

**Экзаменационная программа курса «Математический анализ»  
(2014/2015 уч. г., 3 семестр, группы 1–2)**

*Составитель: М. Э. Абрамян*

Свойства декартовых произведений (6 свойств; все свойства без доказательства, за исключением свойства разности декартовых произведений с двумя сомножителями). Свойства клеток в  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}^n$  (без доказательства). Клеточное множество в  $\mathbf{R}^n$  и его мера: определения и теорема о корректности определения меры (без доказательства). Свойства клеточных множеств (8 свойств). Измеримое по Жордану множество и его мера: определение и доказательство корректности определения меры. Свойства множества жордановой меры нуль (3 свойства). Критерий измеримости множества (без доказательства). Свойства измеримых множеств (2 свойства). Интегральная сумма и верхняя и нижняя суммы Дарбу функции многих переменных, кратный интеграл Римана по измеримому множеству: определения. Существование неограниченных интегрируемых функций. Существенно неограниченные функции и их свойство (без доказательства). Два критерия интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу (без доказательства).

Свойства кратного интеграла (7 свойств). Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на компактном измеримом множестве (без доказательства). Теорема об интегрируемости функции, ограниченной на компактном измеримом множестве  $G$  и имеющей множество точек разрыва меры нуль, следствие. Цилиндр в  $\mathbf{R}^n$ : определение и лемма о мере цилиндра (без доказательства). Теорема о мере графика интегрируемой функции, следствие. Теорема о сведении двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу, 2 следствия. Элементарная область в  $\mathbf{R}^2$  относительно оси  $y$ : определение и теорема о сведении двойного интеграла по элементарной области к повторному интегралу; следствие. Элементарные области в  $\mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^n$ : определения и теоремы о сведении тройного и кратного интеграла по элементарной области к повторному интегралу (без доказательства).

Вывод формулы замены переменных для интеграла по неориентированному отрезку. Формула замены переменных  $x = \varphi(y)$  для кратного интеграла в случае диффеоморфизма  $\varphi$  (без доказательства). Применения формулы замены переменных: случай линейного преобразования, в том числе ортогонального преобразования и преобразования подобия; геометрический смысл определителя.

Несобственный интеграл: определение. Арифметические свойства несобственного интеграла. Замена переменных и интегрирование по частям в несобственном интеграле (без доказательства). Совпадение собственного и несобственного интеграла в случае, если функция интегрируема на промежутке в обычном смысле. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы: определение, лемма о сходимости абсолютно сходящегося интеграла. Несобственные интегралы от неотрицательных функций: критерий сходимости, признак сравнения и следствие из него. Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла.

Числовой ряд, частичная сумма ряда, сходимость числового ряда: определения и пример. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости. Абсолютно сходящиеся числовые ряды: определение, лемма о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Критерий сходимости неотрицательных числовых рядов и признак сравнения. Интегральный признак сходимости. Признак сходимости Даламбера, следствие (следствие без доказательства). Признак сходимости Коши, следствие (следствие без доказательства). Знакопередающийся ряд (ряд Лейбница): определение, теорема о сходимости, оценка скорости сходимости. Признаки сходимости Дирихле и Абеля (признак сходимости Дирихле без доказательства).

Равномерная сходимость функциональной последовательности и ряда: определения. Критерий равномерной сходимости последовательности в терминах предела супремума; следствие для рядов. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности; следствие для рядов. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов: признак Вейерштрасса, следствие. Признаки Дирихле и Абеля (оба признака без доказательства). Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, следствие. Интегрирование равномерно сходящейся последовательности, следствие. Дифференцирование равномерно сходящейся последовательности, следствие.

Две теоремы об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда. Верхний и нижний пределы числовой последовательности: определение. Теорема Коши-Адамара; доказательство формулы для радиуса сходимости в случае обычного предела, примеры применения формулы в случае, когда обычного предела не существует. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость вещественной аналитической функции. Ряд Тейлора функции: определение. Пример, показывающий, что бесконечной дифференцируемости недостаточно для разложения функции в ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (без доказательства). Теорема о разложении функции в ряд Тейлора, следствия (разложение функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ). Разложение функций  $(1+x)^\alpha$ ,  $\ln(1+x)$  и  $\arcsin x$  (без обоснования разложения функции  $(1+x)^\alpha$ ).

Вещественное евклидово пространство  $E$ , аксиомы скалярного произведения, ортонормированная система, ряд Фурье элемента пространства  $E$  по ортонормированной системе: определения. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм Фурье в вещественном евклидовом пространстве, следствие (неравенство Бесселя). Пространство  $R([- \pi, \pi])$ , формальный ряд Фурье по тригонометрической системе функций в  $R([- \pi, \pi])$ , неравенство Бесселя (два представления).

Равенство Парсеваля, следствие (о сходимости по норме  $E$  ряда Фурье). Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации (без доказательства). Теорема об аппроксимации кусочно-непрерывных функций из  $R([- \pi, \pi])$ . Следствие о сходимости ряда Фурье по норме  $R([- \pi, \pi])$ . Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье (без доказательства). Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье. Асимптотическое свойство коэффициентов ряда Фурье.