Экзаменационная программа
по
математическому анализу
для студентов первого курса (группы 3,4)
специальности 010500 Прикладная математика и информатика
Лектор: П.А.Чалов 2014/15 учебный год

Для успешной сдачи экзамена необходимо:

1) знать определения и формулировки утверждений;

2) знать и понимать связи (если они существуют) между различными понятиями;

3) воспроизводить доказательства утверждений;

4) уметь решать задачи (содержащиеся в электронном конспекте лекций и подобные им).

I. **Теория вещественных чисел**

Множества. Равные множества. Подмножества. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, декартово произведение) и их свойства.

Вещественное число. Сравнение вещественных чисел. Транзитивность одного из знаков сравнения. Лемма о плотности вещественных чисел.

Множества вещественных чисел ограниченные сверху, снизу; ограниченные множества (определение и примеры). Точные грани числовых множеств (определения и лемма). Максимальный и минимальный элементы множества; точные грани конечных числовых множеств. Теорема о существовании точных граней числовых множеств (*доказательство лишь для случая наличия положительных чисел*).

Арифметические операции над вещественными числами и их корректность (*доказательство лишь для суммы чисел*).

II. **Функции (отображения)**

Отображение (функция). Инъективное, сюръективное, биективное отображения; примеры. Сложная функция (суперпозиция, композиция отображений). Понятие обратной функции. Критерий существования обратной функции (*без доказательства*). Чётные, нечётные, периодические, ограниченные функции.

Основные (простейшие) элементарные функции. Элементарные функции. Гиперболические функции и их графики.

III. **Числовые последовательности**

Последовательность, числовая последовательность. Стационарная последовательность. Предел последовательности. ε-окрестность точки. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела. Ограниченные последовательности. Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями. Расширения области вещественных чисел $\dot{\mathbb{R}}$ и $\bar{\mathbb{R}}$.

Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенствах. Принцип двустороннего ограничения (теорема о трёх последовательностях).

Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Критерий сходимости монотонной ограниченной последовательности.

Стягивающаяся последовательность сегментов. Теорема Кантора.

Бином Ньютона. Число e, как предел последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Подпоследовательности числовой последовательности и их свойства. Предельная точка последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки у ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности и их свойства. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Вычисление верхнего и нижнего пределов последовательности.

Фундаментальные последовательности и их свойства (две леммы). Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

IV. **Предел (предельное значение) функции в точке**

Предельные и изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества; критерий замкнутости (открытости) множества.

Покрытие и подпокрытие множества; открытое и конечное покрытия; примеры покрытий. Лемма Гейне-Бореля для сегмента. Лемма Гейне-Бореля для замкнутого ограниченного множества. Компактные множества. Критерий компактности числового множества.

Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне; их эквивалентность. Односторонние пределы. Критерий Коши существования предела. Свойства функций, имеющих пределы (теорема о сохранении знака и две теоремы об ограниченности). Арифметические операции над функциями, имеющими предел.

Первый замечательный предел.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых (бесконечно больших) функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Символы Ландау "o", "O", "$\asymp$", "$\sim$".

V. **Непрерывность функции**

Непрерывность функции в точке (определения Коши и Гейне) и на множестве. Односторонняя непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции; их классификация.

Монотонные и строго монотонные функции. Свойства монотонных функций (теорема о существовании односторонних пределов; следствие о точках разрывов; критерий непрерывности; теорема о существовании и непрерывности обратной функции). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции.

Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Первая теорема Больцано-Коши о прохождении непрерывной функции через нуль. Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.

Ограниченные функции. Точные грани функции. Две теоремы Вейерштрасса о непрерывной на сегменте функции.

Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора.

VI. **Производная и дифференциал функции в точке**

Приращение функции. Разностная форма условия непрерывности. Производная функции в точке. Геометрический смысл производной. Дифференцируемые функции в точке, на множестве. Связь дифференцируемости функции с существованием производной. Непрерывность дифференцируемой функции.

Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл.

Дифференцирование сложной функции. Производная обратной функции.

Арифметические операции над дифференцируемыми функциями.

Производные простейших элементарных функций. Производная степенно-показательной функции. Логарифмическая производная.

Производная функции, заданной параметрически.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка.

VII. **Производные и дифференциалы высших порядков числовой функции**

Производные и дифференциалы высших порядков числовой функции вещественного переменного. Формула Лейбница (теорема Лейбница).

VIII. **Основные теоремы дифференциального исчисления числовых функций**

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке. Локальный экстремум. Теоремы Ферма (необходимое условие локального экстремума), Ролля (об обращении производной в нуль), Лагранжа (формула конечных приращений), Коши (обобщенная формула конечных приращений). Постоянство функции, имеющей на открытом промежутке производную равную нулю. Критерий монотонности функции на открытом промежутке. Достаточное условие строгой монотонности функции на открытом промежутке.

Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ (*второе правило без доказательства*) .

Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в общей форме

$$\left(R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n\right).$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Шлёмильха-Роша

$$\left(R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)\right),$$

Лагранжа, Коши. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано (лемма и теорема) .

Формула Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций

$$(e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha)$$

по формуле Маклорена.

Стационарные и критические (подозрительные на экстремум) точки. Достаточные условия экстремума функции в точке (три условия). Наибольшее и наименьшее значения функции на сегменте.

Выпуклые и строго выпуклые, вогнутые и строго вогнутые функции. Критерии выпуклости функции (два критерия). Критерий строгой выпуклости функции. Достаточное условие строгой выпуклости функции.

Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика функции.

Асимптоты графика функции. Критерий существования наклонной асимптоты.