множестве X и ограничена почти всюду на X, то $f_n \to f_0$ в среднем на X.

73. Показать, что последовательность $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$ сходится всюду на $[0,\ 1]$ к функции $f_0(x) \equiv 0$, но не сходится в среднем квадратическом.

Литература

[1] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Основы математического анализа. Часть I,* М.: Наука, 1971.

[2] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Основы математического анализа. Часть II,* М.: Наука, 1973.

[3] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов, *Математический анализ,* М.: Наука, 1979.

[4] Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I,* М.: Наука, 1969.

[5] Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II,* М.: Наука, 1962.

[6] Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III,* М.: Наука, 1969.

[7] Г.М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа. Том I,* М.: Наука, 1957.

[8] Г.М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа. Том II,* М.: Наука, 1968.

[9] А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин, *Курс математического анализа*, М.:Физматлит, 2003.

[10] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда, *Математический анализ. Часть I,* Киев: Вища школа, 1983.

[11] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда, *Математический анализ. Часть II,* Киев: Вища школа, 1985.

[12] В.А. Зорич, *Математический анализ. Часть I,* М.: Наука, 1981.

[13] В.А. Зорич, *Математический анализ. Часть II,* М.:Наука, 1984.

[14] У. Рудин, *Основы математического анализа,* М.:Мир, 1966.

[15] В. Грэнвиль и Н. Лузин, *Курс диференциального и интегрального исчисления. Часть II. Интегральное исчисление*, М.-Л.: ОНТИ, 1934.

[16] Н.Н. Лузин, *Интегральное исчисление*, Л.: Советская Наука, 1949.

[17] И.П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* М.:Наука, 1974.

[18] Д.А. Райков, *Одномерный математический анализ.* М.:Высшая школа, 1982.

[19] В.И. Соболев, *Лекции по дополнительным главам математического анализа,* М.:Наука, 1968.

[20] Г.Е. Шилов, *Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1-2,* М.:Наука, 1969.

[21] В.С. Шипачев, *Курс высшей математики,* М.: Проспект, 2005.

[22] Н.Н. Воробьев, *Теория рядов,* М.: Наука, 1979.

[23] Б.М. Будак, С.В. Фомин, *Кратные интегралы и ряды,* М.:Наука, 1967.

[24] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы терии функций и функционального анализа,* М.: Наука, 1968.

[25] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах,* М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

[26] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев, *Элементы функционального анализа,* М.-Л.: Гос. изд. технико-теоретической лит., 1951.

[27] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа,* М.: Высшая школа, 1982.

[28] А.В. Архангельский, *Конечномерные векторные пространства,* М., изд-во Московского университета, 1982.

[29] М.Г. Хапланов, *Теория функций комплексного переменного,* М.: Просвещение, 1965.

[30] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной,* М.:Наука, 1974.

[31] Б.П. Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу (для университетов и педагогических институтов),* М.:Наука, 1961.

[32] Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного,* М.:Наука, 1970.

[33] М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко, *Задачи и упражнения. Функции комплексного переменного. ...* М.:Наука, 1971.

[34] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач, *Справочное пособие по математическому анализу,* Киев:Вища школа, 1984, 1986.

[35] И.А. Марон, *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах,* М.: Наука, 1973.

[36] Я.И. Ривкинд, *Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах,* Минск: Вышэйшая школа, 1971.

[37] П.А. Шмелев, *Теория рядов в задачах и упражнениях,* М.: Высшая школа, 1983.

[38] *Математическая энциклопедия (в пяти томах),* М.: Советская энциклопедия, 1977-1985.

[39] И.Н. Песин, *Развитие понятия интеграла,* М.: Наука, 1966.