# 1 Однородное транспортное уравнение

Характеристики. Общее решение. Задача Коши. Решение конкретных задач. Характеристические точки, области тени и разрывы.

## 1.1 Уравнения с частными производными

**Определение 1.1.** *Уравнение с частными производными (УрЧП)– это уравнение, связывающее в каждой точке $q$ некоторой области $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ значения неизвестной функции $u = u(q)$, её частных производных по координатам вектора $q$, и, возможно, ряда заданных функций. При этом все перечисленные значения вычисляются при одном и том же значении независимой переменной $q$. Порядком уравнения называется максимальный порядок частной производной неизвестной функции, входящей в уравнение.*

Запись общего УрЧП порядка $N$ имеет вид

$$F(p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(N)}, q, u) = 0, \tag{1.1}$$

где $F$ – заданная функция, $p^{(k)}$ – совокупность частных производных функции $u$ порядка $k$. Подразумевается, что подстановка в уравнение (1.1) вместо неизвестной $u$ любой функции $v$, непрерывно дифференцируемой $N$ раз в области $E_0$, приводит к новой функции

$$\widetilde{v} = F(\partial^{(1)}v, \partial^{(2)}v, \dots, p^{(N)}v, q, v),$$

в том или ином смысле определённой в области $E_0$. В таком случае говорят, что уравнение задано в области $E_0$. Мы будем по умолчанию предполагать, что уравнение задано так, что указанная подстановка приводит всегда приводит к непрерывной функции $\widetilde{v}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и $\ell \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{C}(D)$ и $\mathrm{C}^\ell(D)$ множества функций непрерывных в $D$, и, соответственно, $\ell$ раз непрерывно дифференцируемых в области $D$.

Пусть в области $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ задано, и $u \in \mathrm{C}^N(D)$.

**Определение 1.2.** *Функция $u$ называется решением в области $D$ УрЧП порядка $N$, заданного в области $E_0 \supset D$, если $u \in \mathrm{C}^N(D)$ и при подстановке в уравнение обращает его в тождество в смысле совпадения всюду в области $D$ непрерывных в ней функций.*

В последующем изложении, по умолчанию, все заданные и неизвестные функции предполагаются непрерывно-дифференцируемыми столько раз, сколько требуют текущие рассмотрения.

Нижний индекс, совпадающий с обозначением некоторой координаты, обозначает частное дифференцирование по этой координате. Несколько таких индексов обозначают кратное частное дифференцирование. Например,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

## 1.2 Транспортное уравнение

*Транспортным* назовём уравнение

$$\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = \gamma(x,y,u), \ (x,y) \in D, \tag{1.2}$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $\alpha, \beta, \gamma$ – заданные функции, а функция $u = u(x, y)$ подлежит определению. Порядок транспортного уравнения равен 1.

Уравнение (1.2) может иметь очень много решений. Например, однородное уравнение

$$u_x = 0$$

имеет решения $u = \varphi(y)$, где функция $\varphi$ произвольна, и это решение – общее, в том смысле, что любое решение этого уравнения представимо в указанном виде.

Общее однородное транспортное уравнение

$$\alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)u_y = 0 \tag{1.3}$$

в некотором смысле сводится к простейшему уравнению $u_x = 0$, и его общее решение также зависит от произвольной функции одной переменной.

### 1.3 Характеристики транспортного уравнения

**Определение 1.** Характеристиками однородного транспортного уравнения (1.3) называются фазовые кривые векторного поля

$$\mathbf{V} : (x, y) \mapsto (\alpha(x, y), \beta(x, y)) \tag{1.4}$$

где $\alpha, \beta$ – коэффициенты уравнения, стоящие при частных производных по координатам $x, y$.

Напомним, фазовой кривой данного векторного поля называется кривая, в каждой своей точке касающаяся этого поля. Если $x = x(\tau),\ y = y(\tau)$ – решение системы ОДУ

$$\dot{x} = \alpha(x, y),\ \dot{y} = \beta(x, y),\ \dot{()} = \frac{d()}{d\tau}, \tag{5}$$

то отображение $\tau \mapsto (\widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau))$ параметризует фазовую кривую, так что она совпадает с траекторией, заметаемой точкой $(\widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau))$, пробегаемой при изменении параметра $\tau$.

**Лемма 1.** Пусть $\chi \subset D$ – характеристика уравнения (1.3), $(x_1, y_1) \in \chi$, $(x_2, y_2) \in \chi$. Пусть $u$ – решение этого уравнения в области $D \supset \chi$. Тогда

$$u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2).$$

◀ Пусть отображение $\tau \mapsto (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$ параметризует характеристику $\chi$. Тогда

$$\exists\ \tau_1, \tau_2 :\ x_1 = \widetilde{x}(\tau_1),\ y_1 = \widetilde{y}(\tau_1),\ x_2 = \widetilde{x}(\tau_2),\ y_2 = \widetilde{y}(\tau_2),$$

при этом

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} u(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) d\tau =$$

(дифференцируем сложную функцию)

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left( u_x(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \frac{d\tilde{x}}{d\tau} + u_y(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \frac{d\tilde{y}}{d\tau} \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\alpha(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) u_x(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) + \beta(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) u_y(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\right) d\tau = 0,$$

так как подинтегральное выражение равно нулю в силу уравнения (1.3). ▶