Линейные уравнения в целых числах (линейные диофантовы уравнения)

1. Решите уравнение в целых числах:

   1) $4x + 64y = 49$; 2) $3x + 4y = 21$; 3) $17x + 3y = 46$; 4) $5x + 7y = 24$; 5) $14x + 18y = 48$.

2. У Миши дома есть кружки двух видов: объемом 0,5 л и 0,4 л (кружек каждого вида достаточно много). Мишина мама сварила 100 л великолепного новогоднего компота. Сколькими способами можно разлить весь новогодний компот по Мишиным кружкам?

3. Дед Мороз узнал про волшебный новогодний компот Мишиной мамы. И для новогоднего корпоратива со снегурочкой и оленями заказал 420 тонн компота в оленьих упряжках вместимостью 15 т, 20 т, 25 т. Сколькими способами можно доставить на корпоративный праздник компот, если главный олень готов выделить всего 27 оленьих упряжек?

4. Миша участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный – списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Миша набрал 35 баллов. На сколько вопросов Миша не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

5. У девочки Даши живёт 76 хомяков, вес каждого из которых выражается целым числом граммов. Известно, что средний вес всех хомяков равен 100 г. Средняя масса «тощих» хомяков, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса «упитанных» хомяков, вес каждого из которых больше 100 г, равна 124 г. Какой наибольший вес может иметь Дашин хомяк?

6. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Миша прошёл несколько уровней игры подряд.

   За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Миша, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Дополнительные задачи

1. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. Сколько чисел написано на доске? Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

2. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 22.

   Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 12,5%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 12,5%.

   Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

   Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в нее учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?

3. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61). Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

4. На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки $+$ и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

   $$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

   Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?

   Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?

   Чему могло равняться n, если полученная сумма чисел равна 150?

5. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61). Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

6. Пусть q – наименьшее общее кратное, а d – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

   Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

   Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.