Как подготовиться к ЕГЭ:

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ[1]

*Ерусалимский Я.М., Заслуженный работник
Высшей Школы РФ, доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики ЮФУ*

*Ростов-на-Дону
2016*

Задачи с параметрами – сравнительно новый раздел школьной математики. Задачи с параметрами появились в заданиях ЕГЭ и практически отсутствуют в существующих учебниках и задачниках, поэтому их решение вызывает трудности у проходящих ЕГЭ.

Основным «источником» задач с параметрами является тема: «Квадратный трехчлен. Квадратные уравнения», поэтому мы и разберем решение задачи с параметром из этого раздела.

Задача. *При каком значении параметра* a *сумма квадратов корней уравнения* $x^2+(a+1)x-a=0$ *будет наибольшей и чему она равна?*

Решение

Ясно, что речь идет о вещественных корнях этого уравнения (поскольку о существовании комплексных чисел школьникам неизвестно), поэтому область допустимых значений параметра a, *определяется условием – дискриминант уравнения должен быть больше либо равен чем ноль:*

$$(a+1)^2-4(-(a))\geq 0.$$

Решим квадратное неравенство:

$$a^2+6a+1\geq 0. \qquad (1)$$

Для этого найдем корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства (заметим, что переменной является a*). По формуле корней квадратного трехчлена получим:*

$$a_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}=-3\pm 2\sqrt{2}.$$

Для решения квадратного неравенства (1) представим себе параболу $y=a^2+6a+1$*. Поскольку старший коэффициент положителен, то её ветви направлены вверх, поэтому решение неравенства (1) имеет вид* $(-\infty;-3-2\sqrt{2}]\cup[-3+2\sqrt{2};+\infty)$*. Это множество и будет областью допустимых значений пара-*

метра нашей задачи о минимальном значении суммы квадратов корней уравнения $x^2+(a+1)x-a=0.$

Можно было бы найти корни уравнения по формулам корней квадратного уравнения (это будут выражения, содержащие параметр), затем найти их квадраты, а затем и выражение для суммы квадратов корней уравнения. Этот путь возможен, но не рационален. При выполнении задания ЕГЭ мы ограничены временными рамками, да и оценивается не только правильность решения, но и насколько оно рационально.

Вспомним, что ещё нам известно о корнях квадратного уравнения? Для корней приведенного квадратного уравнения (уравнения со старшим коэффициентом равным единице) справедлива теорема Виета о том, что произведение корней равно *свободному члену уравнения, а их сумма равна «минус» коэффициенту при первой степени неизвестного.*

Преобразуем сумму квадратов корней уравнения следующим образом:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \;.$$

Тогда, по теореме Виета, получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (-(a+1))^2 - 2(-a) = a^2 + 4a + 1 = (a+2)^2 - 3.$$

Теперь нам предстоит найти наименьшее значение функции

$$y = (a+2)^2 - 3$$

на множестве $(-\infty; -3-2\sqrt{2}] \cup [-3+2\sqrt{2}; +\infty)$ *и в этом и заключено основное «коварство» этой задачи.*

График функции $y = (a+2)^2 - 3$ *- парабола, ветви которой направлены вверх. Наименьшее значение она принимает в точке с абсциссой равной* -2 *и оно (наименьшее значение) равно* $-3.$[2] *Но точка* -2 *на оси абсцисс не принадлежит множеству* $(-\infty; -3-2\sqrt{2}] \cup [-3+2\sqrt{2}; +\infty)$, *поэтому нам придется продолжить решение задачи.*

---

[2] Заметим, что в случае вещественных корней сумма квадратов корней не может быть равной отрицательному числу (-3).

Поскольку ветви параболы $y=(a+2)^2-3$ *направлены вверх, а вершина параболы имеет абсциссу равную* -2, *то на множестве* $(-\infty;-3-2\sqrt{2}]$ *наша функция (*$y=(a+2)^2-3$*) убывает и достигает наименьшего значения при* $a=-3-2\sqrt{2}$. *На множестве* $[-3+2\sqrt{2};+\infty)$ *она возрастает, поэтому достигает своего наименьшего значения при* $a=-3+2\sqrt{2}$. *Теперь, для нахождения наименьшего значения функции на множестве* $(-\infty;-3-2\sqrt{2}]\cup[-3+2\sqrt{2};+\infty)$, *нам осталось вычислить чему она равна в этих двух точках и выбрать наименьшее значение.*

Найдем значение функции $y=(a+2)^2-3$ *при* $a_1=-3-2\sqrt{2}$:

$$y(a_1)=(-3-2\sqrt{2}+2)^2-3=(-(1+2\sqrt{2}))^2-3=(1+2\sqrt{2})^2-3=$$

$$1+4\sqrt{2}+8-3=6+4\sqrt{2}.$$

Найдем значение функции $y=(a+2)^2-3$ *при* $a_2=-3+2\sqrt{2}$:

$$y(a_2)=(-3+2\sqrt{2}+2)^2-3=(-1+2\sqrt{2})^2-3=$$
$$1-4\sqrt{2}+8-3=6-4\sqrt{2}.$$

Ясно, что $y(a_2)$ *меньше, чем* $y(a_1)$, *поэтому мы получаем, что наименьшее значение суммы квадратов вещественных корней уравнения* $x^2+(a+1)x-a=0$ *равно* $6-4\sqrt{2}$ *и достигается при* $a=-3+2\sqrt{2}$.

Обсудим ещё раз, с какими «проблемами» («трудностями») Вы могли столкнуться при решении этой задачи:

1. *Если забыть о том, что речь идет о вещественных корнях уравнения, то пропадает условие* $D \geq 0$. *Вы вместо решения задачи на наименьшее значение на множестве* $(-\infty;-3-2\sqrt{2}]\cup[-3+2\sqrt{2};+\infty)$ *будете решать задачу о наименьшем значении функции* $y=(a+2)^2-3$ *на всей числовой оси. Ясно, что* $y_{\min}=y(-2)=-3$. *Но это не будет решением нашей задачи, т.е. Вы задачу «зарубите», а себя «погубите».*
2. *Нахождение дискриминанта для уравнения* $x^2+(a+1)x-a=0$ *для многих затруднено тем, что они*

имеют в голове формулу $D=b^2-4ac$, в ней «a» обозначает коэффициент при x^2. В этом случае $a=1$.
«b» обозначает коэффициент при x. В этом случае $b=(a+1)$ (т.е. вместо b в формулу для дискриминанта нужно подставлять «$a+1$»). «c» в формуле для дискриминанта обозначает свободный член уравнения.
В этом случае вместо «c» нужно подставлять $-a$.

3. Для решения неравенства $D \geq 0$, которое имеет в нашем случае вид $a^2+6a+1 \geq 0$, нам придется искать корни квадратного трёхчлена. Вас в этот момент может «заклинить», поскольку в нем нет привычного x.

Ошибиться тут легко, Вам нужны корни квадратного трехчлена, и Вы можете от волнения написать вместо

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

следующее (которое Вам привычнее):

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

«Иксы» начнут Вас сбивать с толку. Аналогичная ситуация может возникнуть и при нахождении наименьшего значения функции

$$y = (a+2)^2 - 3.$$

Для многих вообще непонятно, что это функция (в голове у них звучит вопрос «Какая же это функция, если в ней нет «икс»?). Ответ на этот «вопрос» - это самая обычная функция, просто в ней переменная величина обозначена «a*», а не* x.

Вывод: *задачи с параметрами, вообще говоря, не сложны. Их не следует бояться. Главное не путать - где что, т.е. где - параметр, а где - неизвестное. Как правило, с параметрами бывают уравнения или неравенства. В них требуется находить:*

- при каких значениях параметра уравнение (неравенство) имеет решения;
- при каких значениях параметра корни уравнения обладают наперед заданными свойствами;
- и т.д. и т.п.

Составить классификацию задач с параметрами невозможно, также как и предложить универсальные методы решения задач с параметрами. Однако, решив одну, две, три . . . . задачи с параметрами, Вы начнете их понимать, войдёте во «вкус» и перестанете их бояться.

Желаю Вам на этом пути успеха!

Попробуйте самостоятельно решить две задачи с параметрами:

1. При каком значении параметра b система уравнений имеет единственное решение, и найти это решение:
$$\begin{cases} x + y = b; \\ x^2 + y^2 = 6 - 4b. \end{cases}$$

2. Исследуйте уравнение $\left|(x+1)^2-1\right|+a-2=0\ (a\in R)$ по параметру, т.е. определите, при каких значениях параметра уравнение не имеет решений, при каких значениях параметра уравнение имеет решения и сколько элементов содержит множество решений уравнения.[3]

[3] Преобразуйте уравнение, оставив в левой части только выражение, содержащие знак модуля, а всё остальное перенесите в правую часть. Попробуйте решить полученное уравнение (с параметром) графически. Введите новый параметр, обозначив 2-а=в.