МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического анализа

Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко, В. В. Моржаков

Курс лекций по комплексному анализу

Ростов-на-Дону
2014

Печатается по решению
кафедры математического анализа и учебно-методической комиссии
факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Рецензент:
доцент Ковальчук В.Е.

Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко, $\boxed{\text{В. В. Моржаков}}$
Курс лекций по комплексному анализу. — ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2014, 189 с.

Изложен лекционный материал по теории функций комплексного переменного (комплексному анализу), традиционно читаемый сотрудниками кафедры математического анализа ЮФУ (РГУ) на отделениях «Математика» и «Механика». В 80–90 годы этот курс читал трагически погибший доцент В. В. Моржаков, сохранившимся рукописным конспектом лекций которого Л. И. Калиниченко и Ю. А. Кирютенко воспользовались.

Рисунки к лекциям выполнены магистрантом Р.В. Калиниченко с помощью языка программирования MetaPost.

Авторы выражают благодарность доцентам кафедры теории функций и функционального анализа В. Е. Ковальчуку и П. А. Чалову за предоставленный курс лекций по теории функций комплексного переменного, который ими читается на отделении «Прикладная математика» в рамках курса математического анализа, а также за полезные советы и замечания к данному курсу.

Глава 1

Введение в ТФКП

1.1 Комплексные числа

Комплексные числа уже изучались в курсе алгебры, поэтому здесь лишь кратко напомним основные определения и те результаты, которые нужны для дальнейшего.

Определение 1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел x, y, при этом x называют вещественной частью z: $x = \mathcal{R}e\, z$, а y — мнимой частью z: $y = \mathcal{I}m\, z$. Множество всех комплексных чисел будем далее обозначать через $\mathbb{C}$.*

Если $y = 0$, пару $(x, 0)$ далее будем обозначать просто через x. Отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, которое каждому вещественному x ставит в соответствие комплексное число $(x, 0)$, инъективно: если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1, 0) \neq (x_2, 0)$. Поэтому $\mathbb{R}$ можно вложить в $\mathbb{C}$ и считать $\mathbb{R}$ подмножеством $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}$ — расширением $\mathbb{R}$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Операции с комплексными числами определяются следующим образом.

- Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- Произведением (умножением) комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Заметим, что операции сложения и умножения комплексных чисел вида $(x, 0)$ совпадают с одноименными операциями над действительными числами:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0).$$

Число $(0, 0)$ обладает тем свойством, что для любого числа $(x, y) \in \mathbb{C}$ имеет место равенство $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$. Поэтому число $(0, 0)$ называют комплексным нулем и обозначают как 0. Каждое комплексное число $z = (x, y)$ имеет противоположное ему число $-z = (-x, -y)$: $z + (-z) = 0$.

Число $(1,0)$ обладает тем свойством, что для любого числа $(x,y)\in\mathbb{C}$ имеет место равенство $(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$. Поэтому число $(1,0)$ называют комплексной единицей и обозначают как 1.

Каждое комплексное число $z=(x,y)\neq 0$ имеет, как легко проверить, обратное ему число $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$: $z\cdot(z^{-1})=(1,0)=1$.

С операциями сложения и умножения множество $\mathbb{C}$ является полем. Эти операции, как легко проверить, коммутативны ($z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$), ассоциативны ($z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$), дистрибутивны ($(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$).

- Числом, комплексно сопряженным (или, просто, сопряженным) к комплексному числу $z=(x,y)$, называют комплексное число $\overline{z}=(x,-y)$. Легко вычислить: $z\cdot\overline{z}=(x,y)(x,-y)=(x^2+y^2,0)=x^2+y^2$. Поэтому, для $z=(x,y)\neq 0$,
$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{x^2+y^2}.$$
Легко установить, что для любых $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ имеют место следующие соотношения:

  1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$,

  2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$,

  3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, если $z_2\neq 0$.

- Для комплексных чисел $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)\neq 0$ существует единственное комплексное число $z_3=(x_3,y_3)$ такое, что $z_3\cdot z_2=z_1$, то есть
$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}.$$
Число z_3 называют частным чисел z_1 и z_2.

- Разностью комплексных чисел $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называется комплексное число $z_1-z_2=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

Определение 2. *Модулем комплексного числа $z=(x,y)$ называется число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Как следует из определения сопряженного числа, имеют место равенства: $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, $|z|=|\overline{z}|$. Очевидно, что $|z|\geq 0$, $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$.

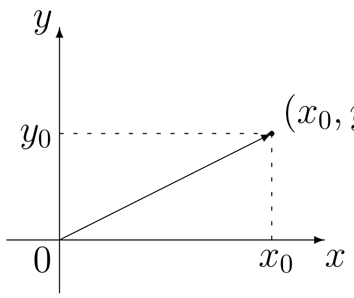
Обычно комплексные числа записывают не в виде упорядоченной пары вещественных чисел $z=(x,y)$, а в виде $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$, а i — комплексное число, которое называется мнимой единицей и определяется парой $(0, 1)$. Основное свойство мнимой единицы состоит в том, что

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Форму записи комплексных чисел в виде $z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа z, при этом, как и для пар, x называют вещественной частью z: $x = \mathcal{R}e\, z$, а y — мнимой частью z: $y = \mathcal{I}m\, z$. Комплексное число $(x, 0) = x + 0i$ обозначают, как было указано выше, через x. Знак умножения, как и в случае умножения вещественных чисел, опускают, то есть вместо $z_1 \cdot z_2$ пишут $z_1\, z_2$.

Таким образом, каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие единственная упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел x, y, и наоборот.

Можно дать простую геометрическую интерпретацию комплексных чисел, рассматривая комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ как точку с координатами (x_0, y_0) на плоскости $\mathbb{R}^2$ или как вектор, проведенный из начала координат в точку с координатами (x_0, y_0). Вещественные числа при этом будут лежать на оси абсцисс, которую называют вещественной осью, а числа вида $z = iy$, иногда называемые чисто мнимыми, будут лежать на оси ординат, которую называют мнимой осью. В этом случае плоскость называют комплексной плоскостью и обозначают, как и множество комплексных чисел, через $\mathbb{C}$.



При такой интерпретации операции сложения и вычитания комплексных чисел являются операциями сложения и вычитания векторов, а $|z_1 - z_2|$ — это расстояние между точками z_1 и z_2. Тогда, очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|,$$
$$|\mathcal{R}e\, z| \le |z|, \quad |\mathcal{I}m\, z| \le |z|, |z| \le |\mathcal{R}e\, z| + |\mathcal{I}m\, z|.$$

Определим еще одну характеристику комплексного числа.

Определение 3. *Аргументом комплексного числа $z = x + iy \ne 0$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$ (которое обычно обозначают $\arg z$) такое, что*

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|},\ \textit{или}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\ x \ne 0.$$

Аргумент числа $z = 0$ не определен.

Отметим, что аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому обычно договариваются считать, что либо $0 \leq \arg z < 2\pi$, либо $-\pi < \arg z \leq \pi$. Чаще всего будем использовать последнюю договоренность. В этом случае удобно пользоваться следующими правилами вычисления аргумента комплексного числа:

- $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, если $x > 0$;
- $\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, если $x < 0$, $y > 0$;
- $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$, если $x = 0$, $y > 0$;
- $\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, если $x < 0$, $y < 0$;
- $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$, если $x = 0$, $y < 0$.

Пользуясь понятиями модуля и аргумента комплексного числа, легко получить другое представление для комплексного числа $z \neq 0$, которое называют тригонометрической формой комплексного числа z:

$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi \right), \quad \varphi = \arg z,$$

то есть

$$z = |z| \left(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z) \right).$$

Геометрически, $\arg z$ — угол, который образует вектор, проведенный из точки $0 = (0, 0)$ в точку $z = (x, y)$, с положительной частью вещественной оси.

1.1.1 Показательная форма комплексного числа

Для $\varphi \in \mathbb{R}$ число $e^{i\varphi}$ определим формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Очевидно, что $\left| e^{i\varphi} \right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, $\arg e^{i\varphi} = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Если $\arg z = \varphi$, то

$$z = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi \right) = |z| \left(\cos \arg z + i \sin \arg z \right) = |z| \, e^{i \arg z}.$$

Представление комплексного числа z в таком виде называют показательной (экспоненциальной) формой комплексного числа z.

Учитывая, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, можно утверждать, что если $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$ и $\arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь показательной формой комплексного числа, находим, что если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то

$$z_1 z_2 = (|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$
$$= |z_1|\,|z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$
$$= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = |z_1|\,|z_2|\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Отсюда, для любого $n \in \mathbb{N}$ следует, что

$$z^n = |z|^n\, e^{in\arg z}. \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) следует формула Муавра:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Например,

$$(\sqrt{3}+i)^{2003} = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)^{2003} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{2003} =$$

$$= 2^{2003}\left(\cos\frac{2003\pi}{6} + i\sin\frac{2003\pi}{6}\right) = 2^{2003}\left(\cos 333\frac{5}{6}\pi + i\sin 333\frac{5}{6}\pi\right) =$$

$$= 2^{2003}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{2002}(\sqrt{3} - i).$$

Аналогично предыдущему можно показать, что $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}$. Из этого следует, что формула (1.2) верна при всех n из $\mathbb{Z}$ $\Big($полагаем, как обычно, $z^0 = 1$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}\Big)$.

Поскольку для любого $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

то складывая и вычитая эти два равенства получим формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Отметим, что функция $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, обладает обычными свойствами показательной функции вещественной переменной:

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z}.$$

1.1.2 Решение уравнения $\mathbf{z^n = a}$

Определение 4. *Комплексное число z называется корнем n-ой степени из числа $a \in \mathbb{C}$ (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$. Если $a = 0$, то уравнение $z^n = a$ имеет единственный корень $z = 0$. Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа. Пусть $z = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)$, $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$|z|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$|z|^n = |a|, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

то есть, тогда и только тогда, когда

$$|z| = |a|^{1/n}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, получаем, что любое комплексное число

$$z_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

является решением уравнения $z^n = a$. Очевидно, что

$$|z_k| = |a|^{1/n}, \quad \arg z_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Среди чисел z_k, $k \in \mathbb{Z}$, ровно n различных. Действительно, в силу 2π-периодичности функций $\sin t$ и $\cos t$, $z_n = z_0$, $z_{n+1} = z_1$, $\ldots$, поэтому уравнение $z^n = a$ имеет n различных комплексных корней

$$z_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

На комплексной плоскости эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $|a|^{1/n}$ с центром в точке $(0,0)$.

Значение корня при $k = 0$, то есть $z_0 = |a|^{1/n} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ называют обычно главным значением корня.

Как частный случай, уравнение $z^n = 1$ в комплексной плоскости имеет n корней

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и главное значение корня — комплексное число 1 (геометрически, точка с координатами $(1,0)$)

1.1.3 Решение уравнения $\mathbf{e^z = a}$

Уравнение $e^z = a$ равносильно уравнению

$$e^x e^{iy} = |a| e^{i \arg a}, \text{ то есть } e^x(\cos y + i \sin y) = |a|(\cos \arg a + i \sin \arg a).$$

Эти числа равны тогда и только тогда, когда $e^x = |a|$, $y = \arg a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для $x \in \mathbb{R}$ $e^x \neq 0$, поэтому, если $|a| = 0$, уравнение $e^z = a$ корней не имеет. Пусть $a \neq 0$. Тогда уравнение $e^z = a$ имеет корни: $e^x = |a|$, $y = \arg a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, все корни уравнения $e^z = a$ имеют вид: $x = \ln |a|$, $y = \arg a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Принято все эти корни записывать единой формулой:

$$\operatorname{Ln} a := \ln |a| + i(\arg a + 2\pi k), \; k \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Топология комплексной плоскости

Пополним комплексную плоскость $\mathbb{C}$ единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удаленной точкой) и положим $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. Множество $\overline{\mathbb{C}}$ называется расширенной комплексной плоскостью. При этом считается, что

$$|z| < |\infty|, \; \forall z \in \mathbb{C}, \quad |\infty| = +\infty,$$

$$z + \infty = \infty + z = \infty, \; \forall z \in \overline{\mathbb{C}},$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \; \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}.$$

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Множество $U_a(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ будем называть ε-окрестностью точки a, а множество $\overset{\circ}{U}_a(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ — проколотой ε-окрестностью точки a.

Множество $U_\infty(\varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\right\}$ будем называть ε-окрестностью ∞, а множество $\overset{\circ}{U}_\infty(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon\}$ — проколотой ε-окрестностью ∞.

Определение 5. *Точка a из $\overline{\mathbb{C}}$ называется предельной точкой множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, если любая ее проколотая ε-окрестность содержит точки из E, то есть $E \cap \overset{\circ}{U}_a(\varepsilon) \neq \varnothing$, $\forall \overset{\circ}{U}_a(\varepsilon)$.*

Определение 6. *Точка a из $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется внутренней точкой множества E, если она принадлежит E вместе с некоторой ε-окрестностью $U_a(\varepsilon)$.*

Определение 7. *Точка a из $\overline{\mathbb{C}}$ называется граничной точкой множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, если любая ее ε-окрестность содержит как точки из E, так и точки из $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$.*

Определение 8. *Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется открытым, если каждая его точка внутренняя, то есть $\forall\, z \in E \; \exists\, \varepsilon > 0 \; : \; U_z(\varepsilon) \subseteq E$.*

Определение 9. *Множество* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки (или, что эквивалентно, множество* $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ *открыто).*

Для произвольного множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ введем следующие обозначения:

$\overline{E}$ — замыкание E в $\overline{\mathbb{C}}$ (присоединение к E всех его предельных точек);

$\operatorname{int} E$ — внутренность E, то есть все внутренние точки из E;

∂E — граничные точки множества E (легко доказать, что $\partial E = \overline{E} \setminus \operatorname{int} E$).

Определение 10. *Множество* $E \subseteq \mathbb{C}$ *называется ограниченным, если существует число* $M > 0$ *такое, что* $|z| \leq M$, $\forall\, z \in E$.

Определение 11. *Ограниченное замкнутое подмножество в* $\mathbb{C}$ *называется компактным множеством (компактом).*

Определение 12. *Диаметром множества* $E \subseteq \mathbb{C}$ *называется величина*

$$d(E) = \sup_{z,w \in E} |z - w|.$$

Определение 13. *Последовательность компактов* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *называется последовательностью вложенных компактов, если* $F_n \supseteq F_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Как и на вещественной прямой, имеет место следующий важный результат.

Теорема 1. *Для последовательности вложенных компактов* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *таких, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(F_n) = 0$, *множество* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *состоит из одной точки.*

1.3 Предел последовательности комплексных чисел

Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ называется последовательностью комплексных чисел. Это означает, что каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное комплексное число $f(n) = z_n$. Последовательность комплексных чисел часто, как и последовательность вещественных чисел, записывают в виде $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 14. *Последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется ограниченной в* $\mathbb{C}$, *если найдется окрестность* U_0 *точки* $z = 0$ *такая, что* $z_n \in U_0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *то есть* $\exists\, R > 0$: $|z_n| \leq R$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение 15. *Точка* a *из* $\overline{\mathbb{C}}$ *называется пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если для любой ее* ε-*окрестности* $U_a(\varepsilon)$ *найдется такой номер* n_0, *что* $z_n \in U_a(\varepsilon)$ *для всех номеров* $n > n_0$.

Этот факт можно записать в символьном виде:

$$a \in \overline{\mathbb{C}},\ a = \lim_{n\to+\infty} z_n \Longleftrightarrow \forall\, U_a(\varepsilon)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : z_n \in U_a(\varepsilon),\ \forall\, n > n_0, \tag{1.3}$$

$$a \in \mathbb{C},\ a = \lim_{n\to+\infty} z_n \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - a| < \varepsilon,\ \forall\, n > n_0. \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$. Такие последовательности называются бесконечно малыми.

Определение 16. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ для которой $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ называется бесконечно большой последовательностью. Другими словами это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется соотношение $|z_n| > \varepsilon$.*

Очевидно, что записи $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$ равносильны. Формально определение предела последовательности комплексных чисел совпадает с вещественным случаем. Отличие лишь в различном понимании ε-окрестности точки из $\overline{\mathbb{C}}$. Если в вещественном случае это конечный интервал (для числа) или бесконечный интервал(ы) (для бесконечного символа) вещественной оси, то в комплексном случае это внутренность круга радиуса ε с центром в точке a, когда $a \in \mathbb{C}$, или внешность круга радиуса ε с центром в точке 0 (или любой другой точке из $\mathbb{C}$), когда $a = \infty$.

Определение 17. *Последовательность комплексных чисел, имеющая пределом точку $a \in \mathbb{C}$, называется сходящейся (к этому комплексному числу). В противном случае последовательность называется расходящейся.*

Отметим: бесконечно большая последовательность является расходящейся.

Теорема 2. *Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу $w = u + iv \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = u \ \text{и}\ \lim_{n\to+\infty} y_n = v.$$

■ Доказательство вытекает из неравенства:

$$\max\{|x_n - u|, |y_n - v|\} \le |z_n - w| \le |x_n - u| + |y_n - v|,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

которое означает, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника не меньше длины каждого из катетов и не больше суммы длин катетов. □

Из теоремы 2 следует, что основные теоремы вещественного анализа о сходящихся последовательностях, не связанные с неравенствами, сохраняют свою силу и в комплексном случае. Так, для сходящихся последовательностей комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются равенства:

$$\lim_{n\to+\infty}(z_n + z'_n) = \lim_{n\to+\infty} z_n + \lim_{n\to+\infty} z'_n; \quad \lim_{n\to+\infty}(z_n \cdot z'_n) = \lim_{n\to+\infty} z_n \cdot \lim_{n\to+\infty} z'_n;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z_n}{z'_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} z'_n},\ \text{если}\ \lim_{n\to+\infty} z'_n\neq 0.$$

Кроме того, справедливы теоремы о единственности предела, об ограниченности сходящейся последовательности, лемма Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Приведем только два результата.

Лемма 1 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Из всякой ограниченной в* $\mathbb{C}$ *последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 3 (критерий Коши)**.** *Последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,n_0\in\mathbb{N}:|z_n-z_m|<\varepsilon,\ \forall\,n>n_0, \forall\,m>n_0.$$

Эти теоремы могут быть доказаны сведением к вещественному случаю на основании теоремы 2.

Нетрудно доказать критерий сходимости для последовательности комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Теорема 4. *Последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $z_n=|z_n|e^{i\arg z_n}$*,* $n\in\mathbb{N}$*, сходится к числу* $w=|w|e^{i\arg w}\in\mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n|=|w|\ \textit{и}\ \lim_{n\to+\infty}\arg z_n=\arg w,$$

в предположении, что $\arg z_n$*,* $n\in\mathbb{N}$ *и* $\arg w$ *выбираются внутри некоторого фиксированного интервала длины меньше* 2π*.*

В связи с этой теоремой введем следующее определение.

Определение 18. *Будем говорить, что последовательность комплексных чисел* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к числу* $A\in\mathbb{C}$ *по направлению* φ_0*, если*

$$\lim_{n\to+\infty}|A-w_n|=0\quad\textit{и}\quad\arg(A-w_n)=\varphi_0,\ n\in\mathbb{N}.$$

1.4 Функции комплексного переменного

Пусть E и F множества в $\overline{\mathbb{C}}$. Говорят, что на множестве E задана функция $w=f(z)$ со значениями в множестве F (пишут $f:E\to F$), если указан закон, по которому каждой точке $z\in E$ ставится в соответствие единственное число $w\in F$ или набор точек из F. В первом случае функция f называется *однозначной*, а во втором — *многозначной*. Множество E называют множеством определения функции f. Множество F называют множеством значений функции f.

Итак, для функции комплексного переменного $f : E \to F$ множество

$$f^{-1}(w) = \{z \in E : f(z) = w\}$$

может состоять из одной точки, из нескольких точек, или быть бесконечным множеством. До сих пор многозначные функции не рассматривались. Работать с такими функциями неудобно, поэтому её «разлагают» на *однозначные ветви*. Говорят, что функция $\hat{f} : \hat{E} \subset E \to F$ является однозначной ветвью многозначной функции f, если каждому $z \in \hat{E}$ ставится в соответствие единственное число $w = \hat{f}(z) \in F$ такое, что $\hat{f}(z)$ совпадает с одним из значений $f(z)$.

Начнем изучение функций комплексного переменного с однозначных функций. Все последующие функции будем считать таковыми, если явно не сказано, что рассматривается многозначная функция.

Функцию комплексного переменного $w = f(z)$ часто записывают в виде $w = f(x + iy)$, поскольку $z = x + iy$. Если w представить в виде $u + iv$, то соответствие $w = f(z)$ эквивалентно соответствию $u + iv = f(x + iy)$. В этом случае $\mathcal{R}e\, f(x + iy) = u(x, y)$, $\mathcal{I}m\, f(x + iy) = v(x, y)$. Таким образом, задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ эквивалентно заданию двух вещественных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $(x, y) \in E$. Полученным представлением $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ далее будем использовать постоянно.

1.4.1 Предел функции комплексного переменного

Определение 19. *Пусть a — предельная точка множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Точка $A \in \overline{\mathbb{C}}$ называется пределом функции $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$ при $z \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $f(z) \in U_A(\varepsilon)$ для всех $z \in E \bigcap \overset{\circ}{U}_a(\delta)$. В этом случае пишут: $A = \lim\limits_{z \to a} f(z)$.*

Это общее определение имеет различные расшифровки в зависимости от того, каковы A и a — числа из $\mathbb{C}$ или ∞. Такие расшифровки практически не отличаются от аналогичных формулировок для вещественных функций одной вещественной переменной.

Теорема 5 (критерий существования конечного предела)**.** *Пусть $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — предельная точка множества E. Для того, чтобы число $A = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ являлось пределом функции $f(z) = \mathcal{R}e\, f(z) + i\mathcal{I}m\, f(z)$ при $z \to a$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \lim_{z \to a} \mathcal{R}e\, f(z) = \alpha \quad \textit{и} \quad \exists \lim_{z \to a} \mathcal{I}m\, f(z) = \beta.$$

■ Доказательство следует из определений пределов комплексной и вещественной функций в точке и из очевидных неравенств:

$$\max\{|\mathcal{R}e\, f(z) - \alpha|, |\mathcal{I}m\, f(z) - \beta|\} \le |f(z) - A| \le |\mathcal{R}e\, f(z) - \alpha| + |\mathcal{I}m\, f(z) - \beta|. \square$$

Определение 20. *Пусть $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — предельная точка множества E. Говорят, что функция $f(z)$ является бесконечно малой при $z \to a$ (часто пишут $f(z) = o(1)$, $x \to a$), если $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = 0$.*

Определение 21. *Пусть $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — предельная точка множества E. Говорят, что функция $f(z)$ является бесконечно большой при $z \to a$ (часто пишут $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$), если найдется окрестность U_a точки a такая, что $f(z) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_a \cap E$, а функция $1/f(z)$ — бесконечно малая при $z \to a$.*

Как и в теории пределов последовательностей комплексных чисел, пользуясь теоремой 5 и теоремой об арифметических операциях с пределами для вещественных функций, легко доказать справедливость аналогов теорем о вещественных функциях, имеющих конечный предел и не связанных с неравенствами: единственность предела, локальную ограниченность, критерий Гейне, о пределе суперпозиции, об арифметических операциях с пределами, о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и так далее. Приведем только следующие два результата.

Теорема 6 (об арифметических операциях с пределами)**.** *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — предельная точка множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, функции f и g действуют из E в $\overline{\mathbb{C}}$ и существуют пределы $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{z\to a} g(z) = B \in \mathbb{C}$. Тогда*

- $\exists \lim\limits_{z\to a}(f(z) + g(z)) = A + B$*;*
- $\exists \lim\limits_{z\to a}(f(z)g(z)) = AB$*;*
- *если* $B \neq 0$, $\exists \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$.

Теорема 7 (Гейне)**.** *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ предельная точка множества $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$. Точка $A \in \overline{\mathbb{C}}$ является пределом функции $f(z)$ при $z \to a$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $z_n \in E \setminus \{a\}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, последовательность образов $\{f(z_n)\}$ имеет предел, равный A ($\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = A$).*

Как и в случае функций вещественной переменной функции комплексного переменного можно сравнивать. Пусть функции f и φ определены на множестве $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, a — предельная точка множества E.

Определение 22. *Говорят, что функция $f(z)$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $\varphi(z)$ при $z \to a$, и пишут $f(z) = o(\varphi(z))$ при $z \to a$ (читается: $f(z)$ есть о малое от $\varphi(z)$ при $z \to a$), если найдется такая* *окрестность U_a, что $f(z) = \alpha(z)\,\varphi(z)$, $\forall z \in E \bigcap \overset{\circ}{U}_a$,, где $\alpha(z)$ — бесконечно малая в точке a функция.*

Если функция $\varphi(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то условие $f(z) = o(\varphi(z))$ при $z \to a$ можно переписать в виде

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0.$$

В случае, если функция φ является бесконечно малой в точке a, то функция $f(z) = o(\varphi(z))$ при $z \to a$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция φ.

Определение 23. *Говорят, что функция $f(z)$ является ограниченной по сравнению с функцией $\varphi(z)$ при $z \to a$, и пишут $f(z) = O(\varphi(z))$ при $z \to a$ (читается: $f(z)$ есть O большое от $\varphi(z)$ при $z \to a$), если найдется такая окрестность U_a, что $f(z) = \alpha(z)\,\varphi(z)$, $\forall z \in E \bigcap \overset{\circ}{U}_a$,,$f(z) = \alpha(z)\,\varphi(z)$, где $\alpha(z)$ — локально ограниченная в точке a функция.*

При использовании знака равенств с символами O и o следует иметь в виду, что они не являются равенствами в обычном смысле. Дело в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные функции. По существу определениями 22 и 23 введены классы функций, обладающих некоторыми свойствами в некоторой проколотой окрестности точки a. Более того, равенства $f(z) = o(\varphi(z))$ или $f(z) = O(\varphi(z))$ при $z \to a$ читается только слева направо.

Определение 24. *Если функции f и φ таковы, что при $z \to a$*

$$f(z) = O(\varphi(z)) \text{ и } \varphi(z) = O(f(z)),$$

то они называются функциями одного порядка при $z \to a$.

Определение 25. *Пусть $f, \varphi : E \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Говорят, что функции f и φ эквивалентны при $z \to a$, и пишут $f(z) \sim \varphi(z)$ при $z \to a$, если найдется такая окрестность U_a, что $f(z) = \alpha(z)\,\varphi(z)$, $\forall z \in E \bigcap \overset{\circ}{U}_a$, причем $\lim\limits_{z \to a} \alpha(z) = 1$.*

1.4.2 Непрерывность функции комплексного переменного

Определение 26. *Функция $f : E \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, называется непрерывной в точке $z_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(z) \in U_{f(z_0)}(\varepsilon)$ для всех $z \in U_{z_0}(\delta) \bigcap E$.*

Замечание. Если z_0 — предельная точка множества E, то функция f непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Обратите внимание, что при таком определении непрерывности, функция может быть непрерывной в точке ∞, если $\infty \in E$, и в точке $z_0 \in E$, в которой $f(z_0) = \infty$. Например, функция

$$f(z) = \begin{cases} 1/z, \; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, \; z = \infty, \\ \infty, \; z = 0, \end{cases}$$

действует из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и непрерывна в каждой точке из $\overline{\mathbb{C}}$.

Из теоремы 5 следует критерий непрерывности функции комплексного переменного в точке из $\mathbb{C}$.

Теорема 8 (критерий непрерывности в точке из $\mathbb{C}$)**.** *Функция $f : E \to \mathbb{C}$, $E \subseteq \mathbb{C}$, непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ тогда и только тогда, когда функции $\mathcal{R}e\, f$, $\mathcal{I}m\, f$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Непрерывные функции комплексного переменного обладают теми же свойствами, что и непрерывные функции вещественного переменного (если эти свойства не связанны с неравенствами). Приведем только некоторые из них.

Теорема 9 (об арифметических операциях с непрерывными функциями)**.** *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{C}$, $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ непрерывны в точке $z_0 \in E$. Тогда функции $f \pm g$, fg непрерывны в точке z_0. Если, дополнительно, $g(z_0) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в точке z_0.*

Теорема 10 (о непрерывности суперпозиции)**.** *Если $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to F$ и непрерывна в точке $z_0 \in E$, $g : F \to \overline{\mathbb{C}}$ и непрерывна в точке $w_0 = f(z_0) \in F$, то функция $g \circ f : E \to \overline{\mathbb{C}}$: $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, непрерывна в точке z_0.*

Теорема 11 (Вейерштрасса)**.** *Функция, непрерывная на компакте в $\mathbb{C}$, ограничена на нем.*

Определение 27. *Пусть $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Говорят, что функция f равномерно непрерывна на множестве E, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(z') - f(z'')| < \varepsilon, \; \forall z', z'' \in E : |z' - z''| < \delta.$$

Равномерная непрерывность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ на множестве E равносильна равномерной непрерывности на E функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Очевидно, что функция f, равномерно непрерывная на множестве $E \subseteq \mathbb{C}$, непрерывна на этом множестве. Обратное утверждение, как и для функций вещественной переменной, в общем случае не имеет места, но справедливо в том случае, когда E компакт в $\mathbb{C}$.

Теорема 12 (Кантора)**.** *Функция равномерно непрерывна на компакте из $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда она непрерывна на нем.*

1.4.3 Дифференцируемость функции комплексного переменного

Определение 28. *Пусть $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{int} E$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется производной функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, а функция f называется дифференцируемой в точке z_0.

Определение 29. *Функция f называется дифференцируемой на открытом множестве $E \subseteq \mathbb{C}$, если функция f дифференцируема в каждой точке $z \in E$.*

Теорема 13 (общий критерий дифференцируемости)**.** *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$. Функция $f : E \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $z_0 \in \operatorname{int} E$ тогда и только тогда, когда существует константа $A \in \mathbb{C}$ такая, что имеет место представление*

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), \ z \to z_0. \tag{1.5}$$

Если функция f дифференцируема в точке z_0, то $A = f'(z_0)$.

■ *Необходимость.* Пусть функция f дифференцируема в точке z_0, тогда существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \Longleftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = 0.$$

Положим $\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & z \in E \setminus \{z_0\}, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$ Тогда $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$, $z \in E$. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$, то есть $\alpha(z)(z - z_0) = o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, то имеет место представление (1.5) с константой $A = f'(z_0)$.
Достаточность. Пусть имеет место представление (1.5), тогда

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \frac{\bar{o}(z - z_0)}{z - z_0}, \ z \to z_0, \ z \in E \setminus \{z_0\} \Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A,$$

то есть $\exists\, f'(z_0) = A$. □

Следствие 13.1. *Если функция f дифференцируема в точке z_0, то она непрерывна в точке z_0.*

■ Если верно представление (1.5), то, очевидно, $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f'(z_0)$. □

Поскольку определение производной такое же, как и в вещественном случае и не меняются свойства пределов, то сохраняются те же правила вычисления производной суммы, разности, произведения, частного, суперпозиции функций и обратной функции. Сохраняются и формулы для производных основных элементарных функций. Приведем только некоторые результаты.

Теорема 14 (о дифференцируемости суперпозиции)**.** *Пусть E_1, $E_2 \subseteq \mathbb{C}$, функция $f : E_1 \to E_2$ дифференцируема в точке $z_0 \in \operatorname{int} E_1$, а функция $g : E_2 \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $f(z_0) \in \operatorname{int} E_2$. Тогда суперпозиция $g \circ f$ дифференцируема в точке z_0 и*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Теорема 15. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$, и функции $f, g : E \to \mathbb{C}$ дифференцируемы в точке $z_0 \in \operatorname{int} E$. Тогда*

- *функция $f \pm g$ дифференцируема в точке z_0 и*

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0);$$

- *функция $f \cdot g$ дифференцируема в точке z_0 и*

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0);$$

- *если $g(z_0) \neq 0$, функция $\dfrac{f}{g}$ дифференцируема в точке z_0 и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Однако, в отличие от вещественного случая, класс дифференцируемых функций комплексного переменного достаточно узок, что объясняется большим произволом в выборе способа стремления комплексной переменной z к z_0. Если в вещественном случае x стремится к x_0, находясь на вещественной оси, то в комплексном случае z может стремиться к z_0 по любому дозволенному пути в $\mathbb{C}$. Рассмотрим пример, поясняющий сказанное.

Пример 1. *Функция $\overline{z}^2$ не дифференцируема в точке $z_0 \neq 0$.*

■ Функция f определена в $\mathbb{C}$. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$. Положим

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y.$$

Заметим, что $\overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$. Вычислим приращение функции

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) =$$

$$= ((x_0 + \Delta x)^2 - (y_0 + \Delta y)^2 - 2i(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)) - (x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0) =$$

$$= 2(x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)) + (\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y)).$$

Тогда,если $\Delta z \neq 0$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\frac{x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \qquad (1.6)$$

Перейдём в (1.6) к пределу при $\Delta z \to 0$ двумя способами.

1) Пусть $\Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0\Delta x - iy_0\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 2(x_0 - iy_0).$$

2) Пусть $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-y_0\Delta y - ix_0\Delta y}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y^2}{i\Delta y} = -2(x_0 - iy_0).$$

При двух различных способах стремления Δz к нулю получились разные значения, следовательно, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует при $z_0 \neq 0$.

Рассматриваемая функция дифференцируема только в точке $z_0 = 0$, при этом $f'(0) = 0$, поскольку, если $z_0 = 0$, то $\Delta z = z$, $\Delta f = \overline{z}^2$ и

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{|z|} = \lim_{z\to 0}|z| = 0. \quad \square$$

Теорема 16 (критерий дифференцируемости Коши–Римана). *Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \operatorname{int} E$. Функция f дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух вещественных переменных, и в точке (x_0, y_0) справедливы равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0), \tag{1.7}$$

которые называются условиями Коши-Римана (или Даламбера-Эйлера). В случае дифференцируемости f в точке z_0

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

■ *Необходимость.* Пусть функция f дифференцируема в точке $z_0 \in \operatorname{int} E$. Найдём окрестность $U_{z_0}(\delta) \subset E$. Рассмотрим любое приращение Δz: $0 < |\Delta z| < \delta$. В силу (1.5) приращение Δf в точке z_0 представляется в виде

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \gamma \cdot \Delta z, \tag{1.9}$$

где $\gamma = \gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta z) + i\beta(\Delta z)$, $\alpha(\Delta z)$ и $\beta(\Delta z)$ — вещественнозначные функции, и $\gamma(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Следовательно, $\alpha(\Delta z) \to 0$, $\beta(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Пусть

$$f'(z_0) = A + iB. \tag{1.10}$$

Выделим в (1.9) вещественную и мнимую части:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) =$$

$$= (A\Delta x - B\Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y) + (\alpha\Delta x - \beta\Delta y) + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y, \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где α и β — бесконечно малые функции при $\Delta z \to 0$, а, следовательно, и при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Выполнение в точке (x_0, y_0) условий (1.11) по определению означает, что функции u, v дифференцируемы (как функции двух вещественных переменных) в точке (x_0, y_0). Причем из первого равенства в (1.11) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = A$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -B$, а из второго, что $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = B$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = A$. Сравнение этих равенств приводит к условиям Коши-Римана (1.7). Так как $f'(z_0) = A + iB$, то справедлива формула (1.8).

Достаточность. Пусть функции u и v дифференцируемы как функции двух вещественных переменных в точке (x_0, y_0) и их частные производные связаны в этой точке условиями Коши-Римана. Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = A; \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = B.$$

Запишем условия дифференцируемости функций u и v в точке (x_0, y_0):

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y, \ \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta y,$$

где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — бесконечно малые функции при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Умножим второе из равенств на i и сложим их. Тогда $\Delta f = \Delta u + i\Delta v =$

$$= (A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta y) =$$

$$= \big((A + iB)\Delta x + (-B + iA)\Delta y\big) + \big((\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y\big).$$

Преобразуем отдельно каждое из двух слагаемых последнего выражения. В первом заменим $-B$ на i^2B. Тогда

$$(A + iB)\Delta x + (-B + iA)\Delta y = (A + iB)\Delta x + (i^2B + iA)\Delta y =$$

$$= (A + iB)\Delta x + i(A + iB)\Delta y = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y).$$

Второе слагаемое умножим и разделим на $\Delta z \neq 0$:

$$(\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y = \Big((\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta_1 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\Big)\Delta z = \gamma\Delta z,$$

где функция γ — бесконечно малая при $\Delta z \to 0$, так как $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$, а функции α_1, α_2, β_1, β_2 — бесконечно малые при $\Delta z \to 0$ (то есть при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$).

Итак, доказано, что приращение функции f в точке z_0 представлено в виде

$$\Delta f = (A + iB)\Delta z + \gamma\Delta z,$$

где $A+iB \in \mathbb{C}$, а γ — бесконечно малая функция при $\Delta z \to 0$. Из этого следует, что функция f дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) = (A+iB)$, то есть имеют место равенства (1.8). $\square$

Во многих случаях надо иметь условия дифференцируемости функции комплексного переменного в точке $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, выраженные в полярной системе координат. Точку $z \in \mathbb{C}$, если $z \neq 0$, можно представить в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Используя известное выражение декартовых координат точки через её полярные координаты: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \eta(r,\varphi) + i\zeta(r,\varphi)$, где

$$\eta(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad \zeta(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Пусть функция f определена в $U_{z_0}(\varepsilon_0)$, $z_0 \neq 0$, где $\varepsilon_0 \in (0, |z_0|)$. Тогда для каждой точки $z \in U_{z_0}(\varepsilon_0)$ можно определить $\arg z$ так, что $\arg z$ будет непрерывной функцией в $U_{z_0}(\varepsilon_0)$. Используя теорему о дифференцируемости суперпозиции вещественных функций многих переменных, нетрудно получить следующий результат (см. [14, с. 33–35]).

Теорема 17 (критерий дифференцируемости в полярных координатах). *Функция $f(z) = \eta(r,\varphi) + i\zeta(r,\varphi)$ дифференцируема в точке $z_0 = r_0e^{i\varphi_0} \neq 0$ тогда и только тогда, когда функции η, ζ дифференцируемы в точке (r_0,φ_0) как функции вещественных переменных r и φ и выполняются условия Коши-Римана в полярных координатах:*

$$\frac{\partial\eta}{\partial r}(r_0,\varphi_0) = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}(r_0,\varphi_0); \quad \frac{\partial\zeta}{\partial r}(r_0,\varphi_0) = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}(r_0,\varphi_0).$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = r_0\, e^{i\varphi_0}$, то

$$f'(z_0) = e^{-i\arg z_0}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}(r_0,\varphi_0) + i\,\frac{\partial\zeta}{\partial r}(r_0,\varphi_0)\right) = \frac{1}{z_0}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}(r_0,\varphi_0) - i\,\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}(r_0,\varphi_0)\right).$$

Рассмотрим простые примеры, поясняющие, как можно использовать условия Коши-Римана.

Пример 2. *Функция $f(z) = z^3$ имеет производную в каждой точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$.*

■ Так как $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, то $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Функции u и v дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Условия Коши-Римана выполняются в любой точке z из $\mathbb{C}$, поэтому в силу (1.8)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i \cdot 6xy = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3z^2, \ \forall z \in \mathbb{C}. \ \square$$

Пример 3. *Функция $f(z) = z + 2i\overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке из $\mathbb{C}$.*

■ Поскольку $z + 2i\overline{z} = x + 2y + i(2x + y)$, функция f определена в $\mathbb{C}$, $u(x,y) = x + 2y$, $v(x,y) = (2x + y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1$. Второе из условий Коши-Римана не выполняется ни в одной точке из $\mathbb{C}$, следовательно, f не дифференцируема ни в одной точке из $\mathbb{C}$. $\square$

Пример 4. *Функция $f(z) = \overline{z}^2$ дифференцируема только в точке $z_0 = 0$.*

■ Так как $\overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$, функции $u(x,y) = x^2 - y^2$ и $v(x,y) = -2xy$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Поскольку условия Коши-Римана выполняется только в точке $z_0 = 0$, функция f дифференцируема только в этой точке. $\square$

Пример 5. *Функция $f(z) = e^z$ дифференцируема в каждой точке $z \in \mathbb{C}$.*

■ Так как $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, функции $u(x,y) = e^x \cos y$ и $v(x,y) = e^x \sin y$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y, \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, функция e^z дифференцируема в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ и

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^z. \ \square$$

Замечание. Если $f : U_{z_0}(\varepsilon) \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$, функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют частные производные в $U_{z_0}(\varepsilon)$, непрерывные в точке (x_0, y_0), для которых в этой точке выполняются условия Коши-Римана, то функция f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Однако, нет нужды каждый раз проверять условия Коши-Римана, чтобы убедиться в существовании производной функции комплексного переменного. Как было отмечено выше, в комплексной плоскости выполняются все правила дифференцирования. Поэтому, например, функция z^n ($n \in \mathbb{N}$) дифференцируема как n-кратное произведение z на себя. Отсюда следует дифференцируемость многочлена $P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n$ (как суммы степеней) в $\mathbb{C}$ и рациональной функции (как отношения многочленов), в точках из $\mathbb{C}$, не обращающих знаменатель в нуль.

Можно рассматривать дифференцируемость функции комплексного переменного в точке ∞, если она определена в окрестности точки ∞, то есть определена на множестве $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > r\}$, $0 \le r < +\infty$.

Определение 30. *Функция f, определенная в окрестности точки ∞, называется дифференцируемой в точке $z = \infty$, если функция $g(w) = f(1/w)$ является дифференцируемой в точке $w = 0$.*

1.5 Кривые и области

Определение 31. *Пусть $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Непрерывное отображение $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется непрерывной кривой (далее, кривой) в $\mathbb{C}$, а выражение*

$$z = \sigma(t), \ t \in [\alpha, \beta] \tag{1.12}$$

называется параметризацией кривой, t — параметром параметризации кривой.

Точка $\sigma(\alpha)$ называется началом кривой, а точка $\sigma(\beta)$ — концом кривой. Если $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, кривая называется замкнутой.

Если $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$, $z_1 = \sigma(t_1)$, $z_2 = \sigma(t_2)$, то говорят, что на кривой точка z_2 следует за точкой z_1. Таким образом, кривая является упорядоченным множеством точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Такой порядок следования точек на кривой называют направлением по возрастанию параметра или положительным. Всюду далее положительное направление является направлением по умолчанию. Кривую σ с положительным направлением будем обозначать σ^+, когда такое направление надо будет подчеркнуть.

Противоположный порядок следования точек на кривой называют направлением по убыванию параметра или отрицательным. Кривую σ с отрицательным направлением будем обозначать σ^-.

Пусть кривая задана выражением (1.12), рассмотрим множество точек на комплексной плоскости

$$\Gamma_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : z = \sigma(t), \ t \in [\alpha, \beta]\},$$

которое называется носителем кривой σ в $\mathbb{C}$. Это множество отличается от самой кривой, во-первых, тем, что кривая является упорядоченным множеством точек, а, во-вторых, тем, что различным точкам кривой может соответствовать одна и та же точка множества Γ_σ: если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то точки $z_1 = \sigma(t_1)$, $z_2 = \sigma(t_2)$ являются различными точками кривой, но как точки плоскости совпадают. Такие точки называются точками самопересечения кривой. Общее начало и конец кривой не считается точкой самопересечения.

Определение 32. *Подмножество L в $\mathbb{C}$ называется параметризованной линией, если существует отрезок $[\alpha, \beta]$ и непрерывное отображение φ этого отрезка в $\mathbb{C}$ такие, что $\varphi([\alpha, \beta]) = L$ (то есть существует кривая, для которой L является носителем). В этом случае $z = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, называется параметризацией L.*

Далее, говоря о параметризованной линии в $\mathbb{C}$ всегда предполагается, что есть параметризация, которая не всегда указывается, но которая часто очевидна. Но чаще всего мы будем использовать термин *кривая* и для указания на носитель кривой, не делая между ними различий, если это не приводит к недоразумениям. Все последующие определения для кривой очевидным образом переносятся на параметризованную линию.

Определение 33. *Кривая с параметризацией $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется жордановой (или простой), если у нее нет точек самопересечения, то есть для любых точек $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : \alpha \leq t_1 < t_2 < \beta$ или $\alpha < t_1 < t_2 \leq \beta$ имеет место неравенство $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$.*

Определение 34. *Две кривые $\sigma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ и $\sigma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ называются совпадающими, если существует возрастающая, непрерывная функция $\omega : [\alpha_2, \beta_2] \to [\alpha_1, \beta_1]$ такая, что $\omega(\alpha_2) = \alpha_1, \omega(\beta_2) = \beta_1$ и $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \omega$.*

Таким образом, любую непрерывную кривую можно задать параметризацией на отрезке $[0, 1]$. Действительно, пусть σ — непрерывная кривая с параметризацией $\sigma(t), \alpha \leq t \leq \beta$. Положим $\omega(\tau) := (1 - \tau) \cdot \alpha + \tau \cdot \beta$. Функция ω возрастает и непрерывна на $[0, 1]$, $\omega(0) = \alpha$, $\omega(1) = \beta$. Новая (совпадающая с предыдущей) кривая σ_1 задается параметризацией

$$\sigma_1(\tau) := \sigma((1 - \tau) \cdot \alpha + \tau \cdot \beta),\ 0 \leq \tau \leq 1.$$

Определение 35. *Параметризация $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ кривой σ называется гладкой, если отображение σ непрерывно дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$ и $\sigma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Если при этом кривая замкнутая, то должно выполняться равенство $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$.*

Определение 36. *Кривая $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ с гладкой параметризацией называется гладкой кривой.*

Определение 37. *Гладкие кривые* $\sigma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$, $\sigma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ *называются совпадающими, если существует возрастающая непрерывно дифференцируемая функция* $\omega : [\alpha_2, \beta_2] \to [\alpha_1, \beta_1]$ *такая, что* $\omega(\alpha_2) = \alpha_1$, $\omega(\beta_2) = \beta_1$ *и* $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \omega$.

Пример 6. *Кривая* $\sigma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *является замкнутой, жордановой, гладкой. Её носитель — единичная окружность.*

Пример 7. *Кривая* $\sigma(t) = \cos t, t \in [0, \pi]$ *является жордановой. Указанная параметризация не является гладкой:* $\sigma'(t) = -\sin t$, $\sigma'(\pi/2) = 0$. *Но у этой кривой есть гладкая параметризация:* $\sigma_1(t) = -t$, $t \in [-1, 1]$. *Носитель этой кривой — сегмент* $[-1, 1]$.

Пример 8. *Кривая* $\sigma(t) = \cos t, t \in [0, 2\pi]$ *не является жордановой. Для нее каждая точка* $t \in (0, 2\pi)$ *порождает точку самопересечения. Эта кривая имеет носителем дважды проходимый отрезок* $[-1, 1]$ *и потому данная кривая не совпадает с кривой* $\sigma_1(t) = -t, t \in [-1, 1]$, *хотя геометрически имеет тот же носитель.*

Определение 38. *Пусть* σ *— кривая с параметризацией* $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. *Кривая* σ_1 *с параметризацией* $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$, *называется дугой кривой* σ.

Если отрезок $[\alpha, \beta]$ разбить на отрезки точками разбиения $\tau = \{t_k\}_{k=0}^{m}$, $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = \beta$, то кривая σ разбивается на дуги σ_k с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha_k, \beta_k]$, $0 \leq k \leq m - 1$.

Используя определение дуги кривой, дадим следующее определение.

Определение 39. *Кривая* σ *называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких дуг.*

Определение 40. *Говорят, что кривая* σ *с параметризацией* $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ *лежит в множестве* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, *если* $\sigma([\alpha, \beta]) \subset E$ *(другими словами, если носитель кривой лежит в* E*).*

Определение 41. *Пусть* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *и* $a, b \in E \cap \mathbb{C}$. *Говорят, что кривая* σ *соединяет в множестве* E *точки* a *и* b, *если кривая* σ *лежит в множестве* E, *а начальная и конечная точки кривой* σ *совпадают с* a *и* b.

Определение 42. *Множество* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *называется линейно связным (далее связным), если любые две его точки, отличные от бесконечно удаленной, можно соединить кривой, лежащей в* E.

Определение 43. *Открытое связное множество в* $\overline{\mathbb{C}}$ *называется областью в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Пример 9. *Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Построим кривую σ с параметризацией $\sigma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$. Это простая гладкая кривая, носитель которой — отрезок прямой, соединяющий точки a и b в $\mathbb{C}$* [1]*. Поэтому $\mathbb{C}$ — открытое связное множество.*

Для дальнейшего нам понадобится следующие геометрические факты, которые в этом курсе оставим без доказательства.

Теорема 18 (Жордана)**.** *Всякая замкнутая жорданова (простая) кривая σ разбивает расширенную комплексную плоскость на две области. Одна из них ограниченная (она называется внутренностью кривой σ и обозначается $\operatorname{int}\sigma$), другая — неограниченная (содержащая точку ∞, она называется внешностью кривой σ и обозначается $\operatorname{ext}\sigma$). При этом кривая σ является границей обеих областей.*

Опираясь на теорему Жордана дадим следующее, важное для дальнейшего, определение.

Определение 44. *Область G в $\overline{\mathbb{C}}$ называется односвязной, если для любой замкнутой жордановой кривой σ, лежащей в G, либо $\operatorname{int}\sigma \subset G$, либо $\operatorname{ext}\sigma \subset G$.*

Определение 45. *Область G в $\mathbb{C}$ называется односвязной, если для любой замкнутой жордановой кривой σ, лежащей в G, $\operatorname{int}\sigma \subset G$.*

Например, множество $U_a(\varepsilon)$ является односвязной областью и в $\overline{\mathbb{C}}$, и в $\mathbb{C}$, а множество $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$, нигде не является односвязной областью.

Множество $U_\infty(\varepsilon)$ является односвязной областью в $\overline{\mathbb{C}}$, но не является односвязной областью в $\mathbb{C}$.

Для дальнейшего нам нужна еще одна теорема Жордана о гладких жордановых кривых (ее доказательство можно найти, например, в [2, с.40–43]).

Теорема 19 (Жордана)**.** *Для любой замкнутой гладкой жордановой (простой) кривой σ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любой точки $z_0 \in \sigma$ окружность $|z - z_0| = \delta \leq \delta_0$ пересекает кривую σ ровно два раза. Для любой незамкнутой гладкой жордановой кривой σ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любой точки $z_0 \in \sigma$ окружность $|z - z_0| = \delta \leq \delta_0$ пересекает кривую σ либо два раза, либо один раз*[2].

1.5.1 Длина кривой

Пусть σ — кривая с параметризацией $z = \sigma(t), t \in [\alpha, \beta]$, $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = \beta$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Соединим по-

[1]Этот прямолинейный отрезок далее будем обозначать через $[a, b]$.
[2]Число $\delta_0 > 0$ называют стандартным радиусом кривой σ.

следовательно точки $z_k = \sigma(t_k)$, $0 \le k \le m$ отрезками (см. пример 9). Полученная ломаная σ_τ называется ломаной, вписанной в кривую σ по разбиению $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m$. Сумма длин отрезков, составляющих ломаную, называется длиной ломаной и обозначается далее $\ell(\sigma_\tau)$.

Определение 46. *Кривая σ называется спрямляемой, если конечна точная верхняя граница длин всех ломаных, вписанных в σ. При этом число $\ell(\sigma) = \sup\limits_\tau \ell(\sigma_\tau)$ называется длиной спрямляемой кривой σ.*

Замечание. В курсе математического анализа доказывается, что кривая σ, имеющая гладкую параметризацию $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, спрямляема и ее длина вычисляется по формуле

$$\ell(\sigma) = \int\limits_\alpha^\beta |\sigma'(t)|\, dt. \tag{1.13}$$

Любая дуга спрямляемой кривой спрямляема. Справедливо и обратное утверждение: если все дуги, составляющие кривую, спрямляемы, то сама кривая также спрямляема.

Поэтому кусочно-гладкая кривая с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ спрямляема, а если σ задает гладкую параметризацию каждой из дуг, то длина кусочно-гладкой кривой вычисляется по формуле (1.13).

1.6 Определение аналитической функции

После всех этих определений можно, наконец, дать основное для курса теории функций комплексного переменного определение.

Определение 47. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функцию $f : G \to \mathbb{C}$ будем называть аналитической в области G, если она однозначна в G и дифференцируема в каждой точке области G.*

Множество всех аналитических в области G функций обозначим через $A(G)$.

Определение 48. *Функцию f, аналитическую в $\mathbb{C}$, называют целой функцией.*

Множество всех целых функций будем обозначать через $A(\mathbb{C})$ или A_∞.

Так как дифференцируемые функции непрерывны, то всякая аналитическая в области G функция непрерывна в ней, то есть $A(G) \subset C(G)$.

В силу определения множества $A(G)$ получаем, что это множество является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сложения функций и умножения на число: если f, $g \in A(G)$, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, то

$$\lambda f(z) + \mu g(z) \in A(G).$$

Из теоремы 15 следует, что если $f,\ g \in A(G)$, то $f \cdot g \in A(G)$, а если $g(z) \neq 0$, $\forall\, z \in G$, то $f/g \in A(G)$.

Замечание. Подчеркнём ещё раз, что *аналитичность определена для области.* Поэтому, далее, если говорим об аналитичности функции на замкнутом множестве (в частности, в точке из $\mathbb{C}$), то подразумеваем, что существует область, содержащая замкнутое множество, в котором рассматриваемая функция аналитична.

Определение 49. *Функция f, определенная в окрестности бесконечно удаленной точки, называется аналитической в точке $z = \infty$, если она однозначна и дифференцируема в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.*

В силу последнего определения все определения и результаты, сформулированные выше, можно перенести на области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ и функции $f : G \to \mathbb{C}$.

1.7 Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Пусть σ — гладкая кривая в $\mathbb{C}$ с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$. В этом случае будем говорить, что кривая σ проходит через точку z_0.

Определение 50. *Прямая, проходящая через точку $\sigma(t_0), t_0 \in [\alpha, \beta]$, параллельно вектору $\sigma'(t_0) \neq 0$ (комплексное число определяет вектор — см. рисунок на стр. 5), называется касательной к кривой σ в точке $\sigma(t_0)$.*

Отметим, что у гладкой кривой касательная существует во всех точках, а у кусочно гладкой кривой касательной может не быть только в конечном числе точек, но в этих точках существуют односторонние касательные.

Таким образом, для комплекснозначной функции $z = \sigma(t)$ наличие в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$ производной $\sigma'(t_0) \neq 0$ означает существование в точке $z_0 = \sigma(t_0)$ касательной к кривой σ. При этом угол наклона этой касательной к положительному направлению действительной оси совпадает с $\arg \sigma'(t_0)$ (см. [7, с. 90]).

Определение 51. *Пусть σ_1, σ_2 — гладкие кривые в $\mathbb{C}$ с параметризацией $z = \sigma_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ и $z = \sigma_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta_2]$, соответственно, которые проходят через точку z_0, то есть*

$$\exists t_1 \in [\alpha_1, \beta_1],\ \exists t_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : z_0 = \sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2).$$

Углом между кривыми σ_1, σ_2 в точке z_0 называется угол φ между касательными, проведенными в точке z_0 к кривым σ_1 и σ_2 (касательная считается направленной в ту сторону, что и кривая). В этом случае, $\varphi = \arg \sigma_1'(t_1) - \arg \sigma_2'(t_2)$.

Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и функция f аналитична в G, σ — гладкая кривая в G с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Пусть $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $z_0 = \sigma(t_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Образ кривой σ при отображении f — это кривая L с параметризацией $f \circ \sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. При этом $(f \circ \sigma)'(t_0) = f'(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \sigma'(t_0) \neq 0$. Кривая L имеет касательную в точке $f(z_0)$ с углом наклона к вещественной положительной полуоси равным

$$\arg(f \circ \sigma)'(z_0) = \arg(f'(z_0) \cdot \sigma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\sigma'(t_0)),$$

где $\arg(\sigma'(t_0))$ — угол наклона касательной к кривой σ к вещественной положительной полуоси OX.

Определение 52. *Угол $\alpha = \arg(f \circ \sigma)'(z_0) - \arg(\sigma'(t_0)) = \arg(f'(z_0))$ называется углом поворота кривой σ в точке z_0 при отображении f.*

Таким образом, касательная к кривой σ при отображении f, поворачивается на угол $\arg(f'(z_0))$, который не зависит от кривой σ.

Из сказанного можно сделать следующий вывод: если функция f аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то угол между гладкими кривыми, проходящими через точку z_0, сохраняется при отображении f.

Пример 10. *Найти угол поворота α гладкой кривой при отображении функцией f в точке $z_0 \in \mathbb{C}$:*

а) $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$, где $\mathcal{I}m\, z_0 = y_0 > 0$,   б) $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}$, где $|z_0| < 1$.

■ а) Функция f дифференцируема в области $\mathbb{C} \setminus \{\overline{z_0}\}$ и $f'(z) = \dfrac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})^2}$. Следовательно, $f'(z_0) = \dfrac{1}{2i\,\mathcal{I}m\, z_0} = -\dfrac{i}{2y_0}$. Таким образом, угол поворота α гладкой кривой, проходящей через точку z_0, равен

$$\alpha = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

б) Функция f дифференцируема в области $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{z_0}\}$ и $f'(z) = \dfrac{1 - z\overline{z_0}}{(1 - z_0\overline{z_0})^2}$. Следовательно, $f'(z_0) = \dfrac{1}{1 - |z_0|^2} > 0$, а значит $\alpha = \arg f'(z_0) = 0$. □

Пусть $f'(z_0) \neq 0$, тогда $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| > 0$. В этом случае, для любой гладкой кривой σ,

$$\exists \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \in \sigma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)| > 0.$$

Определение 53. *Величина* $\lim\limits_{\substack{z\to z_0,\\ z\in\sigma}} \dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$, *если она существует и больше нуля, называется линейным растяжением гладкой кривой σ в точке z_0 при отображении f.*

При перечисленных выше условиях, линейное растяжение в точке z_0 при отображении f существует и не зависит от кривой σ. В этом случае говорят, что функция f определяет коэффициент растяжения в точке z_0, который равен $|f'(z_0)|$ — модулю производной функции f в точке z_0.

В примере, рассмотренном выше, для функции из а) линейное растяжение в точке z_0 при отображении f равно $|f'(z_0)| = \dfrac{1}{2y_0}$, а для функции из б) — $|f'(z_0)| = \dfrac{1}{1-|z_0|^2}$.

1.8 Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть σ — спрямляемая кривая с параметризацией $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. Пусть $\tau=\{t_k\}_{k=0}^m$ — разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, σ_τ — вписанная в кривую σ по разбиению $\tau=\{t_k\}_{k=0}^m$ ломаная, $d(\tau)=\max_{1\le k\le m}(t_k-t_{k-1})$ — диаметр разбиения τ. Пусть функция f определена на кривой σ, то есть $f:\sigma([\alpha,\beta])\to\mathbb{C}$. Произвольным образом образуем выборку точек $\zeta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $1\le k\le m$, и составим интегральную сумму
$$S_f(\tau,\zeta)=\sum_{k=1}^m f(\xi_k)\,\Delta z_k,$$
где $\xi_k=\sigma(\zeta_k)$, $\Delta z_k=\sigma(t_k)-\sigma(t_{k-1})=z_k-z_{k-1}$, $1\le k\le m$.

Определение 54. *Число $A\in\mathbb{C}$ называют пределом интегральных сумм $S_f(\tau,\zeta)$ при $d(\tau)\to 0$, если*
$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:|S_f(\tau,\zeta)-A|<\varepsilon$$
для любого разбиения $\tau:d(\tau)<\delta$ и для любого выбора точек ζ_k, $1\le k\le m$.

В этом случае пишут $A=\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_f(\tau,\zeta)$, число A называют интегралом от функции $f(z)$ по кривой σ и обозначают $\int\limits_\sigma f(z)dz$, а функцию f называют интегрируемой по кривой σ. Если L — носитель кривой σ, то часто говорят об интеграле от функции по L и о функции, интегрируемой по L, а интеграл записывают в виде $\int\limits_L f(z)dz$.

Пример 11. *Функция $f(z)=1$ интегрируема по любой спрямляемой кривой σ в $\mathbb{C}$.*

■ Пусть $\sigma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ — спрямляемая кривая, причем $\sigma(\alpha)=a$, $\sigma(\beta)=b$. Тогда для любого разбиения $\tau=\{t_k\}_{k=0}^n$ и любой выборки точек ζ_k

$$S_f(\tau,\zeta)=\sum_{k=1}^n f(\sigma(\zeta_k))\Delta z_k=\sum_{k=1}^n \Delta z_k=\sum_{k=1}^n (z_k-z_{k-1})=z_n-z_0=b-a.$$

Поэтому, $\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_f(\tau,\zeta)=b-a$, то есть $\int\limits_\sigma dz=b-a$. □

Замечание. Если в предыдущем примере спрямляемая кривая σ замкнута, то есть $a=b$, то $\int\limits_\sigma dz=0$.

Исходя из определения 54, нетрудно доказать следующие свойства интегралов от функций комплексного переменного по спрямляемой кривой σ с параметризацией $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

1. Если функцииf и g интегрируемы по спрямляемой кривой σ, то для любых чисел $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ функция c_1f+c_2g интегрируема по σ и

$$\int\limits_\sigma (c_1f(z)+c_2g(z))\,dz=c_1\int\limits_\sigma f(z)dz+c_2\int\limits_\sigma g(z)\,dz.$$

2. Если на спрямляемой кривой σ с положительным направлением обхода изменить направление на противоположное (отрицательное), то есть рассмотреть кривую σ^-, то оба интеграла от функция f по кривой σ и по кривой σ^- существует или не существует одновременно и, если существуют, то

$$\int\limits_{\sigma^-} f(z)dz=-\int\limits_\sigma f(z)dz.$$

3. Если спрямляемая кривая σ представлена в виде $\sigma=\sigma_1\bigcup\sigma_2$ (σ_1, σ_2 — спрямляемые дуги кривой σ, причем конец кривой σ_1 совпадает с началом кривой σ_2), то функция f интегрируема по σ тогда и только тогда, когда f интегрируема по σ_1 и σ_2. Если функция f интегрируема по σ, то имеет место равенство

$$\int\limits_\sigma f(z)dz=\int\limits_{\sigma_1} f(z)dz+\int\limits_{\sigma_2} f(z)dz.$$

4. Пусть функция f интегрируема по спрямляемой кривой σ с параметризацией $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, и длиной $\ell(\sigma)$. Если $\sup\limits_{z\in\sigma}|f(z)|=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}|f(\sigma(t))|=$

$M_\sigma(f) < +\infty$, то

$$\left|\int\limits_\sigma f(z)dz\right| \le M_\sigma(f)\cdot \ell(\sigma).$$

■ Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m$ — разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, σ_k, $1\le k\le m$ — дуги кривой σ с параметризацией $z=\sigma(t)$, $t\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2\ldots,m$, а $\ell(\sigma_k)$ — длины этих дуг. Доказательство следует из неравенства

$$|S_f(\tau,\zeta)| = \left|\sum_{k=1}^m f(\sigma(\zeta_k))\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^m |f(\sigma(\zeta_k))|\cdot|\Delta z_k| \le$$

$$\le M_\sigma(f)\sum_{k=1}^m \ell(\sigma_k) \le M_\sigma(f)\cdot\ell(\sigma).$$

Переходя к пределу при $d(\tau)\to 0$, получим нужный результат. □

Свойства 1–4 аналогичны свойствам интеграла Римана от функций вещественной переменной по отрезку. Более содержательное свойство интегралов в комплексной плоскости содержится в следующей теореме (ее доказательство см. в [7, с. 207–209], [4, с. 28–29]).

Теорема 20 (об аппроксимации). *Если функция $f(z)$ непрерывна в области $G\subseteq\mathbb{C}$, а спрямляемая кривая σ с параметризацией $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, лежит в G, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ отрезка $[\alpha,\beta]$ с диаметром разбиения $d(\tau)<\delta$ ломаная σ_τ, вписанная в σ, лежит в G и*

$$\left|\int\limits_\sigma f(z)dz - \int\limits_{\sigma_\tau} f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

Интегралы от функций комплексного переменного тесно связаны с криволинейными интегралами II-го рода, которые изучаются в курсе математического анализа. Установим эту связь и, благодаря ей, достаточно просто получим новые свойства интегралов от функций комплексного переменного.

Пусть $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ — параметризация спрямляемой кривой σ и функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ интегрируема по кривой σ. Пусть $\tau=\{t_k\}_{k=0}^m$ — разбиение сегмента $[\alpha,\beta]$, $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$ — выборка, $\zeta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $\sigma(\zeta_k)=\xi_k=\lambda_k+i\mu_k$, $1\le k\le m$. Тогда

$$
\begin{aligned}
S_f(\tau,\zeta) &= \sum_{k=1}^{m} f(\sigma(\zeta_k))\Delta z_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta z_k = \\
&= \sum_{k=1}^{m}(u(\lambda_k,\mu_k)+iv(\lambda_k,\mu_k))\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} u(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k - v(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k + i\sum_{k=1}^{m} v(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k + u(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k = \\
&=: S_1(\tau,\zeta) + iS_2(\tau,\zeta).
\end{aligned}
$$

Поэтому $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_f(\tau,\zeta) = A \in \mathbb{C}$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S_1(\tau,\zeta) = \mathcal{R}e\, A, \quad \lim_{d(\tau)\to 0} S_2(\tau,\zeta) = \mathcal{I}m\, A.$$

Конечные пределы $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_1(\tau,\zeta)$, $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_2(\tau,\zeta)$, если они существуют, как известно, называются криволинейными интегралами второго рода и обозначаются

$$\int_\sigma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy, \quad \int_\sigma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy.$$

Таким образом, $\int\limits_\sigma f(z)\,dz$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба указанных выше криволинейных интеграла второго рода. Если интеграл $\int\limits_\sigma f(z)\,dz$ существует, то

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_\sigma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\sigma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy. \tag{1.14}$$

Как доказывается в курсе математического анализа (см., например, [12, глава 15, с. 120-121]), криволинейные интегралы второго рода от непрерывных функций по спрямляемым кривым существуют. Следовательно, для функции комплексного переменного справедлива следующая теорема о существовании интеграла.

Теорема 21 (о существовании интеграла). *Если на спрямляемой кривой σ с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ определена и непрерывна функция f (то есть функция $f \circ \sigma$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$), то интеграл $\int\limits_\sigma f(z)dz$ существует и имеет место формула* (1.14).

Пример 12. *Функция $f(z) = z$ интегрируема на любой спрямляемой кривой σ с началом в точке a и концом в точке b и* $\int\limits_\sigma z\,dz = (b^2 - a^2)/2$.

■ Пусть σ — спрямляемая кривая с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. По теореме 21 интеграл $\int\limits_\sigma f(z)dz$ существует, следовательно, существует конечный предел интегральных сумм, который на зависит от выбора разбиения $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и выбора точек ζ_k, $1 \le k \le m$ при условии, что $d(\tau) \to 0$. Для разбиения τ выберем точки $\zeta_k^{(1)} = t_{k-1}$, $1 \le k \le m$, и $\zeta_k^{(2)} = t_k$, $1 \le k \le m$, тогда

$$S_f(\tau, \zeta^{(1)}) + S_f(\tau, \zeta^{(2)}) = \sum_{k=1}^m z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=1}^m z_k(z_k - z_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^m (z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2.$$

Но $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_f(\tau, \zeta^{(1)}) = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S_f(\tau, \zeta^{(2)}) = \int\limits_\sigma z\,dz$, и, потому, $\int\limits_\sigma z\,dz = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$. □

Замечание. Если дополнительно предположить, что спрямляемая кривая σ замкнута, то $\int\limits_\sigma z\,dz = 0$.

В случае, когда σ — гладкая (кусочно гладкая) кривая с параметризацией $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, а функция $f = u + iv$ непрерывна на σ, то по теореме 21 функция f интегрируема по σ. Используя представление криволинейных интегралов второго рода по гладкой кривой, можно свести вычисление интеграла от функция f по σ к вычислению интеграла Римана по отрезку $[\alpha, \beta]$:

$$\int\limits_\sigma f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt. \tag{1.15}$$

Действительно, в силу свойств криволинейного интеграла второго рода,

$$\int\limits_\sigma f(z)\,dz = \int\limits_\sigma udx - vdy + i\int\limits_\sigma vdx + udy =$$

$$\int\limits_\alpha^\beta (u(\sigma(t))\xi'(t) - v(\sigma(t))\eta'(t))\,dt + i\int\limits_\alpha^\beta v(\sigma(t))\xi'(t) + u(\sigma(t))\eta'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u(\sigma(t)) + iv(\sigma(t)))(\xi'(t) + i\eta'(t))dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt.$$

Пример 13. *Пусть σ — окружность $|z-a| = r$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, с параметризацией $\sigma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда*

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz = 0, \text{ если } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \quad \int\limits_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

■ Сделаем в интеграле замену переменной: $z - a = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $dz = \sigma'(t)dt = rie^{it}dt$. Тогда для всех $t \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz = \int\limits_{0}^{2\pi} rie^{it} r^n e^{int} \, dt = ir^{n+1} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} i \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i, \text{ если } n = -1, \\ ir^{n+1} e^{i(n+1)t} \dfrac{1}{i(n+1)} \Big|_{0}^{2\pi} = \dfrac{r^{n+1}}{n+1} (e^{i(n+1)2\pi} - 1) = 0, \text{ если } n \neq -1. \ \square \end{cases}$$

Пример 14. *Пусть σ — гладкая кривая с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, соединяющая точки $a = \sigma(\alpha)$ и $b = \sigma(\beta)$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\int\limits_{\sigma} z^n \, dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

■ Так как σ — гладкая кривая с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, а функция z^n непрерывна на σ, то по формуле (1.15) получаем, что

$$\int\limits_{\sigma} z^n \, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sigma^n(t)\sigma'(t) \, dt = \frac{\sigma^{n+1}(t)}{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \frac{\sigma^{n+1}(\beta)}{n+1} - \frac{\sigma^{n+1}(\alpha)}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \ \square$$

Замечание 1. Если дополнительно предположить, что гладкая кривая σ замкнута, то для любого натурального n $\int\limits_{\sigma} z^n \, dz = 0$.

Замечание 2. Результат вычисления интеграла в примере 14 и замечание 1 после него остаются справедливыми, если кривая σ только спрямляемая.

1.9 Ряды в комплексной плоскости

1.9.1 Числовые ряды

Выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = z_1+z_2+\dots+z_n+\dots$, где $z_k \in \mathbb{C}, \forall\, k \in \mathbb{N}$, называется комплексным рядом. Определим (как и в случае вещественного ряда) его n-ую частичную сумму: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$.

Определение 55. *Если последовательность частичных сумм* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится к числу* $S \in \mathbb{C}$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *называют сходящимся к сумме* S *и пишут* $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. *В противном случае ряд называют расходящимся.*

Из свойств сходящихся последовательностей комплексных чисел вытекают следующие свойства числовых рядов с комплексными членами.

1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится к сумме S тогда и только тогда, когда числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}e\, z_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}m\, z_k$ сходятся, соответственно, к суммам $\mathcal{R}e\, S$ и $\mathcal{I}m\, S$. В случае сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}e\; z_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}m\; z_k$.

2. Умножение общего члена ряда на комплексное число $a \neq 0$ не меняет его характера сходимости, при этом, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то для любого $a \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\, z_k$ также сходятся и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\, z_k = a\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

3. Если ряды с комплексными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(z_k+\zeta_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(z_k+\zeta_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta_k$. Если один из рядов сходится, а другой расходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(z_k+\zeta_k)$ расходится. Если же оба ряда расходятся,

то о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(z_k + \zeta_k)$ ничего определенного сказать нельзя.

Теорема 22 (критерий Коши). *Для сходимости числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *нашёлся номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что для всех* $k > N$ *и любого* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} z_n\right| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Как и для вещественных рядов, как следствие теоремы 22 имеет место необходимое (но не достаточное) условие сходимости: если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

Определение 56. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$. *Ряд называется не абсолютно (условно) сходящимся, если он сходится, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *расходится.*

Если $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{N}$, то из неравенств $\max\{|x_k|, |y_k|\} \le |z_k| \le |x_k| + |y_k|$, $k \in \mathbb{N}$, и из признака сравнения для положительных рядов следует, что абсолютная сходимость комплексного ряда имеет место тогда и только тогда, когда сходятся абсолютно ряды, составленные из вещественных и мнимых частей его слагаемых.

Как и для вещественных рядов из абсолютной сходимости комплексного ряда следует его сходимость, что легко доказывается, например, используя критерий Коши (теорему 22).

Таким образом, абсолютную сходимость комплексного ряда можно установить с помощью признаков Д'Аламбера, Коши, интегрального признака, признаков сравнения и других признаков сходимости положительных рядов.

Например, рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. Здесь $z_n = \dfrac{z^n}{n!}$. По признаку Д'Аламбера этот ряд сходится абсолютно, так как

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z^{n+1}|\, n!}{|z^n|\,(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

1.9.2 Функциональные последовательности и ряды

Рассмотрим функциональные последовательности и ряды комплекснозначных функций от комплексного переменного. Пусть $f_k : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, и $f_k(z) = u_k(x,y) + iv_k(x,y)$, $z = x + iy \in E$. Последовательность функций $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ называется функциональной последовательностью, определенной на E.

Определение 57. *Если $z_0 \in E$ и последовательность $\{f_k(z_0)\}$ сходится, то z_0 называют точкой сходимости функциональной последовательности $\{f_k(z)\}$. Если функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится в каждой точке из E, то говорят, что последовательность $\{f_k(z)\}$ поточечно сходится на E, а функцию, определенную равенством $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(z) = f(z)$ называют предельной функцией функциональной последовательности $\{f_k(z)\}$ на E.*

Тот факт, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ поточечно сходится к функции $f(z)$ на множестве E символически записывают в виде

$$f_k(z) \xrightarrow{E} f(z) \text{ или } f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z),\ \forall\, z \in E.$$

Из свойств сходящихся последовательностей комплексных чисел следует, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ на E тогда и только тогда, когда функциональные последовательности $\{u_k(x,y)\}$ и $\{v_k(x,y)\}$ сходится к функциям $\mathcal{R}e\, f(z)$ и $\mathcal{I}m\, f(z)$, соответственно.

Определение 58. *Функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$, поточечно сходящаяся к функции $f(z)$ на множестве E, называется равномерно сходящейся к функции $f(z)$ на множестве E, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_k(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, k > k_0,\ \forall\, z \in E$$

$$\textit{то есть } \lim_{k\to\infty} \sup_{z\in E} |f_k(z) - f(z)| = 0.$$

Тот факт, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно на множестве E сходится к функции $f(z)$ символически будем записывать в виде

$$f_k(z) \overset{E}{\rightrightarrows} f(z).$$

Из неравенств $\max\{|u_k(x,y)|, |v_k(x,y)|\} \le |f_k(z)| \le |u_k(x,y)| + |v_k(x,y)|$, $z = x + iy \in E$, $k \in \mathbb{N}$, и определения 58 следует, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно на множестве E сходится к функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функциональные последовательности $\{u_k(x,y)\}$ и $\{v_k(x,y)\}$ равномерно на множестве E сходится к функциям $\mathcal{R}e\, f(z)$ и $\mathcal{I}m\, f(z)$, соответственно.

Таким образом, остаются в силе все результаты математического анализа о поточечно и равномерно сходящихся функциональных последовательностях для случая функциональных последовательностей комплекснозначных функций от комплексного переменного, в том числе и критерии равномерной сходимости. Здесь ограничимся только одним результатом.

Теорема 23 (критерий Коши равномерной сходимости). *Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ на множестве E необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашёлся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $k > N$, любого $p \in \mathbb{N}$ и любого $z \in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_k(z) - f_{k+p}(z)| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Рассмотрим пример.

Пример 15. *Последовательность $f_k(z) = z^k$ сходится равномерно к предельной функции $f(z) \equiv 0$ в любом круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le q < 1\}$ и сходится неравномерно в круге $K_0(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

■ В самом деле, для $q \in (0, 1)$ рассматриваемая функциональная последовательность сходится поточечно к функции $f(z) \equiv 0$ в круге $|z| \le q$ так как

$$|f_k(z) - 0| = |z^k| \le q^k, \ \forall z : |z| \le q.$$

Но $\lim q^n = 0$, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такой, что $q^n < \varepsilon$ для всех $k > k_0$. Следовательно, $|f_k(z) - f(z)| = |z^k| < \varepsilon, \forall k > k_0, \forall z :$ $|z| \le q$, то есть $f_k(z) \overset{|z|\le q}{\rightrightarrows} 0$.

Функциональная последовательность $\{z^k\}$ поточечно на круге $K_0(1)$ сходится к той же функции $f(z) \equiv 0$. Но

$$\sup_{z\in K_0(1)} |f_k(z) - 0| = \sup_{z\in K_0(1)} |z^k| = 1 \not\to 0.$$

Из определения 58 следует, что функциональная последовательность $\{z^k\}$ сходится к $f(z) \equiv 0$ неравномерно на круге $K_0(1)$. □

Помимо понятия равномерной сходимости на множестве, часто используется понятие равномерной сходимости внутри множества.

Определение 59. *Говорят, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри множества $E \subseteq \mathbb{C}$, если она равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте F из E. Символически этот факт записывают так: $f_k(z) \overset{(E)}{\rightrightarrows} f(z)$.*

Очевидно, что если E — компакт в $\mathbb{C}$, то на E определения 59 и 58 совпадают.

С учётом последнего определения результат примера 15 можно сформулировать так: функциональная последовательность $\{z^k\}$ сходится равномерно внутри круга $K_0(1)$, и не сходится равномерно на круге $K_0(1)$.

Аналоги многих результатов для равномерно сходящихся функциональных последовательностей, справедливые для вещественнозначных функций вещественной переменной, справедливы и в случае функциональных последовательностей комплекснозначных функций от комплексного переменного. Здесь ограничимся формулировками только двух, предлагая студентам доказать их самостоятельно.

Теорема 24 (о непрерывности предельной функции)**.** *Пусть функции $f_k(z)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на множестве E и $f_k(z) \overset{E}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда функция f непрерывна на множестве E.*

Теорема 25 (об интегрируемости предельной функции)**.** *Пусть σ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, функции $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, интегрируемы на спрямляемой кривой σ, и $f_k(z) \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда функция f интегрируема на σ и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\sigma} f_n(z)\,dz = \int\limits_{\sigma} f(z)\,dz.$$

Основываясь на понятии функциональной последовательности рассмотрим понятие функционального ряда. Пусть как и выше $f_k : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, и $f_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$, $z = x + iy \in E$. Определим функциональную последовательность $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Определение 60. *Будем говорить, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \tag{1.18}$$

- *сходится в точке $z_0 \in E$, если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ сходится (или, другими словами, числовая последовательность $\{S_n(z_0)\}$ сходится);*
- *абсолютно сходится в точке $z_0 \in E$, если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ абсолютно сходится;*
- *сходится на множестве E к функции $f(z)$, если функциональная последовательность $\{S_n(z)\}$ поточечно сходится к $f(z)$ на множестве E;*
- *абсолютно сходится на множестве E к функции $f(z)$, если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ поточечно сходится на множестве E;*

- *равномерно сходится на множестве E (внутри множества E) к функции $f(z)$, если функциональная последовательность $\{S_n(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ на множестве E (внутри множества E).*

Легко доказать, что ряд (1.18): сходится на E, равномерно сходится на E к $f(z)$, равномерно сходится к $f(z)$ внутри множестве E, тогда и только тогда, когда такой же характер сходимости имеют ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x,y)$, сходящиеся к $\mathcal{R}e\, f(z)$ и $\mathcal{I}m\, f(z)$, соответственно.

Поскольку данные определения ничем не отличаются от вещественнозначных функциональных рядов, нетрудно доказать те же результаты, которые доказываются для них в математическом анализе. Приведем некоторые из них.

1) *Критерий Коши*: для того, чтобы функциональный ряд (1.18) равномерно сходится на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon,\ \forall\, n > k_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in E.$$

2) *Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда*: если все функции $f_k(z)$ непрерывны на множестве E и ряд (1.18) равномерно сходится на E к $f(z)$, то функция $f(z)$ непрерывна на множестве E.

3) *Почленное интегрировании равномерно сходящегося ряда*: если все функции $f_k(z)$ интегрируемы на спрямляемой кривой γ и ряд (1.18) равномерно сходится на σ к $f(z)$, то сумма ряда является интегрируемой функцией на σ, а ряд можно почленно интегрировать по σ, то есть $\int\limits_{\sigma} f(z)\, dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma} f_k(z)\, dz.$

4) *Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда*: если

$$c_k = \sup_{z \in E} |f_k(z)|,\ k \in \mathbb{N},$$

и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k$ сходится, то функциональный ряд (1.18) равномерно сходится на множестве E.

1.9.3 Степенные ряды

Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $a \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, называется степенным рядом с центром в точке a. С помощью замены $z-a = w$

степенной ряд приводится в виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \tag{1.19}$$

поэтому всюду далее будем рассматривать только ряды такого вида.

Степенные ряды с вещественными коэффициентами и вещественной переменной изучались в математическом анализе. В случае комплексных составляющих их свойства остаются почти такими же. Имеет место первая лемма Абеля.

Лемма 2 (Абеля)**.** *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится в любой точке* $z : |z| < |z_0|$.

■ Действительно, если числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$. Поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена, то есть $\exists\, M > 0 : |a_n z_0^n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$,. Тогда для любого $|z| < |z_0|$ получаем оценку:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \frac{|z^n|}{|z_0^n|} \leq M q^n,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \text{где}\ q = \frac{|z|}{|z_0|} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно в любой точке $z :\ |z| < |z_0|$. □

Доказанная лемма позволяет ввести следующее определение.

Определение 61. *Величина* $R = \sup\Big\{|z| :\ \text{ряд} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ \text{сходится}\Big\}$, *называется радиусом сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *а круг* $|z| < R$ *называется кругом сходимости ряда.*

Теорема 26. *Пусть* R *— радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Тогда*

- $R = 0 \iff$ *ряд сходится только в точке* $|z| = 0$ *;*
- $R = +\infty \iff$ *ряд сходится при всех* $z \in \mathbb{C}$ *;*
- $R \in (0, +\infty) \iff$ *ряд сходится в круге* $|z| < R$, *и ряд расходится на множестве* $|z| > R$.

Замечание. В точках $z : |z| = R$ ряд может как сходиться, так и рассходиться.

Радиус сходимости ряда R можно вычислить, как и в вещественном случае, по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{1.20}$$

Из этой формулы следует, что ряд (1.19) и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$ имеют один и тот же радиус сходимости.

Пример 16. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Для ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^\alpha}$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{1/n^\alpha} = 1$, *следовательно,* $R = 1$.

Функциональные свойства степенного ряда аналогичны вещественному случаю.

Теорема 27 (о равномерной сходимости степенного ряда)**.** *Степенной ряд* (1.19) *равномерно сходится внутри круга сходимости.*

Но тогда, как и случае вещественной переменной, можно прямой оценкой доказать, что степенной ряд (1.19) с ненулевым радиусом сходимости, сумма которого в круге сходимости равна $f(z)$, можно почленно дифференцировать любое число раз (см. [10, с.76–77]) и интегрировать (см. [10, с. 147–148]) по любой спрямляемой кривой $\sigma_{[0,w]}$, лежащей в круге сходимости и соединяющей точки $[0, w]$ из этого круга (см. пример 14), при этом радиус сходимости получаемых степенных рядов не меняется. Таким образом, имеют место следующие теоремы.

Теорема 28. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *причем ряд имеет ненулевой радиус сходимости. Тогда в круге сходимости функцию* f *можно почленно дифференцировать любое число раз и интегрировать по любой спрямляемой кривой* $\sigma_{[0,w]}$, *лежащей в круге сходимости*

$$f^{(k)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

$$\int\limits_{\sigma_{[0,w]}} f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\sigma_{[0,w]}} z^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^{n+1}}{n+1}. \tag{1.22}$$

Полагая в формуле (1.21) $z = 0$, получаем, что $f^{(k)}(0) = k! a_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, таким образом, убеждаемся в справедливости следующих следствий теоремы 28.

Следствие 28.1. *Для любого* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, *то есть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^n,$$

и потому представление функции $f(z)$ *в виде степенного ряда единственно.*

Поскольку сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости по теореме 28 дифференцируема в каждой точке круга сходимости, то принимая во внимание определение 47, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 28.2. *Сумма* $f(z)$ *степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости является аналитической функцией внутри круга сходимости.*

Определение 62. *Пусть функция* f *определена в окрестности точка* z_0 *и в самой точке имеет производные всех порядков. Формально составленный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z - z_0)^k$ *называется рядом Тейлора функции* $f(z)$ *в точке* z_0.

Из предыдущего следует, что если радиус сходимости ряда Тейлора больше нуля, то он является рядом Тейлора для своей суммы.

Следствие 28.3. *Сумма* $f(z)$ *степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости является целой функцией.*

Рассмотрим некоторые примеры.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, Поскольку, как известно из курса математического анализа, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|z|^n}{n!}$ сходится в любой точке $|z| \in \mathbb{R}$, то исходный ряд абсолютно сходится в $\mathbb{C}$. Но на вещественной прямой $\sum\limits_{n-0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$. Определим функцию $e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда функция e^z является целой функцией и $\forall\, z \in \mathbb{C}$

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z.$$

Аналогично предыдущему, определим целые функции

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}\,, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\,.$$

Из этих представлений легко следует, что для любой точки $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Тогда $(\cos z)' = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \dfrac{1}{2}(e^{iz}i - ie^{-iz}) = \dfrac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$ для любой точки $z \in \mathbb{C}$. Аналогично, $(\sin z)' = \cos z$ для любой точки $z \in \mathbb{C}$.

Определим функцию $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ для тех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\cos z \neq 0$. В этом случае, используя теорему о дифференцируемости частного, как и в вещественном случае, получаем, что $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$, $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определим в $\mathbb{C}$ с помощью рядов целые функции, которые называются гиперболическими:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Тогда, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$ для любой точки $z \in \mathbb{C}$.

Используя представление через функцию e^z тригонометрических и гиперболических функций, легко проверить, что в $\mathbb{C}$ имеют место равенства:

$$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2i} = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z.$$

Определим в круге $|z| < 1$ с помощью рядов функции

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, z^n, \ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

которые, в силу следствия 28.2, аналитичны в круге $|z| < 1$. Частным случаем первой функции являются аналитические в круге $|z| < 1$ функции

$$(1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Глава 2

Конформные отображения

Определение 63. *Пусть f — отображение, действующее из некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и непрерывное в этой окрестности. Если $f(z_0) \in \mathbb{C}$, то отображение f называется конформным в точке z_0, если f сохраняет углы между гладкими кривыми, проходящими через точку z_0. Если $f(z_0) = \infty$, то отображение $f(z)$ называется конформным в точке z_0, если отображение $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ конформно в точке z_0.*

Из результатов, полученных в разделе 1.7 следует, что функция f, которая аналитична в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и для которой $f(z_0) \in \mathbb{C}$, $f'(z_0) \neq 0$, является конформной в точке z_0.

Определение 64. *Отображение f, определённое в окрестности точки ∞, называется конформным в точке ∞, если,*

- *$f(\infty) := \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ и в точке $z = 0$ конформно отображение $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$;*
- *$f(\infty) = \infty$ и в точке $z = 0$ конформно отображение $\dfrac{1}{f(1/z)}$.*

Определение 65. *Отображение $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ называется конформным в области G, если f инъективно в G и конформно в каждой точке области G.*

Пример 17. *Функция $f(z) = z^2$ конформна в полуплоскости $Imz > 0$.*

Рассмотрим примеры простых, но часто используемых, конформных в точке и области отображений.

2.1 Дробно-линейная функция

Дробно-линейной функцией (д.л.ф.) называется функция вида

$$w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0. \tag{2.1}$$

Условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай д.л.ф. $w \equiv const$. В случае, когда $c = 0$ (но $d \neq 0$, $a \neq 0$), д.л.ф. превращается в линейную функцию $w = \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}$.

Д.л.ф. определена во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точек $z = -d/c$ (в случае $c \neq 0$) и $z = \infty$. Определим д.л.ф. в этих точках следующим образом: если $c \neq 0$, положим $w(-d/c) = \infty$, и $w(\infty) = a/c$; если $c = 0$, положим $w(\infty) = \infty$.

Теорема 29. *Дробно-линейная функция является взаимно однозначной, взаимно непрерывной биекцией (обратная к которой так же д.л.ф.) $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.*

■ Пусть $c \neq 0$. Д.л.ф. взаимно однозначна, поскольку каждому значению $w \neq a/c$ и $w \neq \infty$, ставится в соответствие единственная точка $z(w) = \dfrac{dw - b}{-cw + a}$ такая, что $w = w(z)$ (заметим, что $z \neq -d/c$, $z \neq \infty$). Точке $w = a/c$ соответствует, по определению, точка $z = \infty$, а точке $w = \infty$ — точка $z = -d/c$. Непрерывность (2.1) в точках $z \neq -d/c$, $z \neq \infty$, очевидна, а в точках $z = -d/c$, $z = \infty$ следует из предельных соотношений

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = a/c.$$

Обратное отображение $z = z(w)$ также является д.л.ф. и обладает такими же свойствами.

В случае $c = 0$ возникает линейная функция $w(z) = \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}$, очевидно, обладающая указанными свойствами, так как в этом случае $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = \infty$. □

Замечание. При доказательстве теоремы мы получили, что д.л.ф. $w(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, если $ad - bc \neq 0$, имеет обратную функцию, $z(w) = \dfrac{dw - b}{-cw + a}$, которая также является д.л.ф. Заметим также, что суперпозиция дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией (докажите это!).

Теорема 30. *Дробно-линейная функция конформна во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$.*

■ Пусть $c \neq 0$. При $z \neq -d/c$, $z \neq \infty$, конформность д.л.ф. вытекает из того, что $w'(z) = \dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$ в точке z (условие $ad - bc \neq 0$, которое исключает вырожденный случай д.л.ф. $w \equiv const$, необходимо для конформности д.л.ф.).

Чтобы проверить конформность $w = w(z)$ в точке $z = -d/c$, надо проверить конформность отображения $\lambda(z) = \dfrac{1}{w(z)} = \dfrac{cz + d}{az + b}$ в точке $z = -d/c$. Она следует из того, что

$$\lambda'(-d/c) = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}\,\Big|_{z=-d/c} = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0.$$

Следовательно, исходная функция $w = w(z)$ конформна и в точке $z = -d/c$.

Конформность $w = w(z)$ в точке $z = \infty$ (в предположении, что $c \neq 0$) эквивалентна конформности в точке $z = 0$ отображения

$$g(z) = f(1/z) = \frac{a + bz}{c + dz},$$

которая проверяется точно так же.

В случае $c = 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$ конформность линейной функции проверяется совершенно аналогично. $\square$

Сформулируем и докажем основное свойство дробно-линейных функций — круговое свойство д.л.ф.

Определение 66. *Обобщенной окружностью (или окружностью на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$) называется любая окружность или прямая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.*

Теорема 31. *Дробно-линейная функция переводит любую окружность из $\overline{\mathbb{C}}$ в окружность из $\overline{\mathbb{C}}$.*

$\blacksquare$ При $c \neq 0$ представим дробно-линейную функцию в виде (разделим числитель и знаменатель на c и выделим в числителе знаменатель)

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} =$$

$$= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2}\,\frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

то есть д.л.ф. можно представить в виде композиции линейных функций и отображения $w = 1/z$.

Параллельный перенос, осуществляемый функцией вида $w = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, и гомотетия с поворотом вокруг начала координат, осуществляемая функцией вида $w = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, очевидно, обладают указанным круговым свойством. Остается доказать его для отображения вида $w = 1/z$. Воспользуемся тем, что в координатах $z = x + iy$ любая окружность из $\overline{\mathbb{C}}$ записывается в виде

$$A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + C = 0, \tag{2.2}$$

где вещественные коэффициенты A, B_1, B_2, C не равны нулю одновременно и определяются однозначно с точностью до ненулевого вещественного множителя. Случай $A = 0$ соответствует прямым, а случай $A \neq 0$ — обычным окружностям.

Так как $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\,\overline{z}$, $x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$, то равенство 2.2 запишется в виде

$$Az\,\overline{z} + \frac{B_1}{2}(z + \overline{z}) + \frac{B_2}{2i}(z - \overline{z}) + C = 0$$

или

$$Az\overline{z} + B\,z + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0, \text{ где } B = \frac{1}{2}\,(B_1 - iB_2). \tag{2.3}$$

При отображении $w = 1/z$ окружность, заданная уравнением (2.3), переходит в множество, задаваемое уравнением того же вида, поскольку при $z = 1/w$

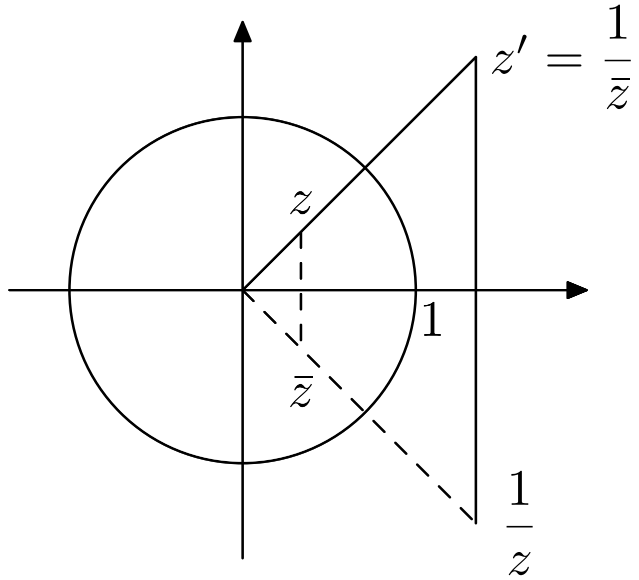
$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = A\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + B\frac{1}{w} + \overline{B}\,\frac{1}{\overline{w}} + C = A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0.$$

При этом окружность из $\overline{\mathbb{C}}$ не может перейти в точку или пустое множество, так как дробно-линейная функция взаимно однозначна. Следовательно, всякая окружность из $\overline{\mathbb{C}}$ переходит при отображении $w = 1/z$ в окружность из $\overline{\mathbb{C}}$.

При $c = 0$ возникающая линейная функция выполняет только параллельный перенос и гомотетию. $\square$

Рассмотрим еще одно свойство дробно-линейной функции, но сначала дадим следующее определение.

Определение 67. *Точки z и z' называются симметричными относительно окружности Γ на $\overline{\mathbb{C}}$, если любая окружность, проходящая через точки z и z' ортогональна окружности Γ, то есть пересекает окружность Γ под прямым углом.*

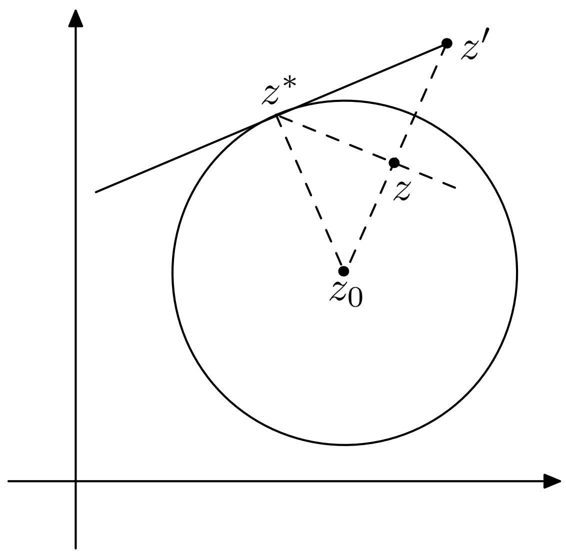


Очевидно, что точки, симметричные относительно окружности Γ, лежат по разные стороны от этой окружности. Если Γ — прямая, то понятие симметричных точек относительно Γ совпадает с понятием точек, симметричных относительно прямой. Если одна из точек — центр окружности, то ей симметричной является, очевидно, точка ∞. Каждая точка окружности Γ симметрична сама себе относительно окружности Γ. Нетрудно показать, что если Γ — окружность радиуса r с центром в точке z_0, то точка точки z и z', симметричные относительно Γ, лежат на луче, выходящем из точки z_0, то есть $\arg(z - z_0) = \arg(z' - z_0)$ и, кроме того, $|z - z_0|\,|z' - z_0| = r^2$, то есть справедлива формула $(z' - z_0) = r^2/\overline{(z - z_0)}$.

Если обратиться к окружности с центром в начале координат с единичным радиусом, то симметричными относительно неё будут точки z и $z' = 1/\overline{z}$.

Укажем способ построения точки z', симметричной с заданной точкой z относительно окружности с центром в точке z_0, позволяющий доказать полезные свойства д.л.ф. Сначала из точки z проведем перпендикуляр к отрезку $[z_0, z]$, затем проведем касательную к окружности в точке z^*, которая является точкой пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Пересечение построенной касательной и продолжения отрезка $[z_0, z]$ даст симметричную точку z'. И, наоборот, если точка z' не принадлежит кругу, то из точки z' проводим касательную к окружности, а из точки касания z^* опускаем перпендикуляр на отрезок $[z_0, z']$, получая точку z. Утверждение следует из подобия треугольников с вершинами в точках z, z_0, z^* и z', z_0, z^*.

Теорема 32. *Дробно-линейная функция переводит симметричные относительно окружности точки z и z', в точки, симметричные относительно образа этой окружности при ее преобразовании дробно-линейной функцией.*



■ Пусть точки z и z' симметричны относительно окружности Γ, Γ' — образ окружности Γ при преобразовании, совершаемом функцией (2.1), а w и w' — образы точек z и z' при том же преобразовании. Возьмем произвольную окружность γ' на плоскости $\mathbb{C}_w$, проходящую через точки w и w' и пусть γ — ее прообраз. По круговому свойству д.л.ф. γ— окружность, которая проходит через точки z и z', и потому ортогональна окружности Γ. В силу конформности дробно-линейной функции их образы (окружности Γ' и γ') будут ортогональны. Так как это справедливо для любой окружности γ', проходящей через точки w и w', то эти точки симметричны относительно окружности Γ'. □

Дробно-линейная функция (2.1) определяется тремя независимыми комплексными параметрами (так как числитель и знаменатель можно всегда разделить на одно и то же ненулевое комплексное число). Поэтому можно ожидать, что для задания дробно-линейной функции достаточно зафиксировать ее значения в трех различных точках.

Теорема 33. *Каковы бы ни были три различные точки z_1, z_2, z_3 в $\overline{\mathbb{C}}_z$ и три различные точки w_1, w_2, w_3 в $\overline{\mathbb{C}}_w$, существует единственная дробно-линейная функция $w = w(z)$ такая, что $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3$. Это отображение определяется формулой*

$$\frac{z - z_1}{z - z_2}\,\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2}\,\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}, \tag{2.4}$$

при этом, если некоторые точки $z_k = \infty$ или $w_k = \infty$, $1 \le k \le 3$, то соответствующие им разности следует в равенстве (2.4) заменить на 1.

■ Предположим для простоты, что ни одна из точек z_k, w_k, $k = 1, 2, 3$, не совпадает с ∞. Дробно-линейная функция

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}\,\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки 0, ∞, 1 на $\overline{\mathbb{C}}_w$. Аналогично, дробно-линейная функция

$$f_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2}\,\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

переводит точки w_1, w_2, w_3 в точки 0, ∞, 1 на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Следовательно, дробно-линейная функция $f(z) = \big(f_2^{-1} \circ f_1\big)(z)$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 и определяется формулой (2.4).

Докажем единственность д.л.ф. Пусть дробно-линейная функция h переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3. Тогда дробно-линейная функция

$$F(t) = \big(f_2 \circ h \circ f_1^{-1}\big)(t)$$

оставляет точки 0, ∞, 1 неподвижными. Из того, что $F(\infty) = \infty$ следует, что $F(t) = At + B$. Условие $F(0) = 0$ дает $B = 0$, а условие $F(1) = 1$ влечет $A = 1$. Таким образом, $F(t) = t$, $\forall\, t \in \overline{\mathbb{C}}$ и, следовательно, $t = \big(f_2 \circ h \circ f_1^{-1}\big)(t)$. Тогда

$$f_2^{-1}(t) = \big(f_2^{-1} \circ f_2 \circ h \circ f_1^{-1}\big)(t) = \big(h \circ f_1^{-1}\big)(t),\ t \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Но тогда, подставляя $t = f_1(z)$ получим, что

$$\big(f_2^{-1} \circ f_1\big)(z) = \big(h \circ f_1^{-1}\big)(f_1(z)) = h(z),\ \text{то есть } h = f_2^{-1} \circ f_1 = f.$$

Чтобы доказать равенство, когда одна из точек z_k или одна из точек w_k, $k = 1, 2, 3$, равна ∞, нужно в равенстве (2.4) перейти к пределу при $z_k \to \infty$ или $w_k \to \infty$ для соответствующего k. □

Следствие 33.1. *Дробно-линейная функция $w(z) \not\equiv z$ может иметь не более двух неподвижных точек. Дробно-линейная функция $w(z)$, имеющая две неподвижные точки z_1 и z_2 из $\overline{\mathbb{C}}$ определяется равенством*

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A\,\frac{z - z_1}{z - z_2},\ \text{где } A \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

в котором, если $z_1 = \infty$ или $z_2 = \infty$, соответствующие разности заменяются на 1.

Следствие 33.2. *Дробно-линейная функция отображает точку $z_1 \in \mathbb{C}$ в точку $w_1 = 0$ и точку $z_2 \in \mathbb{C}$ в точку $w_2 = \infty$ тогда и только тогда, когда*

$$w(z) = A\,\frac{z - z_1}{z - z_2},\ \text{где } A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Следствие 33.3. *Дробно-линейная функция отображает точку $z_1 = 0$ в точку $w_1 = 0$ и точку $z_2 = \infty$ в точку $w_2 = \infty$ тогда и только тогда, когда $w(z) = A\,z$, где $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Изучим множества всех дробно-линейных функций, отображающие некоторые области $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ на себя взаимно однозначно. Если $G = \overline{\mathbb{C}}$, то по доказанному ранее, любая дробно-линейная функция вида (2.1) отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ взаимно однозначно. Если $G = \mathbb{C}$, то дробно-линейная функция будет отображать взаимно однозначно $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда дробно-линейная функция вырождается в линейную функцию вида $w = w(z) = Az + B$, $A, B \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ (так как в этом случае $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = \infty$).

Рассмотрим в качестве области G области

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ — единичный круг,}$$

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z > 0\} \text{ — верхнюю полуплоскость.}$$

Теорема 34. *Дробно-линейная функция отображает взаимно однозначно U на U тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$w = w(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \text{ где } |a| < 1,\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

■ *Необходимость.* Пусть $w = w(z)$ — дробно-линейная функция, отображающая взаимно однозначно U на U. Рассмотрим точку $a = w^{-1}(0)$ из U и точку $a' = 1/\overline{a}$ — симметричную точке a относительно единичной окружности $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. По свойству сохранения д.л.ф. симметрии точек относительно окружности, точка a' должна при дробно-линейном отображении перейти в точку, симметричную с $w = 0$ относительно той же окружности, то есть $w(a') = \infty$. Таким образом, из равенств $w(a) = 0$, $w(a') = \infty$ следует, что

$$w(z) = \lambda\,\frac{z-a}{z-a'} = \lambda\,\frac{z-a}{z-\frac{1}{\overline{a}}} = \lambda_1\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $|w(1)| = 1$, то

$$|w(1)| = |\lambda_1|\,\frac{|1-a|}{|1-\overline{a}|} = |\lambda_1| = 1, \text{ то есть } \lambda_1 = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Достаточность. Покажем, что любая функция $w = w(z)$ вида (2.5) отображает взаимно однозначно U на U. Заметим, что если $|z| = 1$ (т.е. $z\overline{z} = 1$), то

$$|w(z)| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\overline{z}||1-\overline{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\overline{z}-\overline{a}|} = 1,$$

то есть $w(S) \subset S$, а поскольку $w(S)$ — окружность, получаем, что $w(S) = S$. Следовательно, $|w(z)| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Отсюда следует, что $|w(z)| < 1$ для всех $z \in U$. Действительно, если предположить, что $|w(z_0)| > 1$ для некоторой точки $z_0 \in U$, то, так как $|w(a)| = 0$, по теореме о промежуточном значении непрерывная функция $|w(z)|$ должна принимать значение 1 в некоторой точке отрезка $[a, z_0] \subset U$, вопреки тому, что $|w(z)| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.) Аналогично получаем, что $|w(z)| > 1$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus U$ (если $|w(z_0)| < 1$ для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$, соединим непрерывной кривой в $\mathbb{C} \setminus U$ точку z_0 с точкой $a' = 1/\overline{a}$, $w(a') = \infty$, и придем к противоречию). Поскольку отображение (2.5) является дробно-линейным и, следовательно, отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ взаимно однозначно, то $w(U) = U$. $\square$

Замечание. При отображении $w(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ угол поворота кривых в точке a равен θ, поскольку $\arg w'(a) = \theta$.

Теорема 35. *Дробно-линейная функция отображает взаимно однозначно H на H тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc > 0. \tag{2.6}$$

■ *Необходимость.* Пусть $w = w(z)$ есть дробно-линейная функция, отображающая взаимно однозначно H на H. Тогда w и w^{-1} отображают расширенную вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в себя, так что точки $x_1 = w^{-1}(0)$, $x_2 = w^{-1}(\infty)$, $x_3 = w^{-1}(1)$ принадлежат $\mathbb{R}$. Будем считать, что ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞ (случай, когда это не так — задание для самостоятельной работы). Тогда по теореме 33 функция w записывается в виде

$$w(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \text{ то есть } w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

При этом $w(i) \in H$, а это означает, что $\mathcal{I}m\, w(i) > 0$, то есть

$$\mathcal{I}m\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0, \text{ то есть } ad - bc > 0.$$

Достаточность. Нужно показать, что всякая функция $w = w(z)$ вида (2.6) отображает взаимно однозначно H на H. Это можно сделать так же, как и в теореме 34 или непосредственно показать, что всякая функция вида (2.6) удовлетворяет соотношению $\mathcal{I}m\, w = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathcal{I}m\, z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Отсюда уже следует, что дробно-линейная функция вида (2.6) отображает взаимно однозначно H на H. $\square$

Можно рассматривать дробно-линейные функции, отображающие взаимно однозначно одну область на другую, например, верхнюю полуплоскость H на единичный круг U. Предположим, что точка $a \in H$ при отображении такой д.л.ф. переходит в точку $w = 0$. В силу теоремы 32 точка $\overline{a} \notin H$ — симметричная точке a относительно вещественной оси, переходит в точку $w = \infty$ —

симметричную точке $w = 0$ относительно единичной окружности. Тогда, в силу следствия 33.2, $w = w(z) = \lambda \dfrac{z - a}{z - \overline{a}}$. Поскольку вещественная прямая отображается в единичную окружность, то $|w(x)| = |\lambda| \frac{|x-a|}{|x-\overline{a}|} = |\lambda| = 1$, то есть $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Рассуждая, как и при доказательстве теорем 34, 35, нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 36. *Дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость H на единичный круг U тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$w = w(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{z - \overline{a}}, \quad \text{где } \mathcal{I}m\, a > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

2.2 Показательная функция

Рассмотрим функцию $w = e^z$ (см. пример 5 и раздел на странице 9). Тогда

$$w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ если } z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $|w| = |e^z| = e^x$, $\arg w = \arg e^z = y$ и, потому, показательная функция взаимно однозначно отображает прямую $y = c$, параллельную вещественной оси, на луч $\arg w = c$, а прямую $x = c$ — на многократно проходимую окружность $|w| = e^c$. При $x = c$, учитывая периодичность функций $\cos y$ и $\sin y$, легко видеть, что отображение $w = e^z$ будет однозначным, тогда и только тогда, когда $y \in [\lambda, \mu] \subset [\alpha, \alpha + 2\pi)$, например, когда $y \in [0, 2\pi)$.

Так как $w'(z) = e^z \neq 0$ в $\mathbb{C}$, то из всего сказанного следует, что функция $w = e^z$ конформно отображает друг на друга следующие области из $\in \mathbb{C}$

1) полосу $\{z : \alpha < \mathcal{I}m\, z < \beta\}$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ на угол $\{w : \alpha < \arg w < \beta\}$;

2) в частности, полосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < 2\pi\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ вещественной оси (см. рис. 2.1);

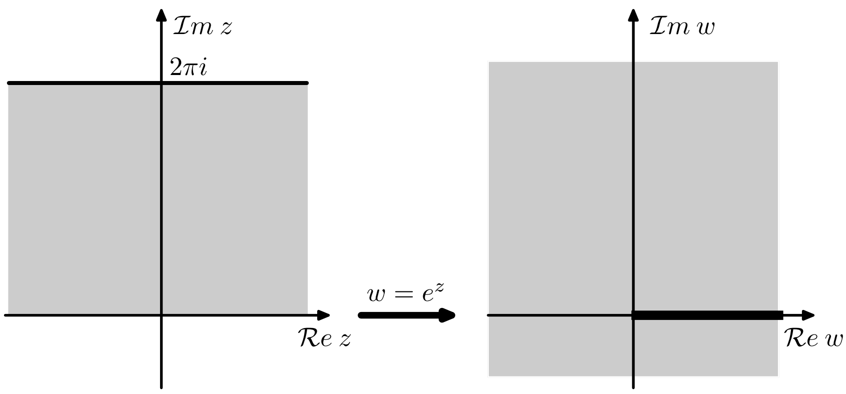


Рис. 2.1:

3) полосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\, w > 0\}$ (см. рис. 2.2);

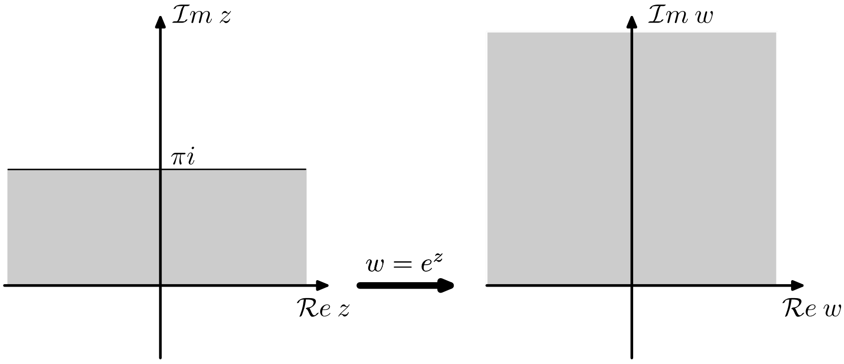


Рис. 2.2:

4) полуполосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < \pi,\ \mathcal{R}e\, z > 0\}$ на область $\{w : |w| > 1,\ \mathcal{I}m\, w > 0\}$(см. рис. 2.3);

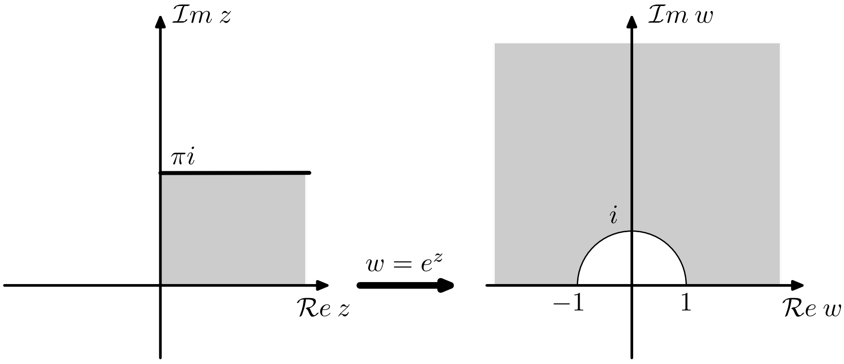


Рис. 2.3:

5) полуполосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < \pi,\ \mathcal{R}e\, z < 0\}$ на верхний полукруг единичного круга $\{w : |w| < 1, \mathcal{I}m\, w > 0\}$ (см. рис. 2.4);

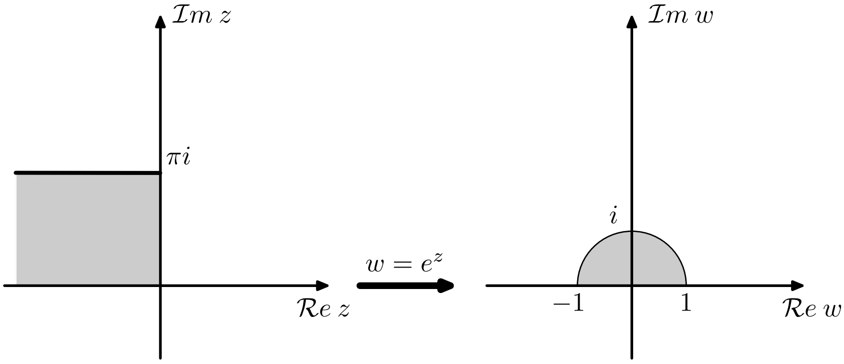


Рис. 2.4:

6) полуполосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < 2\pi,\ \mathcal{R}e\, z < 0\}$ на единичный круг с разрезом $\{w : |w| < 1,\ \arg w \neq 0\}$ (см. рис. 2.5);

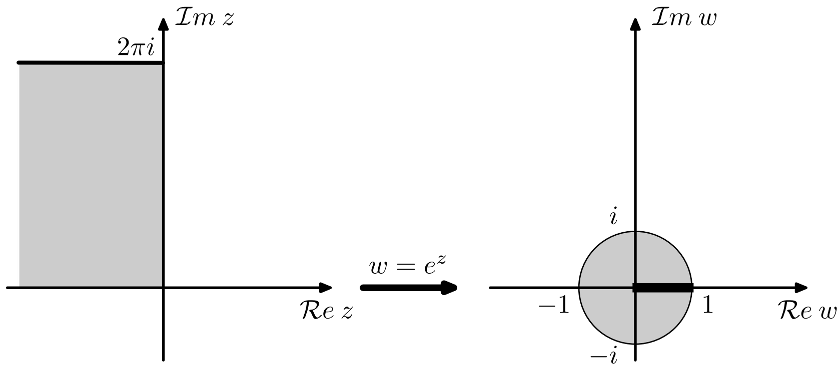


Рис. 2.5:

Рассмотрим поясняющий пример.

Пример 18. *Отобразить конформно* $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 1,\ |z-2i| < 2\}$ *на верхнюю полуплоскость.*

■ Граница области G состоит из двух окружностей: $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$ и $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$, соприкасающихся с вещественной осью в точке $z = 0$ и пересекающих под прямым углом мнимую ось в точках $z = 2i$ и $z = 4i$, соответственно (см. рис. 2.6). Аналогично, окружность $\gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha i| = \alpha\}$, $\alpha \in (1, 2)$ соприкасается с вещественной осью в точке $z = 0$ и пересекает под прямым углом мнимую ось в точке $z = 2\alpha i$.

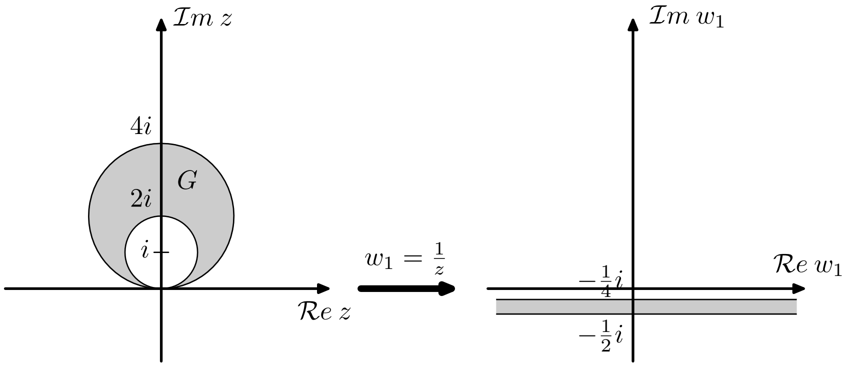


Рис. 2.6:

Д.л.ф. $w_1 = 1/z$ отобразит окружности γ_1, γ_α и γ_2, проходящие через её полюс, в прямые, параллельные вещественной оси и проходящие через точки

$$w_1(2i) = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i, \quad w_1(2\alpha i) = \frac{1}{2\alpha i} = -\frac{1}{2\alpha}i, \quad w_1(4i) = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i.$$

Поскольку $\bigcup\limits_{\alpha \in (1,2)} \gamma_\alpha = G$, д.л.ф. $w_1 = 1/z$ отобразит область G в полосу $\left\{w_1 \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \mathcal{I}m w_1 < -\frac{1}{4}\right\}$. Отображение $w_2 = -4\pi\left(w_1 + \frac{1}{4}i\right) = -4\pi w_1 - \pi i$ сдвинет эту полосу на $\frac{1}{4}i$, растянет до ширины π и отобразит симметрично относительно вещественной оси на полосу $\{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \mathcal{I}m\, w_2 < \pi\}$. Показательная функция e^{w_2} отобразит последнюю полосу на верхнюю полуплоскость. Итак, искомое отображение производит функция

$$w = e^{-4\pi w_1 - \pi i} = -e^{-4\pi w_1} = -e^{-4\pi/z}. \ \square$$

Общая показательная функция a^z $(a \neq 0)$ определяется при любом $z \in \mathbb{C}$ формулой (см. стр. 9)

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \text{ где } \operatorname{Ln} a = \ln|a| + i(\arg a + 2\pi k),\ 0 < \arg a < 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Чтобы получить однозначную ветвь, нужно зафиксировать одно из значений $\operatorname{Ln} a$. Два значения функции $\operatorname{Ln} a$ различаются на слагаемое вида $2\pi k i$, поэтому две ветви функции a^z различаются множителем вида $e^{2\pi k i z}$, представляющим однозначную, всюду дифференцируемую в $\mathbb{C}$ функцию.

2.3 Степенная функция

В общем случае степенная функция $w = z^p$ с вещественным показателем p, определяется как многозначная функция

$$w = z^p = (|z|e^{i(\arg z + 2\pi k)})^p = |z|^p e^{ip\arg z + 2\pi k p i},\ 0 < \arg z < 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Фиксируя $k \in \mathbb{Z}$, можно выделить ее однозначную ветвь. Будем, далее, рассматривать ее основную однозначную ветвь при $k = 0$, и ради простоты изложения предполагать, что $p > 0$:

$$w = z^p = |z|^p e^{ip\arg z},\ 0 < \arg z < 2\pi.$$

Эта функция любой луч $z = re^{i\varphi}, r \in [0, +\infty)$ отобразит взаимно однозначно на луч $w = \rho\, e^{ip\varphi}$, $\rho = r^p \in [0, +\infty)$. Таким образом, эта однозначная ветвь угол

$$D_{\alpha,\beta} = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in (0, +\infty),\ \varphi \in (\alpha, \beta),\ 0 < \beta - \alpha < 2\pi\},$$

отобразит на угол $D_{p\alpha,p\beta}$, но не обязательно взаимно однозначно (инъективно); инъективным оно будет, если $0 < \beta - \alpha < \dfrac{2\pi}{p}$. Если $p > 1$ раствор угла при отображении увеличивается, если $0 < p < 1$ — уменьшается.

Например, при $p = 2$ эта однозначная ветвь отобразит первый квадрант комплексной плоскости $\{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in (0, +\infty), \varphi \in (0, \pi/2)\}$ на верхнюю полуплоскость H, а верхнюю полуплоскость H — на комплексную плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < 2\pi\}$.

Функция $w = z^{1/2}$ конформно отобразит область $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$ — плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$, на верхнюю полуплоскость, а верхнюю полуплоскость — в первый квадрант комплексной плоскости. Рассмотрим более сложный пример.

Пример 19. *Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость комплексную плоскость с разрезом по отрезку* $[z_0, z_1]$*, соединяющему точки* z_0 *и* z_1 *(*$z_0 \neq z_1$*).*

■ Д.л.ф. $\zeta(z) = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z}$ отобразит всю плоскость с разрезом по прямолинейному отрезку $[z_0, z_1]$ на всю плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ вещественной оси. Действительно, $z(t) = z_0 + te^{i\varphi}, 0 \leq t \leq |z_1 - z_0|$, — это параметризация отрезка $[z_0, z_1]$, где $\varphi = \arg(z_1 - z_0)$, потому что

$$z(0) = z_0,\ z(|z_1 - z_0|) = z_0 + |z_1 - z_0|e^{i\varphi} = z_0 + (z_1 - z_0) = z_1.$$

Так как для любой точки $t \in [0, |z_1 - z_0|)$

$$\zeta(z(t)) = \frac{te^{i\varphi}}{z_1 - z_0 - te^{i\varphi}} = \frac{te^{i\varphi}}{|z_1 - z_0|e^{i\varphi} - te^{i\varphi}} = \frac{t}{|z_1 - z_0| - t} > 0,$$

то отрезок $[z_0, z_1]$ отобразится на положительный луч вещественной оси. Как известно, д.л.ф. конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Если воспользоваться основной однозначной ветвью функции $w = \sqrt{z}$, то искомое отображение производит функция $w = \sqrt{\zeta(z)} = \sqrt{\dfrac{z - z_0}{z_1 - z}}$. □

2.4 Функция Жуковского

Рациональную функцию $w = \lambda(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, которая часто встречается в приложениях, в том числе и в аэромеханике, называют функцией Жуковского. Она аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а в точках $z = 0, z = \infty$ непрерывна в смысле определения 26 и принимает значение ∞. Функция Жуковского инъективна в любой области, которая одновременно не содержит точек z и $\dfrac{1}{z}$, поскольку равенство $\lambda(z_1) = \lambda(z_2)$ возможно лишь тогда, когда либо $z_1 = z_2$, либо $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$.

Таким образом, функция Жуковского инъективна, например, в областях

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\},\ \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z > 0\},\ \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z < 0\}.$$

Если $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ и $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Поэтому функция $\lambda(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, принимая все значения, из промежутков $(-\infty, -1], [1, +\infty)$, соответственно; убывает на промежутках $[-1, 0)$, $(0, 1]$, принимая все значения из промежутков $(-\infty, -1], [1, +\infty)$, соответственно.

Если $z = iy$ и $y \neq 0$, то $\lambda(iy) = \dfrac{1}{2}i\left(y - \dfrac{1}{y}\right)$. Если

$$g(y) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right), \text{ то } g'(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) > 0, \ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ g(\pm 1) = 0,$$

$$\lim_{y \to +0} g(y) = -\infty, \ \lim_{y \to -0} g(y) = +\infty, \ \lim_{y \to -\infty} g(y) = -\infty, \ \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty,$$

поэтому функция $g(y)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. Следовательно, когда y, возрастая, пробегает либо интервал $(-\infty, 0)$, либо интервал $(0, +\infty)$, $g(y)$, возрастая, пробегает весь интервал $(-\infty, +\infty)$.

Если $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $\lambda(e^{i\varphi}) = \dfrac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi$. Поэтому, когда z пробегает верхнюю полуокружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \ \mathcal{I}m z \geq 0\}$ против часовой стрелки, значения функции $\lambda(z)$ заполняют весь отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси, убывая от 1 до -1. Если z пробегает против часовой стрелки нижнюю полуокружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \ \mathcal{I}m z \leq 0\}$, значения функции $\lambda(z)$ заполняют весь отрезок $[-1, 1]$, возрастая от -1 до 1.

Для всех $r > 0, \ r \neq 1$,

$$\lambda(re^{i\varphi}) = w_1 + iw_2 = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Следовательно, когда точка z пробегает против часовой стрелки окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, r \neq 1$, точки $\lambda(z)$ пробегают эллипс

$$\left(\frac{w_1}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}\right)^2 + \left(\frac{w_2}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)}\right)^2 = 1$$

с полуосями $a = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right), b = \dfrac{1}{2}\left|r - \dfrac{1}{r}\right|$ и фокусами в точках ± 1 $(a^2 - b^2 = 1)$, причём для $r > 1$ эллипс будет пробегаться точкой $\lambda(z)$ против часовой стрелки, а для $0 < r < 1$ — по часовой стрелке.

Для всех $0 < r < 1$ при фиксированном $\varphi \in (0, \pi/2)$, когда точка $z = re^{i\varphi}$ пробегает радиус единичного круга, ***тогда точка $\lambda(z)$ пробегают часть гиперболы

$$\left(\frac{w_1}{\cos\varphi}\right)^2 - \left(\frac{w_2}{\sin\varphi}\right)^2 = 1, \ w_1 > 0, \ w_2 < 0.$$

Если зафиксировать $\varphi \in (-\pi/2, 0)$, то образом радиуса будет часть гиперболы $w_1 > 0, \ w_2 > 0$. Аналогично, при фиксированном $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ образом радиуса будет часть гиперболы $w_1 < 0, \ w_2 < 0$, а при фиксированном $\varphi \in (-\pi, -\pi/2)$ – часть гиперболы $w_1 < 0, \ w_2 > 0$.

Итак, ортогональная сетка плоскости $\mathbb{C}_z$, состоящая из окружностей с центром в нуле и их радиусов, переходит в ортогональную сетку плоскости $\mathbb{C}_w$, состоящая из эллипсов и гипербол. Из сказанного следует, что функция Жуковского конформно отображает друг на друга следующие области в $\mathbb{C}$

1) единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ и внешность единичной окружности $\{z : |z| > 1\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (см. рис. 2.7);

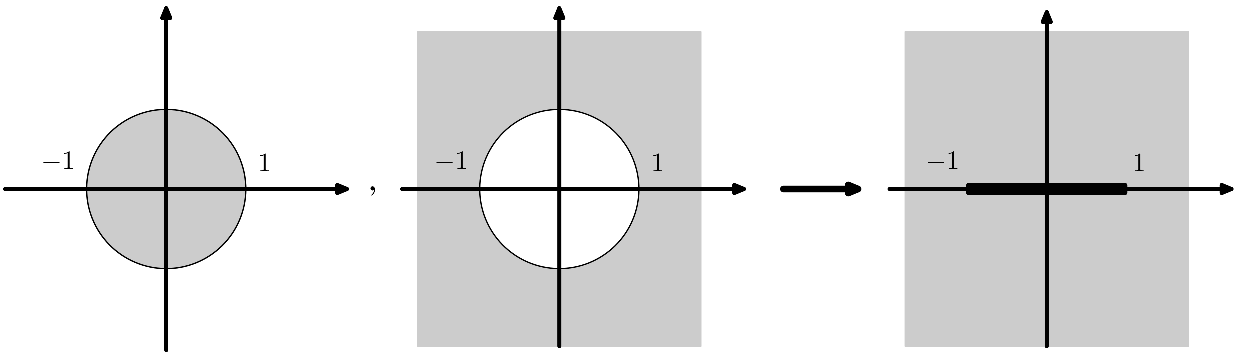


Рис. 2.7:

2) верхний полукруг $\{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\ z > 0\}$ и область $\{z : |z| > 1, \mathcal{I}m\ z < 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\ w < 0\}$ (см. рис. 2.8);

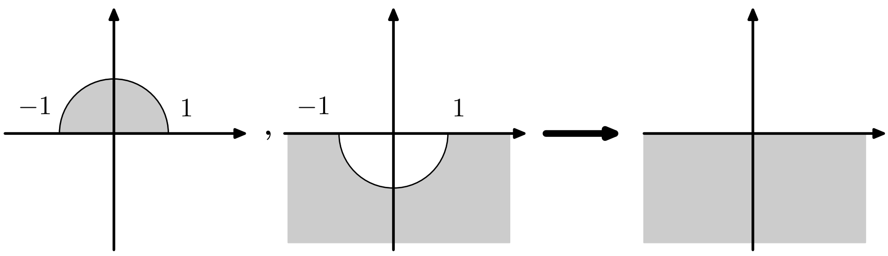


Рис. 2.8:

3) нижний полукруг $\{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\ z < 0\}$ и область $\{z : |z| > 1, \mathcal{I}m\ z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\ w > 0\}$ (см. рис. 2.9);

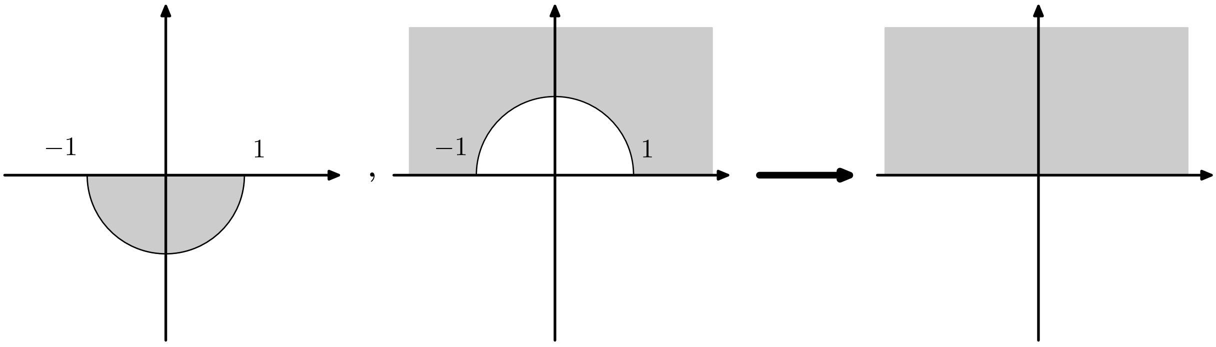


Рис. 2.9:

4) верхнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\, z > 0\}$ и нижнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\, z < 0\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси (см. рис. 2.10).

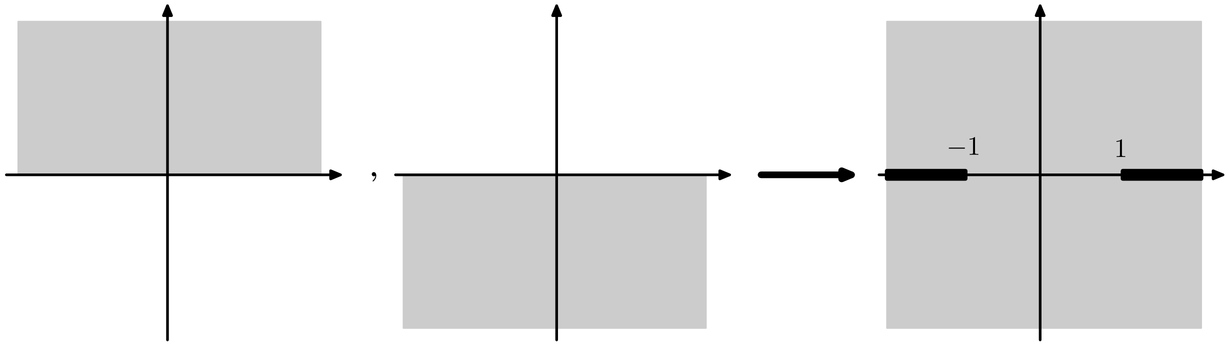


Рис. 2.10:

Пример 20. *Отобразить конформно верхнюю полуплоскость с разрезами по двум дугам единичной окружности*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z > 0, z \neq e^{i\varphi}, \varphi \in [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]\}$$

на верхнюю полуплоскость.

■ Функция Жуковского $\zeta = \lambda(z)$ конформно отобразит верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z > 0\}$ на плоскость с разрезами по лучам вещественной оси $[1, +\infty)$ и $(-\infty, -1]$, а дуги $z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, \pi/3]$ и $\varphi \in [2\pi/3, \pi]$ на отрезки вещественной оси $\{\zeta = \lambda(e^{i\varphi}) = \cos\varphi,\ \varphi \in [0, \pi/3],\ \varphi \in [2\pi/3, \pi]\}$, то есть на отрезки $[1/2, 1]$ и $[-1, -1/2]$ (см. рис. 2.11).

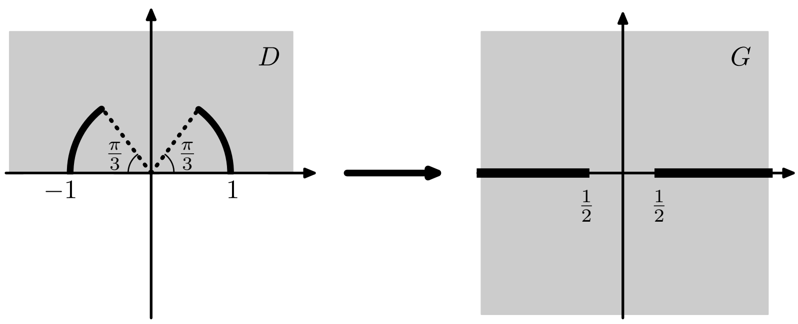


Рис. 2.11:

Дробно-линейная функция $w_1 = \dfrac{2\zeta - 1}{2\zeta + 1}$ конформно отобразит расширенную комплексную плоскость на расширенную плоскость, а разрезы по лучам вещественной оси $(-\infty, -1/2]$ и $[1/2, +\infty)$ на разрез по лучу $[0, +\infty)$ вещественной оси.

Основная ветвь функции $w = \sqrt{w_1}$ отобразит комплексную плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ вещественной оси на верхнюю полуплоскость.

Суперпозиция этих функций и будет искомым отображением:

$$w = \sqrt{\frac{z + \dfrac{1}{z} - 1}{z + \dfrac{1}{z} + 1}} = \sqrt{\frac{z^2 - z + 1}{z^2 + z + 1}}. \quad \square$$

Суперпозицией функции e^z и функции Жуковского является функция

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

В силу периодичности функции $\cos z$ она не инъективна в $\mathbb{C}$. Чтобы добиться инъективности, разобьем $\mathbb{C}$ на области $D_k = \{z \in \mathbb{C} : \pi k < \mathcal{R}e\, z < \pi + \pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция $w = \cos z$ конформно отображает каждую область D_k на плоскость с разрезами по лучам вещественной оси $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. При этом нижнюю полуполосу $\mathcal{R}e\, z \in (0, \pi)$, $Imz < 0$, функция $w = \cos z$ переводит в верхнюю полуплоскость.

Поскольку $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, функция $\sin z$ конформно отображает каждую область $G_k = \left\{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{2} + \pi k < \mathcal{R}e\, z < \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right\}$ на плоскость с разрезами по лучам вещественной оси $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

Так как $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$, нетрудно показать, что функция $\operatorname{tg} z$ конформно отображает полосу $\left\{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{2} < \mathcal{R}e\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ на плоскость с разрезами по двум лучам мнимой оси $(-\infty i, -i]$ и $[i, +\infty i)$.

Глава 3

Интегральные теоремы

Всюду далее, рассматривая интегралы, будем называть контурами в G простые спрямляемые кривые, носители которых лежат в области G. Соответственно, простые спрямляемые замкнутые кривые, носители которых лежат в области G, будем называть замкнутыми контурами в G.

3.1 Интегральная теорема Коши

Теорема об интегрировании аналитических функций принадлежит к числу основных теорем всей теории.

Теорема 37 (интегральная теорема Коши)**.** *Пусть область G односвязна в $\mathbb{C}$ и $f \in A(G)$. Для любой замкнутой спрямляемой кривой γ в G*

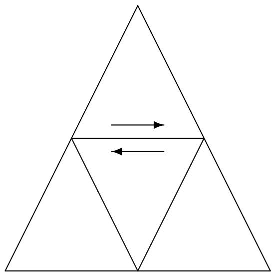
$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

■ Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Пусть кривая γ в G имеет носитель L, представляющий собой дважды проходимый прямолинейный отрезок, соединяющий точки a и b из G и лежащий в G. Определим L^+, как отрезок $[a, b]$ с направлением от a и b, и L^-, как отрезок $[a, b]$ с направлением от b к a. Очевидно, $L = L^+ \bigcup L^-$. Тогда по свойствам интеграла в комплексной плоскости следует, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L^+} f(z)\,dz + \int\limits_{L^-} f(z)\,dz = \int\limits_{L^+} f(z)\,dz - \int\limits_{L^+} f(z)\,dz = 0.$$

2. Пусть кривая γимеет носитель L, представляющий собой границу треугольника Δ, лежащего в G, с направлением обхода против часовой стрелки. Докажем, что и в этом случае $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$. Предположим противное, то есть, что $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| = \alpha > 0$.



Соединим середины сторон треугольника Δ средними линиями. Обозначим через $L_{1,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, образовавшиеся треугольные контуры (с обходом против часовой стрелки), а через $\gamma_{1,j}$ соответствующие параметризации. Каждая средняя линия треугольника Δ принадлежит двум образовавшимся треугольникам, и потому проходится дважды, но в противоположных направлениях. По пункту 1 интеграл от f по такой средней линии равен нулю.

Таким образом,

$$\alpha = \Big|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{4}\int\limits_{\gamma_{1,j}} f(z)\,dz\Big| \le \sum_{j=1}^{4}\Big|\int\limits_{\gamma_{1,j}} f(z)dz\Big|. \tag{3.1}$$

Следовательно, по крайней мере один из интегралов в правой сумме будет не меньше $\alpha/4$. Иначе, из (3.1) следовало бы, что

$$\alpha \le \sum_{j=1}^{4}\Big|\int\limits_{\gamma_{1,j}} f(z)dz\Big| < 4\,\frac{\alpha}{4} = \alpha.$$

Обозначим соответствующий треугольник через Δ_1, его границу с обходом против часовой стрелки через L_1, а соответствующую ему параметризацию через γ_1, тогда $\Big|\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz\Big| \ge \dfrac{\alpha}{4}$. По построению, $\Delta_1 \subset \Delta$, и, если p — периметр треугольника Δ, а p_1 — периметр треугольника Δ_1, то $p_1 = p/2$.

Повторим построение для треугольника Δ_1 и получим треугольник Δ_2 с границей L_2, проходимой против часовой стрелки, и соответствующую ему параметризацию γ_2 такие, что

$$\Big|\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz\Big| \ge \frac{\alpha}{4^2},$$

$\Delta_2 \subset \Delta_1$, и, если p_2 — периметр треугольника Δ_2, то $p_2 = p_1/2 = p/2^2$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$, их границ L_n с обходим против часовой стрелки, и соответствующие им параметризации $\{\gamma_n\}$ такие, что

1) $J_n = \Big|\int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz\Big| \ge \alpha/4^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$;

3) если p_n — периметр треугольника Δ_n, то $p_n = p/2^n$.

Из 2) следует, что $\{\Delta_n\}$ — последовательность вложенных компактов, из 3) следует, что

$$d(\Delta_n) = \max_{z,w\in\Delta_n} |z-w| \le p_n = p/2^n \to 0 \text{ при } n\to+\infty.$$

Поэтому, по теореме 1, существует единственная точка $z_0 \in \Delta_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Итак, $z_0 \in G$ и функция f дифференцируема в точке z_0, поэтому по общему критерию дифференцируемости (теореме 13)

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0) \text{ при } z\to z_0.$$

Проинтегрируем последнее равенство по кривой γ_n:

$$\int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \overline{o}(z-z_0)\right)\,dz =$$

$$= f(z_0)\int\limits_{\gamma_n} dz + f'(z_0)\int\limits_{\gamma_n} z\,dz - f'(z_0)z_0\int\limits_{\gamma_n} dz + \int\limits_{\gamma_n} o(z-z_0)\,dz.$$

Интегралы $\int\limits_{\gamma_n} dz$, $\int\limits_{\gamma_n} zdz$ равны нулю (см. примеры 11, 12), поэтому

$$\int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_n} o(z-z_0)\,dz.$$

Из определения 22 функции $o(z-z_0)$ следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ \frac{|o(z-z_0)|}{|z-z_0|} < \varepsilon,\ \forall\, z\in G : |z-z_0|<\delta,$$

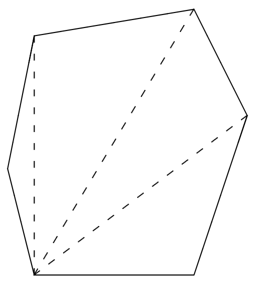
поэтому $|o(z-z_0)| < \varepsilon|z-z_0|$, когда $|z-z_0|<\delta$.

Выберем $n \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы $\Delta_n \subseteq \{z\in G:\ |z-z_0|<\delta\}$. По свойствам интеграла в комплексной плоскости

$$\frac{\alpha}{4^n} \le \left|\int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\gamma_n} o(z-z_0)\,dz\right| \le \varepsilon \sup_{z\in\gamma_n}|z-z_0|\ell(\gamma_n) \le \varepsilon p_n^2 = \varepsilon\frac{p^2}{4^n}.$$

Отсюда следует, что $\alpha \le \varepsilon p^2$, но так как число $\varepsilon>0$ выбиралось произвольно, получили противоречие с тем, что $\alpha>0$, следовательно, $\alpha=0$.

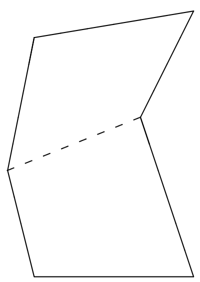
3. Пусть L — граница произвольного выпуклого m-угольника с обходом против часовой стрелки, а γ — его параметризация.



Разобьем многоугольник на $(m-2)$ треугольника диагоналями, выходящими из одной вершины. Пусть L_k — граница k-го треугольника с обходом против часовой стрелки, а γ_k — соответствующая параметризация. Поскольку в этом случае проведенные диагонали проходятся дважды, но в противоположных направлениях, а интегралы от f по L_k равны, как доказано выше в пункте 2, нулю, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m-2} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

4. Пусть L — граница произвольного многоугольника без точек самопересечения с обходом против часовой стрелки, а γ — его параметризация.



Разобьем многоугольник диагоналями на конечное число выпуклых многоугольников с обходом против часовой стрелки. Пусть L_k — граница k-го выпуклого многоугольника с обходом против часовой стрелки. Поскольку в этом случае проведенные диагонали проходятся дважды, но в противоположных направлениях, а интегралы от f по L_k равны, как доказано в пункте 3, нулю, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k} \int\limits_{L_k} f(z)\,dz = 0.$$

5. Пусть L — замкнутая ломаная, представляющая границу произвольного многоугольника с обходом против часовой стрелки (возможно с точками самопересечения), а γ — соответствующая параметризация L. Тогда L имеет только конечное число изолированных точек самопересечения и конечное число общих отрезков, состоящих из точек самопересечения. Такой многоугольник можно разбить на конечное число многоугольников без точек самопересечения с границами L_k, имеющими параметризацию γ_k, и конечное число прямолинейных отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$, проходимых дважды, но в противоположных направлениях. По доказанному в пунктах 1 и 4, интегралы от f по L_k и $[\alpha_j, \beta_j]$ равны нулю, и потому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz + \sum_{j} \int\limits_{[\alpha_j,\beta_j]} f(z)\,dz = 0.$$

6. Пусть γ — произвольная замкнутая спрямляемая кривая. По теореме 20 об аппроксимации по любому числу $\varepsilon > 0$ найдется замкнутая ломаная Γ_ε, вписанная в γ, которая лежит в G и $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$. Но по предыдущему

$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$, следовательно, $\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\Big| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$. $\square$

Замечание. Как было показано в примере 13

$$\int\limits_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ аналитична в кольце $0 < |z-a| < +\infty$, которое не является односвязной областью в $\mathbb{C}$. Следовательно условие односвязности области существенно для справедливости теоремы.

Следствие 37.1. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$ (не обязательно односвязная!) и $f \in A(G)$. Пусть γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая в G такая, что* $\operatorname{int}\gamma \subset G$. *Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Следствие 37.2 (о независимости интеграла от кривой интегрирования)**.** *Если функция f является аналитической в односвязной области G, z_1 и z_2 — любые точки области G, а γ_1, γ_2 — произвольные спрямляемые кривые, соединяющие в G эти точки, с направлением обхода от z_1 к z_2, то*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

■ Рассмотрим кривую $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ (напомним, что кривая γ_2^- отличается от кривой γ_2 противоположным направлением обхода). Тогда γ — замкнутая спрямляемая кривая в G такая, что $\operatorname{int}\gamma \subset G$ и по теореме Коши $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$. Но тогда, используя свойства интеграла в комплексной плоскости, получим, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Следовательно, $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$. $\square$

Будем далее называть системой контуров или составным контуром — конечное число контуров, связанных между собой некоторыми условиями.

Теорема 38 (интегральная теорема Коши для системы контуров)**.** *Пусть функция f аналитична в области G и γ, γ_1, ..., γ_m — попарно непересекающиеся замкнутые контуры, лежащие в G, и такие что*

1) *контуры γ_j, $j = 1, \ldots, m$, лежат внутри контура γ;*

2) *внутренности контуров γ_j и γ_k, $j \neq k$, попарно не пересекаются;*

3) *на всех контурах γ, γ_1, ..., γ_m выбрано направление обхода против часовой стрелки;*

4) *контуры γ, γ_1, ..., γ_m составляют границу области D, которая лежит в G.*

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz. \tag{3.2}$$

■ Разрежем область D контурами l_k, соединяющими внешний контур γ с каждым внутренним контуром γ_k так, чтобы разрезы не пересекались друг с другом. Тогда область D превратится в односвязную область $\widetilde{D}$ с границей Γ, состоящей из внешнего контура γ с направлением обхода против часовой стрелки, внутренних контуров γ_k с направлением обхода на каждом по часовой стрелке и разрезов l_k, проходимых дважды: от точки контура γ до точки контура γ_k и, после прохождения контура γ_k, от точки контура γ_k до точки контура γ. При таком обходе по границе Γ область $\widetilde{D}$ остается слева, то есть контур Γ проходится против часовой стрелки (в положительном направлении). Функция f аналитична в области G, следовательно, выполнены условия интегральной теоремы Коши и потому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{3.3}$$

Но $\Gamma = \gamma \bigcup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} \left(l_k \cup \gamma_k^{-} \cup l_k^{-} \right) \right)$. Воспользуемся свойством интеграла в комплексной плоскости и получим:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{l_k} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{l_k} f(z)dz = 0.$$

Знак "$-$" перед вторым и четвертым слагаемыми поставлен в связи с изменением направления обхода контуров интегрирования.

После взаимного уничтожения третьей и четвёртой сумм и переноса слева направо второй суммы получаем равенство (3.2). □

Очень часто в приложениях будет использоваться следующий простейший вариант теоремы 38.

Следствие 38.1. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и $f \in A(G)$. Пусть γ_1 и γ_2 — любые два замкнутых контура в G такие, что $\operatorname{int}\gamma_1 \subset \operatorname{int}\gamma_2$, а область D, ограниченная контурами γ_1 и γ_2, лежит в G, тогда*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{3.4}$$

Интегральная теорема Коши верна и при менее ограничительных условиях.

Теорема 39 (обобщенная интегральная теорема Коши)**.** *Если G — внутренность замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, функция f непрерывна на $\overline{G}$ и аналитична в G, тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.*

В нашем курсе мы оставим это обобщение без доказательства, которое можно найти в университетских учебниках по теории аналитических функций (см., например, [10, с. 165]). В соответствии с этим обобщением можно обобщить теоремы и следствия, доказываемые на основании интегральной теоремы Коши.

3.1.1 Первообразная функции комплексного переменного

Следствие 37.2 о независимости интеграла от кривой интегрирования позволяет при интегрировании аналитической функции f по спрямляемой кривой, соединяющей точки z_1 и z_2, лежащие в односвязной области G, не указывать такую кривую, а указывать только точки z_1 и z_2, а потому интеграл можно записывать в виде $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$. Пользуясь этим следствием можно перенести на функции комплексного переменного понятие первообразной.

Определение 68. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция $F : G \to \mathbb{C}$ называется первообразной для функции $f : G \to \mathbb{C}$, если функция F аналитична в G и $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in G$.*

Теорема 40 (о существовании первообразной)**.** *Если G — область в $\mathbb{C}$, f — непрерывная в G функция, а интеграл от f не зависит от пути интегрирования в G, то функция f имеет первообразную в G.*

■ Пусть z_0 — фиксированная точка в G. Определим в G однозначную функцию

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt, \tag{3.5}$$

где интегрирование ведется по любой спрямляемой кривой, соединяющей в G точки z_0 и z. Покажем, что функция $\Phi(z)$ является первообразной функции f в G. По определению первообразной необходимо доказать, что в каждой точке z области G определена производная $\Phi'(z)$ и $\Phi'(z) = f(z)$.

Возьмём любую точку z области G. Так как функция f в точке z непрерывна, то по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что окрестность $U_z(\delta) \subset G$ и для любого $|\Delta z| < \delta$ выполняется условие $|f(z+\Delta z) - f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $0 < |\Delta z| < \delta$, γ — произвольный контур, соединяющий в G точки z_0 и z, соединим точки z и $z + \Delta z$ отрезком $[z, z+\Delta z]$, очевидно, лежащим в $U_z(\delta)$. Тогда контур $\gamma_1 = \gamma \cup [z, z+\Delta z]$ соединяет в G точки z_0 и $z + \Delta z$. Из определения функции Φ и свойств интеграла следует, что

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt - \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt\right) = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

Тогда

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\cdot\Delta z\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\int\limits_{z}^{z+\Delta z} dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} \big(f(t) - f(z)\big)dt\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot|\Delta z| = \varepsilon.$$

Тогда из определения предела следует, что существует

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = f(z),$$

то есть существует $\Phi'(z)$ и $\Phi'(z) = f(z)$. Последнее означает, что функция $\Phi(z)$ является первообразной для функция f в G. $\square$

Замечание. Интеграл в (3.5) называют, как и в вещественном случае, интегралом с переменным верхним пределом.

Для аналитической в односвязной области G функции из свойств интеграла от функций комплексного переменного и формулы (3.5) немедленно получаем, что для любых точек z_1, z_2 из G справедлива формула

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_2} f(z)dz - \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz. \qquad (3.6)$$

Поэтому из теоремы 40 получаем следующий результат.

Следствие 40.1. *Если G — односвязная область в $\mathbb{C}$, а f — аналитическая в G функция, то функция* (3.5) *является аналитической в G и $\Phi'(z) = f(z)$ для любой точки $z \in G$ (то есть функция* (3.5) *является первообразной для функции f а G).*

Как и в вещественном случае, как легко видеть, имеет место следующий результат.

Теорема 41 (о множестве всех первообразных). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и f — функция f из G в $\mathbb{C}$. Если F — первообразная для функции f в G, то множество всех первообразных для функции f в G совпадает с множеством* $\{F(z) + c,\ c \in \mathbb{C}\}$.

Из теоремы 41 и формулы (3.6) получаем классическую теорему Ньютона-Лейбница.

Теорема 42. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, а f — аналитическая в G функция,. Если F — первообразная для функции f в G, то для любых точек z_1, z_2 из G имеет место равенство (формула Ньютона-Лейбница)*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

3.2 Интегральная формула Коши

Интегральная теорема Коши позволяет получить формулу, являющуюся основной для всей теории функций комплексного переменного.

Теорема 43 (интегральная формула Коши). *Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, а γ — замкнутый контур с обходом против часовой стрелки, лежащий в G вместе со своей внутренностью. Тогда для любой точки $z \in \operatorname{int}\gamma$ справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{3.7}$$

■ Возьмём внутри контура γ точку z_0 и проведем окружность C_r с центром в точке z_0 столь малого радиуса r, чтобы $\overline{K_{z_0}}(r) = \{t : |t - z_0| \le r\} \subset \operatorname{int}\gamma$. На окружности C_r определим обход против часовой стрелки. Тогда по следствию 38.1 из теоремы 38

$$\int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt = \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt. \tag{3.8}$$

По тому же следствию величина интеграла, стоящего в (3.8) слева, не зависит от r. Вычислим этот интеграл, для чего сделаем в этом интеграле замену переменной, полагая $t = z_0 + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi = i \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Последний интеграл есть собственный интеграл, зависящий от параметра r. Так как функция f непрерывна в G (в силу ее аналитичности), то подынтегральная функция при фиксированном r непрерывна по φ на сегменте $[0, 2\pi]$ (по теореме о непрерывности суперпозиции). В силу первой теоремы о среднем, найдется точка $\varphi(r) \in [0, 2\pi]$ такая, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = f(z_0 + re^{i\varphi(r)})\, 2\pi.$$

Так как $|e^{i\varphi(r)}| = 1$, а функция f непрерывна в точке z_0, то, переходя к пределу в (3.8) при $r \to 0$, получим

$$\int\limits_\gamma \frac{f(t)}{t - z} dt = \lim_{r \to 0} \int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t - z} dt = i \lim_{r \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$= i \lim_{r \to 0} f(z_0 + re^{i\varphi(r)}) 2\pi = 2\pi i f(z_0).$$

Отсюда следует формула 3.7. $\square$

Замечание. Если z_0 лежит вне замкнутого контура γ, то $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{f(t)}{t - z_0}\, dt = 0$, так как тогда функция $f(t)/(t - z_0)$ аналитична внутри γ и на нём самом, то есть удовлетворяет условиям интегральной теоремы Коши (теореме 37).

При доказательстве многих результатов потребуется следующая геометрическая лемма, которую предлагаем доказать самостоятельно.

Лемма 3. *Пусть множества $M, N \subset \mathbb{C}$ таковы, что M — компакт, N — замкнуто и $M \cap N = \varnothing$. Тогда $\rho = \rho(M, N) = \inf\limits_{z \in M, w \in N} \rho(z, w) > 0$.*

Следствие 43.1 (о среднем значении аналитической функции). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in A(G)$, $z_0 \in G$ и $\rho = \rho(z_0, \partial G) := \inf\limits_{t \in \partial G} \rho(z_0, t)$.*[1] *Тогда для $r \in (0, \rho)$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi, \tag{3.9}$$

[1]Отметим, то $\rho = \rho(z_0, \partial G) = +\infty$, если $G = \mathbb{C}$, и $0 < \rho < +\infty$, если $G \neq \mathbb{C}$.

которую называют формулой среднего значения аналитической функции.

Другими словами, значение аналитической функции в центре круга равно её среднему значению на границе этого круга.

■ Заметим, что выполнены условия применимости интегральной формулы Коши, поэтому

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r)} \frac{f(t)}{t - z_0} dt,$$

где $C_{z_0}(r)$ — окружность радиуса $r \in (0, \rho)$ с центром в точке z_0. Остаётся только сделать замену $t = z_0 + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. □

Еще одним важным следствием интегральной формулы Коши является следующий результат.

Теорема 44 (Пуассона)**.** *Пусть $K_0(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ и функции f аналитична на $\overline{K_0}(r)$, то есть аналитична в некотором круге $K_0(r_1)$, $r_1 > r$. Тогда для всех $z \in K_0(r)$ имеет место представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta}. \tag{3.10}$$

■ Поскольку функция f аналитична на $\overline{K_0}(r)$, то есть аналитична в некотором круге $K_0(r_1)$, $r_1 > r$, то для любой точки $z \in K_0(r)$ имеет место интегральная формула Коши (3.7)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, \zeta}{\zeta - z}\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta}.$$

С другой стороны, симметричная точке $z \in K_0(r)$ относительно окружности $C_0(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ точка $z' := r^2/\overline{z}$ принадлежит $\mathbb{C} \setminus \overline{K_0}(r)$, поэтому в силу замечания, сделанного выше (по интегральной теореме Коши) $0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, \zeta}{\zeta - r^2/\overline{z}}\, d\theta$. Вычтем это интегральное равенство из предыдущего. Тогда, поскольку

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}\zeta}{\overline{z}\zeta - r^2} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{\zeta}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta - z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

получим в результате формулу (3.10). □

Замечание 1. Функцию $P(\zeta, z) = \dfrac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$ называют ядром Пуассона и часто записывают в другом виде. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho < r$, тогда

$$|\zeta - z|^2 = |re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}|^2 =$$

$$= |(r\cos\theta - \rho\cos\varphi) + i(r\sin\theta - \rho\sin\varphi)| = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi).$$

При выполнении условий теоремы 44 формулу (3.10) можно записать в виде

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)}\, f(re^{i\theta})\, d\theta, \text{ где } 0 < \rho < r. \qquad (3.11)$$

Замечание 2. Теорема 44, формулы, аналогичные (3.10) и (3.11), справедливы и для функции f аналитической на круге $\overline{K_{z_0}}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$.

Теорема 45 (интегральная формула Коши для системы контуров)**.** *Пусть функция f аналитична в области G и γ, γ_1, …, γ_m — система попарно непересекающихся замкнутых контуров таких что*

1) контуры γ_j, $j = 1, \dots, m$, лежат внутри контура γ;

2) внутренности контуров γ_j и γ_k, $j \ne k$, попарно не пересекаются;

3) на всех контурах γ, γ_1, …, γ_m выбрано направление обхода против часовой стрелки;

4) область D, ограниченная контурами γ, γ_1, …, γ_m, лежит в G.

Тогда для любой точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(t)}{t - z}\, dt. \qquad (3.12)$$

■ Возьмём внутри области D любую точку z и проведем окружность $C_z(r) = \{t : |t - z| = r\}$ с центром в точке z настолько малого радиуса r, чтобы $\overline{K}_z(r) = \{t : |t - z| \le r\} \subset D$. На окружности $C_z(r)$ определим обход против часовой стрелки. Тогда для функции $\dfrac{f(t)}{t - z}$ выполнены все условия интегральной теоремы Коши для системы контуров γ_1, γ_2,…,γ_m, $C_z(r)$, (теоремы 38), согласно которой

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(t)}{t - z}\, dt + \int_{C_z(r)} \frac{f(t)}{t - z}\, dt.$$

Но по формуле Коши для одного контура $\displaystyle\int_{C_z(r)} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = 2\pi i\, f(z)$. Отсюда, учитывая предыдущую формулу, получаем формулу (3.12). □

3.3 Интеграл Коши и интеграл типа Коши

Определение 69. *Пусть γ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, а функция f определена и непрерывна на γ. Тогда интеграл*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z}\, dt, \ \ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma, \tag{3.13}$$

называется интегралом типа Коши.

Определение 70. *Пусть γ — замкнутый контур в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\operatorname{int} \gamma \subset G$. Пусть $f \in A(G)$. Тогда интеграл*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z}\, dt, \ \ z \in \operatorname{int} \gamma, \tag{3.14}$$

называется интегралом Коши.

Отличие интеграла типа Коши от интеграла Коши состоит в том, что в интеграле Коши γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, расположенная вместе со своей внутренностью в области аналитичности функции f, и точка z находится внутри кривой. В интеграле типа Коши кривая γ может быть не замкнута, может иметь точки самопересечения, функция f определена лишь на кривой γ, и только непрерывна на ней, а точка z может располагаться где угодно вне кривой γ. Так что интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши, но не наоборот.

Изучим свойства интеграла типа Коши.

Теорема 46 (о дифференцируемости интеграла типа Коши)**.** *Пусть γ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, а функция f определена и непрерывна на γ. Тогда интеграл типа Коши* (3.13) *является бесконечно дифференцируемой функцией в каждой области G, не содержащей точек кривой γ. При этом*

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^{k+1}} dt, \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{3.15}$$

■ 1. Однозначность функции F, представленной интегралом (3.13), очевидна. Докажем ее дифференцируемость.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Тогда существует окрестность $U_z(\delta)$, не содержащая точек кривой γ. Возьмём любое приращение h такое, что $0 < |h| < \dfrac{\delta}{2}$, и составим разностное отношение

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t-(z+h)}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi hi}\int\limits_{\gamma} f(t)\left(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}\,dt.$$

Чтобы доказать равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt,$$

оценим разность

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{hf(t)}{(t-z)^2(t-z-h)}\,dt.$$

Так как функция f непрерывна на кривой γ с параметризацией $\sigma : [\alpha,\beta] \to \gamma$, то функция $f\circ\sigma$ ограничена на $[\alpha,\beta]$. Положим

$$M = \max\{|f\circ\sigma(\tau)| :\ \tau\in[\alpha,\beta]\} = \max\{|f(t)| :\ t\in\gamma\}.$$

Пусть $\ell(\gamma)$ — длина кривой γ. Поскольку $|t-z| > \delta$, $\forall t \in \gamma$, а $|h| < \delta/2$, получаем неравенство $|t-z-h| \ge |t-z| - |h| > \delta/2$, и потому

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h\,f(t)}{(t-z)^2(t-z-h)}dt\right| \le \frac{M\,|h|}{\pi\delta^3}\,\ell(\gamma).$$

Из полученной оценки следует, что $\Delta \to 0$ при $h \to 0$, то есть существует

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt,$$

что совпадает с формулой (3.15) при $k=1$.

2. Далее доказательство проведём методом математической индукции. При $k=1$ теорема доказана. Предположим, что формула (3.15) верна для некоторого $k>1$, и докажем её справедливость для $k+1$. При тех же предположениях,

что и в части 1, получаем:

$$F^{(k+1)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F^{(k)}(z+h) - F^{(k)}(z)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k!}{2\pi i h} \left(\int\limits_\gamma \frac{f(t)}{(t-z-h)^{k+1}}\, dt - \int\limits_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k!}{2\pi i h} \int\limits_\gamma f(t) \frac{(t-z)^{k+1} - (t-z-h)^{k+1}}{(t-z)^{k+1}(t-z-h)^{k+1}}\, dt.$$

Чтобы преобразовать числитель дроби, воспользуемся известной формулой

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}),$$

из которой получим, что

$$(t-z)^{k+1} - (t-z-h)^{k+1} = h\big((t-z)^k + (t-z)^{k-1}(t-z-h) + \ldots + (t-z-h)^k\big).$$

Продолжая вычисление получаем: $F^{(k+1)}(z) =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(t) \frac{\big((t-z)^k + (t-z)^{k-1}(t-z-h) + \ldots + (t-z-h)^k\big)}{(t-z)^{k+1}(t-z-h)^{k+1}}\, dt =$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(t) \frac{(k+1)(t-z)^k}{(t-z)^{2k+2}}\, dt = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{k+2}}\, dt.$$

Возможность перехода к пределу под знаком интеграла обосновывается так же, как и при доказательстве первой части. □

Следствие 46.1. *Аналитическая в области $G \subset \mathbb{C}$ функция f бесконечно дифференцируема в G, при этом в любой точке $z \in G$ имеет место формула*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt, \;\; k = 1, 2, \ldots, \tag{3.16}$$

в которой γ — любой замкнутый контур с положительной ориентацией, лежащий в G вместе со своей внутренностью, а $z \in \operatorname{int} \gamma$.

■ В условиях следствия имеет место интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt.$$

Поскольку интеграл Коши — частный случай интеграла типа Коши, то результат сразу следует из теоремы 46. Еще отметим, что в качестве контура γ можно взять окружность $\{t : |t-z| = \delta\}$, если $\overline{K_z}(\delta) = \{t : |t-z| \le \delta\} \subset G$. □

Таким образом, установлен следующий важный результат: из существования у функции f в некоторой области G производной первого порядка вытекает существование в этой области производных любого порядка и, следовательно, непрерывность всех производных, в том числе и производной первого порядка. Отметим еще, что из бесконечной дифференцируемости аналитической функции в области G и формул (1.8) вытекает бесконечная дифференцируемость в области G её вещественной и мнимой частей $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Следствие 46.2. *Если функция f аналитична в области G, то в любой точке $z \in G$ имеют место неравенства*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k! M_f(r)}{r^k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

в которых $r > 0$ — радиус круга $\{t \in \mathbb{C} : |t - z| \leq r\} \subset G$, $M_f(r) = \max\limits_{|t-z|=r} |f(t)|$.

■ Неравенство следует из оценки интеграла в формуле (3.16). □

Важными следствиями теоремы 46 являются следующие результаты.

Теорема 47 (Морера). *Если функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{C}$ и для любой замкнутой спрямляемой кривой γ в G $\int\limits_{\gamma} f(t)\, dt = 0$, тогда функция f аналитична в G.*

■ Достаточно доказать дифференцируемость f в любой точке $z \in G$. В силу условия теоремы интеграл от f не зависит от кривой интегрирования в G, и по теореме 40 функция $F(z) = \int\limits_{a}^{z} f(t)\, dt$, $a \in G$, является первообразной для f в G, то есть F аналитично в G и $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in G$. Но производная аналитической функции — аналитическая функция, то есть f аналитична в G. □

Замечание. Теорема Морера является неполным обращением интегральной теоремы Коши или, другими словами, достаточным условием аналитичности функции в области.

Условия теоремы Морера можно ослабить, а именно справедливо следующее утверждение.

Теорема 48 (Морера). *Если функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ такого, что $\overline{\Delta} \subset G$, равен нулю, тогда функция f аналитична в G.*

Теорема 49 (Вейерштрасса для рядов). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функции f_k, $k \in \mathbb{N}$, аналитичны в G. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится внутри G к функции $f(z)$, то*

1) $f(z)$ — аналитическая функция в области G;

2) для любого $s \in \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z)$ равномерно сходится внутри области G к функции $f^{(s)}(z)$ (иначе говоря, исходный ряд можно почленно дифференцировать в G любое число раз).

■ 1). Для любой точки z из G найдется число $r > 0$ такое, что

$$\overline{K}_z(r) = \{t : |t - z| \le r\} \subset G.$$

По условию функции f_k, $k \in \mathbb{N}$, аналитичны в области G, а потому непрерывны, на $\overline{K}_z(r)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ на $\overline{K}_z(r)$. Следовательно, функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{K}_z(r)$.

Пусть γ — замкнутая спрямляемая кривая в $K_z(r) = \{t : |t-z| < r\}$. Поскольку непрерывные функции интегрируемы по спрямляемой кривой, существуют интегралы $\int\limits_{\gamma} f_k(z)\,dz$, $k \in \mathbb{N}$, $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, а равномерно сходящийся на γ ряд можно почленно интегрировать, поэтому $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_k(z)\,dz$. По интегральной теореме Коши $\int\limits_{\gamma} f_k(z)\,dz = 0$, $k \in \mathbb{N}$, а тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$. Таким образом, функция $f(z)$ в открытом круге $K_z(r)$ удовлетворяет условиям теоремы Морера, следовательно, $f(z)$ аналитична в $K_z(r)$, а в силу произвольности выбора точки z из G, $f(z)$ аналитична в G.

2). Пусть z — любая точка из G, $\overline{K}_z(r) \subset G$, $C_z(r) = \{t : |t - z| = r\}$. Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию $\varphi_s(z) = \dfrac{s!}{2\pi i(t - z)^{s+1}}$. Тогда

$$\sup_{t \in C_z(r)} |\varphi_s(t)| = \sup_{t \in C_z(r)} \frac{s!}{2\pi|t - z|^{s+1}} = \frac{s!}{2\pi r^{s+1}}.$$

Так как контур $C_z(r)$ — компактное множество в $\mathbb{C}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ по условию равномерно сходится на любом компакте, значит и на $C_z(r)$, то в силу критерия Коши по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для любого $n \ge n_0$, для любого $p \in \mathbb{N}$, имеет место неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(t)\right| < \dfrac{2\pi\, r^{s+1}}{s!} \cdot \varepsilon$, $\forall t \in C_z(r)$.

Но тогда для тех же n и p и $\forall t \in C_z(r)$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{s!}{2\pi i}\frac{f_k(t)}{(t-z)^{s+1}}\right| = \frac{s!}{2\pi}\cdot\frac{1}{|t-z|^{s+1}}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(t)\right| < \frac{s!}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^{s+1}}\cdot\frac{2\pi\, r^{s+1}}{s!}\cdot\varepsilon = \varepsilon,$$

что означает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{s!}{2\pi i}\frac{f_k(z)}{(t-z)^{s+1}}$ на $C_z(r)$. Воспользуемся теоремой 46 и тем, что равномерно сходящийся на $C_z(r)$ ряд можно почленно интегрировать, получим

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_z(r)} \frac{f(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt, \quad f_k^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_z(r)} \frac{f_k(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt,\ s,k\in\mathbb{N},$$

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_z(r)} \frac{f(t)}{(t-z)^{s+1}}dt = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_z(r)} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\frac{dt}{(t-z)^{s+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_z(r)} \frac{f_k(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z).$$

Таким образом, для любого $s\in\mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z)$ поточечно сходится к $f^{(s)}(z)$, $\forall z\in G$.

Докажем теперь, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z)$ сходится к $f^{(s)}(z)$, $s\in\mathbb{N}$ равномерно внутри G.

Пусть K — компакт, содержащийся в G. Для каждого $z_0\in K$ построим круги $\overline{K}_{z_0}(r) = \{t : |t-z_0| \le r\} \subset G$, $\overline{K}'_{z_0}(r) = \{t : |t-z_0| \le r/2\}$ и пусть $C_{z_0}(r) = \{t : |t-z_0| = r\}$. Так как $\overline{K}_{z_0}(r)$ компакт, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ равномерно сходится на $\overline{K}_{z_0}(r)$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдётся номер n_0 такой, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(t)\right| < \varepsilon,\ \forall n\ge n_0,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall t\in\overline{K}_{z_0}(r). \tag{3.18}$$

Пусть n, p такие, как указано в (3.18), $z\in\overline{K}'_{z_0}(r)$, а s — фиксированное число из $\mathbb{N}$. Тогда $|t-z|\ge r/2$, $\forall\, t\in C_{z_0}(r)$, $\forall\, z\in\overline{K}'_{z_0}(r)$ и потому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k^{(s)}(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_{z_0}(r)}\frac{f_k(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt\right| =$$

$$= \frac{s!}{2\pi}\left| \int\limits_{C_{z_0}(r)} \frac{1}{(t-z)^{s+1}} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(t) \right) dt \right| \le \frac{s!}{2\pi} \cdot \frac{2^{s+1}\varepsilon}{r^{s+1}} 2\pi r = \frac{2^{s+1}s!}{r^s} \cdot \varepsilon.$$

Из полученной оценки, в силу критерия Коши, следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z)$ на компакте $\overline{K}'_{z_0}(r)$.

Проведем такое построение для любой точки $z \in K$ и из открытого покрытия K кругами $K'_z(r)$ выделим конечное подпокрытие, пусть это круги $K'_{z_j}(r_j)$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\ell} \overline{K}'_{z_j}(r_j)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)}(z)$ равномерно сходится на компакте $\bigcup\limits_{j=1}^{\ell} \overline{K}'_{z_j}(r_j)$ к функции $f^{(s)}(z)$, а, значит, и на компакте K. □

Из теоремы Вейерштрасса и теоремы о равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости получаем уже известный нам результат (см. теорему 28 и ее следствия).

Следствие 49.1. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *сходится в круге* $K_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$, $0 < r \le +\infty$, *то:*

1) его сумма $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *является аналитической в этом круге функцией;*

2) $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ *для любого* $k = 0, 1, \ldots;$

3) ряд можно почленно дифференцировать и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=s}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-s!)}(z-z_0)^{k-s}.$$

■ Члены степенного ряда $c_k(z-z_0)^k$ аналитичны в круге сходимости ряда, а по теореме 27 степенной ряд равномерно сходится на каждом компактном множестве, содержащемся в круге сходимости. Следовательно, к степенным рядам применима теорема 49. □

Следствие 49.2 (неравенство Коши)**.** *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *сходится в круге* $K_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$, $0 < r \le +\infty$, *к сумме* $f(z)$, *то*

$$|c_k| \le \frac{M_f(\rho)}{\rho^k},\ k = 0, 1, \ldots,\ 0 < \rho < r,\ \text{где } M_f(\rho) = \max_{|t-z_0|=\rho} |f(t)|.$$

■ Оценка следует из представления

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots . \ \square$$

Как и в случае вещественной переменной, результат, справедливый для ряда можно перенести на последовательность, и наоборот.

Теорема 50 (Вейерштрасса для последовательностей)**.** *Пусть G — произвольная область в $\mathbb{C}$, функции f_k, $k \in \mathbb{N}$, аналитичны в G. Если последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится внутри G к функции $f(z)$, то:*

1) $f(z)$ — аналитическая функция в области G;

2) для любого $s \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_k^{(s)}(z)\}$ равномерно сходится внутри области G к функции $f^{(s)}(z)$.

3.4 Интеграл в смысле главного значения по Коши

Пусть Γ — гладкая простая кривая, функция $f(t)$ определена на Γ, однозначна и непрерывна на Γ. Тогда интеграл типа Коши (см. определение 69)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt,\ z \notin \Gamma, \tag{3.19}$$

как функция от z, всюду вне кривой Γ является аналитической функцией (теорема 46).

Функция $f(t)$ называется плотностью, а функция $(t-z)^{-1}$ — ядром Коши. Когда $z \in \Gamma$, интеграл в правой части формулы (3.19) в обычном понимании не существует, но при некоторых дополнительных ограничениях относительно плотности $f(t)$ ему можно придать определенный смысл.

Предположим, что точка t_0 лежит на Γ — замкнутой гладкой простой кривой. Пусть γ — окружность $|w-t_0| = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число, не превышающее стандартного радиуса δ_0 кривой Γ (см. теорему 19 и сноску к ней). Часть кривой Γ, лежащую вне круга $|w-t_0| = \varepsilon$, обозначим через Γ_ε. Рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t)}{t-t_0}\,dt, \tag{3.20}$$

который имеет смысл в обычном понимании.

Определение 71. *Если существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(t_0) = I(t_0) \in \mathbb{C}$, то этот предел называют интегралом в смысле главного значения по Коши или сингулярным интегралом Коши и обозначают обычным символом интеграла*

$$I(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - t_0}\, dt, \tag{3.21}$$

Замечание. Иногда в математической литературе символ интеграла в смысле главного значения по Коши снабжается либо двумя латинскими буквами v.p. (valeur principale — главное значение), которые ставят перед символом интеграла, либо звездочкой сверху или снизу от этого символа.

Теорема 51. *Пусть* Γ *— гладкий замкнутый контур в* $\mathbb{C}$ *с положительной ориентацией, функция* f *непрерывна на* Γ*. Для существования интеграла* (3.21) *в смысле главного значения по Коши при любом* $t_0 \in \Gamma$ *достаточно, чтобы функция* $f(t)$ *удовлетворяла на* Γ *условию Гёльдера, то есть*

$$\exists L > 0\ \exists \alpha \in (0, 1] : |f(t_1) - f(t_2)| \le L|t_1 - t_2|^{\alpha},\ \forall\, t_1, t_2 \in \Gamma.$$

■ Пусть $\delta_0 > 0$ — стандартный радиус кривой γ. Пусть $t_0 \in \Gamma$ и $\gamma^{(1)}(\varepsilon)$ — часть окружности $\gamma: \ |w - t_0| = \varepsilon \le \delta_0$, не лежащая в конечной области $G = \operatorname{int}\Gamma$. Пользуясь интегральной формулой Коши (3.7), интеграл (3.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t)}{t - t_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0) + f(t_0)}{t - t_0}\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t_0)}{t - t_0}\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma^{(1)}(\varepsilon)} \frac{f(t_0)}{t - t_0}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^{(1)}(\varepsilon)} \frac{f(t_0)}{t - t_0}\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt + f(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^{(1)}(\varepsilon)} \frac{f(t_0)}{t - t_0}\, dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Из условия Гельдера для функции f на Γ следует, Что несобственный интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt$ сходится абсолютно и

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\, dt. \tag{3.23}$$

Но $\gamma^{(1)}(\varepsilon)$ пересекает Γ в двух точках, которые при $\varepsilon \to +0$ стремятся к t_0, в длина $\gamma^{(1)}(\varepsilon)$ стремится к длине полуокружности, то есть к π, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(1)}(\varepsilon)}\frac{dt}{t-t_0}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^{(1)}(\varepsilon)}d\varphi=\frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.22) при $\varepsilon\to+0$ и учитывая (3.23) и (3.24), получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon(t_0)=\frac{f(t_0)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt,\ \text{то есть}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{f(t_0)}{2}.\ \square \tag{3.25}$$

3.5 Формулы Сохоцкого–Племеля

Пусть как и выше плотность $f(t)$ интеграла типа Коши удовлетворяет условию Гёльдера, Γ — замкнутая гладкая простая кривая с положительной ориентацией. Обозначим через t_0 произвольную фиксированную точку на Γ и перепишем интеграл типа Коши следующим образом:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t_0)}{t-z}\,dt,\ z\notin\Gamma. \tag{3.26}$$

В силу интегральной формулы Коши (3.7) получим, что

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}\,dt+f(t_0),\ z\in G=\operatorname{int}\Gamma, \tag{3.27}$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}\,dt,\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}=\operatorname{ext}\Gamma. \tag{3.28}$$

Пусть

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}\,dt,\ z\notin\Gamma. \tag{3.29}$$

Можно доказать (см. [2, с. 122–124]), что при $z\to t_0$ изнутри или извне области G так, чтобы нетупой угол между отрезком $[t_0,z]$ и касательной к Γ в точке t_0 был больше некоторого положительного числа θ (одного и того же для всех t_0), существует равномерно относительно положения точки t_0 на Γ предел $\lim_{z\to t_0}\varphi(z)=\varphi(t_0)$.

Следовательно, существуют предельные значения выражений (3.27) и (3.28), которые на основании (3.25) могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
F^+(t_0) = & \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in \operatorname{int}\Gamma}} F(z) = \\
& = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt + f(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-t_0}\,dt + \frac{1}{2}f(t_0),
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
F^-(t_0) = & \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in \operatorname{ext}\Gamma}} F(z) = \\
& = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-t_0}\,dt - \frac{1}{2}f(t_0).
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Равенства (3.30) и (3.31) называются формулами Сохоцкого–Племеля. Из (3.30) и (3.31) непосредственно следует справедливость равенств:

$$
F^+(t_0) - F^-(t_0) = f(t_0), \quad F^+(t_0) + F^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-t_0}\,dt.
$$

Глава 4

Ряды Тейлора и Лорана

4.1 Разложение аналитической функции в ряд Тейлора

Если функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и в точке z_0 имеет производные всех порядков, то можно построить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^n$, который (см. определение 62) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0. Из теоремы 28 и ее следствий вытекает, что если радиус сходимости ряда Тейлора больше нуля, то он является рядом Тейлора для своей суммы. Но при каких условиях на функцию $f(z)$ можно для нее построить ряд Тейлора с радиусом сходимости больше нуля, чем определяется радиус сходимости ряда?

Теорема 52. *Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $\rho = \rho(z_0, \partial G)$. Тогда в круге $K_{z_0}(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$ функция f разлагается в ряд Тейлора, то есть имеет место представление*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,\ z \in K_{z_0}(\rho). \tag{4.1}$$

■ Прежде всего отметим, что $\rho > 0$ (см. лемму 3). Зафиксируем точку $z \in K_{z_0}(\rho)$ и число $r > 0$ так, чтобы $|z - z_0| < r < \rho$. Пусть $C_{z_0}(r) = \{t : |t - z_0| = r\}$. Так как окружность $C_{z_0}(r)$ вместе со своей внутренностью лежит в области аналитичности функции f, а точка z находится внутри этой окружности, то для односвязной области $K_{z_0}(r)$ и замкнутого контура $C_{z_0}(r)$ справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r)} \frac{f(t)}{t - z} dt. \tag{4.2}$$

Преобразуем ядро $\dfrac{1}{t-z}$ интеграла Коши при $t \in C_{z_0}(r)$:

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(t - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{t - z_0}\right)}.$$

Так как $|z - z_0| < r$, $|t - z_0| = r$, то $\left|\dfrac{z - z_0}{t - z_0}\right| = q < 1$, поэтому $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{t - z_0}}$ можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно,

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(t - z_0)^{k+1}}. \tag{4.3}$$

Заметим, что ряд в правой части (4.3) сходится равномерно на $C_{z_0}(r)$, поскольку ряд из его модулей мажорируется сходящимся числовым рядом $\dfrac{1}{r}\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

Умножим обе части равенства (4.3) на $f(t)$, при этом сохранится равномерная сходимость ряда на $C_{z_0}(r)$, поскольку функция $f(z)$ непрерывна, а значит, ограничена на $C_{z_0}(r)$. Подставим результат умножения в (4.2), проинтегрируем почленно и, используя формулу (3.16), получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{z_0}(r)} f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(t - z_0)^{k+1}}\,dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_{z_0}(r)}\frac{f(t)}{(t - z_0)^{k+1}}\,dt\right)(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В силу произвольности $z \in \operatorname{int} K_{z_0}(\rho)$ функция f представима в круге $K_{z_0}(\rho)$ сходящимся степенным рядом, который является её рядом Тейлора. $\square$

Замечание. В силу следствия 28.1 теоремы 28 разложение функции f в ряд Тейлора единственно.

Теорема 53 (Лиувилля)**.** *Целая функция f, ограниченная в $\mathbb{C}$, является константой.*

$\blacksquare$ Если целая функция f ограничена в $\mathbb{C}$, то существует число $M > 0$ такое, что $|f(z)| \le M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. В точке $z = 0$ разложим функцию f в ряд Тейлора $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Так как функция f аналитична в $\mathbb{C}$, радиус сходимости этого ряда равен $+\infty$. Оценим коэффициенты c_k, используя неравенства Коши (см. следствие 49.2):

$$|c_k| \le \frac{M_f(r)}{r^k} \le \frac{M}{r^k},\ k = 0, 1, 2, \ldots\,,\ \forall\, r > 0.$$

Откуда при $r \to +\infty$ получим, что $c_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$. Значит, $f(z) = c_0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Теорема Лиувилля утверждает, что целая функция, отличная от постоянной, не может быть ограниченной в $\mathbb{C}$. В частности, в $\mathbb{C}$ являются неограниченными тригонометрические функции $\cos z$ и $\sin z$. Но ещё более неожиданным следствием теоремы Лиувилля является основная теорема алгебры.

Теорема 54. *Любой многочлен $P_n(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$, по крайней мере, один корень.*

■ Предположим, что теорема неверна. Тогда найдётся многочлен $P_n(z)$ степени $n \geq 1$, не имеющий корней в $\mathbb{C}$, то есть $P_n(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$. Эта функция определена на всей комплексной плоскости и является аналитической на ней, как частное аналитических функций, то есть является целой. Покажем, что она ограничена.

Так как $|P_n(z)| \xrightarrow[z\to\infty]{} +\infty$, то найдётся такое $r_0 > 0$, что $|P_n(z)| > 1$ при $|z| > r_0$. Следовательно, $|f(z)| < 1$ при $|z| > r_0$. А в круге $|z| \leq r_0$ функция f непрерывна, поэтому ограничена. Следовательно, функция f ограничена в $\mathbb{C}$. В таком случае по теореме Лиувилля функция f является постоянной. Но тогда постоянен и многочлен $P_n(z)$, что, очевидно, не верно. □

4.2 Теоремы единственности и принцип максимума

Еще одним важным следствием теоремы о разложении аналитической функции в ряд Тейлора являются теоремы единственности.

Теорема 55 (теорема единственности)**.** *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in A(G)$ и $f(z) = 0$ для любого z из некоторого множества $M \subseteq G$, имеющего предельную точку в G. Тогда $f(z) \equiv 0$ в G.*

■ п.1. Пусть a — предельная точка множества M, и $a \in G$. Тогда по критерию предельной точки существует последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точек из M такая, что $z_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. По условию теоремы $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $r_0 = \rho(a, \partial G)$, тогда $r_0 > 0$ и по теореме 52 функцию f можно разложить в круге $K_a(r_0) = \{z : |z - a| < r_0\}$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \text{ где } c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Так как $z_n \to a$ при $n \to +\infty$, то, начиная с некоторого номера n_0, все точки z_n будут лежать в круге $K_a(r_0)$, а потому

$$f(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z_n - a)^k = 0, n \geq n_0. \tag{4.5}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $n \to +\infty$ (ряд равномерно сходится внутри $K_a(r_0)$) и получим, что $c_0 = 0$. Следовательно,

$$f(z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - a)^k = 0, \ n \geq n_0.$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - a)^k = (z_n - a) \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - a)^{k-1} = 0$, а так как $z_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (z_n - a)^k = 0.$$

Учитывая равномерную сходимость последнего ряда внутри $K_a(r_0)$, снова перейдем в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$ и получим $c_1 = 0$. Продолжая описанный процесс, найдём, что $c_k = 0$ для любого натурального k, то есть $f(z) = 0$ в любой точке z из круга $K_a(r_0)$.

п.2. Пусть b — любая точка из области G, не лежащая в $K_a(r_0)$. Соединим её в G с точкой a спрямляемой кривой (например, ломаной) γ, на которой зададим направление от a к b. Тогда открытый круг $K_a(r_0)$ лежит в G, а окружность $C_a(r_0) = \{t : |t-a| = r_0\}$ пересекает кривую γ хотя бы в одной точке. Обозначим через a_1 ту из них, которая лежит первой при движении по кривой γ от a к b. Пусть $d = \rho(\gamma, \partial G)$, тогда $0 < d \leq r_0$. Рассмотрим круг $K_{a_1}(r_1)$, где $r_1 = \rho(a_1, \partial G) \geq d$. Очевидно, что $K_{a_1}(r_1) \bigcap K_a(r_0) \neq \varnothing$, и по предыдущему функция $f(z) = 0$ в этом пересечении, которое имеет точку a_1 своей предельной точкой. Но тогда по п.1 $f(z) = 0$ в $K_{a_1}(r_1)$.

Пусть γ_1 та часть кривой γ, которая соединяет точки a_1 и b, а $\widetilde{\gamma_1}$ та часть кривой γ, которая соединяет точки a и a_1. Очевидно, что длина дуги $\widetilde{\gamma_1}$ не меньше $r_0 \geq d$. Если $\gamma_1 \subset K_{a_1}(r_1)$, то $f(z) = 0$ для всех $z \in K_{a_1}(r_1)$, а, значит, и $f(b) = 0$. Если это не так, повторим процедуру, рассматривая кривую γ_1 с начальной точкой a_1. Поскольку радиусы всех возникающих кругов при таком построении не меньше d, за конечное число шагов построим круг, содержащий часть кривой γ с конечной точкой b, и получим, что $f(b) = 0$. Поскольку точка b выбиралась произвольно в G, теорема доказана. $\square$

Следствие 55.1. *Если две аналитические в области G функции принимают равные значения на некотором подмножестве M в G, имеющем в G предельную точку, то они равны в G.*

Замечание. Условие $a \in G$ в доказанной теореме существенно. Если оно не выполняется, утверждение теоремы может не иметь места. Например, пусть $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$, $g(z) = \sin^2 \dfrac{1}{z}$. Очевидно, что функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ и в точках $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ равны нулю. Последовательность $z_n \to 0$, но функции

f и g, $n \in \mathbb{N}$, различны. Причина в том, что точка $z = 0$ не принадлежит области определения функций, а является граничной точкой их области определения.

Теорема единственности может использоваться для доказательства того, что формулы, известные на вещественной оси, сохраняются при переходе в комплексную плоскость. Рассмотрим два примера.

Пример 21. $\sin 2z = 2\sin z\cos z,\ \ z \in \mathbb{C}.$

■ Левая и правая части равенства — аналитические в $\mathbb{C}$ функции, совпадающие на вещественной оси. По следствию из теоремы единственности равенство имеет место всюду в $\mathbb{C}$. □

Пример 22. $e^{u+v} = e^u \cdot e^v,\ \ u, v \in \mathbb{C}.$

■ Пусть сначала u — любое вещественное число, $v \in \mathbb{C}$. Тогда обе части равенства, рассматриваемые как функции от v, аналитичны в $\mathbb{C}$. Для $v \in \mathbb{R}$ равенство справедливо, значит, оно справедливо для любых $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$.

Теперь возьмём любое число $v \in \mathbb{C}$ и рассмотрим обе части равенства как функции от u. Обе они аналитические в $\mathbb{C}$. По доказанному, для $u \in \mathbb{R}$ равенство справедливо, значит, оно справедливо для любых $u, v \in \mathbb{C}$. □

Теорема 55 позволяет решать и другие задачи.

Пример 23. *Существует ли целая функция f такая, что*

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4n^2},\ f\left(-\frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{(2n-1)^2},\ \ n \in \mathbb{N}\,?$$

■ Пусть такая функция f существует, тогда $f(z) = z^2$ на последовательности $\{1/2n\}$, и $f(z) = -z^2$ на последовательности $\{1/(2n-1)\}$. Функции z^2 и $-z^2$ — целые. Точка $z = 0$ является пределом, а потому и предельной точкой для обеих последовательностей. По теореме единственности $f(z) = z^2$ и $f(z) = -z^2$ для всех $z \in \mathbb{C}$, а потому $z^2 = -z^2$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, что неверно. Получили противоречие, следовательно, такой целой функции не существует. □

Следующее следствие теоремы 55 часто, ввиду его важности, также именуют теоремой.

Следствие 55.2 (вторая теорема единственности). *Пусть $f \in A(G)$ и в некоторой точке $z_0 \in G$ имеют место равенства: $f(z_0) = 0$ и $f^{(k)}(z_0) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области G.*

■ Разложим функцию f в ряд Тейлора с центром в точке z_0: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k$. В силу условий теоремы, сумма этого ряда равна нулю в его круге сходимости $K_{z_0}(\rho)$, $\rho = \rho(z_0, \partial G) > 0$. По теореме 55 $f(z) \equiv 0$ в области G. □

Следствие 55.3. *Если $f, g \in A(G)$ и в некоторой точке $z_0 \in G$ $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ для любого $k = 0, 1, \ldots$, то $f(z) \equiv g(z)$ в области G.*

Опираясь на теорему 55 и формулу среднего значения аналитической функции (3.9), докажем важный результат, аналога которому нет в теории функций вещественных переменных.

Теорема 56 (принцип максимума модуля аналитической функции). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция f аналитична в G и непрерывная в $\overline{G}$. Пусть $\sup\limits_{z\in\overline{G}}|f(z)| = M$. Если $\exists\, a \in G : |f(a)| = M$, то $f(z) \equiv const$ в G (то есть для функции, аналитической в области G, непрерывной в $\overline{G}$ и отличной от тождественной константы в G, точная верхняя граница значений $|f(z)|$ достигается на границе области G).*

■ Если $M = 0$, то $f(z) \equiv 0$ в $\overline{G}$. Если $M = +\infty$, то неравенство $|f(z)| < +\infty$ справедливо в любой точке z из G и нет в G точки, в которой $|f(z)| = +\infty$.

Пусть $0 < M < +\infty$. Предположим, что существует точка $a \in G$ такая, что $|f(a)| = M$. Покажем, что в таком случае $|f(z)| \equiv M$ в G.

Сначала покажем, что $|f(z)| = M$ на любой окружности $C_a(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\} \subset G$. Если это не так, то на окружности $C_a(r)$ найдётся точка z_0 такая, что $|f(z_0)| < M$. Пусть $2\varepsilon = M - |f(z_0)|$. Тогда, в силу непрерывности функции $|f(z)|$ на окружности $C_a(r)$, найдётся дуга окружности $(\alpha,\, \beta)$ (α, β — координаты концов дуги окружности в радианах в полярной системе координат), во всех точках t которой $|f(t)| < M - \varepsilon$. Используя формулу среднего значения (3.9) и свойства интегралов по кривой в $\mathbb{C}$, оценим значение $|f(a)|$:

$$M = |f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{[0,2\pi]} f(a+re^{i\varphi})d\varphi\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{(\alpha,\beta)} f(a+re^{i\varphi})d\varphi + \int_{[0\,2\pi]\setminus(\alpha,\beta)} f(a+re^{i\varphi})d\varphi\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left((M-\varepsilon)(\beta-\alpha) + M(2\pi - (\beta-\alpha))\right) = M\left(1 - \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\,\varepsilon\right) < M.$$

Возникло противоречие: $M = |f(a)| < M$, Следовательно, если $|f(a)| = M$ во внутренней точке области G, то $|f(z)| = M$ на любой окружности $C_a(r)$, лежащей в G, а потому и в круге

$$K_a(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\},\ \rho = \rho(a, \partial G) > 0.$$

Покажем, наконец, что и сама функция f постоянна в круге $K_a(\rho)$. Для этого рассмотрим функцию

$$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y),\ \text{где}\ u(x,y) = \mathcal{R}e\, f(z),\ v(x,y) = \mathcal{I}m\, f(z).$$

Очевидно, что $|f(z)|^2 \equiv M^2$ в $K_a(\rho)$. Вычисляя частные производные функции $|f(z)|^2$ находим, что в круге $K_a(\rho)$

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему, пользуясь условиями Коши-Римана, чтобы исключить из системы частные производные функции v:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы линейных уравнений равен

$$u^2(x,y) + v^2(x,y) = M^2 > 0,$$

система имеет единственное решение $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, поэтому $u(x,y) \equiv const$ в круге $K_a(\rho)$. Аналогично, исключая из системы частные производные функции u, получим, что $v(x,y) \equiv const$ в круге $K_a(\rho)$. Значит $f(z) \equiv const$ в круге $K_a(\rho)$. По следствию 55.1 теоремы единственности $f(z) \equiv const$ в G. □

Следствие 56.1 (принцип минимума модуля аналитической функции). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция f аналитична в G, непрерывна на $\overline{G}$, и не обращается в нуль в $\overline{G}$. Если существует точка $a \in G$ такая, что $|f(a)| = \inf_{z\in\overline{G}} |f(z)|$, то $f(z) \equiv const$ в G (то есть для функции, аналитической в области G, непрерывной в $\overline{G}$, отличной от тождественной константы в G и не имеющей нулей в G, точная нижняя граница значений $|f(z)|$ достигается на границе области).*

■ Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно применить к функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ принцип максимума модуля. □

4.3 Нули аналитических функций

Определение 72. *Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$. Точка a называется нулём функции f кратности k (или, часто говорят, порядка k), если*

$$f(a) = 0,\ f'(a) = 0,\ \ldots\ ,\ f^{(k-1)}(a) = 0,\ f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Нуль первого порядка (кратности 1) называют простым нулем функции.

Если нуль функции известен, можно определить его кратность. Например, для функции $f(z) = z - \sin z$ точка $z = 0$ является нулем: $f(0) = 0 - \sin 0 = 0$. Чтобы определить его кратность, находим:

$$f'(z) = 1 - \cos z,\ f'(0) = 0,\ f''(z) = \sin z,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(z) = \cos z,\ f^{(3)}(0) = 1.$$

Следовательно, точка $z = 0$ — нуль кратности 2 функции f.

Теорема 57 (о кратности нулей аналитической функции)**.** *Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$ и не равна в G тождественному нулю. Если точка a из G является нулём функции f, то нуль имеет конечную кратность и изолирован от других нулей.*

■ Если a — нуль бесконечной кратности, то $f^{(k)}(a) = 0$, для любого $k = 0, 1, \ldots$. Из теоремы 55.2 следует, что $f(z) \equiv 0$ в области G, что противоречит условию. Поэтому найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $f(a) = 0$ (по условию), $f'(a) = 0$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$. Это означает, что a — нуль кратности k функции f, а ее ряд Тейлора в круге $K_a(\rho)$, $\rho = \rho(a, \partial G) > 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \ldots = \\ &= (z-a)^k \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a) + \ldots \right) = (z-a)^k \varphi(z), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где функция $\varphi(z)$, как сумма степенного ряда, аналитическая (и непрерывная) в круге сходимости $K_a(\rho)$. Так как $\varphi(a) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$, найдётся круг $U_a(\delta)$, в котором $\varphi(z) \neq 0$, поэтому и функция f в $U_a(\delta)$ других нулей, за исключением a, не имеет. Следовательно, a — изолированный нуль функции f. □

Из теоремы 57 и формулы (4.6) немедленно следует такой результат.

Теорема 58 (о представлении аналитической функции в окрестности ее нуля)**.** *Пусть f — функция, аналитическая в области $G \subset \mathbb{C}$ и не равная тождественному нулю в G. Точка a из G является нулём функции f кратности k, тогда и только тогда, когда существует окрестность точки a, в которой имеет место представление $f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$, где функция φ аналитична в этой окрестности и $\varphi(a) \neq 0$.*

4.4 Ряд Лорана аналитической функции

В некоторых случаях приходится рассматривать степенные ряды более общего вида, чем изучавшиеся ранее ряды Тейлора, а именно ряды вида

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k,\ z_0 \in \mathbb{C},\ c_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4.7}$$

которые являются рядами по целым степеням $(z - z_0)$.

Установим характер области сходимости и свойства суммы таких рядов. С этой целью рассмотрим два ряда:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z - z_0)^k \text{ и } \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z - z_0)^k. \tag{4.8}$$

Первая сумма содержит только отрицательные степени $(z - z_0)$ и называется **главной частью** ряда (4.7), вторая сумма содержит только неотрицательные степени $(z - z_0)$ и называется **правильной частью** ряда (4.7).

Определение 73. *Говорят, что ряд* (4.7) *сходится в точке* $a \in \mathbb{C}$, *если в этой точке сходятся числовые ряды*

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(a - z_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(a - z_0)^k.$$

Правильная часть ряда (4.7) — обычный степенной ряд, сходящийся абсолютно в каждой точке круга $|z - z_0| < R$, $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$ $(0 < R \leq +\infty)$, причем равномерно на каждом компактном множестве, содержащемся в $|z - z_0| < R$ (теорема 27) и его сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, является аналитической функцией в круге $|z - z_0| < R$ (следствие теоремы 49).

Рассмотрим главную часть ряда (4.7). Сделаем в ней замену переменной, полагая $z - z_0 = \dfrac{1}{\zeta}$, и замену индекса суммирования, полагая $k = -\ell$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \frac{1}{\zeta^k} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} c_{-\ell}\zeta^\ell. \tag{4.9}$$

Ряд (4.9) — степенной ряд, он сходится в круге $|\zeta| < \dfrac{1}{r}$, где $r = \overline{\lim\limits_{\ell\to+\infty}} \sqrt[\ell]{|c_{-\ell}|}$, $\left(0 < \dfrac{1}{r} \leq +\infty\right)$ (считаем $1/r = +\infty$ при $r = 0$). Тогда он сходится абсолютно в каждой точке из этого круга и сходится равномерно на каждом компактном множестве, содержащемся в нём, а его сумма $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} c_{-\ell}\zeta^\ell$ аналитична в круге $|\zeta| < \dfrac{1}{r}$. Но тогда ряд $\varphi\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k(z - z_0)^k$ сходится абсолютно в каждой точке области $|z - z_0| > r$ и равномерно на каждом компактном множестве, содержащемся в ней, а его сумма является аналитической функцией в области $|z-z_0| > r$ (как суперпозиция аналитических функций).

Если $r < R$, рассмотрим кольцо $K_{z_0}(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$. Оба ряда (4.8) обладают перечисленными свойствами в кольце $K_{z_0}(r,R)$, следовательно, в каждой точке этого кольца ряд (4.7) сходится абсолютно и равномерно на каждом содержащемся в нём компактном множестве, а его сумма $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ является аналитической функцией в этом кольце.

Если $r = R$, то ряд (4.7) может сходиться лишь на некотором подмножестве точек окружности $|z-z_0| = R$, возможно пустом.

Если $r > R$, то пересечение круга $|z-z_0| < R$ и области $|z-z_0| > r$ пусто, и ряд (4.7) расходится в любой точке из $\mathbb{C}$.

Следующая теорема содержит утверждение, обратное только что установленному, и будет играть в дальнейшем важную роль.

Теорема 59. *Пусть* $0 < r < R \leq +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$. *Функцию* f, *аналитическую в кольце* $K_{z_0}(r,R)$, *можно разложить в этом кольце в ряд*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k,\ c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=\rho} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}\,, \forall\, \rho \in (r,R),\ k \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

Ряд в (4.10) *называется рядом Лорана функции* f *в точке* z_0.

■ Зафиксируем произвольную точку z в кольце $K_{z_0}(r,R)$ и выберем две окружности $C_{z_0}(r_1)$ и $C_{z_0}(r_2)$ с центром в точке z_0 так, чтобы $r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R$. Выберем направление обхода на обеих окружностях против часовой стрелки. Функция f будет аналитической в кольце

$$K_{z_0}(r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\} \subset K_{z_0}(r,R),$$

и по интегральной формуле Коши для системы контуров (теорема 45) получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_2)} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_1)} \frac{f(t)}{t-z}\,dt =: f_1(z) + f_2(z). \quad (4.11)$$

С первым интегралом поступим точно так же, как и при разложении функции в ряд Тейлора (см. теорему 52), и получим:

$$\begin{gathered} f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0}(r_2)} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k, \\ \text{где } c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0}(r_2)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}\,dt,\ k \geq 0. \end{gathered} \quad (4.12)$$

Отметим, что коэффициенты c_k, $k \geq 0$, не зависят от z.

Рассмотрим второй интеграл $f_2(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_{z_0}(r_1)} \dfrac{f(t)}{t-z}\, dt$. Тогда $|z - z_0| > |t - z_0|$, если $z \in K_{z_0}(r_1, r_2)$, $t \in C_{z_0}(r_1)$. Поэтому можно выполнить следующие преобразования:

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{t-z_0}{z-z_0}} =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0} \right)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Так как $\left| \dfrac{t-z_0}{z-z_0} \right| = \dfrac{r_1}{|z-z_0|} = q < 1$, $\forall\, z \in K_{z_0}(r_1, r_2)$, $\forall\, t \in C_{z_0}(r_1)$, полученный ряд сходится по признаку Вейерштрасса равномерно на окружности $C_{z_0}(r_1)$. Он будет равномерно сходиться и после умножения его на функцию $f(t)$, ограниченную на этой окружности. Поэтому можно подставить получившийся ряд вместо ядра Коши во второй интегралал из (4.11) и проинтегрировать почленно:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_1)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{-k-1}}{(z-z_0)^{k+1}},$$

$$\text{где } c_{-k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_1)} f(t)(t-z_0)^k dt,\ k \geq 0.$$

Если произвести замену индекса суммирования $k = -m - 1$, последние формулы примут вид

$$\begin{gathered} f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_1)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-z_0)^m, \\ \text{где } c_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(r_1)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt,\ m = -1, -2, \ldots \end{gathered} \tag{4.13}$$

Как и ранее, коэффициенты c_m, $m \leq -1$, не зависят от z.

Остается заметить, что в кольце $r < |t - z_0| < R$ функция $\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}$ аналитична, поэтому, по следствию из теоремы 38 при изменении радиуса окружности интегрирования в пределах кольца $K_{z_0}(r, R)$, значения интегралов, вычисляющих коэффициенты c_k, не меняется. Следовательно, в формулах (4.12) и (4.13) можно написать одну и ту же формулу вычисления коэффициентов c_k:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{k+1}} dt, \ k \in \mathbb{Z}, \ \forall \rho \in (r, R). \tag{4.14}$$

Подставляя (4.14) в (4.11) получим (4.10). $\square$

Следствие 59.1 (неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана). *Для коэффициентов c_k, $k \in \mathbb{Z}$, ряда Лорана* (4.10) *функции f в кольце $K_{z_0}(r, R)$ имеют место неравенства*

$$|c_k| \le M_f(\rho) \cdot \rho^{-k}, \ \forall \rho \in (r, R), \quad \text{где } M_f(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|.$$

■ Неравенство следует из оценки интеграла для коэффициентов c_k, $k \in \mathbb{Z}$:

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{k+1}} \, dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_f(\rho)}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho = M \cdot \rho^{-k}. \ \square$$

Замечание. Ряд Тейлора аналитической функции является частным случаем её ряда Лорана: если функция f аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то при $k < 0$ подынтегральная функция в (4.14) является аналитической в круге $|z - z_0| < R$ и по интегральной теореме Коши такие интегралы равны нулю.

Теорема 60 (единственности разложения функции в ряд Лорана). *Если аналитическая в кольце $K_{z_0}(r, R)$ функция f представлена в нём рядом вида (4.7), то этот ряд является её рядом Лорана, другими словами, представление аналитической в кольце функции в виде ряда (4.7) единственно.*

■ Пусть аналитическая в кольце $K_{z_0}(r, R)$ функция f представлена в нём в виде (4.7). Ряд в (4.7) есть сумма двух степенных рядов: один по степеням $z - z_0$, другой по степеням $\dfrac{1}{z - z_0}$. Как степенные ряды, они сходятся равномерно на любой окружности $C_{z_0}(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$, где $r < \rho < R$ (см. теорему 27). Умножим обе части равенства (4.7) на $(z - z_0)^{-(m+1)}$, $m \in \mathbb{Z}$, отчего равномерная сходимость ряда внутри кольца не нарушится, и проинтегрируем по окружности $C_{z_0}(\rho)$.

$$\int\limits_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int\limits_{C_{z_0}(\rho)} (z - z_0)^{k-m-1} \, dz. \tag{4.15}$$

Но интегралы, стоящие в правой части этого равенства, нам известны:

$$\int\limits_{C_{z_0}(\rho)} (z - z_0)^{k-m-1} dz = \begin{cases} 0, \ k \ne m, \\ 2\pi i, \ k = m. \end{cases}$$

Поэтому в правой части равенства (4.15) все интегралы, кроме одного ($k = m$) равны нулю, и равенство (4.15) принимает вид

$$\int\limits_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = 2\pi i\, c_m.$$

Отсюда следует, что ряд (4.7) есть ряд Лорана функции f. $\square$

Замечание. Из теоремы единственности разложения аналитической функции в ряд Лорана следует, что коэффициенты её разложения в ряд Лорана не зависят от того, каким способом они были получены.

Рассмотрим два примера.

Пример 24. *Функцию* $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-4z+3}$ *разложить в ряд Лорана в кольце* $1 < |z| < 3$.

■ Представим данную функцию в виде суммы простых дробей.

$$f(z) = \frac{3}{z-3} - \frac{2}{z-1}\,.$$

Первое слагаемое — функция, аналитическая в круге $|z| < 3$ и потому ее можно разложить в этом круге в ряд Тейлора по степеням z. Второе слагаемое — аналитическая функция в области $|z| > 1$ и потому ее можно разложить в этой области в ряд Тейлора по степеням $1/z$. Сумма этих рядов будет сходиться в заданном кольце. Итак,

$$\frac{3}{z-3} = -\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{3^k},\ \ |z| < 3;$$

$$-\frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\frac{2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k},\ \ |z| > 1.$$

Складывая полученные ряды, получим искомое разложение:

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-4z+3} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{3^k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{z^{k+1}},\ \ 1 < |z| < 3.\ \square$$

Пример 25. *Функцию* $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}\,e^{1/z}$ *разложить в ряд Лорана в кольце* $0 < |z| < 2$.

■ Будем рассматривать данную функцию как произведение двух функций: функции $\dfrac{1}{(z-2)^2}$, аналитической в круге $|z| < 2$, и функции $e^{1/z}$, аналитической в кольце $0 < |z| < +\infty$. Разложим каждую из них в ряд по степеням z в указанных областях, а затем полученные ряды перемножим.

Разложим сначала по степеням z в круге $|z| < 2$ функцию $\dfrac{1}{z-2}$:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k.$$

Так как степенной ряд можно дифференцировать в круге сходимости, продифференцируем обе части полученного равенства

$$-\frac{1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{z}{2}\right)^{k-1}, \ |z| < 2.$$

Поменяем знаки и изменим индекс суммирования:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{2^k}\, z^k, \quad |z| < 2.$$

Так как ряд Тейлора функции e^z сходится в $\mathbb{C}$, то, подставляя в него $\dfrac{1}{z}$ вместо z, получаем $e^{1/z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\, z^k}$, $\quad 0 < |z| < +\infty$.

Перемножим полученные ряды, заменив предварительно индекс суммирования в первом случае на s, а во втором случае на m. Тогда по теореме Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов в кольце $0 < |z| < 2$ получим, что

$$\frac{e^{1/z}}{(z-2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{s+1}{2^s}z^s \cdot \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!\, z^m} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{s+1}{2^s\, m!}z^{s-m}.$$

Теперь в получившейся двойной сумме следует привести подобные члены. Для этого зафиксируем показатель степени z, обозначив его индексом k, сложим все слагаемые, показатель степени z в которых $s - m = k$, и обозначим получившийся коэффициент символом c_k. Так как s и m независимо друг от друга пробегают значения от 0 до $+\infty$, то $k = s - m$ будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Итак, $\dfrac{e^{1/z}}{(z-2)^2} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$, $\quad 0 < |z| < 2$.

Осталось подсчитать коэффициенты c_k. Они являются суммами коэффициентов при z в степени $k = s - m$. В качестве индекса суммирования можно взять или s, или m, выразив второй индекс через выбранный индекс и k. В этом примере удобно взять в качестве индекса суммирования m, если $k \geq 0$, и s, если $k < 0$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{k+m+1}{2^{k+m}\, m!}, \text{ если } k \geq 0; \quad c_k = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{s+1}{2^s\,(s-k)!}, \text{ если } k < 0.$$

Законность всех действий вытекает из теоремы Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов и теоремы об абсолютной сходимости степенных рядов внутри области сходимости. $\square$

4.5 Изолированные особые точки однозначного характера

Определение 74. *Точка $a \in \mathbb{C}$ называется изолированной особой точкой однозначного характера (сокращённо и.о.т.о.х.) функции f, если функция f аналитична в некоторой проколотой окрестность $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$ точки a, а в самой точке a функция f либо не определена, либо определена, но не дифференцируема.*

Определение 75. *Бесконечно удаленная точка ∞ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f, если функция f аналитична в некоторой проколотой окрестность $\overset{\circ}{U}_\infty(\delta)$ бесконечно удаленной точки.*

Рассмотрим некоторые простые поясняющие примеры.

Пример 26. $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z^4-1}$.

■ По определению изолированными особыми точками однозначного характера этой функции являются нули знаменателя $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$ и точка $z = \infty$. $\square$

Пример 27. $f(z) = \operatorname{tg} \dfrac{1}{z}$.

■ В точке $z^* = 0$ и точках $z_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$ (нулях функции $\cos \dfrac{1}{z}$) функция f не определена. Каждая точка z_k являются и.о.т.о.х. функции f в $\mathbb{C}$, а точка $z^* = 0$ таковой не является, поскольку не существует проколотой окрестности, в которой она была бы аналитична. Такие точки называют неизолированными особыми точками функции. Как нетрудно проверить, в окрестности $U_\infty(r) = \big\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > r\big\}$, $r > 2/\pi$. функция $f(z)$ является аналитической. $\square$

Пример 28. $f(z) = \dfrac{\sqrt{z-1}}{z(z+2)}$.

■ Точка $z = 1$ (как и точка $z = \infty$) не является и.о.т.о.х.: в любой ее проколотой окрестности функция многозначна (функция квадратного корня имеет два значения). Такие точки называют точками ветвления функции. Точки $z = 0$, $z = -2$ — и.о.т.о.х. функции f при выборе любой ветви многозначной функции $\sqrt{z-1}$. $\square$

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Так как существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$, в которой функция f аналитична, и проколотая окрестность представляет собой кольцо (с внутренним радиусом $r = 0$), то в этой окрестности функцию f, согласно теореме 59, можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{-\infty}^{k=-1} c_k (z-a)^k}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{правильная часть}}; \ z \in \overset{\circ}{U}_a(\delta). \qquad (4.16)$$

Напомним, часть ряда, содержащая только отрицательные степени $z - a$, называется **главной частью** ряда Лорана, а часть, содержащая только неотрицательные степени $z - a$, называется **правильной частью** (или регулярной частью) ряда Лорана.

Классификация и.о.т.о.х. производится в зависимости от числа членов в главной части ряда Лорана.

Определение 76. *И.о.т.о.х. $a \in \mathbb{C}$ функции f называется*

- *устранимой особой точкой, если ее ряд Лорана в проколотой окрестности точки a не содержит отрицательных степеней $(z - a)$ (главная часть ряда Лорана отсутствует);*
- *полюсом, если ее ряд Лорана в проколотой окрестности точки a содержит конечное число отрицательных степеней $(z - a)$ (главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых); высшая степень $p \in \mathbb{N}$ у дроби $\dfrac{1}{z-a}$ в главной части ряда Лорана называется порядком полюса; полюс первого порядка называется простым;*
- *существенно особой точкой, если ее ряд Лорана в проколотой окрестности точки a содержит бесконечно много слагаемых (главная часть ряда Лорана состоит из бесконечного множества слагаемых).*

Рассмотрим примеры, поясняющие определение 76.

Пример 29. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

■ Точка $z = 0$ — и.о.т.о.х. функции f. Чтобы определить ее характер, разложим функцию f в ряд Лорана в проколотой окрестности нуля:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Главная часть у этого ряда Лорана отсутствует, следовательно, $z = 0$ — устранимая особая точка функции f. □

Пример 30. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$.

■ Точка $z = 0$ — полюс первого порядка функции f, так как

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \ \square$$

Пример 31. $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z^5}$.

■ Точка $z = 0$ — и.о.т.о.х. функции f. Разложим функцию f в ряд Лорана в окрестности нуля:

$$\frac{\ln(1+z)}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^7}{7} - \ldots\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{4z}}_{\textit{главная часть}} + \frac{1}{5} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{7} - \ldots, \ 0 < |z| < 1.$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых. Старшая степень дроби $\dfrac{1}{z}$ в главной части — четвёртая, поэтому $z = 0$ — полюс четвёртого порядка функции f. $\square$

Пример 32. $f(z) = (z^3 - z + 2)e^{1/z}$.

■ Точка $z = 0$ — и.о.т.о.х. функции f. Разложим функцию f в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < +\infty$:

$$(z^3 - z + 2)e^{1/z} = (z^3 - z + 2)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)z + \left(\frac{1}{6} - 1 + 2\right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} + 2\right)\frac{1}{z} +$$

$$+ \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + 1\right)\frac{1}{z^2} + \ldots = z^3 + z^2 - \frac{z}{2} + \frac{7}{6} + \underbrace{\frac{37}{24} \cdot \frac{1}{z} + \frac{101}{120} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots}_{\textit{главная часть}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых, следовательно, для данной функции $z = 0$ — существенно особая точка. $\square$

Приведённая классификация может быть распространена и на бесконечно удалённую точку, если она является изолированной особой точкой однозначного характера функции f. Поскольку проколотая окрестность бесконечно удалённой точки $\overset{\circ}{U}_\infty(\delta)$ является кольцом $\delta < |z| < +\infty$, то по теореме 59 функция f может быть разложена в нём в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k}_{\textit{главная часть}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k}_{\textit{правильная часть}}, \qquad (4.17)$$

особенность которого состоит в том, что его главная часть содержит только положительные степени z, а правильная — только неположительные.

Как и в случае точки из $\mathbb{C}$, в зависимости от числа слагаемых в главной части, бесконечно удаленная точка называется устранимой особой точкой (главная часть отсутствует), полюсом (главная часть состоит из конечного числа слагаемых) или существенно особой точкой (главная часть содержит бесконечно много слагаемых). Аналогично определяется и порядок полюса.

Приведем простые примеры.

1) Для функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ бесконечно удалённая точка является существенно особой точкой, так как ряд Тейлора по степеням z этих функций сходится на всей плоскости, поэтому является одновременно и рядом Лорана в бесконечно удаленной точке, а в нем бесконечное множество слагаемых с положительными степенями z.

2) Многочлен $P_n(z)$ степени n имеет в бесконечно удалённой точке полюс порядка n, так как по теореме единственности его ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора по степеням z, который содержит конечное число положительных степеней z, старшая из них n.

3) Для функции $\sin\dfrac{1}{z}$ бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой, так как имеет место разложение в ряд Лорана

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots,\ 0 < |z| < +\infty\,, \tag{4.18}$$

в котором отсутствует главная часть.

Разложение функции в ряд Лорана для определения характера и.о.т.о.х. — задача непростая, поэтому нужно иметь легко проверяемые условия, позволяющие установить, какого типа и.о.т.о.х. у данной функции. Ограничимся случаем конечных особых точек. Для бесконечно удалённой точки формулировки и доказательства те же.

Начнем с вспомогательной теоремы, имеющей и самостоятельный интерес.

Теорема 61 (о связи между нулями и полюсами аналитической функции)**.** *Пусть f — аналитическая функция в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, не равная тождественному нулю. Точка $a \in G$ является нулём функции f кратности k тогда и только тогда, когда, a является полюсом функции $\dfrac{1}{f}$ порядка k.*

■ *Необходимость.* Пусть $z = a$ — нуль функции f кратности k. Тогда (см. (4.6)) существует окрестность $U_a(\delta)$, в которой функция f представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^k\varphi(z),$$

где φ — аналитическая в этой окрестности функция и $\varphi(a) \neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $\varphi(z) \neq 0$ в $U_a(\delta)$. Тогда в этой окрестности аналитической является и функция $\dfrac{1}{\varphi}$, которую можно разложить в ней в ряд Тейлора $\dfrac{1}{\varphi(z)} = \sum\limits_{s=0}^{+\infty} c_s(z-a)^s$, причём $c_0 = \dfrac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Следовательно, в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_a\ (\delta)$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^k}\left(\sum_{s=0}^{+\infty} c_s(z-a)^s\right) = \sum_{s=0}^{+\infty} c_s(z-a)^{s-k} =$$

$$= \frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \frac{c_2}{(z-a)^{k-2}} + \ldots \;\; c_0 \neq 0.$$

Отсюда следует, что $z = a$ — полюс порядка k для функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Достаточность. Пусть a — полюс функции f порядка k. Это означает, что существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a\ (\delta)$, в которой функция f аналитическая и разлагается в ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \frac{c_{-k+2}}{(z-a)^{k-2}} + \ldots = \\ &= \frac{1}{(z-a)^k}\sum_{s=0}^{+\infty} c_{-k+s}(z-a)^s = \frac{1}{(z-a)^k} g(z), \end{aligned} \tag{4.19}$$

причем $c_{-k} \neq 0$. Но функция g аналитична в окрестности $U_a(\delta)$ как сумма степенного ряда, а так как $c_{-k} \neq 0$, то и $g(a) = c_{-k} \neq 0$. Тогда существует окрестность $U_a(\delta_1)$ $(\delta_1 \leq \delta)$, в которой $\dfrac{1}{g(z)}$ — аналитическая функция и её можно разложить в этой окрестности в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{s=0}^{+\infty} d_s(z-a)^s, \quad d_0 = \frac{1}{g(a)} \neq 0.$$

Следовательно, в окрестности $U_a(\delta_1)$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \frac{1}{g(z)}, \quad \frac{1}{g(a)} \neq 0\,.$$

Последнее означает, что функция $\dfrac{1}{f}$ имеет в точке a нуль кратности k. $\square$

Следствие 61.1. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Точка a является полюсом функции f порядка k тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_a\ (\delta)$ имеет место представление $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в $U_a(\delta)$ и $\varphi(a) \neq 0$.*

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Пусть $f(z) = \dfrac{(z-1)^2}{z^2+1}$. Функция f аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z^2+1}{(z-1)^2}$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Для функции f точка $z = 1$ — нуль кратности 2, значит, для функции g эта точка — полюс второго порядка. Далее, для функции g точки $z = \pm\, i$ — простые нули, значит, для функции f эти точки — простые полюса.

2) Пусть $f(z) = \dfrac{z+1}{z - \sin z}$. Функция f аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим функцию $g(z) = z - \sin z$. Так как функции $g(z)$, $g'(z) = 1 - \cos z$, $g''(z) = \sin z$ равны нулю в точке $z = 0$, а $g^{(3)}(z) = \cos z \neq 0$ в точке $z = 0$, точка $z = 0$ — нуль функции $g(z)$ третьего порядка. Следовательно, для функции $1/g(z)$ точка $z = 0$ — полюс третьего порядка. А так как функция $z + 1$ аналитична в точке $z = 0$ и отлична в ней от нуля, то $z = 0$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$.

Теперь нетрудно сформулировать и доказать критерии устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки.

Теорема 62 (критерий устранимой особой точки)**.** *Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) a — устранимая особая точка функции f;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

3) функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

■ 1) $\to$ 2). Пусть $z = a$ — устранимая особая точка функции f. Тогда найдется такое число $R > 0$, что её ряд Лорана в этой точке имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k\,,\ 0 < |z-a| < R.$$

Степенной ряд, стоящий справа, сходится в круге $|z - a| < R$ и потому его сумма $S(z)$ аналитична и непрерывна в этом круге, а, значит, непрерывна и в точке $z = a$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} S(z)$.

2) $\to$ 3). Импликация очевидна, поскольку функция, имеющая конечный предел в точке, локально ограничена.

3) $\to$ 1). Пусть $z = a$ — и.о.т.о.х. функции f, которая ограничена в некоторой проколотой δ-окрестности точки a, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|f(z)| \le M$, $\forall\, z \in \overset{\circ}{U}_a\ (\delta)$. В кольце $\overset{\circ}{U}_a\ (\delta)$ функция f аналитична и потому разлагается в окрестности точки a в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k,\ 0 < |z-a| < \delta.$$

В силу неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана (см. следствие 59.1) для любого $\rho \in (0, \delta)$ коэффициенты c_k с отрицательными индексами k имеют оценки $|c_k| \leq M \cdot \rho^{-k}$, $\rho \in (0, \delta)$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $\rho \to 0$, получаем, что $0 \leq |c_k| \leq \lim_{\rho \to 0} M \cdot \rho^{-k} = 0$. Следовательно, $c_k = 0$ для всех $k = -1, -2, \dots$, и ряд Лорана функции f не содержит отрицательных степеней $z - a$, Поэтому $z = a$ — устранимая особая точка функции f. $\square$

Замечание. Если $a \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции функции f, то определив (или переопределив) функцию f в точке a, полагая $f(a) = c_0$, получим, что равенство $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k$ будет иметь место всюду в круге сходимости $|z - a| < R$. Как сумма степенного ряда, функция f будет аналитической всюду в круге сходимости, в том числе и в точке $z = a$. Тем самым особенность будет устранена. Этим оправдано название — устранимая особая точка.

Теорема 63 (критерий полюса)**.** *Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Для того чтобы точка $z = a$ была полюсом функции f, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.*

■ *Необходимость.* Если $z = a \in \mathbb{C}$ — полюс k-го порядка функции f, то в силу следствия 61.1 в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$ имеет место представление $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в $U_a(\delta)$ и $\varphi(a) \neq 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $z \to a$, получаем, что $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Достаточность. Пусть $z = a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f и $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$. Тогда существует окрестность $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$ точки a, в которой функция f не обращается в нуль и является аналитической. Рассмотрим в $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$ функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Эта функция, как частное аналитических функций с отличным от нуля знаменателем, является аналитической в $\overset{\circ}{U}_a(\delta)$. Следовательно, точка a для неё — и.о.т.о.х, тогда по теореме 62 точка a — устранимая особая точка функции g. Определим функцию g в точке a, полагая $g(a) = 0$. Тогда по замечанию, сделанному к той же теореме, функция g становится аналитической в $U_a(\delta)$, а по теореме о связи между нулями и полюсами (теорема 61), если a — нуль функции g, то a — полюс функции f. $\square$

Методом исключения легко доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 64 (критерий существенно особой точки)**.** *Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Для того чтобы точка $z = a$ была существенно особой* *точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы функция f не имела предела при $z \to a$.*

Повторяя почти дословно доказательства предыдущих теорем, можно доказать соответствующие критерии и для бесконечно удаленной точки.

Теорема 65. *Пусть ∞ — и.о.т.о.х. функции f.*

(1) ∞ устранимая точка функции f тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$;

(2) ∞ полюс функции f тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;

(3) ∞ полюс порядка k функции f тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности точки ∞ имеет место представление $f(z) = z^k\,\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в рассматриваемой окрестности и $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) \neq 0$.

(4) ∞ существенно особая точка функции f тогда и только тогда, когда функция f не имеет предела при $z \to \infty$.

Однако в случае существенно особой точки имеет место более сильный результат, который точнее описывает поведение функции в окрестности такой точки.

Теорема 66 (Ю. В. Сохоцкого)**.** *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ в проколотой окрестности точки a найдётся такая последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $z_n \to a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = A$.*

■ Так как в любой проколотой окрестности существенно особой точки функция f не ограничена, то найдётся такая последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $z_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, $z_n \to a$ и $f(z_n) \to \infty$.

Пусть теперь $A \neq \infty$. Возможны два варианта.

1) Найдётся такая последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $z_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, $z_n \to a$ и $f(z_n) = A$. Поскольку стационарная последовательность $f(z_n) \to A$, то для такого A утверждение теоремы справедливо.

2) Последовательность (z_n) с указанным свойством не найдётся. Последнее означает, что существует окрестность $\overset{\circ}{U}_a$, в которой $f(z) \neq A$. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$. Эта функция аналитическая в $\overset{\circ}{U}_a$ как частное аналитических функций с не обращающимся в нуль знаменателем. Точка $z = a$ для неё — и.о.т.о.х. Остается установить ее характер.

а) Пусть a — устранимая особая точка функции g. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} g(z) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{f(z) - A} = \gamma$. Но, если $\gamma = 0$, то $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, а если $\gamma \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A + \dfrac{1}{\gamma}$. Ни то, ни другое невозможно, потому что $z = a$

для f — существенно особая точка.

б) Пусть a — полюс функции g. Тогда $\lim\limits_{z \to a} g(z) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{1}{f(z) - A} = \infty$. Но в таком случае $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$, чего, по предположению, не может быть.

в) Остаётся заключить, что a — существенно особая точка функции g, поэтому, как отмечено в начале доказательства, найдётся такая последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $z_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, $z_n \to a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} g(z_n) = \infty$, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$. $\square$

В заключение главы приведем без доказательства (его можно найти в [7, с. 407]) более глубокий результат о характере поведения функции в окрестности существенно особой точки.

Теорема 67 (Пикара)**.** *Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является существенно особой точкой функции f. Тогда для каждого $A \in \mathbb{C}$, за исключением быть может одного значения A_0, существует последовательность точек $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$, для которой $f(z_n) = A$, $n \in \mathbb{N}$.*

Значение A_0 называется исключительным пикаровским значением функции f. Например, исключительным пикаровским значением функции $e^{1/z}$, для которой точка $z = 0$ является существенно особой точкой, является точка $A_0 = 0$, поскольку $e^{1/z} \neq 0$ для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Глава 5

Вычеты и их приложения

5.1 Определение вычета аналитической функции

Одним из наиболее важных приложений теории аналитических функций к математическому анализу является применение её к вычислению интегралов. Оно основано на понятии вычета аналитической функции относительно ее изолированных особых точек однозначного характера (и.о.т.о.х.).

Определение 77. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f. Пусть C — произвольный замкнутый контур*[1] *с положительным направлением обхода (против часовой стрелки), лежащий в области аналитичности функции f, содержащий внутри себя точку a и не содержащий внутри себя никаких других особых точек функции f. Число*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)dz. \tag{5.1}$$

называется вычетом функции f в точке a.

По следствию из интегральной теоремы Коши для системы контуров (теорема 38) величина интеграла в (5.1) не зависит от выбора замкнутого контура C с указанными свойствами.

Определение 78. *Пусть ∞ — и.о.т.о.х. функции f. Пусть C — произвольный замкнутый контур с направлением обхода против часовой стрелки, лежащий в области аналитичности функции f, содержащий вне себя точку ∞ и не содержащий вне себя никаких других изолированных особых точек функции f. Число*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)dz, \tag{5.2}$$

называется вычетом функции f в точке ∞.

[1] См. начало главы 3 на странице 63.

Теорема 68 (основная теорема о вычетах). *Пусть C — замкнутый контур с направлением обхода против часовой стрелки, лежащий в области аналитичности функции f и содержащий внутри себя конечное число и.о.т.о.х. a_1, a_2, $\ldots a_m$ функции f. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z). \tag{5.3}$$

■ Заключим каждую точку a_k внутрь окружности C_k, которые лежат внутри области аналитичности функции f, имеют направление обхода против часовой стрелки, не пересекаются друг с другом и каждая содержат внутри себя только одну особую точку a_k. Тогда, применяя интегральную теорему Коши для системы контуров (теорему 38) и используя определение вычета в точке $a \in \mathbb{C}$, получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z). \ \square$$

Следствие 68.1 (о полной сумме вычетов). *Если функция f аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа и.о.т.о.х. a_1, a_2, $\ldots a_m$, то*

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{5.4}$$

■ Пусть C — замкнутый контур с направлением обхода против часовой стрелки, лежащий в $\mathbb{C}$ и содержащий внутри себя все точки $\{a_j\}_{j=1}^{m}$. Тогда имеет место формула (5.3). Но в силу определения 78 интеграл в левой части этой формулы равен $-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Поэтому в этом случае формула (5.3) эквивалентна формуле (5.4). □

Если воспользоваться обобщенной интегральной теоремой Коши, то основную теорему о вычетах можно доказать при менее ограничительных условиях.

Теорема 69 (обобщенная теорема о вычетах). *Пусть G — внутренность замкнутого контура C с обходом против часовой стрелки, функция f непрерывна на C и аналитична в $\operatorname{int} C$ за исключением конечного числа и.о.т.о.х. a_1, a_2, $\ldots a_m$. Тогда имеет место формула* (5.3).

Рассмотрим методы вычисления вычетов, не использующие их определения.

Теорема 70. *Если $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т.о.х. функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}, \tag{5.5}$$

если ∞ — и.о.т.о.х. функции f, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}, \tag{5.6}$$

где c_{-1} — коэффициент при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности рассматриваемой точки.

■ Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы достаточно сравнить формулу (4.14) вычисления коэффициента ряда Лорана для $k = -1$ с определениями (5.1), (5.2) вычета и убедиться в их тождественности. □

Пользуясь этой теоремой, вычислим вычеты для некоторых ранее рассмотренных функций.

1) Для функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}e^{1/z}$ из примера 25

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,2^k} = \frac{\sqrt{e}}{4}\,.$$

2) Для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ из примера 29 $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = 0$.

3) Для функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ из примера 30 $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = 1$.

4) Для функции $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z^5}$ из примера 31 $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = -\dfrac{1}{4}$.

5) Для функции $f(z) = (z^3 - z + 2)e^{1/z}$ из примера 32 $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = \dfrac{37}{24}$.

6) Для функции $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ (см. формулу 4.18) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -1$.

Следует обратить внимание на существенное различие в вычислении вычета в конечной особой точке и в бесконечно удалённой точке. В случае конечной особой точки слагаемое $\dfrac{c_{-1}}{z-a}$ находится в главной части ряда Лорана функции, а в случае бесконечно удалённой точки слагаемое $\dfrac{c_{-1}}{z}$ находится в правильной части ряда Лорана функции.

Теорема 71 (о вычете в устранимой и.о.т.о.х.)**.** *Если $a \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0. \tag{5.7}$$

Если ∞ — устранимая особая точка функции f, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big),\ \textit{где}\ f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z). \tag{5.8}$$

■ В случае, когда a — конечная устранимая особая точка, то главная часть ряда Лорана функции f — часть, содержащая отрицательные степени $(z-a)$, отсутствует и потому вычет функции в точке a равен нулю.

Если бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой, то главная часть ряда Лорана функции f также отсутствует, но эта часть содержит положительные степени z, и в этом случае функция f представляется сходящимся рядом $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$, $|z| > \rho > 0$. Поэтому функция f аналитична и непрерывна в точке $z = \infty$ и $f(\infty) = c_0$. А тогда

$$f(z) - c_0 = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k = \frac{1}{z} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{k+1}.$$

Умножая это равенство на $z \neq 0$ и переходя к пределу при $z \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{z\to\infty} z\big(f(z) - f(\infty)\big) = c_{-1} = -\operatorname*{res}_{z=a} f(z). \ \square$$

Во многих случаях разложение функции в ряд Лорана и даже только вычисление коэффициента c_{-1}, может оказаться непростой задачей, как показывают примеры 25, 32. Но для полюса можно предложить достаточно простой способ вычисления вычета.

Теорема 72 (о вычете в полюсе)**.** *Если $a \in \mathbb{C}$ — полюс порядка k функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \big\{(z-a)^k f(z)\big\}^{(k-1)}. \tag{5.9}$$

■ Пусть $a \in \mathbb{C}$ — полюс порядка k функции f. Тогда её разложение в ряд Лорана в некоторой проколотой окрестности $K_a(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\}$, $R > 0$, имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{s=0}^{+\infty} c_s (z-a)^s\,,\ z \in K_a(0, R),$$

и $c_{-k} \neq 0$. Чтобы найти коэффициент c_{-1}, умножим обе части равенства на $(z-a)^k \neq 0$

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{s=0}^{+\infty} c_s (z-a)^{s+k} =$$

$$= \sum_{s=-k}^{+\infty} c_s (z-a)^{s+k},\ z \in K_a(0, R).$$

Получившийся степенной ряд равномерно сходится внутри круга $|z-a| < R$, поэтому полученное равенство в круге $|z-a| < R$ можно продифференцировать почленно $k-1$ раз

$$\big((z-a)^k f(z)\big)^{(k-1)} = (k-1)! c_{-1} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+k)!}{(s+1)!} c_s (z-a)^{s+1}.$$

Переходя к пределу при $z \to a$, получим $\lim\limits_{z\to a}\left((z-a)^k f(z)\right)^{(k-1)} = (k-1)!c_{-1}$. Отсюда следует равенство (5.9). $\square$

Если полюс простой, то есть $k = 1$, из теоремы 72 получаем следующие результаты.

Следствие 72.1. *Если $a \in \mathbb{C}$ — простой полюс функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{5.10}$$

Следствие 72.2. *Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ и ψ — аналитические в окрестности точки a функции, причём $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,. \tag{5.11}$$

■ Функция $\psi(z)$ по условию имеет в точке a простой нуль. Тогда, при выполнении условий теоремы, точка a является для функции f простым полюсом, и потому, применяя предыдущее следствие, получаем, что

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{(z-a)}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,. \ \square$$

Пример 33. *Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ относительно всех и.о.т.о.х.*

■ Так как данная функция является рациональной, то её особыми точками являются нули знаменателя и бесконечность. Знаменатель обращается в нуль в точках $z = \pm\, i$, которые являются для него нулями кратности три, а для функции f — полюсами третьего порядка (теорема 61). Бесконечно удаленная точка — это устранимая особая точка данной функции, так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ (теорема 65). Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^3 f(z)\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' =$$

$$= 6\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^5} = \frac{6}{(2i)^5} = \frac{6}{32i} = -\frac{3}{16}i\,.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left((z+i)^3 f(z)\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{(z-i)^3}\right)'' =$$

$$= 6\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)^5} = \frac{6}{(-2i)^5} = \frac{6}{-32i} = \frac{3}{16}i\,.$$

Применяя к функции следствие основной теоремы о вычетах (следствие 68.1), находим, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=i} f(z) - \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{3}{16}i - \frac{3}{16}i = 0. \ \square$$

Замечание. Чтобы в предыдущем примере найти вычет функции в ∞, можно воспользоваться разложением функции в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке. Так как $\dfrac{1}{(z^2+1)^3} \sim \dfrac{1}{z^6}$ при $z \to \infty$, то есть $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^6}{(z^2+1)^3} = 1$, то в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^6}\left(1 + o(1/z^6)\right),$$

поэтому ряд Лорана $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $\dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \dfrac{c_{-6}}{z^6} + \ldots$, в котором нет слагаемого $\dfrac{c_{-1}}{z}$, поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Пример 34. *Найти вычеты функции* $f(z) = \dfrac{z}{z^n - 1}$ ($n \geq 2$ *— целое число*) *относительно всех и.о.т.о.х.*

■ И в этом примере особые точки функции f — нули знаменателя и $z = \infty$. Приравняем знаменатель к нулю и найдём корни, используя формулу Муавра:

$$z^n = 1 = e^{2\pi k i},\ z_k = e^{2\pi k i/n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для вычисления вычетов в точках z_k используем формулу (5.11):

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{nz_k^n} = \frac{1}{n}z_k^2 = \frac{1}{n}e^{4\pi k i/n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для вычисления вычета в бесконечно удаленной точке заметим, что

$$f(z) = \frac{z}{z^n - 1} \sim \frac{1}{z^{n-1}} \text{ при } z \to \infty,$$

поэтому, как и в замечании к предыдущему примеру, можно сделать вывод о том, что в окрестности ∞ ряд Лорана имеет вид $\dfrac{z}{z^n-1} = \dfrac{1}{z^{n-1}} + \ldots$. Поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$ при $n = 2$, и $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$ при $n > 2$. $\square$

Пример 35. *Найти вычеты* $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$ *относительно всех и.о.т.о.х.*

■ Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = \infty$. Обе точки существенно особые, поскольку функция e^z при $z \to \infty$ не имеет предела. Найдем разложение функции f в ряд Лорана в окрестности нуля, который одновременно будет и рядом Лорана функции f в окрестности бесконечно удаленной точки, ввиду отсутствия других особых точек.

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{1/z} =$$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^k}{k!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{k!\,z^k} + \ldots\right).$$

Нужно вычислить только коэффициент c_{-1}. Найдём его, умножая коэффициент при z^k из первой скобки на коэффициент при $\dfrac{1}{z^{k+1}}$ из второй скобки и складывая полученные произведения:

$$c_{-1} = \frac{1}{0!1!} + \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{2!3!} + \ldots + \frac{1}{k!(k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}\,.$$

Итак, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!(k+1)!}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!(k+1)!}$. □

Пример 36. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$, *где* C *— окружность* $|z| = 2$.

■ Применим основную теорему о вычетах (теорему 68). В данном случае особые точки подынтегральной функции — нули знаменателя: $z_{1,2} = \pm\, i$. Обе точки лежат внутри контура интегрирования, являются простыми нулями для знаменателя, то есть простыми полюсами для подынтегральной функции. Так как выполнены условия следствия 72.2, вычеты можно найти по формуле (5.11).

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{\sin i}{2i} = \frac{i \operatorname{sh} 1}{2i} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 1, \quad \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 1.$$

Тогда $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sh} 1 = 2\pi i \operatorname{sh} 1$. □

Пример 37. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+3)\,dz}{z^3(z^3+1)(z-3)}$.

■ Особые точки подынтегральной функции: $z = 0$ — полюс третьего порядка; три простых полюса — корни уравнения $z^3 + 1 = 0$; $z = 3$ — полюс первого порядка и $z = \infty$ — устранимая особая точка. Последние две особые точки лежат вне контура интегрирования, а предыдущие — внутри. Легче вычислить вычеты в точках $z = 3$, $z = \infty$ и воспользоваться следствием 68.1 о полной сумме вычетов.

Так как $f(z) \sim \dfrac{1}{z^5}$ при $z \to \infty$, то разложение функции f в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $f(z) = \dfrac{1}{z^5} + \ldots$, поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Вычет в точке $z = 3$ найдём по формуле (5.11), полагая $\varphi(z) = \dfrac{z^2+3}{z^3(z^3+1)}$, $\psi(z) = z - 3$: $\operatorname*{res}\limits_{z=3} f(z) = \dfrac{3^2+3}{3^3(3^3+1)\cdot 1} = \dfrac{1}{63}$.

Сумма вычетов в точках $z = 3$ и $z = \infty$ равна $\dfrac{1}{63}$, поэтому сумма вычетов в особых точках, расположенных внутри контура, равна $-\dfrac{1}{63}$, следовательно,
$$\int\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+3)dz}{z^3(z^3+1)(z-3)} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{63}\right) = -\frac{2\pi}{63} i\,. \quad \square$$

5.2 Применение вычетов к вычислению интегралов

Рассмотрим некоторые виды интегралов, при вычислении которых может быть использована теория вычетов.

5.2.1 Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$

Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u, v, а $R(\cos x, \sin x)$ — функция, непрерывна по переменной x на отрезке $[0,\, 2\pi]$. В математическом анализе при вычислении неопределенных интегралов вида $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ применялись тригонометрические подстановки, например, универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, позволяющие свести их вычисление к вычислению интегралов вида $\displaystyle\int R_1(t)\,dt$, где R_1 — рациональная функция. В ТФКП вычисление интегралов указанного вида можно свести к вычислению интегралов по единичной окружности от рациональной функции комплексного переменного z, если сделать подстановку $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}\,dx$ или $dx = \dfrac{dz}{iz}$, и $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \dfrac{z^2-1}{2iz}$. При изменении x от 0 до 2π точка z, начиная от точки $z = 1$, совершает полный оборот вокруг нуля по окружности единичного радиуса против часовой стрелки, и потому

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz.$$

Здесь $R_1(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{1}{z}$ — рациональная функция, имеющая лишь конечное число полюсов, ни один из которых не лежит на окружности $|z| = 1$ (так как функция R не имеет особенностей на $[0,\, 2\pi]$), следовательно, получившийся интеграл может быть вычислен с помощью теории вычетов.

Пример 38. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx.$

■ Так как выполнены все указанные выше условия, положим $z = e^{ix}$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx = \int\limits_{|z|=1} \frac{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}{2-\dfrac{z^2-1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{iz} = -\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\,dz.$$

Подынтегральная функция имеет три конечные особые точка, это три простых полюса: $z_0 = 0$ и корни уравнения $z^2 - 4iz - 1 = 0$: $z_1 = i(2+\sqrt{3})$, $z_2 = i(2-\sqrt{3})$. Внутри контура $|z| = 1$ лежат полюса z_0 и z_2. Вычислим вычеты:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)} = -1;$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\frac{z^2+4z+1}{z(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{z_2^2+4z_2+1}{z_2(z_2-z_1)} =$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{3})^2+4i(2-\sqrt{3})+1}{i(2-\sqrt{3})(-2i\sqrt{3})} = \frac{-6+4\sqrt{3}+4i(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})+4i(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\,.$$

Тогда $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}\,dx = -\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\,dz =$

$$= -2\pi i\left(-1+\left(1+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\,. \quad \square$$

Пример 39. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i}\,.$

■ Сначала преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + 2i} = \frac{1}{\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} + 2i} = \frac{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{-e^{ix} - 3e^{-ix}} =$$

$$= \frac{ie^{-ix}\left(e^{2ix} + 1\right)}{-e^{-ix}\left(e^{2ix} + 3\right)} = -i\frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} + 3}\,.$$

Выполним замену $e^{2ix} = z$. Тогда $2ie^{2ix}dx = dz$ или $dx = \dfrac{dz}{2iz}$. При изменении x от нуля до π точка z опишет окружность $|z| = 1$, проходимую против часовой стрелки. Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i} = -i\int_0^{\pi} \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} + 3}dx = -i\int\limits_{|z|=1} \frac{z+1}{z+3} \cdot \frac{dz}{2iz} = -\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1} \frac{z+1}{z(z+3)}dz.$$

Конечные особые точки подынтегральной функции в последнем интеграле $z = 0$ и $z = -3$. Это простые полюса. Внутри контура $|z| = 1$ лежит только точка $z = 0$. Найдём вычет относительно неё и вычислим интеграл:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z+1}{z(z+3)} = \frac{1}{3}\,; \quad \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{3}\,i. \ \square$$

5.2.2 Несобственные интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Для применения теории вычетов к вычислению несобственных интегралов указанного вида, понадобится следующее утверждение.

Лемма 4 (I лемма Жордана). *Если функция f непрерывна в некоторой проколотой окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, то*

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{C_r} f(z)dz = 0, \tag{5.12}$$

где C_r — окружность $|z| = r$ $(r > 0)$ или любая её дуга.

■ По любому $\varepsilon > 0$ найдем такое число $r_0 > 0$, что $|zf(z)| < \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ при $|z| > r_0$.

Пусть $r > r_0$ и C_r — какая-либо дуга окружности $|z| = r$, угловые координаты концов которой равны α и β, при этом $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, и, для определенности, выбрано направление обхода против часовой стрелки. Сделаем в интеграле

$\int\limits_{C_r} f(z)dz$ замену $z = re^{i\varphi}$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тогда $\int\limits_{C_r} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(re^{i\varphi}) ire^{i\varphi}\,d\varphi$. Для $r > r_0$ $\quad \left|re^{i\varphi} f(re^{i\varphi})\right| = |zf(z)| < \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$, поэтому

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(re^{i\varphi}) ire^{i\varphi}\,d\varphi\right| \le \frac{\varepsilon}{4\pi}(\beta - \alpha) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует равенство (5.12). $\square$

Применим первую лемму Жордана к вычислению несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$, где $R(x)$ — рациональная дробь.

Теорема 73. *Пусть* $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *— несократимая рациональная дробь комплексного переменного* z, $P(z)$, $Q(z)$ *— многочлены степени* p *и* q, *соответственно. Если* $q - p \ge 2$, $Q(x) \ne 0$ *на* $\mathbb{R}$, *а* $z_k \in \mathbb{C}$ *— все различные корни многочлена* $Q(z)$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) = -2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{5.13}$$

$\blacksquare$ Рассмотрим функцию $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, которая определена в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ за исключением нулей многочлена $Q(z)$ (точек $z_k \in \mathbb{C}$). Многочлен $Q(z)$ степени $q \ge 2$ имеет в комплексной плоскости q нулей (с учетом их кратности), ни один из корней, в силу условий теоремы, не лежит на вещественной оси. Поэтому существует число $r_0 > 0$ такое, что все нули z_k лежат в круге $|z| < r_0$, функция $R(z)$ аналитична и непрерывна на множестве $|z| \ge r_0$ и при $z \to \infty$

$$z\,R(z) = z\,\frac{P(z)}{Q(z)} = z\frac{a_p z^p + \cdots + a_0}{b_q z^q + \cdots + b_0} = \frac{1}{z^{q-p-1}} \cdot \frac{a_p + o(1)}{b_q + o(1)},$$

где a_p, $b_q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q - p - 1 \ge 1$. Поэтому $\lim\limits_{z\to\infty} z\,R(z) = 0$. Таким образом, для функции $R(z)$ выполнены условия первой леммы Жордана, и потому $\lim\limits_{r\to+\infty} \int\limits_{C_r} R(z)\,dz = 0$, где C_r — любая дуга окружности $|z| = r$.

Пусть $r > r_0$. Рассмотрим замкнутый контур Γ_r, состоящий из отрезка $[-r,\, r]$ вещественной оси и верхней полуокружности C_r с обходом против часовой стрелки. Каждая точка z_k является и.о.т.о.х. функции $R(z)$. Те из них, которые лежат в верхней полуплоскости ($\mathcal{I}m\, z_k > 0$), будут лежать внутри контура Γ_r и по основной теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z).$$

Представим интеграл по контуру Γ_r в виде суммы двух интегралов, тогда

$$\int\limits_{-r}^{r} R(z)\,dz + \int\limits_{C_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{5.14}$$

В первом интеграле заменим z на x. Но $|R(x)| \sim \dfrac{1}{x^{p-q}}\dfrac{|a_p|}{|b_q|}$ при $x \to +\infty$, а потому несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ абсолютно сходится и, следовательно,

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} R(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx.$$

Второй интеграл по лемме 4 стремится к нулю при $r \to +\infty$, поэтому, совершив предельный переход в равенстве (5.14), получим равенство (5.13). Вторая часть равенства (5.13) доказывается аналогично. $\square$

Замечание 1. Так как $R(z)$ — несократимая рациональная дробь, каждый корень многочлена $Q(z)$ будет полюсом функции $R(z)$, порядок которого равен кратности этого корня. И для вычисления $\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$ можно воспользоваться теоремой 72 и ее следствиями. Для полноты картины отметим, что в условиях теоремы бесконечно удаленная точка является для функции $R(z)$ устранимой особой точкой, поскольку её ряд Лорана в окрестности точки ∞ не имеет главной части, а правильная его часть состоит из слагаемых вида $\dfrac{\text{const}}{x^j}$, $j \geq 2$ и потому $c_{-1} = 0$.

Замечание 2. Если при выполнении всех условий теоремы 73 функция $R(x)$ на $\mathbb{R}$ является четной, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\,dx$. Поэтому теорему 73 можно использовать и для вычисления интегралов вида $\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\,dx$ или $\int\limits_{-\infty}^{0} R(x)\,dx$. Если функция $R(x)$ на $\mathbb{R}$ является нечетной, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 0$.

Пример 40. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)^2}{x^4+1}dx.$

■ У подынтегральной дроби знаменатель на вещественной оси в нуль не обращается, степень многочлена в числителе на две единицы меньше степени многочлена в знаменателе. Поэтому к интегралу применима формула (5.13).

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость: $R(z) = \dfrac{(z-1)^2}{z^4+1}$, и найдём её конечные особые точки, для чего знаменатель приравняем к нулю:

$$z^4+1=0, \quad z^4=-1=e^{i\pi}, \quad z_k=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, \ k=0,1,2,3.$$

Полагая $k=0$ и $k=1$, найдём особые точки, лежащие выше вещественной оси: $z_1=e^{\pi i/4}$, $z_2=e^{3\pi i/4}$. Это простые полюса функции $R(z)$, поэтому вычеты в них можно найти по формуле (5.11). Найдём вычет относительно точки z_1:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} R(z)=\frac{(z_1-1)^2}{4z_1^3}=\frac{\left(e^{\pi i/4}-1\right)^2}{4e^{3\pi i/4}}=\frac{e^{\pi i/4}\left(e^{\pi i/8}-e^{-\pi i/8}\right)^2}{4e^{3\pi i/4}}=$$

$$=\frac{e^{-\pi i/2}\left(2i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2}{4}=i\sin^2\frac{\pi}{8}\,.$$

В ходе преобразований в числителе из скобки был вынесен множитель $e^{\pi i/8}$ и использована формула $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ или $e^{iz}-e^{-iz}=2i\sin z$.

Аналогично находим вычет относительно точки z_2:

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} R(z)=\frac{(z_2-1)^2}{4z_2^3}=\frac{\left(e^{3\pi i/4}-1\right)^2}{4e^{9\pi i/4}}=\frac{e^{3\pi i/4}\left(e^{3\pi i/8}-e^{-3\pi i/8}\right)^2}{4e^{\pi i/4}}=$$

$$=\frac{e^{\pi i/2}\left(2i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)^2}{4}=-i\sin^2\frac{3\pi}{8}\,.$$

По формуле (5.13)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)^2}{x^4+1}dx=2\pi i\cdot i\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=\pi\left(2\sin^2\frac{3\pi}{8}-2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=\pi\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}-1+\cos\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\sqrt{2}. \ \square$$

Пример 41. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

■ Так как подынтегральная функция является чётной, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$$

Степень числителя подынтегральной функции на две единицы меньше степени знаменателя, знаменатель на вещественной оси в нуль не обращается, поэтому для вычисления последнего интеграла можно использовать формулу (5.13).

Найдём конечные особые точки функции $R(z) = \dfrac{z^4+1}{z^6+1}$:

$$z^6+1=0, \quad z^6=-1=e^{i\pi}, \quad z_k = e^{i\,\frac{\pi+2\pi k}{6}}, \ k=\overline{0,5}.$$

Полагая $k=0,1,2$, найдём особые точки, расположенные в верхней полуплоскости: $z_1 = e^{\pi i/6}$, $z_2 = e^{\pi i/2} = i$, $z_3 = e^{5\pi i/6} = e^{\pi i}\cdot e^{-\pi i/6} = -e^{-\pi i/6}$. Все эти точки, очевидно, являются полюсами первого порядка функции $R(z)$ и при вычислении вычетов можно использовать формулу (5.11):

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{z_1^4+1}{6z_1^5} = \frac{e^{4\pi i/6}+1}{6e^{5\pi i/6}} = \frac{e^{2\pi i/6}\big(e^{2\pi i/6}+e^{-2\pi i/6}\big)}{6e^{5\pi i/6}} = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{3}}{6e^{\pi i/2}} = \frac{1}{6i}\ ;$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} R(z) = \frac{z_2^4+1}{6z_2^5} = \frac{i^4+1}{6i^5} = \frac{1+1}{6i} = \frac{1}{3i}\ ;$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_3} R(z) = \frac{z_3^4+1}{6z_3^5} = \frac{e^{-4\pi i/6}+1}{-6e^{-5\pi i/6}} = \frac{e^{-2\pi i/6}\big(e^{-2\pi i/6}+e^{2\pi i/6}\big)}{-6e^{-5\pi i/6}} = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{3}}{-6e^{-\pi i/2}} = \frac{1}{6i}\ .$$

По формуле (5.13)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{1}{6i}+\frac{1}{6i}+\frac{1}{3i}\right) = \frac{2\pi}{3}\ . \ \square$$

5.2.3 Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$

Лемма 5 (II лемма Жордана)**.** *Если функция f непрерывна в некоторой проколотой окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0, \ \textit{для любого } \lambda > 0, \tag{5.15}$$

где C_r — верхняя полуокружность радиуса r с центром в точке $z=0$ или любая её дуга.

■ Пусть $\lambda > 0$. По любому $\varepsilon > 0$ найдем такое число r_0, что $|f(z)| < \varepsilon$, как только $|z| > r_0$. Пусть $r > r_0$ и C_r — дуга окружности радиуса r с центром в точке $z = 0$, угловые координаты концов которой равны α и β $(0 \le \alpha < \beta \le \pi)$ и, для определенности, с обходом против часовой стрелки. В интеграле $\int\limits_{C_r} f(z)e^{i\lambda z}\,dz$ сделаем замену $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$: $\int\limits_{C_r} f(z)e^{i\lambda z}dz =$

$$= ir\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(re^{i\varphi})e^{i\lambda r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}e^{i\varphi}d\varphi = ir\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(re^{i\varphi})e^{i\lambda r\cos\varphi}e^{-\lambda r\sin\varphi}e^{i\varphi}d\varphi.$$

Оценим сверху полученный интеграл, учитывая, что $|f(z)| < \varepsilon$ при $|z| > r_0$ и $\left|e^{ix}\right| = 1$ при вещественном x. При оценке воспользуемся следующими фактами:

(1) так как $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$, $\varphi \in [0,\, \pi/2]$, то $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi$;

(2) график функции $\sin\varphi$ на отрезке $[0,\, \pi/2]$ расположен не ниже хорды, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(\pi/2, 1)$, следовательно, $\sin\varphi \ge \dfrac{2}{\pi}\,\varphi$ на $[0,\, \pi/2]$.

Тогда $\left|\int\limits_{C_r} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \le \varepsilon r\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda r\sin\varphi}d\varphi \le \varepsilon r\int\limits_{0}^{\pi} e^{-\lambda r\sin\varphi}d\varphi =$

$$= 2\varepsilon r\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\lambda r\sin\varphi}d\varphi \le 2\varepsilon r\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-2\lambda r\varphi/\pi}d\varphi = -\varepsilon\frac{\pi}{\lambda}e^{-2\lambda r\varphi/\pi}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \varepsilon\,\frac{\pi}{\lambda}\,\left(1 - e^{-\lambda r}\right) < \varepsilon\,\frac{\pi}{\lambda}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, из полученной оценки следует (5.15). □

Теорема 74. *Пусть* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— несократимая рациональная дробь вещественной переменной* x, $P(x)$, $Q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами степени* p *и* q*, соответственно. Если* $q - p \ge 1$, $Q(x) \ne 0$ *на* $\mathbb{R}$*, а* $z_k \in \mathbb{C}$ *— все различные корни многочлена* $Q(z)$*, то для любого* $\lambda > 0$*:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda z}\,dx = 2\pi i\sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)\,e^{i\lambda x}, \tag{5.16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx = \mathcal{R}e\,\Big(2\pi i\sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)\,e^{i\lambda z}\Big), \tag{5.17}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx = \mathcal{I}m\,\Big(2\pi i\sum_{\mathcal{I}m\,z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)\,e^{i\lambda z}\Big). \tag{5.18}$$

■ Как и при доказательстве теоремы 73 рассмотрим функцию $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, определенную в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ за исключением нулей многочлена $Q(z)$ (точек $z_k \in \mathbb{C}$) и представляет в несократимую рациональная дробь комплексного переменного z, поскольку $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены с вещественными коэффициентами (покажите это!). Так как $Q(z)$ — многочлен степени $q \geq 1$, то он имеет в комплексной плоскости q нулей (с учетом их кратностей), причём ни один из них, в силу условий теоремы, не лежит на вещественной оси. Поэтому существует число $r_0 > 0$ такое, что все нули z_k лежат в круге $|z| < r_0$. Следовательно, функция $R(z)$ аналитична и непрерывна в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки. Кроме того, при $z \to \infty$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_p z^p + \cdots + a_0}{b_q z^q + \cdots + b_0} = \frac{1}{z^{q-p}}\frac{a_p + o(1)}{b_q + o(1)},$$

где a_p, $b_q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $q-p \geq 1$. Поэтому $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$. Таким образом, выполнены условия второй леммы Жордана, и потому $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_{C_r} R(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0$, где C_r — любая дуга верхней полуокружности $|z| = r$, $\lambda > 0$.

Пусть $r > r_0$ и $\lambda > 0$. Рассмотрим замкнутый контур Γ_r, состоящий из отрезка $[-r,\, r]$ вещественной оси и верхней полуокружности C_r с обходом против часовой стрелки. Каждая точка z_k является и.о.т.о.х. функции $R(z)$. Те из них, которые лежат в верхней полуплоскости ($\mathcal{I}m\ z_k > 0$), будут лежать внутри контура Γ_r и по основной теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_r} R(z)e^{i\lambda z}\,dz = 2\pi i\sum_{\mathcal{I}m\,z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)e^{i\lambda z}.$$

Представим интеграл по Γ_r в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{-r}^{r} R(z)e^{i\lambda z}\,dz + \int\limits_{C_r} R(z)e^{i\lambda z}\,dz = 2\pi i\sum_{\mathcal{I}m\,z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)e^{i\lambda z}. \tag{5.19}$$

В первом интеграле заменим z на x: $R(x) = \dfrac{1}{x^{q-p}}\dfrac{a_p + o(1)}{b_q + o(1)}$ при $x \to \pm\infty$ и потому $\lim\limits_{x\to\pm\infty} R(x) = 0$. Так как $R(x)$ является отношением двух многочленов с вещественными коэффициентами разных степеней, то, во-первых, $R(x) \in \mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$? и, во-вторых, начиная с некоторого r функция $R(x)$ будет монотонно стремиться к 0 при $|r| \to +\infty$ на промежутках $(-\infty, -r)$, $(r, +\infty)$.

Тогда по признаку Дирихле несобственные интегралы $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx$ и $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx$ сходятся и

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{-r}^{r} R(x)\cos\lambda x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{-r}^{r} R(x)\sin\lambda x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx,$$

а поскольку $e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_{-r}^{r} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = I_1 + i\,I_2$.

Второй интеграл в (5.19) по лемме 5 стремится к нулю при $r\to+\infty$, поэтому, совершая предельный переход в равенстве (5.19), получим равенство (5.16), а так как $\mathcal{R}e\,R(x) = R(x), \mathcal{I}m\,R(x) = 0$, сравнивая вещественные и мнимые части в равенстве (5.16), получим равенства (5.17), (5.18). $\square$

Пример 42. *Вычислить* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x-1)\cos 2x}{x^2+2x+17}\,dx.$

■ Подынтегральная функция удовлетворяет всем условиям 2-ой леммы Жордана (леммы 5): на вещественной оси $x^2+2x+17>0$; степень многочлена в числителе рациональной части меньше степени многочлена в знаменателе; $\lambda = 2 > 0$. Для вычисления интеграла можно использовать формулу (5.17).

Конечными изолированными особыми точками функции $F(z) = \dfrac{(z-1)e^{2iz}}{z^2+2z+17}$ являются нули знаменателя: $z^2+2z+17=0$, $z_{1,2} = -1\pm\sqrt{1-17} = -1\pm 4i$. В верхней полуплоскости лежит точка $z_1 = -1+4i$, которая является полюсом первого порядка функции $F(z)$. Для вычисления вычета используем формулу (5.11):

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = \frac{(z_1-1)e^{2iz_1}}{2z_1+2} = \frac{(-2+4i)e^{2i(-1+4i)}}{-2+8i+2} = \frac{(-2+4i)e^{-8}e^{-2i}}{8i} =$$

$$= \frac{(-2+4i)(\cos 2 - i\sin 2)}{8e^8 i} = \frac{1}{4e^8 i}\left((-\cos 2+2\sin 2) + i(\sin 2+2\cos 2)\right).$$

Используя формулу (5.17), получим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2+2x+17}\,dx =$

$$= \mathcal{R}e\left(2\pi i \cdot \frac{1}{4e^8 i}\left((-\cos 2 + 2\sin 2) + i(\sin 2 + 2\cos 2)\right)\right) = \frac{\pi}{2e^8}(2\sin 2 - \cos 2). \ \square$$

Пример 43. *Вычислить* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+1}\,dx$.

■ Подынтегральная функция — чётная, поэтому

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+1}\,dx.$$

Условия применимости формулы (5.18) выполнены, поэтому найдем конечные особые точки функции $F(z) = \frac{ze^{3iz}}{z^4+1}$, приравнивая ее знаменатель к нулю:

$$z^4 + 1 = 0, \ \ z^4 = -1 = e^{i\pi}, \ \ \ z_k = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Все найденные точки — полюсы первого порядка функции $F(z)$. Но в верхней полуплоскости находятся только точки $z_1 = e^{i\,\pi/4}$ и $z_2 = e^{i\,3\pi/4}$. Вычеты в них найдем по формуле (5.11):

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = \frac{z_1 e^{3iz_1}}{4z_1^3} = \frac{1}{4(e^{i\,\pi/4})^2} e^{3i(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} =$$

$$= \frac{1}{4i} e^{-3\sqrt{2}/2}\left(\cos\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} F(z) = \frac{z_2 e^{3iz_2}}{4z_2^3} = \frac{1}{4(e^{i\,3\pi/4})^2} e^{3i(cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} =$$

$$= -\frac{1}{4i} e^{-3\sqrt{2}/2}\left(\cos\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Найдём сумму вычетов, и, используя формулу (5.18), искомый интеграл:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} F(z) = \frac{1}{4i} e^{-3\sqrt{2}/2}\, 2i\sin\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\, e^{-3\sqrt{2}/2}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\mathcal{I}m\ \left(2\pi i\,\frac{1}{2}\, e^{-3\sqrt{2}/2}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\, e^{-3\sqrt{2}/2}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}. \ \square$$

Пример 44. *Вычислить интеграл Лапласа*

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\,dx,\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

■ Если $\lambda = 0$, то $I(0) = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$. Поскольку $I(\lambda)$ — четная функция, достаточно вычислить этот интеграл при $\lambda > 0$. Пусть

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx,\ \ \lambda > 0.$$

Тогда $I(\lambda) = \mathcal{R}e\, I_1(\lambda)$.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ удовлетворяет второй лемме Жордана, поэтому

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\,dz = 0,\ \text{где } C_R = \{z : |z| = R,\ \mathcal{I}m\, z \geq 0\}.$$

Функция $f_1(z) = \dfrac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = i$ — полюс первого порядка, в котором

$$\operatorname*{res}_{z=i} f_1(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}.$$

Из второй леммы Жордана (леммы 5) получаем равенство

$$I_1(\lambda) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f_1(z) = \pi e^{-\lambda},\ I(\lambda) = \mathcal{R}e\, I_1(\lambda) = \pi e^{-\lambda} \text{ при } \lambda > 0.$$

Следовательно, $I(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{R}$. □

5.2.4 Интегралы с особенностями на контуре

До сих пор подынтегральные функции не имели особых точек на кривой интегрирования. Но теорию вычетов удается иногда использовать и в случаях, когда особые точки функции лежат на кривой интегрирования.

Лемма 6 (III лемма Жордана)**.** *Пусть a — точка комплексной плоскости, f — аналитическая функция в области $G \setminus \{a\}$, для которой точка a является полюсом первого порядка. Пусть из точки a под углом α друг к другу выходят две гладкие кривые Γ_1 и Γ_2 (см. определение 51), все точки которых, исключая a, лежат в $G \setminus \{a\}$. Пусть, наконец, C_r — часть окружности $|z-a| = r > 0$, заключённая между кривыми Γ_1 и Γ_2. Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} f(z)\,dz = \alpha i \operatorname*{res}_{z=a} f(z). \tag{5.20}$$

■ Так как a — простой полюс функции f, существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a\,(\delta)$, в которой функция f разлагается в ряд Лорана $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$, $c_{-1} \neq 0$, где $g(z) = \sum\limits_{s=0}^{+\infty} c_s(z-a)^s$ — аналитическая в $U_a(\delta)$ функция.

Пусть $0 < r < \delta$ и C_r — дуга окружности $|z-a| = r$, заключённая между кривыми Γ_1 и Γ_2. Тогда

$$\int\limits_{C_r} f(z)dz = c_{-1}\int\limits_{C_r} \frac{dz}{z-a} + \int\limits_{C_r} g(z)\,dz.$$

В первом интеграле справа сделаем замену $z - a = re^{i\varphi}$ и обозначим угловые координаты концов дуги C_r через $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$, соответственно. Тогда

$$\int\limits_{C_r} f(z)dz = ic_{-1}\int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} d\varphi + \int\limits_{C_r} g(z)dz = ic_{-1}(\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) + \int\limits_{C_r} g(z)\,dz.$$

При $r \to 0$ разность $\varphi_2(r) - \varphi_1(r)$, непрерывно меняясь (ввиду гладкости кривых Γ_1, Γ_2), имеет предел равный α, а слагаемое $\int\limits_{C_r} g(z)\,dz$ имеет предел равный нулю, так как аналитическая в $U_a(\delta)$ функция g локально ограничена на C_r, а длина C_r, равная $(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))r$, стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r} f(z)\,dz = ic_{-1}\alpha. \ \square$$

Пример 45. *Вычислить интеграл Дирихле* $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx.$

■ Этот интеграл обычно вычисляется в курсе математического анализа, используя теорию несобственных интегралов, зависящих от параметра. С помощью теории вычетов он вычисляется значительно проще.

Так как подынтегральная функция — чётная, то $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx.$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, которая имеет в $\mathbb{C}$ единственную конечную изолированную особую точку $z = 0$ — полюс первого порядка. По формуле (5.11) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = 1$. Пусть c_r, C_R — верхние полуокружности с центрами в нуле и радиусами r и R $(0 < r < R)$. Проинтегрируем функцию f по замкнутому контуру $\Gamma_{R,r}$, состоящему из отрезка $[-R, -r]$ вещественной оси, полуокружности

c_r, отрезка $[r,\ R]$ вещественной оси и полуокружности C_R, с обходом против часовой стрелки. Так как внутри контура $\Gamma_{R,r}$ функция f особых точек не имеет, то по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\Gamma_{R,\,r}} f(z)\,dz = 0.$

Разобьём контур $\Gamma_{R,r}$ на составляющие его части и перенесём интегралы по полуокружностям в правую часть равенства:

$$\int\limits_{[-R;-r]} f(x)\,dx + \int\limits_{[r;R]} f(x)\,dx = \int\limits_{C_r} f(z)dz - \int\limits_{C_R} f(z)dz.$$

При $r \to 0$ первый интеграл справа по лемме 6 стремится к $\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \pi i$, а при $R \to +\infty$ второй интеграл справа по лемме 5 стремится к нулю. Поскольку $\dfrac{\sin x}{x} = \mathcal{I}m\, f(x)$, то

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \mathcal{I}m \Big(\int\limits_{[-R;-r]} f(x)\,dx + \int\limits_{[r;R]} f(x)\,dx \Big) =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \Big(\int\limits_{[-R;-r]} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{[r;R]} \frac{\sin x}{x}\,dx \Big) = \mathcal{I}m\,\pi i = \pi.$$

Но интегралы слева при $r \to 0$ и $R \to +\infty$ имеют пределы, соответственно равные $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$, поскольку подынтегральная функция в точке $x = 0$ непрерывна, а несобственные интегралы сходятся по признаку Дирихле. Делая в первом интеграле замену $x = -t$, получаем два равных интеграла. Поэтому $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx = \dfrac{\pi}{2}.$ □

Пример 46. *Вычислить* $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx.$

■ Данный интеграл сходится: и.о.т.о.х. $x = 0$ — устранимая особая точка, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x}}{x} = 1$, а чтобы убедиться в сходимости несобственного интеграла на бесконечности отступим от нуля и разобьем интеграл на два

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Первый из них сходится по признаку Дирихле, а второй — по признаку сравнения, поскольку $\frac{e^{-x}}{x} \le e^{-x}$ при $x \ge 1$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится.

Чтобы вычислить интеграл, введем функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Для неё $z = 0$ — простой полюс и $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = 1$. Пусть c_r, C_R — дуги окружностей с центрами в нуле и радиусами r и R $(0 < r < R)$, расположенные в первой четверти комплексной плоскости с введенными на ней декартовыми координатами. Проинтегрируем функцию f по замкнутому контуру $\Gamma_{r,R}$, состоящему из отрезка $[r, R]$ действительной оси, дуги окружности C_R с обходом против часовой стрелки, отрезка $[iR, ir]$ мнимой оси и дуги окружности c_r, с обходом по часовой стрелке. Так как внутри контура $\Gamma_{r,R}$ функция f аналитична, то по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\Gamma_{r,R}} f(z)\,dz = 0$.

Разобьём интеграл на четыре слагаемых, интегрируя по каждой составляющей контура $\Gamma_{r,R}$ отдельно.

$$\int\limits_{[r;R]} \frac{e^{ix}}{x}dx - \int\limits_{[ir;iR]} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int\limits_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку $z = ix$, после чего объединим его с первым, а третий и четвёртый интегралы перенесём в правую часть равенства:

$$\int\limits_{[r;R]} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x}dx = \int\limits_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz. \tag{5.21}$$

При $r \to 0$ первый интеграл справа по лемме 6 стремится к $\frac{\pi i}{2} \operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = \frac{\pi i}{2}$. При $R \to +\infty$ второй интеграл справа по лемме 5 стремится к нулю.

Интеграл в левой части равенства (5.21), пользуясь формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, запишем в виде

$$\int\limits_r^R \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx + i \int\limits_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Оба эти интеграла сходятся, поэтому

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \Big(\int\limits_r^R \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx + i\int\limits_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx\Big) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx + i\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Таким образом, переходя в равенстве (5.21) к пределу при $r \to 0$ и $R \to +\infty$ и приравнивая вещественные и мнимые части в его левой и правой частях, окончательно получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \ \square$$

5.2.5 Интегралы от многозначных функций

Пусть $f : E \subset \overline{\mathbb{C}} \to F \subset \overline{\mathbb{C}}$ — многозначная функция (см. начало раздела 1.4). Говорят, что функция $\hat{f} : \hat{E} \subset E \to F$ является однозначной аналитической ветвью многозначной функции f, если функция $\hat{f}$ аналитична в $\hat{E}$ и для каждого $z \in \hat{E}$ число $w = \hat{f}(z) \in F$ совпадает с одним из значений $f(z)$. Первым примером многозначной функции является функция $\sqrt[n]{z} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (см. раздел 1.1.2), которая определяется равенством

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{z} := |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \\ &\arg z \in (0, 2\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Данная функция содержит n однозначных аналитический ветвей, определяемых формулой (5.22) при $k = 0, 1, \dots, n-1$ на множестве

$$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty) := \{z = re^{i\varphi} : r > 0, \ \varphi \in (0, 2\pi)\}.$$

Другой пример многозначной функции — функция $\operatorname{Ln} z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая определяется равенством

$$\operatorname{Ln} z := \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \ \arg z \in (0, 2\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \tag{5.23}$$

Данная функция содержит бесконечно много однозначных аналитических ветвей, которые определяются формулой (5.23) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ на множестве $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Однозначная ветвь при $k = 0$ называется главной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$ и обозначается $\ln z$, то есть

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z, \ 0 < \arg z < 2\pi.$$

После определения функции $\operatorname{Ln} z$ можно определить еще одну часто используемую многозначную функцию — функцию z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, которая определяется равенством

$$z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \tag{5.24}$$

В зависимости от значения α функция z^α может быть однозначной или многозначной, допускающей выделение конечного или бесконечного числа однозначных аналитический ветвей. Например, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ функция z^α — однозначная аналитическая функция в $\mathbb{C}$; при рациональном $\alpha = m/n \in \mathbb{Q}$ (n,

m — взаимно просты, $n > 1$) функция z^α — многозначная функция, имеющая n однозначных аналитический ветвей. Если взять $\alpha = i$, то

$$z^i = e^{i(\ln|z|+i(\arg z+2\pi k))} = e^{-(\arg z+2\pi k)}\, e^{i\ln|z|},\ \arg z \in (0, 2\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Функция z^α имеет бесконечно много однозначных аналитических ветвей, определенных в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, в частности, $i^i = e^{-\pi/2-2\pi k}$ имеет бесконечно много вещественных значений.

Рассмотрим теперь примеры вычисления определённых интегралов, подынтегральная функция которых при продолжении в $\mathbb{C}$ становится многозначной.

Пример 47. *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx.$

■ Подынтегральная функция имеет особыми точками точку $+\infty$ и, возможно, 0. В нуле интеграл сходится, если $1-p < 1$, то есть $p > 0$. На бесконечности он сходится, если $2-p > 1$, то есть $p < 1$. Таким образом этот интеграл сходится при $0 < p < 1$.

Введем функцию $f(z) = \dfrac{z^{p-1}}{1+z} = \dfrac{e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}}{1+z}$ (см. формулу (5.24)). Если рассматривать эту функцию в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной части вещественной оси, и выбрать главную ветвь $\ln z$ функции $\operatorname{Ln} z$, то функция f становится однозначной аналитической функцией в плоскости $\mathbb{C}$ с таким разрезом (за исключением точки $z = -1$), и на верхнем берегу разреза (на луче $\arg z = 0$) совпадает с подынтегральной функцией. Точка $z = -1$ для неё — полюс первого порядка. Найдём вычет f в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to-1} e^{(p-1)\ln z} = e^{(p-1)\ln(-1)} =$$

$$= e^{(p-1)(\ln|-1|+i\arg(-1))} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{\pi p i}.$$

Проинтегрируем функцию f по замкнутому кусочно гладкому контуру $\Gamma_{r,R}$, состоящему из отрезка $[r,\, R]$ $(0 < r < 1 < R < +\infty)$ — верхнего берега разреза (здесь $\arg z = 0$), окружности C_R радиуса R с центром в нуле с обходом против часовой стрелки, отрезка $[R,\, r]$ — нижнего берега разреза (здесь $\arg z = 2\pi$) и окружности c_r с центром в нуле радиуса r с обходом по часовой стрелке. Таким образом, контур $\Gamma_{r,R}$ обходится так, что его внутренность (она не содержит точку $z = 0$) остается слева. По обобщенной теореме о вычетах (теореме 69) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{r,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i\,(-e^{\pi p i}) = -2\pi i e^{\pi p i}$. Представим исходный интеграл в виде суммы четырёх интегралов:

$$\int\limits_{[r,R]} [f(z)]_{\text{в}}\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz - \int\limits_{[r,R]} [f(z)]_{\text{н}}\,dz - \int\limits_{c_r} f(z)\,dz = -2\pi i e^{\pi p i}. \qquad (5.25)$$

Здесь $[f(z)]_{\text{в}}$ — значения функции f на верхнем берегу разреза, а $[f(z)]_{\text{н}}$ — на нижнем берегу. На верхнем берегу разреза $z = x$ и, как отмечено выше, $[f(x)]_{\text{в}} = \dfrac{x^{p-1}}{1+x}$. На нижний берег разреза z попадает, совершив полный оборот по окружности C_R против часовой стрелки, следовательно, на нижнем берегу разреза $\arg z = 2\pi$, поэтому $z = xe^{2\pi i}$ и

$$[f(z)]_{н} = \frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} = \frac{x^{p-1}e^{2\pi i(p-1)}}{1+x} = \frac{x^{p-1}}{1+x}\,e^{2\pi p i}.$$

Подставим вычисленные значения $[f(z)]_{\text{в}}$ и $[f(z)]_{\text{н}}$ в соответствующие интегралы в (5.25):

$$\int\limits_{[r,R]} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz - e^{2\pi p i}\int\limits_{[r,R]} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx - \int\limits_{c_r} f(z)\,dz = -2\pi i e^{\pi p i}. \qquad (5.26)$$

Покажем, что при $R \to +\infty$ и $r \to 0$ интегралы по C_R и c_r стремятся к нулю. На C_R $z = Re^{i\varphi}$, поэтому

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\right| = \left|\frac{e^{(p-1)(\ln R + i\varphi)}}{1+z}\right| = \left|\frac{R^{p-1}e^{i(p-1)\varphi}}{1+z}\right| \le \frac{R^{p-1}}{R-1} \text{ и}$$

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{R^{p-1}}{R-1}\cdot 2\pi R = 2\pi\frac{R^p}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0, \text{ так как } p<1.$$

Аналогично, так как $z = re^{i\varphi}$ на c_r, то

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\right| = \left|\frac{e^{(p-1)(\ln r + i\varphi)}}{1+z}\right| = \left|\frac{r^{p-1}e^{i(p-1)\varphi}}{1+z}\right| \le \frac{r^{p-1}}{1-r} \text{ и}$$

$$\left|\int\limits_{c_r} f(z)dz\right| \le \frac{r^{p-1}}{1-r}\cdot 2\pi r = 2\pi\frac{r^p}{1-r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0, \text{ так как } p>0.$$

После предельного перехода в (5.26) при $r \to 0$ и $R \to +\infty$ получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx - e^{2\pi p i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = (1-e^{2\pi p i})\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = -2\pi i e^{\pi p i}.$$

Разделим равенство на $1 - e^{2\pi pi}$ и найдём значение интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = -\frac{2\pi i e^{\pi pi}}{1 - e^{2\pi pi}} = \frac{2\pi i e^{\pi pi}}{e^{\pi pi}\big(e^{\pi pi} - e^{-\pi pi}\big)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,. \ \square$$

Замечание. Вычисление интеграла в примере 47 доказывает формулу дополнения для Г- и В- функций Эйлера:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \ (0 < p < 1). \tag{5.27}$$

При $p = 1/2$ получим, что $\Gamma^2(1/2) = \pi$, то есть $\Gamma(1/2) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$.

Зная величину интеграла $\Gamma(1/2)$, можно легко вычислить интеграл Пуассона, делая в нем замену переменной $x^2 = t$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Теперь нетрудно вычислить интегралы Френеля, имеющие приложение в теории дифракции света и названные так в честь ее создателя — французского физика Френеля (Augustin Jean Fresnel): $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$, $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx$.

Для этого рассмотрим интеграл $\int\limits_{L_R} e^{iz^2}\, dz$, где L_R — проходимый против часовой стрелки замкнутый контур, состоящий из отрезка $[0, R]$, $R > 0$, расположенного на неотрицательной части вещественной оси, восьмой части окружности $C_R = \{z : z = Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, \pi/4]\}$ и радиуса, проведенного из центра $z = 0$ в точку $z_0 = Re^{i\pi/4}$.

В силу интегральной теоремы Коши (теоремы 37), свойства аддитивности интеграла и того, что на неотрицательной части вещественной оси $z = x$, а на биссектрисе первого координатного угла $z = xe^{i\pi/4}$, $x \geq 0$,

$$0 = \int\limits_{L_R} e^{iz^2}\, dz = \int\limits_0^R e^{ix^2}\, dx - \int\limits_0^R e^{-x^2} e^{i\pi/4}\, dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2}\, dz.$$

При переходе в этом равенстве к пределу при $R \to +\infty$ трудность состоит в том, что к последнему интегралу в сумме напрямую не применима первая лемма Жордана: не выполнено условие $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Чтобы обойти эту трудность, сначала заметим, что

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{iz^2}}{z}\right)' = e^{iz^2} - \frac{e^{iz^2}}{2iz^2}, \text{ то есть } e^{iz^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{iz^2}}{z}\right)' + \frac{e^{iz^2}}{2iz^2},$$

а затем представим интеграл по C_R в виде суммы двух интегралов. К первому интегралу применим формулу Ньютона-Лейбница, а ко второму — первую лемму Жордана, и получим, что

$$\int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-R^2}}{Re^{i\pi/4}} - \frac{e^{iR^2}}{R}\right) + \int\limits_{C_R}\frac{e^{iz^2}}{2iz^2}\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}e^{i\pi/4}\,dx$, то есть

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2\,dx + i\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\,dx.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Вернемся к примерам вычисления интегралов от многозначных функций.

Пример 48. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^2+1}$.

■ В плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ рассмотрим функцию $\frac{\ln z}{z^2+1}$, где $\ln z$ рассматривается, как и выше, главная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} z$: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Пусть $\Gamma_{r,R}$ — проходимый против часовой стрелки замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R,\,-r]$ вещественной оси, верхней полуокружности c_r с центром в нуле и радиуса r, отрезка $[r,\,R]$ вещественной оси и верхней полуокружности C_R с центром в нуле и радиуса R $(0 < r < 1 < R < +\infty)$. Так как условия обобщенной теоремы о вычетах выполнены, то

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\,\frac{\ln i}{2i} = \pi\ln i = \frac{\pi^2}{2}\,i.$$

Представим интеграл по контуру $\Gamma_{r,R}$ в виде суммы четырех интегралов:.

$$\int\limits_{-R}^{-r}\frac{\ln x\,dx}{x^2+1} - \int\limits_{c_r} f(z)\,dz + \int\limits_r^R\frac{\ln x\,dx}{x^2+1} + \int\limits_{C_r} f(z)\,dz = \frac{\pi^2}{2}\,i\,. \tag{5.28}$$

В интеграле по отрезку $[-R,\,-r]$ $\arg x=\pi$, так как на отрицательную часть вещественной оси z попадает с положительной, совершив полуоборот по C_R против часовой стрелки, поэтому $\ln x=\ln|x|+\pi i$. Сделаем еще в первом интеграле подстановку $x=-t$:

$$\int\limits_{-R}^{-r}\frac{\ln x\,dx}{x^2+1}=\int\limits_{-R}^{-r}\frac{\ln|x|+\pi i}{x^2+1}\,dx=\int\limits_{r}^{R}\frac{\ln t+\pi i}{t^2+1}\,dt\,. \tag{5.29}$$

Оценим второй и четвёртый интегралы в (5.28). На c_r:

$$|f(z)|=\frac{|\ln r+i\arg z|}{|z^2+1|}\le\frac{\sqrt{\ln^2 r+\pi^2}}{1-r^2}\,,\ \text{поэтому}$$

$$\Bigl|\int\limits_{c_r}f(z)dz\Bigr|\le\frac{\sqrt{\ln^2 r+\pi^2}}{1-r^2}\cdot\pi r\xrightarrow[r\to+0]{}0,\ \text{так как}\ \lim_{r\to+0}r\,\ln r=0.$$

На C_R: $\quad |f(z)|=\dfrac{|\ln R+i\arg z|}{|z^2+1|}\le\dfrac{\sqrt{\ln^2 R+\pi^2}}{R^2-1}$, поэтому

$$\Bigl|\int\limits_{C_R}f(z)dz\Bigr|\le\frac{\sqrt{\ln^2 R+\pi^2}}{R^2-1}\cdot\pi R\xrightarrow[R\to+\infty]{}0,\ \text{так как}\ \lim_{R\to+\infty}\ln R/R=0.$$

Подставим в (5.28) правую часть равенства(5.29), заменяя t на x, устремим r к нулю, а R к бесконечности, и получим, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x+\pi i}{x^2+1}\,dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi^2}{2}i,\ \text{или}$$

$$2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx+\pi i\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi^2}{2}i,$$

откуда следует, что $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0,\quad \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}\,.$ $\square$

Пример 49. *Вычислить интеграл* $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(x+8)^2}\,.$

■ Данный интеграл сходится, так как $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\sim\dfrac{1}{x^{5/3}}$ при $x\to+\infty$.

В комплексной плоскости с разрезом по положительному лучу $[0,+\infty)$ функция $f(z)=\sqrt[3]{|z|}\,e^{i\varphi/3}$, $0<\varphi=\arg z<2\pi$, является однозначной аналитической ветвью многозначной функции $\sqrt[3]{z}$.

Рассмотрим область $D_R=\{z:|z|<R\}\setminus[0,R],\ R>8$. Граница Γ^+ области D_R состоит из отрезка γ^+ — верхнего берега разреза (отрезка $[0,R]$), окружности $C_R=\{z:|z|=R\}$, отрезка γ^- — нижнего берега разреза (отрезка $[R,0]$). На Γ^+ выбираем обход так, что область D_R остается слева (против часовой стрелки).

Функция $g(z)=\dfrac{f(z)}{(z+8)^2}$ аналитична в области $D_R\setminus\{-8\}$, непрерывна в области $D_R\setminus\{-8\}$ и на Γ^+. Точка $z=-8$ — полюс второго порядка функции $g(z)$. Из основной теоремы о вычетах следует, что

$$\int\limits_{\Gamma^+} g(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-8}g(z),\ \text{ то есть}$$

$$\int\limits_{C_R}\frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz+\int\limits_{\gamma^+}\frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz+\int\limits_{\gamma^-}\frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-8}\frac{f(z)}{(z+8)^2}. \tag{5.30}$$

Рассмотрим каждый интеграл в равенстве (5.30).

Если $|z|=R>8$, то $|f(z)|=\sqrt[3]{R}$, $|z+8|\geq||z|-8|=R-8$. Следовательно, $\dfrac{1}{|z+8|}\leq\dfrac{1}{R-8}$ и потому

$$I_1(R)=\left|\int\limits_{C_R}\frac{f(z)}{(x+8)^2}\,dz\right|\leq 2\pi R\,\frac{\sqrt[3]{R}}{(R-8)^2}\to 0 \text{ при } R\to+\infty.$$

Если $z\in\gamma^+$, то $f(z)=f(x+i0)=\sqrt[3]{x}$, $0\leq x\leq R$, поэтому при $R\to+\infty$

$$I_2=\int\limits_{\gamma^+}\frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz=\int\limits_0^R\frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx\to\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx=I.$$

Если $z\in\gamma^-$, то $f(z)=f(xe^{2\pi i})=\sqrt[3]{x}\,e^{2\pi i/3}$, $R\geq x\geq 0$, поэтому при $R\to+\infty$

$$I_3=\int\limits_{\gamma^-}\frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz=e^{2\pi i/3}\int\limits_R^0\frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx=-e^{2\pi i/3}\,I_2\to-e^{2\pi i/3}\,I.$$

Заметим, что $f'(z)=(\sqrt[3]{z})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{z}}{3z}=\dfrac{f(z)}{3z}$ и вычислим правую часть равенства (5.30), которая не зависит от R, пользуясь формулой (5.9) при $k=2$:

$$2\pi i\operatorname*{res}_{z=-8}\frac{f(z)}{(x+8)^2}=2\pi i\,f'(z)\Big|_{z=-8}=2\pi i\,\frac{f(z)}{3z}\Big|_{z=-8}=$$

$$= 2\pi i \, \frac{2}{-24} \, e^{\pi i/3} = -\frac{\pi i}{6} e^{\pi i/3}.$$

Из равенства (5.30) получаем, что $(1 - e^{2\pi i/3})I = -\dfrac{\pi i}{6} e^{\pi i/3}$, следовательно,

$$I = -\frac{\pi i e^{\pi i/3}}{6(1 - e^{2\pi i/3})} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{2i}{e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}} = \frac{\pi}{12 \sin(\pi/3)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}. \ \square$$

Анализируя вычисление с помощью теории вычетов всех рассмотренных выше интегралов, несмотря на их разнообразие, можно отметить два общих и ключевых момента в вычислении: выбор подходящей подынтегральной функции и подходящего контура интегрирования.

5.3 Логарифмический вычет и его следствия

Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, за исключением конечного числа полюсов и имеет в области G конечное число нулей. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Ее называют *логарифмической производной* функции f, а вычеты в её особых точках называют *логарифмическими вычетами* функции f.

Теорема 75 (о логарифмическом вычете)**.** *Пусть функция f аналитична в некоторой области G, за исключением конечного числа полюсов. Пусть Γ — замкнутый контур, содержащийся в G вместе со своей внутренностью, с обходом против часовой стрелки, а функция f не имеет на Γ ни нулей, ни полюсов. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \tag{5.31}$$

где N — число нулей функции f, находящихся внутри контура Γ, с учетом их кратностей, а P — число полюсов функции f, находящихся внутри контура Γ, с учетом их порядков.

■ Найдем изолированные особые точки функции $g = \dfrac{f'}{f}$ и вычислим её вычеты в этих точках. Так как f и f' — аналитические в области G функции, то особыми точками функции g могут быть только нули и полюса функции f. В остальных точках области G функция g аналитическая как частное аналитических функций.

По условию функция f имеет внутри контура Γ конечное число полюсов. При выполнении условий теоремы функция f на любом компакте $K \subset G$ может иметь лишь конечное число нулей. Если предположить противное, то есть предположить, что найдется компакт $K_0 \subset G$ и последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $z_n \in K_0$, $z_n \neq z_k$ при $n \neq k$, $f(z_n) = 0$, то множество $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет в K_0 хотя бы одну предельную точку. Тогда по теореме единственности 55 функция f была бы тождественным нулём в G, что противоречит условию теоремы: $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Gamma$.

Итак, у функции $g = \dfrac{f'}{f}$ внутри контура Γ существует лишь конечное число и.о.т.о.х., и к интегралу (5.31) можно применить основную теорему о вычетах.

Чтобы вычислить вычет функции g в каждой и.о.т.о.х., рассмотрим отдельно нули функции f и её полюса.

Пусть a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — нули функции f, расположенные в $\operatorname{int}\Gamma$, и пусть n_k — кратность нуля a_k. Тогда (см. теорему 58) функцию f в некоторой окрестности точки a_k можно представить в виде $f(z) = (z-a_k)^{n_k}\varphi_k(z)$, где функция φ_k аналитична в этой окрестности и $\varphi_k(a_k) \neq 0$. Без нарушения общности рассуждений можно считать, что $\varphi_k(z) \neq 0$ в рассматриваемой окрестности. Поэтому для g в этой окрестности имеет место представление:

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k(z-a_k)^{n_k-1}\varphi_k(z) + (z-a_k)^{n_k}\varphi_k'(z)}{(z-a_k)^{n_k}\varphi_k(z)} = \frac{n_k}{z-a_k} + \frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)}\,.$$

Из этого представления, в силу того, что второе слагаемое является аналитической в окрестности точки a_k функцией, следует, что точка a_k для функции g — полюс первого порядка и

$$\operatorname*{res}_{z=a_k} g(z) = n_k. \tag{5.32}$$

Пусть b_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ — полюсы функции f, расположенные в $\operatorname{int}\Gamma$, и пусть p_j — порядок полюса b_j. Тогда функцию f в некоторой проколотой окрестности точки b_j можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\psi_j(z)}{(z-b_j)^{p_j}}$, где функция ψ_j аналитична в этой окрестности и $\psi_j(b_j) \neq 0$ (см. следствие 61.1 и формулу (4.19)). Вновь, можно считать, что в рассматриваемой окрестности $\psi_j(z) \neq 0$. Поэтому для функции g в указанной проколотой окрестности имеет место представление

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p_j(z-b_j)^{-p_j-1}\psi_j(z) + (z-b_j)^{-p_j}\psi_j'(z)}{(z-b_j)^{-p_j}\psi_j(z)} = \frac{-p_j}{z-b_j} + \frac{\psi_j'(z)}{\psi_j(z)}\,.$$

Из этого представления следует, что точка b_j для функции g — полюс первого порядка и

$$\operatorname*{res}_{z=b_j} g(z) = -p_j. \tag{5.33}$$

Применяя к интегралу (5.31) основную теорему о вычетах и используя формулы (5.32), (5.33), находим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} g(z) + \sum_{j=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=b_j} g(z) = \sum_{k=1}^{n} n_k + \sum_{j=1}^{p}(-p_j) = N - P,$$

где $N=\sum\limits_{k=1}^{n} n_k, \quad P=\sum\limits_{j=1}^{p} p_j\,.$ $\square$

Следствие 75.1 (принцип аргумента). *Пусть выполнены условия теоремы 75. Разность между числом нулей и полюсов функции f, находящихся внутри замкнутого контура Γ, равна приращению аргумента $f(z)$ при обходе точкой z контура Γ против часовой стрелки, делённому на 2π :*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}\,. \tag{5.34}$$

Замечание. Приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе против часовой стрелки контура Γ точкой z, $\mathrm{var}\arg f(z)\big|_{\Gamma}$, следует понимать так. Выберем точку $z_0\in\Gamma$ и вычислим число $\theta_1=\arg f(z_0)$. Затем будем перемещать точку z по контуру Γ от точки z_0 против часовой стрелки, что приведет к непрерывному изменению значения $\arg f(z)$. При возвращении в точку z_0 получим возможно другое число $\theta_2=\arg f(z_0)$. Тогда $\mathrm{var}\arg f(z)\Big|_{\Gamma}=\theta_2-\theta_1$. Отметим, что $\dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{var}\arg f(z)\Big|_{\Gamma}$ — это число оборотов вокруг точки $w=0$ вектора $w=f(z)$ при полном обходе точкой z контура Γ в положительном направлении. Значение $\arg f(z)$ изменится, если точка $w=0$ лежит внутри кривой, описываемой вектором $w=f(z)$.

■ По теореме 75 разность $N-P$ вычисляется с помощью интеграла (5.31). Так как $\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz=d(\mathrm{Ln}\,f(z))$, то

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d(\mathrm{Ln}\,f(z))=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{var}\big[\mathrm{Ln}\,f(z)\big]\Big|_{\Gamma}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\mathrm{var}\big[\ln|f(z)|\big]\Big|_{\Gamma}+i\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}\right)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}\,,$$

так как $\mathrm{var}\big[\ln|f(z)|\big]\Big|_{\Gamma}=0$, поскольку $\ln|f(z)|$ — однозначная функция. $\square$

Следствие 75.2. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция f аналитична в ней, а Γ — положительно ориентированный замкнутый контур, расположенный в G вместе со своей внутренностью. Если f не имеет нулей на Γ, то число нулей функции f с учётом их кратностей, содержащихся внутри замкнутого контура Γ, вычисляется по формуле*

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}\,. \tag{5.35}$$

■ Действительно, так как функция f не имеет полюсов, то в формулах (5.31), (5.34) $P=0$. $\square$

Подсчёт числа нулей часто облегчает следующая теорема.

Теорема 76 (Руше)**.** *Пусть f, g — аналитические в области G функции, Γ — замкнутый контур, содержащийся в G вместе с внутренностью. Если на контуре Γ выполняется неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, то функции f и $f+g$ внутри контура Γ имеют одинаковое число нулей с учетом их кратностей.*

■ Пусть $N(f)$ — число нулей функции f, а $N(f+g)$ — число нулей функции $f+g$ внутри контура Γ с учетом их кратностей. Докажем, что

$$N(f+g) = N(f), \tag{5.36}$$

На контуре Γ функции f и $f+g$ в нуль не обращаются, поскольку на Γ

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \quad |f(z)+g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

поэтому для них справедлива формула (5.35). Тогда, учитывая, что аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, а приращение аргумента суммы функций равно сумме приращений аргумента слагаемых, получим:

$$N(f+g) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg(f(z)+g(z))\big]\Big|_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg\left(f(z)\left(1+\varphi(z)\right)\right)\big]\Big|_\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_\Gamma + \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg\left(1+\varphi(z)\right)\big]\Big|_\Gamma, \text{ где } \varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}.$$

Покажем, что $\mathrm{var}\big[\arg(1+\varphi(z))\big]\Big|_\Gamma = 0$. Пусть $w(z) = 1+\varphi(z)$, $z \in \Gamma$. Тогда

$$|w(z) - 1| = |\varphi(z)| < 1, \ z \in \Gamma, \quad \text{так как } |f(z)| > |g(z)| \text{ на } \Gamma.$$

Когда точка z совершает обход по контуру Γ, то точка $w(z)$ описывает замкнутую (функция φ однозначна!) кривую, расположенную в открытом круге $|w-1| < 1$, следовательно, точка $w(z) = 1+\varphi(z)$ не совершает обхода вокруг нуля, поэтому её аргумент не получит приращения. Следовательно,

$$N(f+g) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_\Gamma = N(f). \ \square$$

В качестве примеров использования теоремы Руше приведем несколько интересных результатов.

Теорема 77 (основная теорема алгебры)**.** *Любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$ n нулей (с учётом их кратностей).*

■ Представим многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ $(n \geq 1)$, $a_n \neq 0$, в виде $P_n(z) = f(z) + g(z)$, где $f(z) = a_n z^n$, $\ g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Так как, очевидно, что $\lim\limits_{z\to\infty} |P_n(z)| = +\infty$,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} = 0,$$

то найдётся такое число $r_0 > 0$, что для всех значений $z: \ |z| \geq r_0$ будут выполняться неравенства $\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ или $|g(z)| < |f(z)|$, $|P_n(z)| \geq 1$. Так как на окружности $|z| = r_0$ выполняется неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, то по теореме Руше в круге $|z| < r_0$ многочлен $P_n(z)$ имеет столько же нулей, с учетом их кратностей, сколько и функция $f(z) = a_n z^n$, то есть n, а в области $|z| \geq r_0$ многочлен $P_n(z)$ нулей не имеет, так как в ней $|P_n(z)| \geq 1$. $\square$

Теорема 78 (принцип сохранения области). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция $f(z)$ аналитична в G и отлична в ней от тождественной константы. Тогда f осуществляет открытое отображение, то есть $f(G)$ — область.*

$\blacksquare$ Связность $f(G)$ следует из непрерывности функции f. Докажем, что $f(G)$ — открытое множество. Пусть $b \in f(G)$, то есть существует такая точка $a \in G$, что $f(a) = b$. Поскольку $f \not\equiv \mathrm{const}$, то найдётся круг $U_a(\varepsilon)$ с центром в точке a и радиуса $\varepsilon > 0$ такой, что $|f(z) - b| \neq 0$, $\forall\, z \in \overline{U}_a(\varepsilon) \setminus \{a\}$ (если бы такой окрестности не нашлось, это означало бы, что существует такая последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \neq a$, $z_n \in G$, $\lim z_n = a$, $f(z_n) = b$, а тогда по теореме единственности $f(z) \equiv b$ в G). Значит,

$$\mu = \min_{z \in \partial U_a(\varepsilon)} |f(z) - b| > 0.$$

Рассмотрим круг $U_b(\mu/2)$ радиуса $\mu/2$ с центром в точке b. Пусть w лежит в этом круге. Пусть $h(z) = f(z) - b$, $g(z) = b - w$. Очевидно, имеет место представление $f(z) - w = (f(z) - b) + (b - w) = h(z) + g(z)$, $w \in U_b(\mu/2)$. Тогда на окружности $\partial\overline{U}_a(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|g(z)| < \mu/2 < |h(z)|$. По теореме Руше в $U_a(\varepsilon)$ $N(f - w) = N(h) = N(f - b) = 1$, то есть функция $f(z) - w$ имеет один нуль в $U_a(\varepsilon)$, и потому найдётся единственная точка $z \in U_a(\varepsilon)$, такая что $f(z) = w$. То есть у каждой точки w из круга $U_b(\mu/2)$ есть прообраз, следовательно, $U_b(\mu/2) \subset f(G)$, и потому b — внутренняя точка $f(G)$. $\square$

Заметим, что число прообразов точки $w \in f(G)$ в G не обязательно 1.

Теорема 79 (Гурвица). *Пусть функции f_n, $n \in \mathbb{N}$ аналитичны в области $G \subset \mathbb{C}$, а последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f внутри области G. Пусть γ замкнутый контур, лежащий в области G вместе со своей внутренностью, и $f(z) \neq 0$ на γ. Тогда существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > n_0$ функции f_n и f имеют в $\operatorname{int}\gamma$ одинаковое число нулей (с учетом их кратностей).*

$\blacksquare$ Аналитичность функции f в области G следует из следствия 50 теоремы 49. Положим

$$\mu = \inf_{z \in \gamma} |f(z)| = \min_{z \in \gamma} |f(z)| > 0.$$

Поскольку γ — компакт в G, то $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f на γ. Следовательно, по числу $\mu > 0$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu, \ \forall\, n > n_0, \ \forall\, z \in \gamma.$$

Но так как $|f(z)| \geq \mu$, $\forall\, z \in \gamma$, то

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|, \ \forall\, n > n_0, \ \forall\, z \in \gamma.$$

По теореме Руше для любого $n > n_0$ функции $f(z)$ и $\big(f_n(z) - f(z)\big) + f(z) = f_n(z)$ имеют в $\operatorname{int}\gamma$ одинаковое число нулей (с учетом их кратностей). $\square$

В заключение рассмотрим примеры применения теоремы Руше и принципа аргумента к решению конкретных задач.

Пример 50. *Пусть функция f аналитична в некоторой области G, содержащей круг $|z| \leq 1$ и $|f(z)| < 1$ в открытом круге $|z| < 1$. Доказать, что функция f имеет в круге $|z| < 1$ единственную неподвижную точку, то есть такую точку z_0, что $|z_0| < 1$ и $f(z_0) = z_0$.*

■ Положим $h(z) = f(z) - z$. Так как на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство $|f(z)| < |z|$, то по теореме Руше в открытом круге $|z| < 1$ функции z и $h(z)$ имеют одинаковое число нулей с учетом их кратностей, то есть один нуль z_0 функции $h(z)$. $\square$

Пример 51. *Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.*

■ Представим левую часть уравнения в виде суммы двух функций: $f(z) = -5z^5$ и $g(z) = z^8 - 2z + 1$. На окружности $|z| = 1$ имеем:

$$|f(z)| = |5z^5| = 5, \quad |g(z)| = |z^8 - 2z + 1| \leq |z|^8 + 2|z| + 1 = 4.$$

Следовательно, $|g(z)| < |f(z)|$ на $|z| = 1$.

Функция f имеет в круге $|z| < 1$ один корень кратности 5. По теореме Руше функция $f + g$, а значит и данное уравнение, имеет в круге $|z| < 1$ столько же корней, сколько и функция f — пять корней с учётом их кратностей. $\square$

Пример 52. *Вычислить число корней уравнения $z^6 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$.*

■ Сначала выясним, сколько корней имеет это уравнение внутри окружности $|z| < 3$, а затем, сколько на окружности $|z| = 1$ и внутри ее. Разность полученных результатов будет искомым числом корней данного уравнения.

Рассмотрим функции $g(z) = z^6$ и $f(z) = -8z + 10$. На окружности $|z| = 3$ имеем $|z^6| = 3^6$, $|-8z + 10| \leq |-8z| + 10 = 24 + 10 = 34$, таким образом, $|g(z)| > |f(z)|$ на окружности $|z| = 3$. В силу теоремы Руше функция $g(z)$

и функция $f(z)+g(z)$ в круге $|z|<3$ имеют по шесть нулей с учётом их кратностей, поскольку уравнение $g(z)=0$ имеет корень $z=0$ кратности 6. Следовательно, заданное уравнение в круге $|z|<3$ имеет шесть корней с учётом их кратностей.

На окружности $|z|=1$ выполняется неравенство

$$|f(z)|=|-8z+10|\geq|10-|8z||=10-8=2>|g(z)|=|z^6|=1,$$

Следовательно, на этой окружности данное уравнение не имеет корней, а внутри ее число его корней и число корней уравнения $-8z+10=0$ одно и то же. А поскольку уравнение $-8z+10=0$ не имеет там корней, там нет корней и заданного уравнения. Итак, уравнение $z^6-8z+10=0$ имеет шесть корней с учётом их кратностей в кольце в кольце $1<|z|<3$. $\square$

Глава 6

Однолистные функции

Начнем с основного для данной главы определения.

Определение 79. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется однолистной в области G, если она аналитична и инъективна в G.*

Примеры однолистных функций уже рассматривались в главе 2 при изучении конформных отображений, хотя они так не назывались. Определение конформного отображения в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, в точке ∞ и в области было дано в главе 2 (см. определения 63, 64, 65). Например, функция $f(z) = z^2$ аналитична и инъективна, а значит однолистна в любом открытом угле в вершиной в нуле, раствор которого меньше π (см. раздел 2.3). Такой же будет функция $f(z) = e^z$ в любой открытой горизонтальной полосе ширины меньше 2π (см. раздел 2.2).

Изучим свойства однолистных функций. Начнем с теоремы о сохранении свойства однолистности при предельном переходе.

Теорема 80 (Гурвица)**.** *Если функции f_n однолистны в области $G \subset \mathbb{C}$, а последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f внутри области G, то либо функция f однолистна в области G, либо $f \equiv const$.*

■ Аналитичность функции f в области G следует из теоремы 50. Отметим, что однолистность функции f в области G означает, что $f \not\equiv const$ в G. Предположим, что функция f не постоянна в G и $b \in f(G)$ имеет несколько прообразов — точек $a_i \in G$, для которых $f(a_i) = b$. Тогда полный прообраз $f^{-1}(b) = \{a_i\}$ — дискретное множество (все точки изолированные) и потому найдутся круги $U_{a_i}(\delta_i) \subset G$ такие, что внутри такого круга нет других нулей функции $f(z) - b$, кроме точки a_i и $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \partial U_{a_i}(\delta_i)$. Следовательно,

$$\mu_i = \min_{z \in \partial U_{a_i}(\delta_i)} |f(z) - b| > 0.$$

Но $f_n(z) - b = (f(z) - b) + (f_n(z) - f(z))$. В силу равномерной сходимости последовательность $\{f_n\}$ на замкнутом круге $\overline{U_{a_1}}(\delta_1)$, начиная с некоторого номера n_1, $|f_n(z) - f(z)| < \mu_1/2$, $\forall z \in \overline{U_{a_1}}(\delta_1)$. Таким образом, $|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - b)|$, $\forall z \in \partial U_{a_1}(\delta_1)$, поэтому из теоремы Руше следует, что у функции $f_n(z) - b$ при

$n > n_1$ в круге $U_{a_1}(\delta_1)$ есть точно один нуль. Аналогично, найдется номер n_2, такой, что у функции $f_n(z) - b$ при $n > n_2$ в круге $U_{a_2}(\delta_2)$ есть точно один нуль. Поэтому каждая из функций $f_n(z) - b$ при $n > \max\{n_1; n_2\}$ имеет в G по крайней мере два нуля, то есть каждая из функций $f_n(z)$, $n > \max\{n_1; n_2\}$, не является однолистной функцией в G, что противоречит условию. Следовательно, f однолистна в G. $\square$

Одной из основных теорем в теории однолистных функций является следующий результат.

Теорема 81 (о p-листном отображении)**.** *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ и функция f аналитична в G. Пусть либо существует $p \geq 2$ такое, что $f^{(k)}(z_0) = 0$ для $1 \leq k \leq p-1$ и $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, либо $f'(z_0) \neq 0$. Тогда существуют окрестности U_{z_0} точки z_0 и U_{w_0} точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что $\forall w \in \overset{\circ}{U}_{w_0}$ множество $f^{-1}(w) = \{z \in G : f(z) = w\}$ состоит из p различных точек.*

■ Утверждение, что множество $f^{-1}(w)$ состоит из p различных точек означает, что функция $f(z) - w$ имеет в G точно p простых нулей. Покажем, что при выполнении условий теоремы существует число $\rho > 0$ такое, что $\overline{K}_{z_0}(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\} \subset G$ и для любого z из $\overline{K}_{z_0} \setminus \{z_0\}$ имеют место неравенства $f(z) \neq f(z_0)$, $f'(z) \neq 0$.

a) Предположим, что не существует такого числа $\rho_1 > 0$, что $\overline{K}_{z_0}(\rho_1) \subset G$ и для любого z из $\overline{K}_{z_0}(\rho_1) \setminus \{z_0\}$ имеет место неравенство $f(z) \neq f(z_0)$. Тогда существует последовательность

$$\{z_j\}_{j=1}^{\infty} : z_j \in G,\ z_j \neq z_0,\ \lim_{j\to\infty} z_j = z_0 \text{ и } f(z_j) = f(z_0), j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку z_0 — предельная точка множества $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$, $z_0 \in G$ и $f(z_j) - f(z_0) = 0$, $j \in \mathbb{N}$, то по теореме единственности для аналитических функций (теореме 55) $f(z) \equiv f(z_0)$ в G, что противоречит условию $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Следовательно, такое число $\rho_1 > 0$ существует.

b) Предположим, что не существует такого числа $\rho_2 > 0$, что $\overline{K}_{z_0}(\rho_2) \subset G$ и для любого z из $\overline{K}_{z_0}(\rho_2) \setminus \{z_0\}$ имеет место неравенство $f'(z) \neq 0$. Тогда, аналогично предыдущему, $f'(z) \equiv 0$ в G, что противоречит условию $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Следовательно, такое число $\rho_2 > 0$ существует.

Пусть $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$, $\mu = \inf\limits_{z \in C_\rho} |f(z) - f(z_0)|$. Тогда существует точка $t \in C_\rho : \mu = |f(t) - f(z_0)| > 0$. Построим окрестности

$U_{z_0}(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$, $U_{w_0}(\mu) = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$, где $w_0 = f(z_0)$,

и покажем, что оно являются искомыми. Пусть $w \in \overset{\circ}{U}_{w_0}(\mu)$. Тогда $|f(z) - w_0| \geq \mu > |w_0 - w|$ для всех $z \in C_\rho$. Поэтому по теореме Руше функции $f(z) - w_0$ и $(f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f(z) - w$ имеют в $\operatorname{int} C_\rho$ одинаковое число нулей (с учетом их кратностей). Но по условию теоремы, функция $f(z) - w_0$ имеет в $U_{z_0}(\rho)$ единственный нуль z_0 кратности p. Следовательно, функция $f(z) - w$ имеет в $U_{z_0}(\rho)$ точно p нулей с учетом их кратностей. Так как $f'(z) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_{z_0}(\rho)$ и z_0 не является нулем $f(z) - w$, то каждый нуль функции $f(z) - w$ является простым. Итак, функция $f(z)$ имеет в $U_{z_0}(\rho)$ точно p простых нулей. $\square$

Теорема 82 (необходимое условие однолистности)**.** *Если функция f однолистна в области G, то $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in G$.*

$\blacksquare$ Предположим противное: $\exists\, z_0 \in G : f'(z_0) = 0$. Поскольку f однолистна в области G, функция f отлична от тождественной постоянной в G, а значит найдется такое число $p \geq 2$, что $f'(z_0) = \ldots f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Иначе, если $f^{(k)}(z_0) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $f(z) = f(z_0)$ в G, что противоречит условию однолистности f в G. Тогда по теореме 81 о p-листном отображении, существуют окрестности U_{z_0} точки z_0 и U_{w_0} точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что любая точка w из $\overset{\circ}{U}_{w_0}$ имеет, по крайней мере, два различных прообраза при отображении f, то есть $\exists\, z_1, z_2 \in U_{z_0} : z_1 \neq z_2,\ f(z_1) = f(z_2) = w$. Последнее противоречит условию инъективности f в G. $\square$

Замечание. Утверждение, обратное к теореме 82 неверно: из условия $f'(z) \neq 0$ в области G не следует однолистность функции f в области G. Например, функция $f(z) = e^z$ является целой, $f'(z) = e^z \neq 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Однако, функция f не является инъективной в $\mathbb{C}$, поскольку $e^z = e^{z+2\pi k i}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, а потому не является и однолистной в $\mathbb{C}$.

В разделе 1.7 первой главы фактически было показано, что если функция f является аналитической в некоторой окрестности U_{z_0} точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$, то в точке z_0 функция f является конформной (см. также начало главы 2). Поэтому из теоремы 82 получаем такое следствие.

Следствие 82.1. *Если функция f однолистна в области G, то функция f конформна в области G.*

Справедлива более общая теорема, которую мы оставим без доказательства.

Теорема 83 (Д.Е. Меньшова)**.** *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Тогда функция $f : G \to \mathbb{C}$ однолистна в области G, тогда и только тогда, когда функция f конформна в области G.*

Дадим определение локальной однолистности функции в точке.

Определение 80. *Функция f называется локально однолистной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если она однолистна в некоторой окрестности этой точки.*

Локальная однолистность функции f в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ равносильна существованию такой окрестности U_{z_0}, в которой функция f аналитична и инъективна.

Замечание. Очевидно, что функция, однолистная в области G, является локально однолистной в любой точке $z \in G$. Обратное, вообще говоря, не верно: функция e^z локально однолистна в любой точке $z \in \mathbb{C}$, но не является однолистной в $\mathbb{C}$.

Теорема 84 (критерий локальной однолистности)**.** *Функция f, аналитическая в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ (см. замечание на странице 28), является локально однолистной в этой точке, тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

■ *Необходимость.* Если функция f, аналитическая в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, является локально однолистной в точке z_0, то существует такая окрестность U_{z_0}, что функция f аналитична и инъективна (то есть однолистна) в этой окрестности. Тогда по теореме 82 $f'(z) \neq 0, \forall z \in U_{z_0}$, а, следовательно, $f'(z_0) \neq 0$.
Достаточность. Пусть существует окрестность $U_{z_0}(r)$, в которой функция f аналитична и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда по теореме 81 о p-листном отображении существуют такая окрестность $U_{z_0}(\rho) \subset U_{z_0}(r)$ и такая окрестность U_{w_0}, $w_0 = f(z_0)$, что любая точка $w \in \overset{\circ}{U}_{w_0}$ имеет в $U_{z_0}(\rho)$ только один прообраз, то есть функция f инъективна в $U_{z_0}(\rho)$. Следовательно, функция f локально однолистна в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. □

Теорема 85 (о функции, обратной к однолистной)**.** *Если $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — однолистная функция в области G, то её обратная функция $f^{-1} : f(G) \to G$ однолистна в области $f(G)$ и*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}\Big|_{z=f^{-1}(w)}, \ \forall w \in f(G). \tag{6.1}$$

■ Из однолистности функции f в области G следует, что функции f отлична от константы в G, а из теоремы 78 следует, что $f(G)$ — область в $\mathbb{C}$.

Функция $f : G \to f(G)$ сюръективна в силу определения множества $f(G)$, и инъективна в силу однолистности f в G, другими словами, является биекцией. Поэтому существует обратная функция $f^{-1} : f(G) \to G$:

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z, \ \forall z \in G; \quad (f \circ f^{-1})(w) = w, \ \forall w \in f(G).$$

Очевидно, что функция f^{-1} сюръективна и инъективна в области $f(G)$.

Покажем, что функция f^{-1} непрерывна в $f(G)$. Пусть $w_0 \in f(G)$, тогда существует единственная точка $z_0 \in G$ такая, что $f^{-1}(w_0) = z_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем число $r \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$U_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset G.$$

Так как $U_{z_0}(r)$ — область в $\mathbb{C}$, из теоремы 78 следует, что $f\big(U_{z_0}(r)\big)$ — область в $f(G)$ и $w_0 \in f\big(U_{z_0}(r)\big)$. Следовательно,

$$\exists U_{w_0}(\rho) \subset f\Big(U_{z_0}(r)\Big).$$

Тогда $f^{-1}\Big(U_{w_0}(\rho)\Big) \subset U_{z_0}(r)$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho > 0 : |f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < r < \varepsilon,\ \forall w \in U_{w_0}(\rho),$$

что означает непрерывность функции f^{-1} в точке w_0, а в силу произвольности выбора точки $w_0 \in f(G)$, и непрерывность функции f^{-1} в области $f(G)$.

Покажем, что функция f^{-1} аналитична в $f(G)$. Пусть точка $w_0 \in f(G)$ и $f^{-1}(w_0) = z_0 \in G$. Из непрерывности функции f в точке z_0 и непрерывности функции f^{-1} в точке w_0 следует, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),\ \lim_{w \to w_0} f^{-1}(w) = f^{-1}(w_0),$$

то есть $z \to z_0 \iff w \to w_0$, а из однолистности функции f в G следует, что $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in G$. Тогда

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}\ \Big|_{z_0 = f^{-1}(w_0)}\ .$$

В силу произвольности выбора точки $w_0 \in f(G)$ аналитичность функции f^{-1} в области $f(G)$ и формула 6.1 доказаны. Учитывая еще инъективность f^{-1} в $f(G)$, доказана ее однолистность в $f(G)$. $\square$

Приведем без доказательства (его можно найти во многих учебниках, см., например, [9, раздел 9.4]) один из основных результатов в теории однолистных функций.

Теорема 86 (принцип соответствия границ)**.** *Пусть G и D — односвязные области в $\mathbb{C}$, ограниченные кусочно гладкими замкнутыми контурами γ и Γ, соответственно. Пусть функция f однолистно отображает область G на область D (то есть f однолистна в G и $f(G) = D$). Тогда отображение f непрерывно продолжается на $\overline{G}$, при этом такое продолжение биективно отображает γ на Γ с сохранением ориентации.*

Имеет место и обратное утверждение, которое также называют принципом соответствия границ. Этот результат часто используется в приложениях и является достаточным условием однолистности функции.

Теорема 87. *Пусть f — аналитическая функция в области $G \subset \mathbb{C}$. Пусть γ — замкнутый контур, лежащий вместе со своей внутренностью в области G. Если функция f биективно отображает контур γ на контур Γ с сохранением ориентации, то f однолистно отображает $\operatorname{int}\gamma$ на $\operatorname{int}\Gamma$.*

■ Пусть $\sigma(t)$ — параметризация контура γ. Тогда, согласно условию теоремы, $h(t) = (f \circ \sigma)(t)$ — параметризация контура Γ.

Пусть $w_0 \notin \Gamma$. Тогда либо $w_0 \in \operatorname{int}\Gamma$, либо $w_0 \in \operatorname{ext}\Gamma$. Очевидно, $f(z) - w_0 \neq 0$, $\forall\, z \in \gamma$, так как иначе $\exists\, z_0 \in \gamma : f(z_0) = w_0$, и $w_0 \in \Gamma$, так как $f : \gamma \to \Gamma$, что противоречит выбору точки w_0.

Пусть контуры γ и Γ положительно ориентированы. Обозначим через N_{w_0} число корней уравнения $f(z)-w_0=0$, лежащих в $\operatorname{int}\gamma$ с учетом их кратностей. По теореме о логарифмическом вычете (теорема 75)

$$N_{w_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(f(z)-w_0)'}{f(z)-w_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz.$$

Выполним в последнем интеграле замену переменной $f(z)=t$ и получим

$$N_{w_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dt}{t-w_0}=\begin{cases}1, & \text{если } w_0\in\operatorname{int}\Gamma,\\ 0, & \text{если } w_0\in\operatorname{ext}\Gamma.\end{cases}$$

Таким образом, при отображении f, если точка $w_0\in\operatorname{ext}\Gamma$, то она не имеет прообразов в $\operatorname{int}\gamma$. Если же точка $w_0\in\operatorname{int}\Gamma$, то она имеет один прообраз в $\operatorname{int}\gamma$. Поэтому $\operatorname{int}\Gamma\subset f(\operatorname{int}\gamma)$, $f(\operatorname{int}\gamma)\subset(\operatorname{int}\Gamma)\cup\Gamma$.

Покажем, что $f(\operatorname{int}\gamma)\cap\Gamma=\varnothing$. Предположим противное, а именно, что

$$\exists\overline{w}\in\Gamma:\exists\overline{z}\in\operatorname{int}\gamma\ \text{и}\ f(\overline{z})=\overline{w}.$$

Поскольку функция f аналитична в области G и биективно отображает контур γ на контур Γ, то $f\not\equiv\ \mathrm{const}$ на γ. Тогда f отлична от тождественной константы в $\operatorname{int}\gamma$ (иначе f является постоянной в G, а, значим, и на γ). Далее, в силу принципа сохранения области, $f(\operatorname{int}\gamma)$ — область в $\mathbb{C}$. Поскольку $\overline{z}\in\operatorname{int}\gamma$, то $\overline{w}=f(\overline{z})\in f(\operatorname{int}\gamma)$ и потому найдется окрестность $U_{\overline{w}}\subset f(\operatorname{int}\gamma)$. С другой стороны, $\overline{w}\in\Gamma$ и потому

$$\exists\, w_1\in U_{\overline{w}}\cap\operatorname{ext}\Gamma:\exists z_1\in\operatorname{int}\gamma: f(z_1)=w_1,$$

а это противоречит тому, что точки из $\operatorname{ext}\Gamma$ не имеют прообразов в $\operatorname{int}\gamma$. Противоречие показывает, что $f(\operatorname{int}\gamma)\subset\operatorname{int}\Gamma$, следовательно, $f(\operatorname{int}\gamma)=\operatorname{int}\Gamma$.

Поскольку любая точка из $\operatorname{int}\Gamma$ имеет единственный прообраз в $\operatorname{int}\gamma$, то f однолистно отображает $\operatorname{int}\gamma$ на $\operatorname{int}\Gamma$. $\square$

Замечание. Принцип соответствия границ в виде теорем 87, 86 справедлив и для областей в $\overline{\mathbb{C}}$ при некоторых дополнительных ограничениях (см., например, [6, §1.29]).

Глава 7

Гармонические функции

7.1 Определение и свойства гармонических функций

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in A(G)$. Тогда, как следует из следствия 46.1, в каждой точке $z \in G$ функция f бесконечно дифференцируема. Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то функции u и v бесконечно дифференцируемы в каждой точке $(x, y) \in G$. Продифференцируем условия Коши-Римана (условия (1.7)), например, первое по переменной x, а второе по переменной y (можно и наоборот), и получим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{7.1}$$

Введем в рассмотрение оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{7.2}$$

Поскольку смешанные частные производные функции v равны, из равенства (7.1) следует, что $\Delta u = 0$. В случае дифференцирования условий Коши-Римана по переменной y, аналогично получаем, что $\Delta v = 0$.

Определение 81. *Вещественнозначная функция u, определенная в области $G \subset \mathbb{C}$, дважды непрерывно дифференцируемая в каждой точке этой области ($u \in C^2(G)$) и удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{7.3}$$

называется гармонической функцией в области G.

Теорема 88. *Если функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, то ее действительная часть $u(x, y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ и мнимая часть $v(x, y) = \mathcal{I}m\, f(z))$ — гармонические функция в G. Обратно, если область G односвязна и функция u гармонична в области G, то найдется (единственная с точностью до константы) функция $f \in A(G)$ такая, что $u(x, y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ для всех $z = x + iy \in G$.*

■ Если функция f аналитична в области G, то гармоничность ее действительной и мнимой части следует из ее бесконечной дифференцируемости и условий Коши–Римана в области G.

Обратно, пусть функция $u : G \to \mathbb{R}$ гармонична в G. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = u'_x - iu'_y.$$

Ее мнимая и вещественная части имеют частные производные по x и y, поскольку $u \in C^2(G)$, и они удовлетворяют условиям Коши–Римана: $(u'_x)'_x = (-u'_y)'_y$, а $(u'_x)'_y = -(-u'_y)'_x$, поскольку смешанные частные производные функции u равны в G. Таким образом, функция $\varphi(z)$ является аналитической в G.

Если область G односвязна, то всякая функция, аналитическая в G, имеет там первообразную (см. следствие 40.1). Значит, существует функция $f \in A(G)$ такая, что $f'(z) = \varphi(z)$ в G. Представим функцию f в виде $f = U + iV$ тогда, в силу условий Коши–Римана, получим, что $f' = U'_x + iV'_x = U'_x - iU'_y$. Из равенства $f'(z) = \varphi(z)$ следует, что $U'_x = u'_x$ и $U'_y = u'_y$, то есть $(U - u)'_x = (U - u)'_y = 0$, и, следовательно, функция $(U - u)$ постоянна в G. Вычитая эту постоянную из f, получим аналитическую в G функцию f, для которой $\mathcal{R}e\, f = u$ в G. □

Замечание. Отметим, что условие односвязности области G существенно для справедливости теоремы (это можно показать на примерах).

Определение 82. *Две вещественнозначные функции u и v, гармонические в области $G \subset \mathbb{C}$, называются сопряженными гармоническими функциями (или гармонически сопряженными), если они в области G связаны условиями Коши-Римана.*

Таким образом, мнимая и вещественная части аналитической в области G функции являются сопряженными гармоническими функциями. Наоборот, если две функции $\xi(x, y)$, $\zeta(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями в области G, то функция $f(z) = \xi(x, y) + i\zeta(x, y)$ является аналитической в G, поскольку в G выполняются условия Коши-Римана.

Перечислим свойства гармонических функций, непосредственно вытекающие из предыдущего.

Теорема 89 (бесконечная дифференцируемость)**.** *Если функция u является гармонической в области $G \subset \mathbb{C}$, то она бесконечно дифференцируема в G ($u \in C^\infty(G)$), причем все ее частные производные также гармонические функции в G.*

■ Для любой точки $z_0 \in G$ найдется достаточно малая окрестность $U_{z_0}(\delta)$, в которой u можно представить в виде $u = \mathcal{R}e\, f$ для некоторой функции f, аналитической в $U_{z_0}(\delta)$. Тогда из бесконечной дифференцируемости f следует бесконечная дифференцируемость в этой окрестности функции u.

Из условий Коши–Римана следует, что

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad if'(z) = i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Каждая из частных производных функций u и v является вещественной или мнимой частью аналитической функции f', а потому гармонической функцией. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать, что гармонической будет любая частная производная любого порядка функций u и v. $\square$

Теорема 90 (теорема о среднем). *Если функция $u(z)$ гармонична в круге $K_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, то для всех $0 \le r < R$ справедливо равенство*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\, d\theta.$$

$\blacksquare$ Отметим, что $u(z) = u(x, y)$, где $z = x + iy$. Представим u в виде $u = \mathcal{R}e\, f$ для некоторой функции f, аналитической в круге $K_{z_0}(R)$, и, чтобы получить нужный результат, выделим вещественную часть в равенстве (3.9), представляющем формулу среднего значения аналитической функции (см. следствие 43.1):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \ \square$$

Теорема 91 (единственности). *Если функции u_1, u_2 гармоничны в области $G \subset \mathbb{C}$ и множество $E = \{z \in G : u_1(z) = u_2(z)\}$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то $u_1 = u_2$ в G.*

$\blacksquare$ Функции $\varphi_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - i\dfrac{\partial u_1}{\partial y}$, $\quad \varphi_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - i\dfrac{\partial u_2}{\partial y}$ аналитичны в G, а множество

$$\{z \in G : \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\}$$

имеет по условию внутреннюю точку. Из теоремы единственности для аналитических функций (см. следствие из теоремы 55) тогда следует, что $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ в G. Следовательно, $u_1(z) - u_2(z) \equiv const$ в G. Подставляя в равенство точку z из E, получаем, что константа равна нулю. $\square$

Замечание. Отметим, что множество E нельзя взять слишком «тонким». Если, как в теореме единственности для аналитических функций, ослабить условие, потребовав только, чтобы множество E имело предельную точку в G, то теорема 91 перестанет быть верной. Например, можно взять функции $u_1(z) = \mathcal{I}m\, z$, $u_2(z) \equiv 0$. Они гармоничны в $\mathbb{C}$ и совпадают на $E = \mathbb{R}$, но не всюду в $\mathbb{C}$.

Теорема 92 (принцип максимума для гармонической функции).
(1) *Пусть функция* $u : G \to \mathbb{R}$ *гармонична в области* $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, *и в некоторой окрестности* $U_{z_0}(r) = \{z \in G : |z - z_0| < r\} \subset G$ *выполняется неравенство* $u(z) \le u(z_0)$ *для* $z \in U_{z_0}(r)$. *Тогда* $u(z) \equiv const$ *в* G.

(2) *Пусть* G *— ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *а функция* $u : G \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $\overline{G}$ *и гармонична в* G. *Тогда* $\max\limits_{z\in\overline{G}} u(z) = \max\limits_{z\in\partial G} u(z)$.

■ (1) Выберем функцию f, аналитическую в окрестности $U_{z_0}(r)$, для которой $u = \mathcal{R}e\, f$. Тогда функция $g(z) = e^{f(z)}$ также аналитична в $U_{z_0}(r)$, а ее модуль $|g(z)| = e^{u(z)}$ имеет локальный максимум в точке $z = z_0$. Из принципа максимума модуля для аналитических функций (теоремы 56) следует, что $g(z) \equiv const \ne 0$ в G. Тогда функция $u(z) = \ln|g(z)|$ также постоянна в G.

(2) Поскольку $\overline{G}$ компакт, то $\max\limits_{z\in\overline{G}} u(z)$ достигается в некоторой точке z_0 из $\overline{G}$. Если $z_0 \in \partial G$, то утверждение доказано. Если же $z_0 \in G$, то $u \equiv const$ в G в силу утверждения (1), и требуемое равенство выполняется. □

Теорема 93 (Лиувилля). *Если функция* $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *гармонична на* $\mathbb{C}$ *и ограничена сверху в* $\mathbb{C}$, *то есть* $\exists\, M \in \mathbb{R} : u(z) \le M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, *то* $u \equiv const$.

■ Рассмотрим аналитическую в $\mathbb{C}$ функцию $f(z)$ такую, что $\mathcal{R}e\, f = u$, и положим $g = e^f$, так что $|g(z)| = e^{u(z)}$. Функция g аналитична в $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля для аналитических функций (теореме 53) $g \equiv const$, следовательно, и $u \equiv const$ в $\mathbb{C}$. □

Теорема 94 (Пуассона). *Пусть* $K_0(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$, *функция* $u : K_0(r) \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $\overline{K_0}(r)$ *и гармонична в* $K_0(r)$. *Тогда для всех* $z \in K_0(r)$ *имеет место представление*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, u(\zeta)\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta}. \tag{7.4}$$

■ Представим функцию u в виде $u = \mathcal{R}e f$ для некоторой аналитической в $K_0(r)$ функции f и предположим сначала, что функции f аналитична на $\overline{K_0}(r)$, то есть аналитична в некотором круге $K_0(r_1)$, $r_1 > r$. Тогда по теореме 44 для любой точки $z \in K_0(r)$ имеет место формула (3.10), то есть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, f(\zeta)\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta}.$$

Поскольку ядро Пуассона $P(\zeta, z) = \dfrac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$ — вещественнозначная функция, то, выделяя вещественные части из обеих частей последнего равенства, получаем формулу (7.4).

Теперь избавимся от предположения, что функция f аналитична на $\overline{K_0}(r)$. Для всех $z \in K_0(r)$ справедливо соотношение

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \text{ где } f_n(z) = f\Big(z\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Все функции f_n аналитичны на $\overline{K_0}(r)$, следовательно, по доказанному

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, u_n(\zeta)\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta},\ u_n = \mathcal{R}e\, f_n. \tag{7.5}$$

В силу непрерывности функции u на $\overline{K_0}(r)$ по теореме Кантора функция u равномерно непрерывна на $\overline{K_0}(r)$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |u(z') - u(z'')| < \varepsilon, \forall z', z'' \in \overline{K_0}(r) \text{ и } |z' - z''| < \delta.$$

Пусть число $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $r/n_0 < \delta$. Тогда для любого $n > n_0$

$$|u_n(z) - u(z)| = \Big|u\Big(z\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big) - u(z)\Big| < \varepsilon,$$

поскольку $\Big|z\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)-z)\Big| \le \dfrac{r}{n} < \delta$. Последнее означает, что последовательность $\{u_n(\zeta)\}$ сходится к $u(\zeta)$ равномерно на круге $\overline{K_0}(r)$, а потому и на окружности $|z| = r$. Тогда в равенстве (7.5) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и получить формулу (7.4). $\square$

Замечание 1. Как и в случае аналитической функции формулу (7.4) можно записать в виде

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)}\, u(re^{i\theta})\, d\theta, \text{ где } 0 < \rho < r. \tag{7.6}$$

Замечание 2. Теорема 94, формулы, аналогичные (7.4) и (7.6), справедливы и для функции u непрерывной на $\overline{K_{z_0}}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ и гармонической внутри $\overline{K_{z_0}}(r)$.

7.2 Задача Дирихле для круга

Пусть на окружности $C_0(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ задана непрерывная функция $\varphi : C_0(r) \to \mathbb{R}$. Требуется найти непрерывную на $\overline{K_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ и гармоническую в $K_0(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ функцию $u : \overline{K_0}(r) \to \mathbb{R}$ такую, что $u(t) = \varphi(t), \forall\, t \in C_0(r)$.

Прежде всего покажем, что задача Дирихле не может иметь более одного решения. Допустим, что есть две функции $u_1,\ u_2 : \overline{K_0}(r) \to \mathbb{R}$, являющиеся решением задачи Дирихле для одной и той же граничной функции φ. Применяя принцип максимума для гармонической функции (теорема 92) к двум функциям $u_1 - u_2$ и $u_2 - u_1$, получим, что

$$\max_{z\in\overline{K_0}(r)}(u_1(z)-u_2(z)) = \max_{z\in C_0(r)}(u_1(z)-u_2(z)) = 0,$$

$$\max_{z\in\overline{K_0}(r)}(u_2(z)-u_1(z)) = \max_{z\in C_0(r)}(u_2(z)-u_1(z)) = 0,$$

то есть на $\overline{K_0}(r)$ $u_1(z)-u_2(z)\le 0$, $u_2(z)-u_1(z)\le 0$, откуда следует, что $u_1(z)=u_2(z)$ на $\overline{K_0}(r)$.

Задача Дирихле для круга решается с помощью формулы Пуассона (7.4). Но прежде докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 7. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и задана непрерывная функция $\varphi = \varphi(t,z) : [a,b]\times D \to \mathbb{C}$, аналитическая по переменной $z\in D$ при каждом фиксированном $t\in[a,b]$. Пусть функция f задается интегралом*

$$f(z) = \int\limits_a^b \varphi(t,z)\,dt,$$

тогда функция f аналитична в D.

■ Из равномерной непрерывности функции φ на множествах вида $[a,b]\times K$, где K — произвольный компакт из D, следует, что $f(z)$ непрерывна на D. По теореме Морера (теореме 47) остается доказать, что для любого ограниченного замкнутого треугольника $\overline{\Delta}\subset D$ выполняется равенство $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Но

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\Delta}\int\limits_a^b \varphi(t,z)\,dt\,dz = \int\limits_a^b\int\limits_{\partial\Delta}\varphi(t,z)\,dz\,dt = \int\limits_a^b 0\,dt = 0.$$

Второе равенство в этой цепочке равенств следует из теоремы Фубини для непрерывных функций, а третье — из интегральной теоремы Коши. □

Лемма 8. *Ядро Пуассона $P(\zeta,z) = \dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$, $\zeta\in C_0(r) = \{t\in\mathbb{C} : |t| = r\}$, $z\in K_0(r)=\{u\in\mathbb{C} : |u|<r\}$ обладает следующими свойствами:*

(a) $P(\zeta,z)\ge 0$, $\forall\zeta\in C_0(r)$, $\forall z\in K_0(r)$;

(b) $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\zeta,z)\,d\theta = 1,\ \forall\, z\in K_0(r)$;

(c) при каждом $\zeta_0 \in C_0(r)$ и для любого компакта $K \subset C_0(r) \setminus \{\zeta_0\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{z \to \zeta_0, z \in K_0(r)} \sup_{\zeta \in K} P(\zeta, z) = 0.$$

■ Действительно, свойство (a) следует непосредственно из представления ядра Пуассона, поскольку $|\zeta| \geq |z|$. Свойство (b) есть частный случай (при $u \equiv 1$) формулы Пуассона (7.4).

Докажем (c). Зафиксируем точку $\zeta_0 \in C_0(r)$ и компакт $K_0 \subset C_0(r) \setminus \{\zeta_0\}$. Рассмотрим окрестность $U_{\zeta_0}(\delta_0)$ точки ζ_0 такую, что $\overline{U_{\zeta_0}}(\delta_0) \bigcap K_0 = \varnothing$. Тогда (см. лемму 3)

$$\inf_{\zeta \in K_0, z \in \overline{U_{\zeta_0}}(\delta_0)} |\zeta - z|^2 = d > 0.$$

Отметим, что $|z| \to r$ при $z \to \zeta_0$, $z \in U_{\zeta_0}(\delta_0)$. Поэтому при любом $z \in \overline{U_{\zeta_0}}(\delta_0)$

$$0 \leq \sup_{\zeta \in K_0} P(\zeta, z) \leq \frac{1}{d}\big(r^2 - |z|^2\big) \to 0 \text{ при } z \to \zeta_0.$$

Другими словами, для любых точки $\zeta_0 \in C_0(r)$, компакта $K \subset C_0(r) \setminus \{\zeta_0\}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $|P(\zeta, z)| < \varepsilon$ для всех $\zeta \in K$ и всех $z \in K_0(r) : |z - \zeta_0| < \delta$. □

Теорема 95. *Пусть $C_0(r) = \{t \in \mathbb{C} : |t| = r\}$ и $\varphi : C_0(r) \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная на окружности $C_0(r)$ функция. Тогда функция $u(z)$, $z \in K_0(r) = \{u \in \mathbb{C} : |u| < r\}$, задаваемая интегралом Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta)\, d\theta, \text{ где } \zeta = re^{i\theta}, \tag{7.7}$$

гармонична в $K_0(r)$ и непрерывно продолжается на $C_0(r)$. При этом $u(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in C_0(r)$.

■ 1. Покажем сначала, что функция u, задаваемая формулой (7.7), гармонична в $K_0(r)$. Заметим, что

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathcal{R}e\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \mathcal{R}e\, \frac{(\zeta + z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})} = \mathcal{R}e\, \frac{|\zeta|^2 - |z|^2 + \overline{\zeta} z - \zeta \overline{z}}{|\zeta - z|^2} =$$

$$= \mathcal{R}e\, \frac{|\zeta|^2 - |z|^2 + \overline{\zeta} z - \overline{\overline{\zeta} z}}{|\zeta - z|^2} = \mathcal{R}e\, \Big(\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} + 2i \frac{\mathcal{I}m\, (\overline{\zeta} z)}{|\zeta - z|^2}\Big),$$

то есть при $z \in K_0(r)$ функция u совпадает с вещественной частью функции f, задаваемой интегралом вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \varphi(\zeta)\, d\theta, \ \zeta = re^{i\theta}. \tag{7.8}$$

По лемме 7 функция f аналитична в $K_0(r)$. Поэтому ее вещественная часть $u = \mathcal{R}e\, f$ гармонична в $K_0(r)$.

2. Докажем, что функция u, задаваемая формулой (7.7), непрерывно продолжается на $C_0(r)$. Доопределим функцию u на $\overline{K_0}(r)$, полагая $u(\zeta) = \varphi(\zeta)$ при $\zeta \in C_0(r)$, и докажем непрерывность продолженной функции в точках $\zeta_0 \in C_0(r)$. Из свойства (b) леммы 8 следует, что для всех $z \in K_0(r)$

$$u(z) - u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\zeta, z)\big(\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\big)\, d\theta,\ \zeta = re^{i\theta} \forall\, z \in K_0(r). \tag{7.9}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем столь малую дугу $\gamma_1 \subset C_0(r)$, содержащую ζ_0, что

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, \zeta \in \gamma_1. \tag{7.10}$$

Положим $\gamma_2 = C_0(r) \setminus \gamma_1$ и представим интеграл (7.9) в виде суммы двух интегралов по дугам γ_1 и γ_2:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\zeta, z)\big(\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\big)\, d\theta = I_1(z) + I_2(z),$$

где

$$I_j(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_j} P(\zeta, z)\big(\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\big)\, d\theta,\ j = 1, 2.$$

Тогда в силу свойств ядра Пуассона (a) и (b) леммы 8 и оценки (7.10)

$$|I_1(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} P(\zeta, z)\, d\theta < \varepsilon,\ \forall\, z \in K_0(r).$$

Оценку второго интеграла $I_2(z)$ достаточно получить для точек z, близких к ζ_0. Для этого выберем, пользуясь свойством ядра Пуассона (c) леммы 8, такое $\delta > 0$, что для всех $z \in K_0(r) : |z - \zeta_0| < \delta$ выполняется неравенство $0 \leq P(\zeta, z) < \varepsilon/2, \forall\, \zeta \in \gamma_2$.

Пусть $M = \max\limits_{\zeta \in C_0(r)} |\varphi(\zeta)|$. Тогда при $|z - \zeta_0| < \delta$, $z \in K_0(r)$, будет справедлива оценка

$$|I_2(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2} \big|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\big|\, d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\big|\, d\theta \leq M\varepsilon.$$

Следовательно, для таких z получаем неравенство $|u(z) - u(\zeta_0)| < (1 + M)\varepsilon$, которое и доказывает непрерывность u в точке ζ_0. $\square$

Формула (7.8) из доказательства теоремы дает способ восстановления функции, аналитической в круге, по граничным значениям ее вещественной части.

Следствие 95.1 (формула Шварца)**.** *Пусть функция f аналитична в круге $K_0(r) = \{u \in \mathbb{C} : |u| < r\}$, а ее вещественная часть $u = \mathcal{R}e\, f$ непрерывно продолжается на $\overline{K_0}(r)$. Тогда для всех $z \in K_0(r)$ имеет место формула Шварца*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta)\, d\theta + i\,\mathcal{I}m\, f(0), \ \zeta = re^{i\theta}. \tag{7.11}$$

■ Обозначим интеграл в правой части формулы Шварца через $F(z)$. Тогда по лемме 7 функция F аналитична в $K_0(r)$, а по формуле Пуассона $\mathcal{R}e\, F = u$ в $K_0(r)$. Поэтому $\mathcal{R}e\, (f - F) = 0$ в $K_0(r)$. Из условий Коши-Римана тогда следует, что $\mathcal{I}m\, (f - F) \equiv const$ в $K_0(r)$. Следовательно, $f - F \equiv i\ const$ в $K_0(r)$. Чтобы найти константу, подставим в определение $F(z)$ точку $z = 0$ и получим, используя формулу Пуассона, что

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\zeta)\, d\theta = u(0) = \mathcal{R}e\, f(0).$$

Но $i\ const = f(0) - F(0) = f(0) - \mathcal{R}e\, f(0) = i\ \mathcal{I}m\, f(0)$. □

Замечание 1. Задача Дирихле (теорема 95) имеет решение в виде соответствующего интеграла Пуассона и для функции u непрерывной на окружности $C_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. Формула, аналогичная формуле Шварца (7.11), верна и для функции f, аналитической в круге $K_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, вещественная часть которой непрерывно продолжается на $C_{z_0}(r)$.

Замечание 2. Отметим, что из условия непрерывной продолжаемости вещественной части $u = \mathcal{R}e\ f$ на $\overline{K_0}(r)$, вообще говоря, не следует непрерывная продолжаемость на $\overline{K_0}(r)$ самой функции f. Рассмотрим в качестве примера функцию f, аналитическую в единичном круге $K_0(1) = \{u \in \mathbb{C} : |u| < 1\}$, которая задается рядом

$$f(z) = -i\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln n}, \ z \in K_0(1).$$

Можно показать, что ее вещественная часть $u := \mathcal{R}e\ f$ непрерывно продолжается на $\overline{K_0}(1)$. Однако сама функция f не имеет непрерывного продолжения на $\overline{K_0}(1)$, поскольку $\lim\limits_{r\to 1-0} if(r) = +\infty$.

Глава 8

Аналитическое продолжение

8.1 Постановка задачи аналитического продолжения

Самым простым примером аналитического продолжения функции является продолжение аналитической функции по непрерывности в устранимую особую точку. Например, функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ определена и аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Точка $z = 0$ является для данной функции устранимой особой точкой. Аналитическое продолжение функции $f(z)$ и точку $z = 0$ задается рядом Лорана, который в данном случае совпадает с рядом Тейлора,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Определение 83. *Будем говорить, что функция f_1, аналитическая в области D_1, допускает аналитическое продолжение в область D_2 такую, что $D_1 \bigcap D_2$ область в $\mathbb{C}$, если найдется функция f_2, аналитическая в области D_2, такая, что $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall\, z \in D_1 \bigcap D_2$. В этом случае еще говорят, что функция f_2 является аналитическим продолжением функции f_1 из области D_1 в область D_2.*

Важным свойством аналитического продолжения является его единственность. Пусть функция $f_2 \in A(D_2)$ является аналитическим продолжением функции $f_1 \in A(D_1)$ из области D_1 в область D_2, а функция $F \in A(D_2)$ такова, что $F(z) = f_1(z)$, $\forall\, z \in D_1 \bigcap D_2$, то есть $F(z) = f_2(z)$, $\forall\, z \in D_1 \bigcap D_2$. Тогда, в силу теоремы единственности (теорема 55), $F(z) = f_2(z)$, $\forall\, z \in D_2$.

8.2 Аналитическое продолжение через кривую

Определение 84. *Пусть G_1, G_2 — области в $\mathbb{C}$, для которых*

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad \partial G_1 \cap \partial G_2 = \gamma \text{ — кривая в } \mathbb{C}.$$

Пусть $f \in A(G_1)$. Если существует функция $F \in A(G_1 \cup \gamma \cup G_2)$ такая, что $f(z) = F(z)$, $\forall\, z \in G_1$, то функция F называется аналитическим продолжением функции f из области G_1 через кривую γ в область G_2.

Теорема 96 (принцип симметрии Римана-Шварца)**.** *Пусть f — аналитическая функция в области G, частью границы которой является отрезок γ действительной оси, и непрерывна в $\overline{G}$. Если на отрезке γ функция f принимает действительные значения, то ее можно аналитически продолжить из области G через отрезок γ в область G', симметричную с областью G относительно действительной оси. При этом аналитическим продолжением является функция*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup \gamma, \\ \overline{f}(\overline{z}), & z \in G'. \end{cases}$$

■ Если $z \in G'$, то $\overline{z} \in G$ и потому

$$G' = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in G\},\ G \cup \gamma \cup G' \text{ — область в } \mathbb{C}.$$

1) Докажем сначала, что функция F дифференцируема в G'. Пусть $z_0 \in G'$. Для любого $z \in G' \setminus \{z_0\}$ рассмотрим отношение

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f}(\overline{z}) - \overline{f}(\overline{z_0})}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}}{z - z_0} =$$

$$= \frac{\overline{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}}{\overline{\overline{z} - \overline{z_0}}} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)}.$$

Поскольку $\overline{z}, \overline{z_0} \in G$, функция f дифференцируема в G и $z \to z_0$ тогда и только тогда, когда $\overline{z} \to \overline{z_0}$, то существует конечный предел

$$\lim_{\overline{z} \to \overline{z_0}} \frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}} = f'(\overline{z_0}).$$

Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \overline{f'(\overline{z_0})}$$

и функция F дифференцируема в z_0. В силу произвольности точки $z_0 \in G'$ функция F дифференцируема в G'.

2) Докажем, что $F \in C(G \cup \gamma \cup G')$. Поскольку $F \in A(G)$, $F \in A(G')$, достаточно доказать непрерывность F на γ.

Пусть $z_0 \in \gamma$. Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \in G \cup \gamma \cup G',\ n \in \mathbb{N}, \lim_{n \to \infty} z_n = z_0.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ допускает разбиение

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n'\} \cup \{z_n''\},\ z_n' \in G \cup \gamma,\ z_n'' \in G',$$

при этом возможно, что одно из множеств содержит конечное число элементов или пусто. Если каждое из этих множеств содержит бесконечно много элементов, то $\lim_{n\to\infty} z_n' = z_0$, $\lim_{n\to\infty} z_n'' = z_0$. Так как по условию функция f непрерывна на $G\cup\gamma$, то, если $\{z_n'\}$ содержит бесконечно много элементов, существует предел $\lim_{n\to\infty} F(z_n') = \lim_{n\to\infty} f(z_n') = f(z_0) = F(z_0)$. Если последовательность $\{z_n''\}$ содержит бесконечно много элементов, то $\overline{z_n''} \in G$, $\overline{z_0} = z_0$, $\overline{f(z_0)} = f(z_0)$ (поскольку, $z_0 \in \mathbb{R}$, $f(z_0) \in \mathbb{R}$) и

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n'') = \lim_{n\to\infty} \overline{f}(\overline{z_n''}) = \overline{\lim_{n\to\infty} f(\overline{z_n''})} = \overline{f(z_0)} = f(z_0) = F(z_0).$$

Итак, $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0)$ и по теореме 7 $\lim_{z\to z_0} F(z) = F(z_0)$, то есть функция F непрерывна на γ. Следовательно, функция F непрерывна в области $G \cup \gamma \cup G'$.

3) Докажем, что $F \in A(G \cup \gamma \cup G')$. Доказательство этого факта, ради простоты, проведем для случая, когда G — односвязная область.

Пусть Δ — треугольный контур в области $G \cup \gamma \cup G'$ с положительной ориентацией. Если $\Delta \subset G$ или $\Delta \subset G'$, то, поскольку $F \in A(G)$ и $F \in A(G')$, по интегральной теореме Коши (теореме 37) $\int_\Delta F(z)\,dz = 0$. Если $\Delta \subset G \cup \gamma$ или $\Delta \subset G'\cup\gamma$, то, поскольку $F \in C(G\cup\gamma)$ и $F \in C(G'\cup\gamma)$, $F \in A(G)$ и $F \in A(G')$, по обобщенной интегральной теореме Коши (теореме 39) $\int_\Delta F(z)\,dz = 0$.

Пусть теперь $\operatorname{int} \Delta\cap\gamma \neq \varnothing$. Тогда отрезок $\gamma\cap\Delta$ вместе с контуром Δ образует два многоугольника Δ_1 и Δ_2 таких, что $\Delta_1 \subset G \cup \gamma$, $\Delta_2 \subset G' \cup \gamma$, на которых определим положительную ориентацию. Тогда

$$\int\limits_{\Delta} F(z)\,dz = \int\limits_{\Delta_1} F(z)\,dz + \int\limits_{\Delta_2} F(z)\,dz = 0.$$

По обобщенной теореме Морера (теореме 48) функция F аналитична в $G\cup\gamma\cup G'$. Тогда по определению 84 функция F является аналитическим продолжением функции f из области G через отрезок γ в область G'. $\square$

Замечание. Принцип симметрии Римана-Шварца имеет место и в том случае, если функция f на отрезке вещественной прямой γ принимает значения, лежащие на некоторой прямой, и в том случае, если заменить отрезок вещественной прямой γ на дугу окружности, а функция f на этой дуге принимает значения, лежащие на некоторой окружности (см. [8, §7, глава 8], [4, §4, глава 5]).

8.3 Правильные и особые точки аналитической функции

Легко видеть, что функция f, аналитическая в области $G \subset \mathbb{C}$, аналитически продолжается в более широкую область, тогда и только тогда, когда в области G найдется такая точка a, что функция f разлагается в ряд Тейлора по степеням $(z-a)$ в круге, радиус сходимости которого больше расстояния от точки a до границы ∂G области G.

Определение 85. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, а ее граница ∂G состоит из конечного числа контуров Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, k_0$. Пусть $f \in A(G)$. Точка $z_0 \in \partial G$ называется правильной точкой функции f, если существует окрестность U_{z_0} этой точки и функция $\varphi \in A\left(U_{z_0}\right)$ такие, что $f(z) = \varphi(z)$, $\forall\, z \in U_{z_0} \cap G$, то есть функция $\varphi(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ из G в U_{z_0}. В противном случае точка z_0 называется* особой точкой *функции f.*

Теорема 97. *Пусть задан степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ с кругом сходимости $K_a(R)$, $R \in (0, +\infty)$. Тогда на окружности*

$$C_a(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$$

существует хотя бы одна особая точка его суммы $f(z)$.

■ По следствию 28.2 теоремы 28 функция $f(z)$ является аналитической в круге $K_a(R)$. Предположим, что все точки окружности $C_a(R)$ для функции $f(z)$ являются правильными. Тогда для каждой точки $t \in C_a(R)$ найдется ее круговая окрестность

$$U_t = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r_t\},\ r_t > 0,$$

и функция $\varphi_t \in A\left(U_t\right)$, которая аналитически продолжает функцию $f(z)$ из круга $K_a(R)$ в круг U_t. Поскольку $C_a(R)$ — компакт в $\mathbb{C}$, то из открытого покрытия $C_a(R)$ кругами U_t, $t \in C_a(R)$, можно выделить конечное подпокрытие U_{t_j}, $t_j \in C_a(R)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, $C_a(R) \subset U' = \bigcup_{j=1}^{m} U_{t_j}$. Отметим, что U' — область.

Каждая из функций $\varphi_{t_j} \in A\left(U_{t_j}\right)$ аналитически продолжает функцию $f(z)$ из круга $K_a(R)$ в круг U_{t_j}. Если $U_{t_i} \cap U_{t_s} \neq \varnothing$, то $U_{t_i} \cap U_{t_s} \cap K_a(R) \neq \varnothing$ и по построению

$$\varphi_{t_i}(z) = \varphi_{t_s}(z) = f(z),\ \forall\, z \in U_{t_i} \cap U_{t_s} \cap K_a(R).$$

Но тогда по теореме единственности для аналитических функций

$$\varphi_{t_i}(z) = \varphi_{t_s}(z),\ \forall\, z \in U_{t_i} \cap U_{t_s}.$$

Таким образом, можно определить функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in K_a(R), \\ \varphi_{t_j}(z),\ z \in U_{t_j},\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Функция F аналитична в области $K_a(R) \cup U'$ и $f(z) = F(z)$, $\forall\, z \in K_a(R)$. Так как $K_a(R) \cup U'$ — область, а $K_a(R) \cup C_a(R)$ — компакт в этой области, найдется число $R_1 > R$ такое, что $K_a(R_1) \subset K_a(R) \cup U'$. При этом рядом Тейлора функции F в точке a будет являться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, где

$$a_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ n = 0, 1, \ldots .$$

Поэтому степенной ряд функции f имеет радиус сходимости $R_1 > R$, что противоречит определению радиуса сходимости. Поэтому на границе круга сходимости C_R существует хотя бы одна особая точка функции f. $\square$

Как пример рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Его радиус сходимости равен 1, а сумма равна $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. Функция $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ и является аналитическим продолжением в область $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ функции $f(z)$ из круга сходимости ряда $|z| < 1$. Точка $z = 1$ — единственная особая точка функции $f(z)$ на окружности $|z| = 1$.

Приведем без доказательства следующий интересный результат (см. [7, с. 326]).

Теорема 98 (Прингсхейма)**.** *Пусть степенной ряд* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *имеет радиус сходимости* $R \in (0, +\infty)$ *и коэффициенты* $a_n \geq 0$, $n \geq 0$. *Тогда точка* $z = R$ *является особой для суммы ряда.*

Как пример рассмотрим ряд $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$. Здесь коэффициенты a_n равны нулю, если $n \neq 2^k$ и равны $1/2^{k^2}$, если $n = 2^k$. Радиус сходимости ряда равен 1, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{1/2^{k^2}} = 1.$$

Поэтому по теореме 98 точка $z = 1$ является особой для суммы этого ряда. Нетрудно показать, пользуясь теоремой 98, что на окружности $|z| = 1$ нет ни одной правильной точки функции f, то есть все точки единичной окружности являются особыми (см. [7, с. 327-328]). В то же время, из теории степенных рядов следует, что функция f аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна и бесконечно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

8.4 Аналитическое продолжение гамма-функции

Приведем примеры аналитического продолжения аналитической функции. Используя определение 83, рассмотрим задачу аналитического продолжения гамма-функции Эйлера.

По определению, известному из курса математического анализа, гамма-функция задается интегралом

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \text{где} \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t},\ t > 0,\ \mathcal{R}e\, z > 0.$$

Для вещественного z доказательство сходимости этого несобственного интеграла в нуле и на бесконечности обычно проводится в курсе математического анализа. Для случая комплексного z доказательство сходимости интеграла мало чем отличается. Разобьем интеграл на сумму двух интегралов

$$I_1(z) = \int\limits_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt, \quad I_2(z) = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Интеграл $I_2(z)$ сходится при всех комплексных z, поскольку интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} |e^{-t}t^{z-1}|dt = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{\mathcal{R}e\, z-1}dt$$

сходится при любом $z \in \mathbb{C}$. Но $|e^{-t}t^{z-1}| \le e^{-t}t^{R-1}$ при $|z| \le R$, поэтому $I_2(z)$ является равномерным пределом на компактах в $\mathbb{C}$ функций

$$f_n(z) = \int\limits_1^{n} e^{-t}t^{z-1}dt \text{ при } n \to \infty,$$

другими словами, последовательность функций $\{f_n(z)\}$ равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ сходится к функции $I_2(z)$. Действительно,

$$|I_2(z) - f_n(z)| = \Big|\int\limits_n^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\Big| \le \int\limits_n^{+\infty} e^{-t}t^{R-1}dt \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

По лемме 7 функции f_n являются целыми (аналитическими в $\mathbb{C}$), а из теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящейся последовательности аналитических функций (теорема 50) получаем, что функция $I_2(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$.

Аналогично, так как интеграл $\int\limits_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ сходится при любом $\alpha > 0$, доказывается, что интеграл $I_1(z)$ сходится при всех комплексных z таких, что

$\mathcal{R}e\, z > 0$, и при этих z является аналитической функцией, поскольку

$$I_1(z) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{1/n}^{1} e^{-t} t^{z-1} dt,\ \forall z : \mathcal{R}e\, z > 0,$$

где каждая функция $\int\limits_{1/n}^{1} e^{-t} t^{z-1} dt$ является целой, а сходимость является равномерной на компактах из полуплоскости $\mathcal{R}e\, z > 0$.

Итак, функция $\Gamma(z)$ определена и аналитична при всех $\mathcal{R}e\, z > 0$. Покажем, что гамма-функция допускает продолжение в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, из которой выброшены точки $z = 0, -1, -2, \dots$. Для выполнения аналитического продолжения воспользуемся методом вычитания особенностей. Заметим, что для всех $z \in \mathbb{C}$ и $t \in [0,1]$ функция $e^{-t} t^{z}$ может быть задана рядом

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{z+n-1}. \tag{8.1}$$

Указанный ряд при $\mathcal{R}e\, z > 1$ обладает следующими свойствами:

(a) все члены ряда (8.1) непрерывны по t на отрезке $[0,1]$, а их интегралы по этому отрезку задаются обычной формулой $\int\limits_{0}^{1} t^{z+n-1} dt = \dfrac{1}{z+n},\ n \geq 0$;

(b) ряд (8.1) сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$.

Поэтому ряд (8.1) можно почленно проинтегрировать по t на $[0,1]$:

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n},\ \mathcal{R}e\, z > 1.$$

Заметим, что ряд в правой части сходится при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Если отбросить его слагаемые с номерами $n = 0, 1, \dots, N-1$, то оставшийся ряд

$$f_N(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n},\ \mathcal{R}e\, z > 1,$$

будет сходиться равномерно на компактах в полуплоскости

$$D_N = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > -N\}.$$

Поэтому функция f_N аналитична в полуплоскости D_N, а гамма-функция в исходной полуплоскости $\mathcal{R}e\, z > 1$ задается формулой

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n} + f_N(z) + I_2(z). \tag{8.2}$$

Более того, по теореме единственности эта формула справедлива всюду, где аналитическими являются обе части этого равенства, то есть при $\mathcal{R}e\, z > 0$. Полученная формула выражает упомянутое выше «вычитание особенностей»: под знаком интеграла в $I_1(z)$ вычли из e^{-t} первые N членов тейлоровского разложения.

Заметим, что правая часть формулы (8.2) задает функцию, аналитическую в $D_N \setminus \{0, -1, -2, \dots, (N-1)\}$ и совпадающую с $\Gamma(z)$ при $\mathcal{R}e\, z > 0$, тем самым правая часть формулы (8.2) задает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ из области $\mathcal{R}e\, z > 0$ в область $D_N \setminus \{0, -1, -2, \dots, (N-1)\}$. По теореме единственности такое продолжение, если оно существует, определено единственным образом, поэтому правую часть формулы (8.2) можно считать определением функции $\Gamma(z)$ при $z \in D_N \setminus \{0, -1, -2, \dots, (N-1)\}$. Отсюда в силу произвольности N получаем, что

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Последняя формула дает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ из области $\mathcal{R}e\, z > 0$ в область $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Точки $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются полюсами 1-го порядка продолженной функции с вычетами в них, равными $\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Другими словами, главная часть ряда Лорана функции $\Gamma(z)$ в проколотой окрестности точки $z = -n$ равна $\dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{z+n}$.

Таким образом, построено аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ в область $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, причем в точках $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, функция имеет простые полюса.

Можно провести аналитическое продолжение гамма-функции и другим образом: с помощью функционального соотношения $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, справедливого при $\mathcal{R}e\, z > 0$ (здесь оно доказывается, как и в курсе математического анализа, интегрированием по частям).

Поскольку $\Gamma(z)$ определена при $\mathcal{R}e\, z > 0$, положим $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ при $\mathcal{R}e\, z > -1$, $z \neq 0$. Эта формула дает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ из полуплоскости $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > 0\}$ в полуплоскость $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > -1\}$, с полюсом 1-го порядка в точке $z = 0$. Повторяя эту процедуру, построим аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ в полуплоскость $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > -2\}$, и далее, по индукции, на всю комплексную плоскость.

8.5 Аналитическое продолжение логарифма

Рассмотрим еще один пример аналитического продолжения, который принципиально отличается от рассмотренных выше. Он касается определения логарифма при комплексных значениях аргумента.

Начнем с круга $K_1(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$, в котором логарифм можно определить рядом Тейлора $f(z) = \ln z = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$, который, как легко видеть, равномерно сходится на компактах из $K_1(1)$ и потому допускает почленное дифференцирование. В результате получаем, что

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z},\ z \in K_1(1).$$

Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница, выбирая контуром интегрирования отрезок $[1,z]$, следует, что $f(z) = \int\limits_1^z \dfrac{1}{t}\,dt,\ z \in K_1(1)$. Полагая

$$f_0(z) = \int_1^z \frac{1}{t}\,dt,\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

и вновь вычисляя интеграл по отрезку $[1,z]$, получаем функцию f_0, аналитическую в области $D_0 = \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$. При этом $f_0(z) = f(z)$, для всех $z \in K_1(1)$.

Если для $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ проинтегрировать функцию $1/t$ вдоль пути

$$[1,|z|] \bigcup \{|z|e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \arg z\},$$

то, как легко видеть, справедлива формула

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ \text{где } -\pi < \arg z < \pi. \tag{8.3}$$

Таким образом, пределы от функции $f_0(z)$ при стремлении z к верхнему и нижнему краю «разреза» $(-\infty,0]$ не совпадают, откуда следует, что область определения функции $f_0(z)$ невозможно расширить, не нарушая аналитичности функции f_0 (и даже ее непрерывности). Тем самым, функция $f_0(z)$, аналитическая в области D_0, не допускает аналитического продолжения в смысле определения 83. Однако было бы неестественно признать область D_0 максимальной областью определения функции $\ln z$. Поворачивая разрез$(-\infty,0]$ на угол $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ и меняя соответственно границы изменения $\arg z$ в формуле (8.3) на $-\pi+\alpha < \arg z < \pi+\alpha$, можно построить аналитическое продолжение функции $\ln z$ из круга $K_1(1)$ в область $D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{e^{i\alpha}(-\infty,0]\}$ — комплексную плоскость с разрезом по лучу $R_\alpha = e^{i\alpha}(-\infty,0]$. Объединение областей D_α при разных α покрывает всю комплексную плоскость с выброшенным началом координат $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому если у функции $\ln z$ и существует максимальная область аналитичности, то ею должна быть проколотая комплексная плоскость $\mathbb{C}_0$.

Еще одним аргументом в пользу того, что «настоящей» областью определения логарифма должна быть проколотая комплексная плоскость $\mathbb{C}_0$, является то, что интеграл $\displaystyle\int\limits_1^z \frac{1}{t}\,dt$, вычисленный по произвольному контуру в $\mathbb{C}_0$, соединяющему в $\mathbb{C}_0$ точки 1 и $z \in \mathbb{C}_0$, имеет смысл для любых $z \in \mathbb{C}_0$. При этом интеграл зависит от контура: если контур γ_2 получается из контура γ_1 добавлением n обходов вокруг начала координат, то

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{t}\,dt = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{t}\,dt + 2\pi i n.$$

Отметим, что при таком способе аналитического продолжения функции $\ln z$ в проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C}_0$ каждой ее точке будет соответствовать счетное число различных значений $\ln z$. Тем самым, продолженная функция уже не будет являться «функцией» в общепринятом значении этого термина.

Глава 9

Преобразование Лапласа

9.1 Определение преобразования Лапласа

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (можно рассматривать функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$). Функцию f назовем кусочно дифференцируемой на $\mathbb{R}$, если она непрерывна и дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$, кроме, быть может, точек разрыва первого рода, которых на каждом конечном интервале конечное число, и в которых сама функция и ее производная имеют конечные односторонние пределы.

Определение 86. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется оригиналом (функцией-оригиналом), если она удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$; $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = f(0)$;

2) функция $f(t)$ кусочно дифференцируема на $\mathbb{R}$;

3) существует такое действительное число σ, что

$$f(t) = O(e^{\sigma t}) \text{ при } t \to +\infty. \tag{9.1}$$

Простейшей функцией-оригиналом является функция Хевисайда

$$h(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ 1 \text{ при } t \geq 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Очевидно, что $h(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3) с $\sigma = 0$. Умножение произвольной функции $f(t)$ на $h(t)$ оставляет $f(t)$ без изменений при $t \geq 0$ и дает 0 при $t < 0$. Поэтому, если функция $f(t)$ удовлетворяет только условиям 2)–3) и не удовлетворяет условию 1), функция $f(t) \cdot h(t)$ уже удовлетворяет всем трем условиям, то есть является функцией-оригиналом. Например, таковыми являются функции $\sin t$, $\cos t$, t^n при любом $n \in \mathbb{N}$, e^{at}, $\operatorname{sh} at$, $\operatorname{ch} at$ при любом $a \in \mathbb{R}$. Есть функции, которые условиям 1)–3) не удовлетворяют, например, e^{t^2}.

Отметим, что указанные требования к функции-оригиналу не являются строго обязательными, но придают удобные для работы с ними свойства.

Определение 87. *Показателем роста функции-оригинала $f(t)$ называют число $\sigma_f = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : f(t) = O(e^{\sigma t}) \text{ при } t \to +\infty\}$.*

Таким образом, если σ_f — показатель роста функции-оригинала $f(t)$, то оценка $f(t) = O(e^{\sigma t})$ выполняется при любом $\sigma > \sigma_f$ и не выполняется ни для какого $\sigma < \sigma_f$. При $\sigma = \sigma_f$ эта оценка может как выполняться, так и не выполняться.

Из этого определения следует, что для двух функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста σ_f и σ_g, $\sigma_{f+g} \leq \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$, $\sigma_{f\cdot g} \leq \sigma_f + \sigma_g$.

Определение 88. *Преобразованием (оператором) Лапласа функции-оригинала $f(t)$ называется функция, определяемая формулой*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \ p \in \mathbb{C}, \tag{9.3}$$

согласно которой функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексного переменного p, которая определена для тех значений p, для которых интеграл в (9.3) сходится.

Определение 89. *Функция $F(p)$ называется* изображением *по Лапласу функции $f(t)$. Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ далее будем записывать так $f(t) \risingdotseq F(p)$ или так $F(p) \fallingdotseq f(t)$.*

Условия 1)–2) на функцию-оригинал из определения 86 гарантируют существование определенного интеграла $\int_0^b f(t)e^{-pt}dt$, $\forall\, p \in \mathbb{C}$, $\forall\, b > 0$. Условие 3) обеспечивает абсолютную сходимость этого интеграла в точках полуплоскости $\Pi_f = \{p \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, p > \sigma_f\}$, что следует из следующей теоремы.

Теорема 99 (существования изображения)**.** *Пусть функция-оригинал $f(t)$ имеет показатель роста σ_f. Тогда ее изображение по Лапласу $F(p)$ определено в полуплоскости Π_f. При этом $F(p) \to 0$, когда $\mathcal{R}ep \to +\infty$, а интеграл в* (9.3) *абсолютно сходится в каждой точке $p \in \Pi_f$ и равномерно сходится на любом множестве $\Pi_f(\sigma) = \{p \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, p \geq \sigma\}$, $\sigma > \sigma_f$ (то есть равномерно сходится внутри Π_f).*

■ Пусть $p \in \Pi_f$ и пусть $\delta = \dfrac{1}{2}(\mathcal{R}e\ p - \sigma_f) > 0$. Тогда $\mathcal{R}e\ p = \sigma_f + 2\delta$, а $f(t) = O(e^{(\sigma_f+\delta)t})$ при $t \to +\infty$, следовательно, $\exists\, M > 0 : |f(t)| \leq Me^{(\sigma_f+\delta)t}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Из этой оценки следует, что

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\sigma_f+\delta)t}e^{-\mathcal{R}e\, pt} = Me^{(\sigma_f+\delta)t}e^{-(\sigma_f+2\delta)t} = Me^{-\delta t}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\delta t}dt$ сходится, то интеграл в правой части равенства (9.3) абсолютно сходится (и потому сходится), при этом

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int\limits_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt \le \int\limits_0^{+\infty} M\, e^{-\delta t} = \frac{M}{\delta} = \frac{2M}{\mathcal{R}e\, p - \sigma_f}.$$

Следовательно, $F(p) \to 0$, когда $\mathcal{R}e\, p \to +\infty$.

Если же $\mathcal{R}e\, p \ge \sigma > \sigma_f$, то полагая $\delta_1 = \dfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_f) > 0$, аналогично предыдущему получаем неравенство $\sup_{p\in\Pi_f(\sigma)}\left|f(t)e^{-pt}\right| \le M_1 e^{-\delta_1 t}$, из которого в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, следует, что интеграл в правой части равенства (9.3) равномерно сходится на множестве $\Pi_f(\sigma)$. $\square$

Отметим, что в математике рассматриваются и другие преобразования, отличные от преобразования Лапласа, например, Меллина и Фурье. Но наиболее употребительным является преобразование Лапласа.

Теорема 100 (об аналитичности изображения). *Если функция-оригинал $f(t)$ имеет показатель роста σ_f, то ее изображение по Лапласу $F(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости Π_f, при этом для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt, \ p \in \Pi_f. \tag{9.4}$$

■ Легко проверить, что если функция-оригинал $f(t)$ имеет показатель роста σ_f, то любая функция вида $t^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям 1)–3) для функции-оригинала и имеет тот же показатель роста σ_f. Поэтому нетрудно показать по схеме доказательства теоремы 99, что все несобственные интегралы в (9.4) абсолютно сходится в каждой точке $p \in \Pi_f$ и равномерно сходится на любом множестве $\Pi_f(\sigma) = \{p \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, p \ge \sigma\}$, $\sigma > \sigma_f$.

Несмотря на то, что p — комплексный параметр, для интегралов вида (9.3) имеют место, что нетрудно проверить, теоремы о непрерывности и дифференцируемости несобственного интеграла по параметру (формула Лейбница), из которых и следует заключение теоремы. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 100 можно провести и непосредственно, явно вычисляя производную функции $F(p)$ (см. [15, с. 313–314]).

Пример 53. *Функция $f(t) = e^{\omega t}$, $t \ge 0$, $\omega \in \mathbb{C}$, — оригинал (если считать что, как и все подвергаемые преобразованию Лапласа функции, она равна нулю для отрицательных значений t) для функции $F(p) = \dfrac{1}{p-\omega}$, $p \ne w$.*

■ Показатель роста функции $f(t) = e^{\omega t}$ равен $\mathcal{R}e\, \omega$, так как $|e^{\omega t}| = e^{\mathcal{R}e\, \omega t}$. Если

$\mathcal{R}e\, p > \mathcal{R}e\, \omega$, то $\int\limits_0^{+\infty} e^{\omega t} e^{-pt} dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} e^{-(p-\omega)t} dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1-e^{-(p-\omega)b}}{p-\omega} = \dfrac{1}{p-\omega}$, так как $\lim\limits_{b\to+\infty} |e^{-(p-\omega)b}| = \lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\mathcal{R}e\,(p-\omega)b} = 0$. Итак, $e^{\omega t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\omega}$, в частности, $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Поскольку при $t \geq 0$ функция Хевисайда равна 1, то $h(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. $\square$

Заметим, что теорема 100 не исключает аналитичности изображения $F(p)$ и вне указанной полуплоскости, она только гарантирует аналитичность $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$ с показателем роста σ_f в полуплоскости Π_f. В примере выше, функция-изображение является аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$, кроме точки $p = \omega$. Кроме того, эта функция стремится к нулю при любом стремлении p к ∞, а не только когда $\mathcal{R}e\, p \to +\infty$, как утверждает теорема 99.

Пример 54. $t^{a-1} \risingdotseq \dfrac{\Gamma(a)}{p^a}$ *при* $a > 0$, *где* $\Gamma(a)$ *— гамма-функция Эйлера.*

■ По определению гамма-функции Эйлера $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$, $a > 0$. При $p > 0$ замена $x = pt$ приводит к равенству $\Gamma(a) = p^a \int\limits_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-pt} dt$, из которого следует нужный результат, так как правая часть этого равенства определена и для комплексных чисел p с $\mathcal{R}e\, p > 0$, а интеграл при $\mathcal{R}e\, p > 0$ сходится. $\square$

Замечание. При $0 < a < 1$ функция t^{a-1} не является полновесным оригиналом в смысле определения 86, поскольку имеет бесконечный предел при $t \to +0$. Тем не менее она имеет изображение по Лапласу, поскольку интеграл в определении гамма-функции Эйлера сходится при $a > 0$.

Теорема 101 (теорема обращения)**.** *Если $f(t)$ — это функция-оригинал с показателем роста σ_f и $F(p)$ — ее изображение по Лапласу, то во всякой точке, в которой функция-оригинал имеет производную или, будучи непрерывной, имеет обе односторонние производные, функция $f(t)$ выражается через $F(p)$ следующей формулой (Меллина)* $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp$, *где интеграл вычисляется по любой прямой $\mathcal{R}e\, p = \sigma > \sigma_f$ и понимается в смысле главного значения:* $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{pt} F(p) dp.$

Оставим эту теорему без доказательства. Его можно найти, например, в учебнике [15, с. 323–326]. Для практического восстановления оригинала по его изображению теорему обращения применяют редко. Несколько чаще с этой целью используют или таблицу преобразований Лапласа, или выводимые из теоремы обращения два простых достаточных условия, которые иногда называют теоремами разложения.

Теорема 102. *Если функция-оригинал $f(t)$ имеет изображением по Лапласу функцию $F(p)$, которая аналитична в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки и разлагается там в ряд Лорана $F(p) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k}{p^{k+1}}$, то*

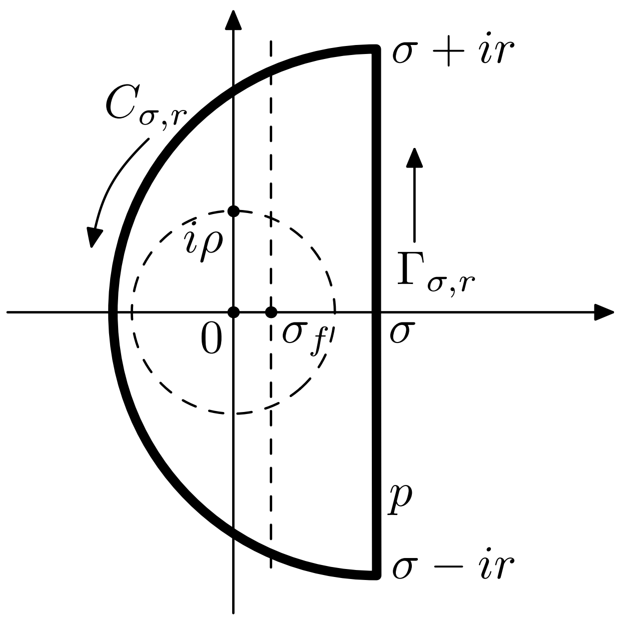
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k t^k}{k!},\ \forall\, t > 0.$$

Замечание. Переход от целой функции $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k z^k}{k!}$ к функции $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k}{w^{k+1}}$ называют преобразованием Бореля (см. [1, с. 10], [8, с. 586]).

Теорема 103. *Если функция-оригинал $f(t)$ имеет своим изображением по Лапласу правильную рациональную дробь $F(p)$ с полюсами $p_1, \ldots, p_m$, то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} F(p) e^{pt} \Big|_{p=p_k},\ \ t > 0.$$

■ Пусть σ_f — показатель роста функции-оригинала $f(t)$. Функция-изображение $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\mathcal{R}e p > \sigma_f$, поэтому все ее особые точки лежат в полуплоскости $\mathcal{R}e\, p \leq \sigma_f$. В условиях обеих теорем разложения существует такое положительное число $\sigma > \sigma_f$, что для всех достаточно больших значений $r > \sigma$ замкнутый контур $\Gamma_{\sigma,r}$, состоящий из отрезка прямой $[\sigma - ir, \sigma + ir]$ и полуокружности $C_{\sigma,r}$, для которой этот отрезок служит диаметром, и лежащей слева от него при движении от точки $\sigma - ir$ к точке $\sigma + ir$, целиком лежит в той окрестности бесконечности, в которой функция-изображение $F(p)$ является аналитической. В соответствии с определениями вычета в бесконечности и основной теоремой о вычетах, в условиях теоремы 102 про обходе по контуру $\Gamma_{\sigma,r}$ против часовой стрелки



$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt}F(p)dp = -\operatorname{res}\left(F(p)e^{pt}\right)\Big|_{p=\infty} = -\operatorname{res}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{p^{k+1}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(pt)^k}{k!}\Big)\Big|_{p=\infty}.$$

Поскольку ряды справа абсолютно сходятся, их можно перемножить и получить абсолютно сходящийся ряд, в котором нас интересует только коэффициент при p^{-1}, взятый со знаком "минус". Легко получить, что этот коэффициент равен $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k t^k}{k!}$, поэтому $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt}F(p)dp = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k t^k}{k!}$.

В условиях теоремы 103, при достаточно большом $\sigma > \sigma_f$ и $r > \sigma$ контур $\Gamma_{\sigma,r}$ будет содержать внутри себя все полюсы функции $F(p)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt}F(p)dp = \sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}F(p)e^{pt}\Big|_{p=p_k},\ t>0.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt}F(p)dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} e^{pt}F(p)dp + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\sigma(r)} e^{pt}F(p)dp.$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части, определяя новую переменную $z = \frac{p-\sigma}{i}$, и получим при $t > 0$ интеграл $\frac{e^{\sigma t}}{2\pi i}\int\limits_{C_r} e^{itz}F(\sigma+iz)\,dz$, в котором интегрирование ведется по верхней половине полуокружности $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ с направлением обхода против часовой стрелки.

В условиях обеих теорем при $t > 0$ применима вторая лемма Жордана (лемма 5), поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$: в первой теореме это вытекает из представления функции $F(p)$ в окрестности $p=\infty$, а во второй из того, что $F(p)$ — правильная рациональная дробь.

В условиях теоремы 102, учитывая теорему обращения преобразования Лапласа (теорему 101), для всех точек $t > 0$, в которых функция-оригинал имеет производную или, будучи непрерывной, имеет обе односторонние производные, находим, что

$$f(t) = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt}F(p)dp = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} e^{pt}F(p)dp = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k t^k}{k!}.$$

В условиях теоремы 103, учитывая теорему обращения преобразования Лапласа (теорему 101), находим, что

$$f(t) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\sigma,r}} e^{pt} F(p)dp =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} e^{pt} F(p)dp = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} F(p)e^{pt} \Big|_{p=p_k}. \ \square$$

Замечание. Если заранее не известно, является ли данная функция $F(p)$ действительно изображением некоторого оригинала, то найденную по приведенным формулам функцию $f(t)$ следует рассматривать лишь как «предполагаемый» оригинал, требующий проверки.

9.2 Основные свойства преобразования Лапласа

В примерах выше функция-изображение искалась по определению. Но во многих случаях для поиска изображения заданной функции удобнее пользоваться общими свойствами преобразования Лапласа.

В дальнейшем через $f(t)$, $g(t)$, …будем обозначать функции-оригиналы, а через $F(p)$, $G(p)$, … — их изображения по Лапласу.

Теорема 104 (свойство линейности)**.** *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $p > \sigma_f$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, $p > \sigma_g$, *то* $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p),\ p > \max\{\sigma_f, \sigma_g\},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

■ Доказательство следует из определения 88 преобразования Лапласа и свойства линейности интеграла. $\square$

Приведем примеры применения свойства линейности и результата, полученного в примере 53.

$$\begin{aligned}
\cos\omega t &= \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2};\\
\sin\omega t &= \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};\\
\operatorname{ch}\omega t &= \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-i\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2};\\
\operatorname{sh}\omega t &= \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2};\\
\sin^2\omega t &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\omega^2}\right) = \frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)};
\end{aligned} \tag{9.5}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}\cos\beta t &= \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}\right) \risingdotseq \\
&\risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha-i\beta}+\frac{1}{p-\alpha+i\beta}\right)=\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}; \\
e^{\alpha t}\sin\beta t &= \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\right) \risingdotseq \\
&\risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-\alpha-i\beta}-\frac{1}{p-\alpha+i\beta}\right)=\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

Теорема 105 (о дифференцировании оригинала)**.** *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и функция-оригинал $f(t)$ имеет производную $f'(t)$, которая также является функцией-оригиналом, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.*

■ Пусть $p \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{R}e\, p > \sigma_f$. Тогда по формуле интегрирования по частям

$$
f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} f'(t)e^{-pt}dt =
$$

$$
= \lim_{b\to+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\,\Big|_{t=0}^{b} -(-p)\int\limits_0^{b} f(t)e^{-pt}dt\right) = -f(0)+pF(p).
$$

Учитывая, что $f(t) = O(e^{(\sigma_f+\delta)t})$ при $t \to +\infty$, для числа $\delta = \dfrac{\mathcal{R}e\, p - \sigma_f}{2} > 0$, получим:

$$
(\sigma_f+\delta)b - \mathcal{R}e\, pb = \frac{1}{2}(2\sigma_f b + \mathcal{R}e\, pb - \sigma_f b - 2\mathcal{R}e\, pb) = \frac{1}{2}(\sigma_f b - \mathcal{R}e\, pb) = -\delta b.
$$

Поэтому $|f(b)e^{-pb}| = O(e^{(\sigma_f+\delta)b})e^{-\mathcal{R}e\, pb} = O(e^{-\delta b}) \to 0$ при $b \to +\infty$. □

Следствие 105.1. *Если функция-оригинал $f(t)$ имеет вторую производную $f''(t)$, которая тоже является функцией-оригиналом, то*

$$
f''(t) \risingdotseq p\big(pF(p)-f(0)\big) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).
$$

Следствие 105.2. *Если производные $f^{(k)}(t)$, $1 \le k \le m$, функции-оригинала $f(t)$ тоже являются функциями-оригиналами, то*

$$
f^{(m)}(t) \risingdotseq p^mF(p) - p^{m-1}f(0) - p^{m-2}f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0).
$$

Теорема 106 (о дифференцировании изображения)**.** *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$.*

■ Это свойство — прямое следствие теоремы об аналитичности изображения (теоремы 100) и правила Лейбница дифференцирования несобственного интеграла по параметру, применение которого в данном случае правомерно:

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt = \int\limits_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}dt. \ \square$$

Замечание. Применяя теорему 106 легко получить

$$t\sin\omega t \risingdotseq -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_p = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$te^{\omega t} \risingdotseq -\left(\frac{1}{p-\omega}\right)'_p = \frac{1}{(p-\omega)^2}, \ \ldots \ , t^m e^{\omega t} \risingdotseq \frac{m!}{(p-\omega)^{m+1}}.$$

Из последней формулы при $\omega = 0$ следует, что $t^m \risingdotseq \dfrac{m!}{p^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 107 (подобия). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(\lambda t) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$ для любого числа $\lambda > 0$.*

■ Пусть $\mathcal{R}e\, p > \sigma_f$. Введем новую переменную $t = \dfrac{\tau}{\lambda}$. Тогда $dt = \dfrac{d\tau}{\lambda}$ и, подставляя эти равенства в интеграл, получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\lambda t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau/\lambda}\frac{d\tau}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau/\lambda}d\tau = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \ \square$$

Теорема 108 (запаздывания оригинала). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого числа $\tau > 0$ справедливо соотношение $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$.*

■ Введем новую переменную $\zeta = t - \tau$. Тогда $t = \zeta + \tau$, $dt = d\zeta$. Если $t \in [0, +\infty)$, то $\zeta \in [-\tau, +\infty)$. Переходя в интеграле от переменной t к переменной ζ , получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int\limits_{-\tau}^{+\infty} f(\zeta)e^{-p(\tau+\zeta)}d\zeta = e^{-p\tau}\int\limits_0^{+\infty} f(\zeta)e^{-p\zeta}d\zeta = e^{-p\tau}F(p),$$

поскольку функция-оригинал $f(\zeta)$ равна нулю на интервале $(-\tau, 0)$. $\square$

Двойственной к теореме запаздывания является следующая теорема.

Теорема 109 (смещения изображения). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение $e^{\zeta t}f(t) \risingdotseq F(p-\zeta)$ (то есть $F(p-\zeta) \fallingdotseq e^{\zeta t}f(t)$).*

■ Доказательство следует из определения 88:

$$e^{\zeta t} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{\zeta t} f(t) e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\zeta)t} dt = F(p-\zeta). \ \square$$

Как пример применения теоремы 109, рассмотрим равенство

$$\frac{p}{p^2-p+1} = \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

С учетом изображений для функций $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$ (см. формулы (9.5)–(9.6)), находим, что

$$\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \fallingdotseq e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad \frac{\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{3}} e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Следовательно, функция $\dfrac{p}{p^2-p+1}$ служит изображением для оригинала

$$e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Теорема 110 (об интегрировании оригинала). *Если $f(t)$ является функцией-оригиналом и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то интеграл с переменным верхним пределом $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du$ также является функцией-оригиналом и $\varphi(t) \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.*

■ Сначала покажем, что $\varphi(t)$ — функция-оригинал, то есть удовлетворяет условиям 1)–3) определения 86. Так как $f(u) = 0$ при $u < 0$, то $\varphi(t) = 0$ при $t \le 0$. Функция $\varphi(t)$, как интеграл с переменным верхним пределом, непрерывна и кусочно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Поскольку $f(t)$ — функция-оригинал, существуют постоянные $M > 0$ и $\sigma \in \mathbb{R}$, такие что $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$, $t > 0$. Тогда

$$|\varphi(t)| \le \int\limits_0^t |f(u)|\,du \le M\int\limits_0^t e^{\sigma u}\,du = \frac{M}{\sigma}(e^{\sigma t}-1) < M_1 e^{\sigma t},\ M_1 = \frac{M}{\sigma}.$$

Пусть теперь $\Phi(p)$ — изображение функции-оригинала $\varphi(t)$. Из теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом следует, что $\varphi'(t) = f(t)$ и $\varphi(0) = 0$. Из теоремы о дифференцировании оригинала получаем, что

$$F(p) \fallingdotseq f(t) = \varphi'(t) \risingdotseq p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p), \text{ то есть } F(p) = p\Phi(p). \ \square$$

Теорема 111 (об интегрировании изображения). *Если* $f(t)$ *и* $f(t)/t$ *являются функциями-оригиналами и* $f(t)\risingdotseq F(p)$, *то* $\dfrac{f(t)}{t}\risingdotseq\displaystyle\int\limits_p^{+\infty}F(s)ds.$

■ Обозначим через $\Phi(p)$ изображение функции $f(t)/t$, то есть

$$\Phi(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}dt.$$

Найдем $\Phi'(p)$:

$$\Phi'(p)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}\right)'_p dt=\int\limits_0^{+\infty}-t\,\frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}dt=-\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,e^{-pt}dt=-F(p).$$

По формуле Ньютона–Лейбница $-(\Phi(R)-\Phi(p))=-\displaystyle\int\limits_p^R\Phi'(s)ds=\int\limits_p^R F(s)ds.$ Так как $\Phi(p)$ — функция-изображение, то $\lim\limits_{R\to+\infty}\Phi(R)=0$. Переходя к пределу при $R\to+\infty$ получаем, что $\Phi(p)=\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int\limits_p^R F(s)ds=\int\limits_p^{+\infty}F(s)ds.$ □

Пример 55. *Найти изображение функции* $\dfrac{\sin\omega t}{t}$, $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

■ Так как $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin\omega t}{t}=\omega$, то $\dfrac{\sin\omega t}{t}$ — функция-оригинал. Используя соотношение $\sin\omega t\risingdotseq\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ и теорему 111 получаем, что

$$\frac{\sin\omega t}{t}\risingdotseq\int\limits_p^{+\infty}\frac{\omega ds}{s^2+\omega^2}=\omega\,\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{s}{\omega}\,\Big|_{s=p}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}.\ \square$$

Теорема 112 (об изображении периодического оригинала). *Если оригинал* $f(t)$ *является периодической функцией с периодом* $T>0$, *то*

$$f(t)\risingdotseq\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)\,e^{-pt}dt.$$

■ Так как любая периодическая функция-оригинал $f(t)$ является ограниченной (и потому имеет нулевой показатель роста), изображающий ее интеграл

Лапласа $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$ сходится для всех $p \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, p > 0$. Тогда для любого такого p, учитывая T-периодичность $f(t)$, поскольку $|e^{-pT}| < 1$, получим

$$\begin{aligned} f(t) \risingdotseq & \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{nT} f(t)\, e^{-pt} dt = \\ & = \lim_{n\to+\infty} \left(\int\limits_0^{T} f(t)\, e^{-pt} dt + \int\limits_T^{2T} f(t)\, e^{-pt} dt + \dots + \int\limits_{(n-1)T}^{nT} f(t)\, e^{-pt} dt \right) = \\ & = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-(n-1)pT}\right) \int\limits_0^{T} f(t)\, e^{-pt} dt = \\ & = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-npT}}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^{T} f(t)\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^{T} f(t)\, e^{-pt} dt. \ \square \end{aligned} \tag{9.7}$$

Рассмотрим простой пример, демонстрирующий применение преобразования Лапласа и его некоторых свойств.

Пример 56. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z, \end{cases}$ *с начальными условиями* $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

■ Перейдем от функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ к их изображениям $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, соответственно, и, пользуясь свойствами преобразования Лапласа, получим систему алгебраических уравнений $\begin{cases} pX - 1 = Y - Z \\ pY - 2 = X + Y \\ pZ - 3 = X + Z \end{cases}$. Решим ее, например, методом Крамера, и получим

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)},\ Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2},\ Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Каждую функцию-изображение представим в виде суммы простейших дробей

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1},\ Y(p) = \frac{-2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2},\ Z(p) = \frac{-2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Теперь, зная что $e^{\omega t} \risingdotseq \dfrac{1}{p - \omega}$, получаем решение исходной системы

$$x(t) = 2 - e^t,\ y(t) = -2 + 4e^t - te^t,\ z(t) = -2 + 5e^t - te^t. \ \square$$

9.3 Преобразование Лапласа свертки функций

Для изложения следующего свойства преобразования Лапласа введем понятие свертки двух функций. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены и кусочно-непрерывны на $\mathbb{R}$. Тогда существует функция $f*g$ от переменной $t \in \mathbb{R}$, которая называется сверткой функций и определяется равенством

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(u)g(t-u)\,du. \tag{9.8}$$

Очевидно, что свертка функций симметрична, то есть $(f * g)(t) = (g * f)(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Для доказательства симметричности, достаточно ввести в интеграле (9.8) новую переменную $\zeta = t - u$. Тогда $u = t - \zeta$, $du = -d\zeta$, и при изменении u от 0 до t переменн ζ изменяется от t до 0. Следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}$

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(u)g(t-u)\,du = -\int\limits_t^0 f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^t f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta = (g * f)(t).$$

Лемма 9. *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции-оригиналы с показателями роста σ_f и σ_g, соответственно. Тогда свертка $f * g$ так же является функцией-оригиналом с показателем роста $\sigma_{f*g} \le \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$.*

■ Так как $f(t) = 0$ при $t < 0$, то и $(f * g)(t) = 0$ при при $t < 0$. Из кусочной дифференцируемости функций $f(t)$ и $g(t)$ следует, что аналогичным свойством обладает и свертка $f * g$, поскольку свертка определяется как интеграл с переменным верхним пределом (подробное доказательства этого факта проведите самостоятельно). Проверим условие роста свертки. Возьмем любое $\sigma > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Тогда существуют такие числа $M_f > 0$ и $M_g > 0$, что $|f(t)| \le M_f e^{\sigma t}$, $|g(t)| \le M_g e^{\sigma t}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Выберем число $\delta > 0$ такое, что $\sigma - \delta > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ Из определения (9.8) следует, что

$$|(f * g)(t)| = \left| \int\limits_0^t f(u)g(t-u)\,du \right| \le \int\limits_0^t |f(u)|\,|g(t-u)|\,du \le$$

$$\le M_f\, M_g \int\limits_0^t e^{\sigma u} e^{(\sigma(t-u)} du = M_f\, M_g\, e^{\sigma t} \int\limits_0^t du =$$

$$= M_f\, M_g\, t\, e^{\sigma t} = M_f\, M_g\, \frac{t}{e^{\delta t}}\, e^{(\sigma-\delta)t} \le M e^{(\sigma-\delta)t},$$

где $M = M_f\, M_g \max\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{t}{e^{\delta t}}$. Итак, свертка удовлетворяет условиям 1)–3) функции-оригинала для любого $\sigma > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Отсюда следует, что $f * g$ — функция-оригинал с показателем роста, не превосходящим $\max\{\sigma_f, \sigma_g\}$. $\square$

Теперь перейдем к доказательству следующей теоремы.

Теорема 113 (о преобразовании свертки функций). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $g(t) \risingdotseq G(p)$, *то* $(f * g)(t) \risingdotseq F(p)\, G(p)$.

■ Запишем преобразование Лапласа для свертки:

$$(f * g)(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int\limits_0^{t} f(u) g(t-u)\, du. \tag{9.9}$$

Повторный интеграл в (9.9) вычисляется по неограниченной области

$$D = \{(\tau, t) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le t < \infty,\ 0 \le \tau \le t\} \text{ (углу } 0 \le \varphi \le \pi/4).$$

Формально изменим порядок интегрирования и вычислим полученный повторный интеграл. Не останавливаясь подробно на обосновании законности этой операции, скажем только, что такая операция законна, а обоснование можно найти в классических учебниках по математическому анализу, например, [12, с. 219–221].

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int\limits_0^{t} f(u) g(t-u)\, du = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{t} e^{-pt} f(u) g(t-u)\, du =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} f(u)\, du \int\limits_u^{+\infty} e^{-pt} g(t-u)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} f(u)\, du \int\limits_0^{+\infty} e^{-p(\zeta+u)} g(\zeta)\, d\zeta =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} f(u) e^{-pu}\, du \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\zeta} g(\zeta)\, d\zeta = F(p)\, G(p). \ \square$$

Следствие 113.1. *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— функции-оригиналы, причем производная* $g'(t)$ *— также функция-оригинал. Тогда имеет место формула (ее называют формулой или интегралом Дюамеля)*

$$p\, F(p)\, G(p) \risingdotseq g(0) f(t) + \int\limits_0^{t} f(u) g'(t-u)\, du.$$

■ Интеграл в правой части является сверткой функций $f(t)$ и $g'(t)$. По теореме о дифференцировании оригинала изображением функции $g'(t)$ является функция

$p\,G(p) - g(0)$. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой о преобразовании свертки функций, получаем

$$g(0)f(t) + (f * g')(t) \risingdotseq g(0)F(p) + F(p)\big(p\,G(p) - g(0)\big) = p\,F(p)\,G(p). \ \square$$

Пример 57. *Найти оригинал функции* $F(p) = \dfrac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.

■ Функция $F(p)$ представляется в виде $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Но $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \sin\omega t$, тогда в силу теоремы о преобразовании свертки функций

$$F(p) \risingdotseq \int\limits_0^t \sin\omega u \cdot \sin\omega(t-u)\,du = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \big(\cos\omega(2u-t) - \cos\omega t\big)\,du =$$

$$= \frac{1}{4\omega}\sin\omega(2u-t)\,\Big|_0^t - \frac{t}{2}\cos\omega t = \frac{1}{2\omega}\sin\omega t - \frac{t}{2}\cos\omega t. \ \square$$

Литература

[1] *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. — М.: Наука. — 1967. — 240 с.

[2] *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1969. — 240 с.

[3] *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1975. — 320 с.

[4] *Евграфов М.А.* Аналитические функции. — М.: Наука. — 1968. — 472 с.

[5] *Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А.* Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука. — 1972. — 206 с.

[6] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1987. — 688 с.

[7] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций, т. 1. — М.: Наука. — 1967. — 486 с.

[8] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций, т. 2. — М.: Наука. — 1968. — 624 с.

[9] *Морозова В.Д.* Теория функций комплексного переменного. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана — 2009. — 519 с.

[10] *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз. — 1967. — 444 с.

[11] *Сидоров Ю.Ф., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1976. — 408 с.

[12] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. — М.: Наука. — 1970. — 656 с.

[13] *Фукс Б.А., Шабат Б.В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. — М.: Физматгиз. — 1959 — 376 с.

[14] *Хапланов М.Г.* Теория функций комплексного переменного. Краткий курс. — Ростов-на-Дону: Из-во РГУ. — 1959 — 196 с.

[15] *Шведенко С.В.* Начало анализа функций комплексной переменной. — М.: МИФИ — 2008 — 356 с.

[16] *Эйдерман В.Я.* Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ — 2002. — 256 с.

Методическая литература

[17] *Домрин А.В., Сергеев А.Г.* Лекции по комплексному анализу : в 2-х частях —– М.: МИАН — 2004.

[18] *Коробейник Ю.Ф., Абанин А.В.* Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного. Степенные ряды и ряды Лорана. Особые точки. — УПЛ РГУ, Ростов-на-Дону. — 1992 — 76 с.

[19] *Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В.* Вычеты. Применение теории вычетов к вычислению определенных интегралов. — УПЛ РГУ, Ростов-на-Дону. — 1994. — 48 с.

[20] *Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В.* Многозначные аналитические функции. Применение к вычислению определенных интегралов. — УПЛ РГУ, Ростов-на-Дону. — 1994. — 32 с.

[21] *Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В.* Конформные отображения. — УПЛ РГУ, Ростов-на-Дону. — 1998. — 45 с.

Оглавление