ФЕДЕРАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ЮФУ)»

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (РГУПС)»

Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко, В. А. Богачев

Курс лекций по комплексному анализу: решение задач

Ростов-на-Дону
2016

Печатается по решению
кафедры математического анализа и учебно-методической комиссии
института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Рецензент:
доцент Ковальчук В.Е. (ЮФУ)

Л. И. Калиниченко, Ю. А. Кирютенко, В. А. Богачев
Курс лекций по комплексному анализу: решение задач. — ЮФУ. Ростов-на-Дону, 2016. — 162 с.

В учебном пособии к лекциям по комплексному анализу [15] изложен практический материал, традиционно используемый в классических университетах и технических университетах с расширенным уровнем математической подготовки при проведении практических занятий в аудитории, формировании самостоятельных и контрольных работ, выполняемых в аудитории или вне ее, составлении тестовых заданий. В каждом разделе приведены основные определения и теоремы, позволяющие работать с материалом, не обращаясь к курсу лекций [15].

Пособие создано на основе курсов, читавшихся на протяжении нескольких лет в Южном федеральном университете в институте математики, механики и компьютерных наук доцентами Калиниченко Л. И., Кирютенко Ю. А., и в Ростовском государственном университете путей сообщения доцентом Богачевым В. А.

1 Комплексные числа и действия с ними

Определение 1.1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), то есть $z = (x, y)$.*

Первая компонента x комплексного числа $z = (x, y)$ называется его действительной частью и обозначается $\mathcal{R}e\, z$. Вторая компонента y называется его мнимой частью и обозначается $\mathcal{I}m\, z$. Комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляют с действительным числом x. То есть комплексные числа вида $z = (x, 0)$ являются известными из курса элементарной математики действительными числами. Число $(1, 0)$ называют комплексной единицей, часто называют просто единицей и пишут 1 вместо $(1, 0)$. Комплексные числа вида $z = (0, y)$ (числа, действительная часть которых равна 0), называют (чисто) мнимыми. Число $(0, 0)$ называют комплексным нулем, часто называют просто нулем и пишут 0 вместо $(0, 0)$. Это единственное комплексное число, одновременно являющееся и действительным, и мнимым. Далее термин «число», если нет уточнения, означает комплексное число.

Комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ считают равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Коммутативность операции сложения очевидна. Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называют комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Операция умножения комплексных чисел также коммутативна и можно говорить о произведении комплексных чисел, не указывая порядка сомножителей. Из определения произведения следует, что произведение любого действительного числа λ (то есть комплексного числа $(\lambda, 0)$) на любое комплексное число $z = (x, y)$ равно $\lambda \cdot z = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$. Как и в вещественном случае, для любого комплексного числа z справедливы равенства $z \cdot 1 = z$, $z + 0 = z$. Легко проверить, что операции сложения и умножения комплексных чисел ассоциативны и дистрибутивны.

Определение 1.2. *Комплексное число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается через i.*

Из определения произведения комплексных чисел следует основное свойство мнимой единицы:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0), \text{ то есть } i^2 = -1.$$

Из курса математики средней школы известно, что квадрат любого действительного числа является неотрицательным числом. «Аномальное» с точки зрения действительных чисел свойство мнимой единицы может быть аксиомой при кратком формальном построении множества комплексных чисел.

Алгебраическая форма комплексного числа. Любое комплексное число $z = (x, y)$ можно записать в виде:

$$z = (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Определение 1.3. *Комплексное число $z = x - iy$ называется* сопряженным *с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается $\overline{z}$.*

Арифметические операции сложения, вычитания и умножения с комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, записанные в алгебраической форме, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Чтобы определить операцию деления комплексных чисел, рассмотрим следующую задачу: пусть $z = (x, y)$ — фиксированное комплексное число, отличное от нуля, требуется найти такое комплексное число $w = (u, v)$, что $w \cdot z = 1$. Чтобы решить уравнение $w \cdot z = 1$ относительно z умножим обе части этого уравнения на $\overline{z}$ и получим, что

$$w \cdot z \cdot \overline{z} = \overline{z} \Rightarrow w \cdot (x^2 + y^2) = \overline{z}.$$

Но $x^2 + y^2$ — вещественное число, отличное от нуля, поэтому

$$w = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, каждое комплексное число $z = x + iy \neq 0$ имеет обратное ему число

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Из определения произведения комплексных чисел следует, что частное от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ равно

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.2}$$

Множество всех комплексных чисел с операциями сложения, умножения, деления и сопряжения будем обозначать далее через $\mathbb{C}$.

Из определения 1.3 и формул (1.1), (1.2) нетрудно вывести свойства операции сопряжения:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, 3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

Из свойств 2), 3) операции сопряжения следует, что

$$4)\ \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n,\ n \in \mathbb{N}, \quad \overline{(z^{-n})} = (\overline{z})^{-n},\ n \in \mathbb{N},\ z \neq 0.$$

Здесь, как и в вещественном случае, z^n — это произведение n сомножителей, равных $z = x + iy$, которое можно вычислить, используя формулу бинома Ньютона $z^n = (x+iy)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^{n-k}(iy)^k$.

Определение 1.4. *Число $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$.*

Свойства модуля комплексного числа:

$$1)\ |z| = |\overline{z}|, \quad 2)\ z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad 3)\ \max\{|\mathcal{R}e\, z|, |\mathcal{I}m\, z|\} \leq |z| \leq |\mathcal{R}e\, z| + |\mathcal{I}m\, z|.$$

Геометрическое представление комплексного числа. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ геометрически соответствует точка $M(x, y)$ на координатной плоскости XOY. Вектор с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(x, y)$ имеет длину, очевидно, равную $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Плоскость на которой изображаются комплексные числа называется комплексной плоскостью и также обозначается $\mathbb{C}$. При этом, ось абсцисс называют вещественной (действительной) осью, а ось ординат — мнимой осью. Учитывая соответствие между вещественными числами $x \in \mathbb{R}$ и комплексными числами вида $(x, 0)$, можем сказать, что множество комплексных чисел является расширением множества вещественных чисел и написать $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

В силу неупорядоченности множества точек плоскости и исходя из геометрической интерпретации комплексных чисел убеждаемся, что на множестве $\mathbb{C}$ нельзя ввести операции сравнения: $\leq, <, \geq, >$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. В комплексной плоскости перейдем к полярной системе координат (r, φ), где $r = |z|$, φ — угол между положительной частью действительной оси и вектором с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке $z \neq 0$. Тогда легко находим, что декартовы координаты точки (x, y), соответствующей комплексному числу $z = (x+iy) \neq 0$, равны $x = r\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\varphi$. Поэтому комплексное число $z \neq 0$ можно записать в форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z),$$

которую называют тригонометрической формой комплексного числа.

Число φ называется аргументом числа z и обозначается $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен. Для нахождения аргумента числа $z = x+iy \neq 0$

нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.3}$$

В силу 2π-периодичности функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ каждое комплексное число $z \neq 0$, система (1.3) имеет бесконечно много (счётное множество) решений: $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Всюду далее под $\arg z = \varphi$ будем понимать значение φ, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$ (или $[0, 2\pi)$). Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ вычисляется по следующей по схеме:

$$\arg\, z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено другое, будем считать, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$ и называть это значение аргумента главным.

Из геометрического представления комплексного числа и из определения его модуля и аргумента следует, что модуль и аргумент комплексного числа являются полярными координатами (полярными радиусом и углом) точки плоскости, изображающей данное комплексное число.

Пусть два комплексных числа заданы в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Легко проверить, что $z_1 = z_2$, тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2 \text{ и } \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

их умножение выполняется по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big), \tag{1.5}$$

а деление, если $z_2 \neq 0$, по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big). \tag{1.6}$$

Отметим, что в результате умножения и деления комплексных чисел, аргументы произведения и частного могут оказаться не главными значениями соответствующих комплексных чисел.

Показательная форма комплексного числа. Комплексное число z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), принято обозначать $z = re^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) и называть показательной (экспоненциальной) формой комплексного числа. При этом равенство $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, называется формулой Эйлера.

Формула Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ r \in (0, +\infty), \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Извлечение корня из комплексного числа. Комплексное число z называется корнем n-ой степени ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) из комплексного числа $a \in \mathbb{C}$ (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$. Рассмотрим задачу поиска всех решений уравнения $z^n = a$. Если $a = 0$, то данное уравнение имеет единственное решение $z = 0$. Если $a \neq 0$ и $\varphi = \arg a$, то рассматриваемое уравнение имеет n различных корней, которые находятся по формуле при $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$z_k = {}_{+}\sqrt[n]{|a|}e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)} = {}_{+}\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \quad (1.8)$$

Здесь символом ${}_{+}\sqrt[n]{|a|}$ обозначено арифметическое (школьное) значение корня из вещественного положительного числа $|a|$.

На комплексной плоскости все корни из формулы (1.8) являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $|a|^{1/n}$ с центром в точке $(0, 0)$. Значение корня при $k = 0$, то есть $z_0 = |a|^{1/n}\, e^{i\varphi/n}$ называют главным значением корня. Для вещественного положительного числа a главное значение корня совпадает с арифметическим значением (в этом случае $\varphi = \arg a = 0$).

Решение уравнения $\mathbf{e^z = a}$. Если $a = 0$, то данное уравнение корней не имеет. Если $a \neq 0$ и $\varphi = \arg a$, то уравнение $e^z = a$ имеет бесконечное множество различных корней, которые находятся по формуле:

$$z_k = \ln|a| + i\,(\varphi + 2\pi k)\,,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

Правую часть выражение (1.9) обозначают символом $\operatorname{Ln} a$.

Компактификация комплексной плоскости. Для полноценного анализа множества всех комплексных чисел оказывается недостаточно. Например, точка $z = 0$, в отличие от всех остальных точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не имеет обратной. Поэтому введем так называемую бесконечно удалённую точку, обозначаемую ∞, как точку, обратную точке $z = 0$ (ее еще называют «несобственным» элементом). В классическом действительном анализе рассматривают два несобственных элемента $-\infty$ и $+\infty$, являющихся только символами, в комплексном анализе пополнение множества $\mathbb{C}$ одним несобственным элементом вполне достаточно для всех построений, производимых в теории функций комплексного переменного. Получаемое в результате множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называют расширенной комплексной плоскостью. В результате такой, как говорят, компактификации комплексной плоскости $\mathbb{C}$, например, отображение $w = 1/z$ оказывается биекцией множества $\mathbb{C}$ на себя. При этом по определению полагают, что $w(0) = \infty$ и $w(\infty) = 0$.

В отличие от комплексных чисел, несобственный элемент ∞ не имеет простого наглядного геометрического изображения.

Арифметические операции с комплексными числами можно формально распространить и на $\overline{\mathbb{C}}$, положив по определению для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\infty + z = z + \infty = \infty;\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty,\ \text{если } z \neq 0;$$
$$\infty \cdot \infty = \infty;\ \frac{z}{\infty} = 0;\ \frac{\infty}{z} = \infty.$$

Операции $\infty+\infty$, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot 0$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, как и в математическом анализе, лишены смысла.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.1. *Найти сумму комплексных чисел* $1 - i$ *и* $(\overline{4 + 2i})$.

■ Применяя формулу для суммы из (1.1) и определение сопряженного комплексного числа (определение 1.3), получим, что $1-i+(\overline{4 + 2i}) = 1-i+4-2i = 5 - 3i$. □

Пример 1.2. *Найти результаты операций с комплексными числами*

$$a)\ \overline{(3 + i)(3 - i)}, \quad b)\ (1 - 2i)\ \textit{и}\ (3 + 4i).$$

■ а) Воспользуемся свойствами операции сопряжения, а затем свойствами модуля комплексного числа и получим:

$$\overline{(3 + i)(3 - i)} = (\overline{3 + i})(\overline{3 - i}) = (3 - i)(3 + i) = |3 + i|^2 = (\sqrt{3^2 + 1^2})^2 = 10.$$

b) По формулам (1.1) $(1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot (4i) = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i$. □

Пример 1.3. *Найти частное от деления комплексных чисел* $\dfrac{1 - i}{\overline{2 + i}}$.

■ Воспользуемся формулами (1.1), (1.2), а так же свойствами операции сопряжения и модуля комплексного числа:

$$\frac{1 - i}{\overline{2 + i}} = \frac{(1 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{1}{|2 - i|^2}(1 - i)(2 + i) = \frac{1}{5}(3 - i). \quad \square$$

Пример 1.4. *Найти модуль комплексного числа* $z = (1 + i\sqrt{3})^3$.

■ Так как $z = (1+i\sqrt{3})^3 = 1+3i\sqrt{3}+9i^2+3i^3\sqrt{3} = 1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3} = -8$, то по определению модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{(-8)^2} = 8$. □

Пример 1.5. *Найти аргумент комплексного числа* $z = -1 + 2i$.

■ Воспользуемся схемой (1.4). Так как $x = \mathcal{R}e\, z = -1 \neq 0$, $y = \mathcal{I}m\, z = 2$, то точка z находится во второй четверти координатной плоскости, а значит $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2}{-1} = \pi - \operatorname{arctg} 2$. □

Пример 1.6. *Найти a)* $\mathcal{I}m\,(1-i)^4$, *b)* $\mathcal{R}e\,(2-i)^3$.

■ a) Так как $(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4$, поэтому $\mathcal{I}m\,(1-i)^4 = 0$.

b) Поскольку $(2-i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2\cdot(-i)+3\cdot 2\cdot(-i)^2+(-i)^3 = 8-12i-6+i = 2-11i$, поэтому $\mathcal{R}e\,(2-i)^3 = 2$. □

Пример 1.7. *Вычислить* $(2+i)^5$.

■ Используем формулу бинома Ньютона при $n = 5$:

$$
\begin{aligned}
(2+i)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \frac{5!}{k!(5-k)!}\, 2^{5-k} i^k = \\
&= 2^5 + 5\cdot 2^4 i + \frac{5\cdot 4}{2!}2^3 i^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}2^2 i^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}2i^4 + i^5 = \\
&= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i = -38 + 41i.
\end{aligned}
$$
□

Пример 1.8. *Найти модуль и аргумент комплексного числа*

$$a)\ z = 2 - i \qquad b)\ z = -2 + \sqrt{3} \qquad c)\ z = -1 + 3i.$$

■ *a*) Находим $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. При $\mathcal{R}e\, z = 2 > 0$, $\mathcal{I}m\, z = -1 < 0$, точка z находится в четвертной четверти координатной плоскости и из равенства $\operatorname{tg}\varphi = -1/2$ получаем, что

$$\arg z = \operatorname{arctg}(-1/2) = -\operatorname{arctg} 1/2.$$

b) Так как $0 < \sqrt{3} < 2$, то действительное число $z = -2+\sqrt{3}$ отрицательно и

$$|z| = |-2+\sqrt{3}| = -(-2+\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}, \quad \arg z = \pi.$$

c) Находим $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. При $\mathcal{R}e\, z = -1 < 0$, $\mathcal{I}m\, z = 3 > 0$ точка z расположена во второй четверти координатной плоскости, поэтому $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}(-3) = \pi - \operatorname{arctg} 3$. □

Пример 1.9. *Найти модуль и аргумент комплексного числа*

$$a)\ z = -2i\Big(\cos\frac{4\pi}{7} - i\sin\frac{4\pi}{7}\Big) \qquad b)\ z = (1+i)(\sqrt{3} - i).$$

■ Каждое из заданных чисел записано в виде произведения. Можно было бы перемножить эти числа и вычислить модуль и аргумент полученного результата, как это делалось выше. А можно найти модуль и аргумент сомножителей и воспользоваться правилом (1.5) умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

a) Пусть $z_1 = -2i$, $z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{7} - i\sin\dfrac{4\pi}{7} = \cos\dfrac{-4\pi}{7} + i\sin\dfrac{-4\pi}{7}$. Тогда $z = z_1 \cdot z_2$. Так как $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = -\pi/2$, $|z_2| = 1$, $\arg z_2 = -4\pi/7$, то, используя формулу (1.5), находим, что

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2| = 2, \quad \arg z_1 + \arg z_2 = (-\pi/2) + (-4\pi/7) = -15\pi/14.$$

Но $-15\pi/14 < -\pi$. Поэтому найденное значение не принадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$. Вычислим главное значение $\arg z$:

$$\arg z = 2\pi - \frac{15\pi}{14} = \frac{13\pi}{14}.$$

b) Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Тогда $z = z_1 \cdot z_2$. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \pi/4$, $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$, то, используя формулу (1.5), находим, что $|z| = |z_1| \cdot |z_2| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = \arg z_1 + \arg z_2 = (\pi/4) + (-\pi/6) = \pi/12$. □

Пример 1.10. *Записать комплексное число* $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ *в тригонометрической и показательной формах.*

■ Пусть $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, где $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \pi/4$, $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = -\pi/6$, то, используя формулу (1.6), находим, что

$|z| = |z_1|/|z_2| = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $\arg z = \arg z_1 - \arg z_2 = (\pi/4) - (-\pi/6) = 5\pi/12$.

Таким образом, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}e^{5\pi i/12}$. □

Пример 1.11. *Решить уравнение* $z^3 - i = 0$.

■ Запишем уравнение в виде $z^3 = i$. Его решениями являются все кубические корни из комплексного числа i. Так как $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$, то, используя формулу (1.8), находим, что три комплексныех числа

$$z_k = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right),$$

$k = 0, 1, 2$, являются корнями данного уравнения. □

Пример 1.12. *Найти все корни уравнения* $z^4 - 1 + i = 0$, *для которых* $\mathcal{R}e\, z < 0$, $\mathcal{I}m\, z > 0$.

■ Запишем уравнение в виде $z^4 = 1 - i$. Так как $|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\pi/4$, то, используя формулу (1.8), находим все корни данного уравнения

$$z_k = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\,\exp i\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k=\overline{0,3}.$$

Для нахождения искомого решения нужно выбрать те значения k, при которых $\pi/2 < \arg z_k < \pi$. Этому условию удовлетворяет только корень $z_2 = \sqrt[8]{2}\,\exp i\left(-\dfrac{\pi}{16}+\pi\right) = \sqrt[8]{2}\,e^{15\pi i/16}$. □

Пример 1.13. *Решить уравнение* $\operatorname{ch} z = -2i$.

■ Используя равенство $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ сведем задачу к показательному уравнению

$$e^z + e^{-z} = -4i \ \text{ или } \ \frac{e^{2z}+4ie^z+1}{e^z} = 0.$$

Таким образом, надо решить квадратное уравнение относительно e^z

$$e^{2z} + 4ie^z + 1 - 0,$$

корнями которого являются комплексные числа $i(-2+\sqrt{5})$ и $i(-2-\sqrt{5})$.

Чтобы решить уравнение $e^z = i(-2+\sqrt{5})$ найдем значения $\operatorname{Ln} i(-2+\sqrt{5})$, воспользовавшись формулой (1.9):

$$\operatorname{Ln} i(-2+\sqrt{5}) = \ln|i(-2+\sqrt{5})| + i(\arg(i(-2+\sqrt{5})) + 2\pi k),\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Ln} i(-2+\sqrt{5}) = \ln(\sqrt{5}-2) + i(\pi/2+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Аналогично, решая уравнение $e^z = i(-2-\sqrt{5})$, находим:

$$\operatorname{Ln} i(-2-\sqrt{5}) = \ln(\sqrt{5}+2) + i(-\pi/2+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Получили два множества решений исходного уравнения

$$z_k = \ln(\sqrt{5}-2) + i(\pi/2+2\pi k),\ z'_k = \ln(2+\sqrt{5}) + i(-\pi/2+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Геометрически эти точки лежат на прямых $\mathcal{R}e\ z = \ln(\sqrt{5}-2)$ и $\mathcal{R}e\ z = \ln(\sqrt{5}+2)$, параллельных мнимой оси; расстояние между любыми соседними точками на каждой прямой равно 2π. □

Пример 1.14. *Известно, что* $-i$ *является корнем уравнения*

$$z^3 - (b^2+1)z^2 + bz - 2 = 0,\ \text{где } b\in\mathbb{R}.$$

Найти значение b *и решить уравнение при найденном значении* b.

■ Так как $-i$ — корень данного уравнения, то

$$(-i)^3 - (b^2+1)(-i)^2 + b(-i) - 2 = i + b^2 + 1 - bi - 2 = b^2 - 1 + i(1-b) = 0.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 - 1 = 0, \\ 1 - b = 0, \end{cases}$$

из которой находим, что $b = 1$. Теперь решаем уравнение $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$, $z^2(z-2) + (z-2) = 0$, $(z-2)(z^2+1) = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. □

Пример 1.15. *Решить уравнение* $2z = i\arg(3z + i)$.

■ Так как аргумент числа $z = 0$ не существует, то $3z + i \neq 0$, то есть $z \neq -i/3$. По определению $\arg(3z + i) \in (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$, поэтому из уравнения следует, что число $\mathcal{R}e\, 2z = 2(x + iy) = 0$, то есть $x = 0$. Получаем уравнение

$$2iy = i\arg\big((3y+1)i\big) \quad \text{или} \quad 2y = \arg\big((3y+1)i\big).$$

Если $y < -1/3$, то $2y = -\pi/2$, $y = -\pi/4 < -1/3$.
Если $y > -1/3$, то $2y = \pi/2$, $y = \pi/4 > -1/3$.
Следовательно, решениями уравнения являются $z_1 = -\pi i/4$, $z_2 = \pi i/4$. □

Пример 1.16. *Доказать, что*

$$\arg z = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x + |z|}, \ \textit{если}\ z = x + iy \notin (-\infty, 0].$$

■ Пусть $z \neq 0$ и $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi)$. Тогда $\dfrac{\varphi}{2} \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, и

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\cos^2(\varphi/2)} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Но $z \notin (-\infty, 0]$, то есть $\varphi \neq \pm\pi$ и $\varphi/2 \neq \pm\pi/2$. Так как

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|},\ \cos\varphi = \frac{x}{|z|},\ \text{то} \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x + |z|}.$$

Тогда $\varphi = 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x + |z|}$, при $z \neq 0$, $\varphi \neq \pm\pi$. □

Пример 1.17. *Доказать тождество* $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big)$.

■ Используем тождество $|z|^2 = z\,\overline{z}$:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)\,(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$$
$$= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big).$$

Замечание. Поскольку геометрически комплексное число $z = x + iy$ представляется точкой с координатами (x, y), с которой можно связать вектор из начала координат в точку (x, y), то доказанное равенство соответствует известной теореме геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. □

Пример 1.18. *Доказать, что если*

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ и } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

то точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

■ Так как $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2 и z_3 лежат на единичной окружности $|z| = 1$. Заметим, что среди точек z_1, z_2 и z_3 нет двух совпадающих. Действительно, если бы, например, $z_1 = z_2$, то $2z_1 + z_3 = 0$ и потому $|z_1| = |z_3|/2 = 1/2$, что противоречит условию $|z_1| = 1$.

Докажем, что $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$. Докажем, например, что $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$. Для этого достаточно показать, что $|z_2 - z_1|^2 = |z_3 - z_2|^2$. Вновь применим тождество $|z|^2 = z\,\overline{z}$:

$$|z_2 - z_1|^2 - |z_3 - z_2|^2 = (z_2 - z_1)\,(\overline{z_2} - \overline{z_1}) - (z_3 - z_2)\,(\overline{z_3} - \overline{z_2}) =$$

$$= z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_3\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} - z_2\overline{z_2} =$$

$$= z_2\,(\overline{z_3} - \overline{z_1}) + \overline{z_2}\,(z_3 - z_1) + |z_1|^2 - |z_3|^2 = (-z_3 - z_1)\,(\overline{z_3} - \overline{z_1}) + (-\overline{z_1} - \overline{z_3})\,(z_3 - z_1) =$$

$$= z_3\,\overline{z_1} - |z_3|^2 + |z_1|^2 - z_1\,\overline{z_3} + |z_1|^2 - z_3\,\overline{z_1} + z_1\,\overline{z_3} - |z_3|^2 = 2|z_1|^2 - 2|z_3|^2 = 0.$$

Таким образом, точки z_1, z_2 и z_3 — вершины правильного треугольника. □

1.1 Практические задачи для самостоятельной работы.

Пример 1.19. *Вычислить:*

1) $(2+i)(2-i)+\overline{i}$;
2) $\dfrac{3+i}{1-2\,i}$;
3) $(1+6\,i)\,\overline{6\,i}$;
4) $\dfrac{2\,i+(\overline{3\,i+1})}{2}$;
5) $(i+2)(\overline{i+3})$;
6) $(i-1)+2\,i(\overline{i+3})$;
7) $(i-1)+2\,i(\overline{i+3})$;
8) $\dfrac{\overline{i-2}}{i}$;
9) $\dfrac{(i+2)(i-7)}{2\,i}$;
10) $\dfrac{(i+2)(\overline{i+2})}{-i}$;
11) $\dfrac{\overline{i-2}}{\overline{i}}$;
12) $(i-7)(\overline{7+i})$;
13) $\dfrac{i}{2}+\overline{4\,i}$;
14) $\dfrac{i}{2\,i+1}-\overline{4\,i}$;
15) $i\,(2\,i-1)\,4\,i$;
16) $(i-2)(\overline{16\,i+4})$.

Пример 1.20. *Найти модуль и аргумент комплексного числа:*

1) $2\,i + (\overline{4\,i+1})^2$;

2) $(2+4\,i)^3$;

3) $(3\,i-1)^5$;

4) $(2\,i)^2 - 4\,i + 1$;

5) $(\overline{3+2\,i}) - 6\,i + i^2$;

6) $(2+i)^{-1}$;

7) $((2+i)(3-i))^2$;

8) $(6-i)^{-1} + \overline{2\,i}$;

9) $(4+2\,i)(3-4\,i)^2$;

10) $(2-5\,i)^3$;

11) $i - (\overline{4\,i+1})^3$;

12) $i - 4 + \dfrac{i}{\overline{6\,i}}$;

13) $\dfrac{6+2\,i}{i} - (2\,i)^3$;

14) $(3\,i+2)(-3\,i+1)^2$;

15) $(2\,i-4)^2 + \dfrac{i}{\overline{3\,i}}$;

16) $3\,i - 1 + \dfrac{2\,i}{i^6}$.

Пример 1.21. *Найти мнимую и действительную части комплексного числа:*

1) $(i+4)2\,i$;

2) $(6-2\,i) + (2\,i)^3$;

3) $\dfrac{-4\,i+1}{i^2}$;

4) $\dfrac{-4\,i+1}{i^3}$;

5) $\dfrac{2\,i+5}{\overline{i-2}}$;

6) $(i+1)^3 + 2\,i$;

7) $(i+5)(i-5)^2$;

8) $(\overline{i+6}) - (2\,i)^3$;

9) $(2-4\,i)(\overline{2+5\,i})$;

10) $10\,i + (6-2\,i)^2$;

11) $(5\,i+4)^2 - \overline{3\,i}$;

12) $6\,i - (4\,i)^3$;

13) $5 + 2\,i - (\overline{6\,i+2})^2$;

14) $\dfrac{(6-2\,i)^2}{3\,i}$;

15) $\dfrac{5-3\,i}{5+3\,i}$;

16) $7\,i - 4 + (\overline{2\,i-1})$.

Пример 1.22. *Вычислить все значения корней и изобразить их на комплексной плоскости:*

1) $\sqrt[7]{1}$;

2) $\sqrt[6]{-1}$;

3) $\sqrt[4]{2\,i}$;

4) $\sqrt[3]{i+2}$;

5) $\sqrt[6]{2\,i+3}$;

6) $\sqrt[5]{i-4}$;

9) $\sqrt[5]{i-5}$;

10) $\sqrt[6]{2\,i}$;

11) $\sqrt[5]{4-i}$;

12) $\sqrt[3]{2+3\,i}$;

13) $\sqrt[6]{1}$;

14) $\sqrt[4]{i-2}$;

7) $\sqrt[3]{i}$;

8) $\sqrt[3]{i+1}$;

15) $\sqrt[5]{i+4}$;

16) $\sqrt[3]{3\,i+4}$.

Пример 1.23. *Решить уравнения:*

1) $z^6+1=-2i$;

2) $z^4-i=2$;

3) $z^4+1-i=0$;

4) $z^3+16z=0$;

5) $\sin^2 z=0$;

6) $e^z+i=0$;

7) $e^{2z}-i=0$;

8) $e^{-z/2}=-i$;

9) $\cos^2(z-1)=0$;

10) $\operatorname{sh}^2(2z)=0$;

11) $\operatorname{ch}^2(2z)=0$;

12) $e^{z+1}=\pi i$;

13) $\sin z=2$;

14) $\cos(iz)=2$;

15) $\operatorname{sh} z=2i$;

16) $\operatorname{sh}(2iz)=i$.

1.2 Дополнительные задачи для самостоятельной работы

Задача 1.1. *Доказать, что при делении комплексных чисел частное единственно.*

Задача 1.2. *Найти тригонометрическую форму числа* $z=1+i\operatorname{tg}\alpha$, *в котором* $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, $\alpha\neq\pi/2$, $\alpha\neq 3\pi/2$.

Задача 1.3. *Пусть* $z+\dfrac{1}{z}=1$. *Найти* $z^{1992}+\dfrac{1}{z^{1992}}$.

Задача 1.4. *Доказать тождества:*

a) $\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}=r$, *если* $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$;

b) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(e^{2k/n}-1\right)=(-1)^{n-1}n\quad(n\geqslant 2)$.

Задача 1.5. *Доказать, что* $|1+z^2|\geqslant 2(\mathcal{R}e\,z)^2$, *если* $-1\leqslant\mathcal{R}e\,z\leqslant 1$.

Задача 1.6. *При* $n\in\mathbb{N}$ *доказать равенства:*

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^kC_n^{2k}=2^{n/2}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right);\qquad\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^kC_n^{2k+1}=2^{n/2}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

Указание. Использовать формулу Муавра для $(1+i)^n$ и биномом Ньютона.

Задача 1.7. *Решить уравнение* $\operatorname{tg}z=e^{ki}$, *где* k *— заданное действительное число.*

2 Множества на комплексной плоскости

Кривая на комплексной плоскости. Одним из способов задания кривой на плоскости $\mathbb{C}$ является ее параметрическое представление

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

в котором функции $x(t),\ y(t)$ непрерывны на некотором сегменте $[\alpha, \beta]$.

Задание кривой формулой (2.1) означает, что любому значению $t \in [\alpha, \beta]$ соответствует точка $(x, y) \in \mathbb{C}$, то есть комплексное число $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$. Следовательно, задание кривой в форме (2.1) равносильно заданию функции $\sigma(t)$. Равенство

$$z = \sigma(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{2.2}$$

называют уравнением кривой в плоскости $\mathbb{C}$ в параметрической форме.

Для кривой (2.2) точка $\sigma(\alpha)$ называется началом кривой, а точка $\sigma(\beta)$ — концом кривой. Если $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, кривая называется замкнутой.

Если $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$, $z_1 = \sigma(t_1)$, $z_2 = \sigma(t_2)$, то говорят, что на кривой точка z_2 следует за точкой z_1. Таким образом, кривая является упорядоченным множеством точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Такой порядок следования точек на кривой называют направлением по возрастанию параметра или положительным. Всюду далее, если не оговорено противное, предполагается, что на кривой рассматривается положительное направление. Кривую σ с положительным направлением будем обозначать σ^+, когда такое направление надо будет подчеркнуть. Противоположный порядок следования точек на кривой называют направлением по убыванию параметра или отрицательным. Кривую σ с отрицательным направлением будем обозначать σ^-.

Пусть кривая задана выражением (2.2), рассмотрим множество точек на комплексной плоскости

$$\Gamma_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : z = \sigma(t),\ t \in [\alpha, \beta]\},$$

которое называется путем в $\mathbb{C}$ (или носителем кривой σ в $\mathbb{C}$). Это множество отличается от самой кривой, во-первых, тем, что кривая является упорядоченным множеством точек, а, во-вторых, тем, что различным точкам кривой может соответствовать одна и та же точка множества Γ_σ: если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ при $t_1 \ne t_2$, то точки $z_1 = \sigma(t_1)$, $z_2 = \sigma(t_2)$ являются различными точками кривой, но как точки плоскости совпадают. Такие точки называются точками самопересечения кривой. Общее начало и конец кривой не считается точкой самопересечения.

Кривая без точек самопересечения называется простой (или жордановой) кривой.

Если вспомнить известную из аналитической геометрии неявную форму уравнения кривой на плоскости $F(x,y)=0$, то, выражая x и y через z

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i},$$

получим равенство

$$F\Big(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)=0,$$

которое называют уравнением кривой в $\mathbb{C}$ в комплексной форме.

Пример 2.1. *Записать уравнение окружности в $\mathbb{C}$ с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$ и радиусом r.*

■ Воспользуемся известным параметрическим заданием окружности

$$\begin{cases} x(t)=x_0+r\cos t, \\ y(t)=y_0+r\sin t, \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

Отсюда получаем

$$\sigma(t)=x(t)+iy(t)=x_0+r\cos t+i(y_0+r\sin t)=z_0+r(\cos t+i\sin t).$$

Используя формулу Эйлера $e^{it}=\cos t+i\sin t$, $t\in\mathbb{R}$, запишем равнение окружности в параметрической форме: $z(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, которое можно переписать в эквивалентном виде $|z-z_0|=r$, определяющее окружность в $\mathbb{C}$, как геометрическое место точек z плоскости $\mathbb{C}$, равноудаленных (на расстояние r) от заданной точки z_0. □

Пример 2.2. *Записать в комплексной форме уравнения:*

a) прямой, b) окружности.

■ a) Из аналитической геометрии известно общее уравнение прямой на плоскости: $Ax+By+C=0$. Подставим в это уравнение $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ и получим

$$\frac{A}{2}(z+\overline{z})-i\frac{B}{2}(z-\overline{z})+C=0 \text{ или } z\left(\frac{A}{2}-i\frac{B}{2}\right)+\overline{z}\left(\frac{A}{2}+i\frac{B}{2}\right)+C=0.$$

Введем обозначение $\dfrac{A}{2}+i\dfrac{B}{2}=M$, тогда уравнение прямой в комплексной форме запишется в виде $\overline{M}z+M\overline{z}+C=0$.

b) Чтобы записать уравнение окружности в комплексной форме, используем уравнение окружности в общем виде, известное из аналитической геометрии

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+F=0.$$

Подставляя в это уравнение $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, $x^2+y^2 = z\,\overline{z}$, получаем

$$Az\overline{z} + z\left(\frac{B}{2} - i\frac{C}{2}\right) + \overline{z}\left(\frac{B}{2} + i\frac{C}{2}\right) + F = 0$$

или, обозначая $M = \dfrac{B}{2} + i\dfrac{C}{2}$, запишем уравнение окружности в комплексной форме

$$Az\overline{z} + \overline{M}z + M\overline{z} + F = 0.$$

Заметим, что при $A = 0$, получаем задачу, рассмотренную в части а). $\square$

Пример 2.3. *Найти кривые, задаваемые уравнениями:*

$$a)\ \mathcal{I}m\,\frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \qquad b)\ \mathcal{R}e\,\frac{1}{\overline{z}} = 1.$$

$\blacksquare$ а) Пользуясь правилом деления комплексных чисел (1.2) находим:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $\mathcal{I}m\dfrac{1}{z} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$. Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид $-\dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$. После преобразований приходим к уравнению $x^2+y^2+2y = 0$ или $x^2+(y+1)^2 = 1$. Это — уравнение окружности с центром в точке $(0,-1)$ радиуса $r = 1$. В комплексной плоскости её центр находится, соответственно, в точке $z_0 = -i$.

b) Производя те же действия, находим, что

$$\mathcal{R}e\,\frac{1}{\overline{z}} = \mathcal{R}e\,\frac{1}{x-iy} = \mathcal{R}e\,\frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Поэтому уравнение кривой имеет вид $\dfrac{x}{x^2+y^2} = 1$ или $x^2+y^2 = x$. Окончательно получаем уравнение

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

которое является уравнением окружности радиуса $r = 1/2$ с центром в точке $z_0 = 1/2$. $\square$

Стандартные подмножества плоскости $\mathbb{C}$. Приведем примеры некоторых часто встречающихся в приложениях подмножеств комплексной плоскости:

1) $|z - z_0| = r$ — уже известная окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$;

2) $r < |z - z_0| < R$, $0 \le r < R \le +\infty$ — кольцо с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, где r и R — радиусы внутренней и внешней окружностей;

3) $\mathcal{I}m\, z > 0$ — верхняя полуплоскость; $\mathcal{I}m\, z < 0$— нижняя полуплоскость; $\mathcal{I}m\, z = 0$ — вещественная ось (ось OX);

4) $\mathcal{R}e\; z > 0$ — правая полуплоскость; $\mathcal{R}e\; z < 0$— левая полуплоскость; $\mathcal{R}e\, z = 0$ — мнимая ось (ось OY);

5) $|z - z_1| = |z - z_2|$, $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ — прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2 (то есть отрезку $[z_1, z_2]$) и проходящая через его середину (докажите это!);

6) $|z-z_1|+|z-z_2| = 2a$, $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, $(a > |z_1-z_2|/2)$ — эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и большой полуосью равной a (докажите это!) .

Определение 2.1. *Пусть $\varepsilon > 0$. Окрестностью радиуса ε точки $a \in \mathbb{C}$ (ε-окрестностью) называется множество $U_a(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| < \varepsilon\}$; множество $\overset{\circ}{U}_a(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ называется проколотой ε-окрестностью точки a.*

Определение 2.2. *Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $U_\infty(\varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}\colon |z| > \varepsilon\}$ называется окрестностью бесконечно удалённой точки (точки ∞); проколотой окрестностью бесконечно удалённой точки называется множество $\overset{\circ}{U}_\infty(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > \varepsilon\}$.*

Эти четыре типа окрестностей будут активно использоваться далее.

Пример 2.4. *Определить вид множества заданного соотношением:*

$$a)\ \begin{cases} 1 < |z| < 3 \\ \mathcal{I}m\, z < 0 \end{cases} ; \quad b)\ \begin{cases} |\mathcal{R}e\, z| < 1 \\ |\mathcal{I}m\, z| < 2 \end{cases} .$$

■ a) Искомым множеством является пересечение кольца $1 < |z| < 3$ и нижней полуплоскости;

b) Граница области состоит из отрезков прямых $x = \pm 1$, $y = \pm 2$. Контур прямоугольника, сторонами которого является эти отрезки, разбивает плоскость на два множества: внутреннюю и внешнюю части. Системе

$$\begin{cases} |\mathcal{R}e\ \ z| < 1 \\ |\mathcal{I}m\ \ z| < 2 \end{cases}$$

удовлетворяет, например, точка $z = 0$, а значит данная система описывает внутреннюю часть указанного прямоугольника. □

Пример 2.5. *Записать в виде неравенств множество точек открытого угла AOB, если: $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(1, \sqrt{3})$, $O(0, 0)$.*

■ Чтобы получить неравенства, определяющие это множество, сначала составим уравнение, описывающее его границы. Границами этого множества являются лучи OA и OB, уравнения которых в полярных координатах имеют вид

$$\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y_B}{x_B} = \sqrt{3}, \text{ то есть } \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.$$

На комплексной плоскости уравнения этих лучей записываются в виде равенств $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$ и $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$, соответственно, а область, ими ограниченная, описывается неравенствами $\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$. □

2.1 Практические задачи для самостоятельной работы.

Пример 2.6. *Какое геометрическое место точек плоскости $\mathbb{C}$ определяется каждым из следующих соотношений.*

1) $|z-2| = |z+2i|$;
2) $|z+3| = |z-5|$;
3) $|z-5i| = 2$;
4) $|z-2+2i| = 4$;
5) $|z-i| + |z-3i| = 6$;
6) $|z-2| + |z+4i| = 6$;
7) $|z-1| = 2|z-i|$;
8) $|z^2-1| = 1$;
9) $\begin{cases} 1 < |2z| < 3, \\ \mathcal{I}m\, z < 1 \end{cases}$;
10) $\begin{cases} \mathcal{I}m\, 1/z < -1/2, \\ |\arg z| < \pi/2 \end{cases}$;
11) $0 < |z-i| < 1$;
12) $|z-1+i| > 3$;
13) $|\mathcal{R}e\, z| < 1$;
14) $\mathcal{R}e\, z + \mathcal{I}m\, z > 0$;
15) $\begin{cases} |z-i| < 1, \\ \mathcal{R}e\, z > 0; \end{cases}$
16) $\begin{cases} |\mathcal{R}e\, z| < 2, \\ \mathcal{I}m\, z > 0; \end{cases}$
17) $|z-a| < |1-a\overline{z}|$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$;
18) $\begin{cases} \mathcal{R}e\, z > 0, \\ \mathcal{I}m\, z = 0 \end{cases}$;
19) $\Big||z-z_0| - |z|\Big| = 2a, a < |z_0|/2$;
20) $\begin{cases} \mathcal{R}e\, 1/z > 1/2, \\ |\arg z| > \pi/4 \end{cases}$;

Пример 2.7. *Какие из следующих уравнений являются уравнениями: a) оси Ox; b) оси Oy.*

1) $z = 0$;
2) $z = \overline{z}$;
3) $\mathcal{I}m\, z = 0$;
4) $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$;
5) $|z-1| = |z+1|$;
6) $z + \overline{z} = 0$;
7) $\arg z = 0$;
8) $|z-i| = |z+i|$;
9) $\mathcal{R}e\, z = 0$;
10) $|z| = |2iz|$.

Пример 2.8. *Записать в комплексной форме уравнение окружности единичного радиуса, у которой центр расположен на биссектрисе угла третьей четверти и которая касается осей координат.*

Пример 2.9. *Записать в комплексной форме уравнения:*

$$a)\ x^2 - y^2 = 1,\ b)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c)\ x^2 + 2z + y^2 - y = 1.$$

Пример 2.10. *Какими из следующих неравенств описывается множество точек нижней полуплоскости:*

$$a)\ \mathcal{I}m\, z < 0, \quad b)\ -\pi < \arg z < 0, \quad c)\ \mathcal{R}e\, z < 0,$$

$$d)\ \pi < \arg z < 2\pi, \quad e)\ \mathcal{R}e\, z > 0.$$

3 Числовые последовательности и ряды

Определение 3.1. *Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие комплексное число $z_n \in \mathbb{C}$, то говорят, что на $\mathbb{C}$ задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ (или короче $\{z_n\}$).*

Определение 3.2. *Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется пределом последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой ε-окрестности $U_a(\varepsilon)$ существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $z_n \in U_a(\varepsilon)$ для любого $n > n_0$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

Определение 3.3. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $a \in \mathbb{C}$, то говорят, что последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к комплексному числу a.*

Теорема 3.1 (Первый критерий сходимости последовательности комплексных чисел)**.** *Для того, чтобы последовательность z_n сходилась в $\mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились две последовательности $\{\mathcal{R}e\, z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mathcal{I}m\, z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Другими словами*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = a \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}e\, z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathcal{R}e\, a \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}m\, z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathcal{I}m\, a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема 3.2 (Второй критерий сходимости последовательности комплексных чисел)**.** *Для сходимости в $\mathbb{C}$ последовательности z_n, где $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, к числу в $w = \rho e^{i\theta} \neq 0$ в предположении, что φ_n, $n \in \mathbb{N}$ и θ находятся внутри некоторого фиксированного интервала длины меньше 2π, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \rho, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \theta.$$

Данные критерии сводят исследование сходимости последовательности в $\mathbb{C}$ к исследованию сходимости двух последовательностей в $\mathbb{R}$.

Определение 3.4. *Последовательность $\{z_n\}$ в $\mathbb{C}$ называют бесконечно малой, если она сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.*

Определение 3.5. *Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, называют бесконечно большой, если последовательность $\{|z_n|\}$ является бесконечно большой в $\mathbb{R}$. В этом случае будем писать: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$*

Как и в математическом анализе, легко доказать, что последовательность $\{q^n\}$, $q \in \mathbb{C}$, является бесконечно малой, если $|q| < 1$, и бесконечно большой, если $|q| > 1$.

Теорема 3.3. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = b \in \mathbb{C}$, то*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + \zeta_n) = a + b, \ \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \zeta_n = a \cdot b, \ \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b}, \ \text{если } b \neq 0.$$

Определение 3.6. *Выражение вида $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$, где $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, называется числовым рядом с комплексными членами и обозначается*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n. \tag{3.1}$$

Определение 3.7. *Сумма $S_n = z_1 + \dots + z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, называется n-ой частичной суммой ряда (3.1). Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу S (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$), то ряд называется сходящимся, а число S называется суммой ряда. В этом случае пишут: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$. В противном случае ряд называется расходящимся.*

Теорема 3.4 (критерий сходимости ряда)**.** *Для сходимости числового ряда (3.1) с комплексными членами необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}e\, z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}m\, z_n$. В случае сходимости рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \mathcal{R}e\, S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \mathcal{I}m\, S.$$

Приведенный критерий сводит задачу исследования сходимости ряда с комплексными членами к задаче исследования двух числовых рядов с членами из $\mathbb{R}$. Для этого могут использоваться все известные из курса математического анализа теоремы о сходимости таких рядов (критерий Коши, признаки Абеля, Дирихле, Лейбница, формула Тейлора и т.д.).

Теорема 3.5 (критерий Коши). *Для сходимости числового ряда* (3.1) *с комплексными членами необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашёлся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $k > N$ и любого $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} z_n \right| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Следствием критерия Коши является следующий важный результат.

Теорема 3.6 (необходимое условие сходимости числового ряда). *Если числовой ряд* (3.1) *с комплексными членами сходится, то* $\lim\limits_{n} z_n = 0$.

Определение 3.8. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. *В случае если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *расходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *называется условно (не абсолютно) сходящимся.*

Как и в случае рядов с действительными членами, оправданием такого определения служит следующий результат.

Теорема 3.7. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *с комплексными членами сходится.*

Теорема 3.8 (критерий абсолютной сходимости ряда). *Для абсолютной сходимости ряда с комплексными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда с действительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{R}e\, z_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}m\, z_n|.$$

Таким образом, исследовать ряд с комплексными членами на абсолютную сходимость, можно двумя способами.

1) Составить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ и исследовать его на сходимость, как ряд с действительными положительными членами.

2) Составить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mathcal{R}e\, z_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}m\, z_n|$ и исследовать их на сходимость, как ряды с действительными положительными членами.

При исследовании на сходимость рядов с действительными положительными членами можно использовать все известные из курса математического анализа признаки сходимости положительных рядов (признаки Д'Аламбера, Коши, Раабе, Гаусса, признаки сравнения, интегральный признак и т.д.).

Пример 3.1. *Найти пределы следующих последовательностей:*

а) $z_n = \dfrac{n}{n+1} + i\dfrac{2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, *б)* $z_n = \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

■ а) $\mathcal{R}e\, z_n = x_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1$, $\mathcal{I}m\, z_n = y_n = \dfrac{2n}{n+1} \to 2$ при $n \to \infty$. По критерию сходимости последовательности в $\mathbb{C}$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1 + 2i$.

б) $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. □

Пример 3.2. *Вычислить* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3ni}{i-n}$.

■ *I способ.* Так как

$$z_n = \frac{2+3ni}{i-n} = \frac{(2+3ni)(n+i)}{-(n-i)(n+i)} = \frac{n}{n^2+1} - i\frac{3n^2+2}{n^2+1},$$

то $x_n = \mathcal{R}e\, z_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $\quad y_n = \mathcal{I}m\, z_n = \dfrac{-(3n^2+2)}{n^2+1}$. Найдем пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-(3n^2+2)}{n^2+1} = -3.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 - 3i = -3i$.

II способ. Применяя методы из математического анализа, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+3ni}{i-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3i+2/n}{-1+i/n} = -3i.$$

(так как $\{i/n\}$ и $\{2/n\}$ — бесконечно малые последовательности). □

Пример 3.3. *Исследовать на сходимость ряды*

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3ni-1}{2in^2-\sqrt{3}}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3ni-1}{2in^4-\sqrt{3}}.$$

■ а) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3ni-1}{2in^2-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2i} \neq 0$, то ряд расходится, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда.

б) В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3ni-1}{2in^4-\sqrt{3}} = 0$, необходимое условие выполняется, но оно не является достаточным для сходимости ряда, поэтому продолжим исследование. Применим признак сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^4+3n^3i-n^2}{2in^4-\sqrt{3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|n^4+3n^3i-n^2|}{|2in^4-\sqrt{3}|}=\frac{1}{2},$$

и по признаку сравнения в предельной форме ряд сходится абсолютно. □

Пример 3.4. *Доказать, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^n}{n!}$ *сходится абсолютно.*

■ Используем признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2i)^{n+1}n!}{(n+1)!(2i)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2i}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. □

Пример 3.5. *Исследовать на сходимость следующие ряды:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\pi/n}}{n},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{i^n(2n)!},\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n},\ \varphi\in\mathbb{R}.$$

■ a) Представим общий член исследуемого ряда в виде

$$\frac{e^{i\pi/n}}{n}=\frac{\cos(\pi/n)}{n}+i\,\frac{\sin(\pi/n)}{n}.$$

Поскольку $\dfrac{\cos(\pi/n)}{n}\sim\dfrac{1}{n}$ при $n\to\infty$, то ряд a) расходится в силу теоремы 3.4. Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\pi/n)}{n}$ сходится, так как $\dfrac{\sin(\pi/n)}{n}\sim\dfrac{\pi}{n^2}$ при $n\to\infty$.

b) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$, составленный из модулей членов ряда b). К этому положительному ряду применим признак Даламбера

$$D_n=\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!n^{2n}}=\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{2n}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}D_n=e^2/4>1$ и потому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ расходится. Но, напомним, что если расходимость положительного ряда установлена с помощью признаков Коши или Даламбера, то общий член ряда не стремиться к нулю. Поэтому ряд b) также расходится.

c) Так как $|e^{in\varphi}/n|=1/n$, то ряд c) не сходится абсолютно. Переходя к действительной и мнимой части каждого члена ряда, получим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n},$$

которые надо исследовать на сходимость. Признак Дирихле (см. курс математического анализа) позволяет сделать вывод о том, что первый из этих рядов сходится для $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а второй — для всех φ. Поэтому исходный ряд сходится условно.

Если $\varphi = 2\pi k$, , $k \in \mathbb{Z}$, то $e^{in(2\pi k)} = \cos 2\pi kn + i\sin 2\pi kn = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, и для таких φ ряд c) расходится. Таким образом, ряд c) сходится условно для всех $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Пример 3.6. *Найти все значения действительного параметра α, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}$.*

■ Поскольку $|e^{in}| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то исходный ряд абсолютно сходится только при $\alpha > 1$ и не является абсолютно сходящимся при $\alpha \leq 1$.

Если $\alpha \leq 0$, то $|n^{-\alpha} e^{in}| = n^{-\alpha}$ и общий член исходного ряда не стремиться к нулю, следовательно ряд расходится.

При $0 < \alpha \leq 1$ применим признак Дирихле. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0$ и

$$|S_n| = \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big| = \Big|\frac{e^i - e^{i(k+1)}}{1-e^i}\Big| \leq \frac{2}{|1-e^i|} = \frac{1}{\sin(1/2)},\ n \in \mathbb{N},$$

так как $|1-e^i| = |1-\cos 1 - i\sin 1| = \sqrt{(1-\cos 1)^2 + \sin^2 1} = \sqrt{2(1-\cos 1)} = \sqrt{4\sin^2(1/2)} = 2\sin(1/2)$. По признаку Дирихле при $0 < \alpha \leq 1$ исходный ряд сходится (условно). □

3.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 3.7. *Исследовать на сходимость ряды:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-i)^2}{n^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{in!}{2n!-i}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2i}{i-n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{i^n}{2} - in)^3$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+in}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + i}{n^2}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n n^n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2i-1)^n}{3^n}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(2i)^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{(n-i)^n}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{n^2}{2i})^3 - n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!})$; 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2in-4}{n^2-\sqrt{5}}$.

Пример 3.8. *Для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n = \dfrac{2^n-5^n i}{10^n}$, *указать справедливые утверждения:*

a) ряд сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}e\, c_n$;

b) ряд сходится, так как сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}e\, c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}m\, c_n$;

c) ряд сходится абсолютно;

d) сумма ряда равна $\dfrac{5}{4}-2i$;

e) сумма ряда равна $\dfrac{1}{4}-i$.

Пример 3.9. *Найти все вещественные значения параметра* α, *для которых сходятся следующие ряды:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{-\alpha}\big(e^{i\pi/n}-1\big),\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{\ln^{\alpha}(n^2+1)}{n}.$$

4 Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть E_1 и E_2 — произвольные множества в $\overline{\mathbb{C}}$. Говорят, что на множестве E_1 задана функция комплексного переменного (фкп) $w = f(z)$ со значениями в E_2, если f — отображение E_1 в E_2, то есть если каждой точке z из E_1 ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек из E_2. В первом случае функция $f(z)$ называется однозначной, во втором — многозначной. Далее, пока не сказано обратное, будем рассматривать *однозначные функции комплексного переменного.*

Если представить $f(z) = \mathcal{R}e\, f(z) + i\,\mathcal{I}m\, f(z)$, $z = x+iy$ и положить

$$u(x,y) = \mathcal{R}e\, f(z), v(x,y) = \mathcal{I}m\, f(z),$$

то задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ будет равносильно заданию пары функций двух действительных переменных:

$$u = u(x,y), v = v(x,y).$$

Заметим, что пользуясь определениями окрестностей (см. определения 2.1, 2.2), как и в курсе математического анализа для множеств в $\mathbb{R}^2$, можно ввести понятия предельной точки, внутренней точки, открытого, замкнутого, ограниченного множеств. Если $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, то символом E' принято обозначать совокупность всех предельных точек множества E, через $\operatorname{int} E$ будем обозначать множество всех внутренних точек (внутренность) E, а через $\overline{E}$ — замыкание E.

Определение 4.1. *Пусть функция комплексного переменного задана на множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $z_0 \in E^{'}$. Говорят, что функция f имеет предел, равный $A \in \overline{\mathbb{C}}$ при $z \to z_0$ (по E), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall z \in E \cap \mathring{U}_{z_0}(\delta) \quad f(z) \in U_A(\varepsilon) \tag{4.1}$$

Этот факт обозначается так: $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in E)}} f(z) = A$ *или* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Как и в случае функций вещественных переменных имеет место следующий, часто используемый, критерий.

Теорема 4.1 (Гейне)**.** *Пусть функция f комплексного переменного задана на множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $z_0 \in E^{'}$. Функция f имеет предел, равный $A \in \overline{\mathbb{C}}$ при $z \to z_0$ (по E), тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{z_n\}$ точек множества E такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел, равный A.*

Определение 4.2. *Функция $f : E \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, называется непрерывной в точке $z_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(z) \in U_{f(z_0)}(\varepsilon)$ для всех $z \in U_{z_0}(\delta) \bigcap E$.*

Если z_0 — предельная точка множества E, то функция f непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Обратите внимание, что при таком определении непрерывности, функция может быть непрерывной в точке ∞, если $\infty \in E$, и в точке $z_0 \in E$, в которой $f(z_0) = \infty$. Например, функция

$$f(z) = \begin{cases} 1/z, \; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, \; z = \infty, \\ \infty, \; z = 0, \end{cases}$$

действует из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и непрерывна в каждой точке из $\overline{\mathbb{C}}$.

Замечание. Если $z_0 \in E$, но $z_0 \notin E'$, то есть является изолированной точкой E, то по определению функция f является непрерывной в z_0, поэтому, то, что $z_0 \in E'$, можно не оговаривать.

Теорема 4.2 (критерий непрерывности функции в точке из $\mathbb{C}$)**.** *Функция $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ тогда и только тогда, когда функции $\mathcal{R}e\, f = u(x, y)$, $\mathcal{I}m\, f = v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Теорема 4.3 (о непрерывности суперпозиции). *Если $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : E \to F$ и непрерывна в точке $z_0 \in E$, $g : F \to \overline{\mathbb{C}}$ и непрерывна в точке $w_0 = f(z_0) \in F$, то функция $g \circ f : E \to \overline{\mathbb{C}}$: $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, непрерывна в точке z_0.*

Непрерывные функции комплексного переменного с множеством значений в $\mathbb{C}$ обладают теми же свойствами, что и непрерывные функции вещественного переменного (если эти свойства не связанны с неравенствами). Приведем только некоторые из них.

Теорема 4.4 (об арифметических операциях с непрерывными функциями). *Пусть функции $f, g : E \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ непрерывны в точке $z_0 \in E$. Тогда функции $f \pm g$, fg непрерывны в точке z_0. Если, дополнительно, $g(z_0) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в точке z_0.*

Теорема 4.5 (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на компакте в $\mathbb{C}$, ограничена на нем.*

Рассмотрим некоторые элементарные функции комплексного переменного, связанные с элементарными функциями действительного переменного.

Пусть n — натуральное число. Функция $\omega = z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}$, $z \in \mathbb{C}$, называется *степенной функцией*. При $n = 1$ функция $\omega = z$ является тождественным неперерывным отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. В силу теоремы 4.4 функция z^n неперерывна в $\overline{\mathbb{C}}$.

Показательную функцию комплексного переменного $z = x+iy$ обозначают $\exp z$ (или e^z) и определяют с помощью равенства

$$\exp z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Из критерия непрерывности 4.2 и непрерывности элементарных функций вещественного переменного следует, что функция $\omega = \exp z$ является непрерывной во всей плоскости, Для действительного $z = x \in \mathbb{R}$ функция $\exp z$ совпадает с показательной функцией действительного переменного. Из равенства $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $y \in \mathbb{R}$, следует, что $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$.

Тригонометрические функции косинуса и синуса для комплексного переменного $z = x + iy \in \mathbb{C}$ определяются равенствами

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \tag{4.2}$$

Эти функции является непрерывными в $\mathbb{C}$, а формулы (4.2) называются формулами Эйлера, как и равенство $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, получающееся из них. Аналогично вещественной переменной, определим функции

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ z \neq +\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

С помощью показательной функции комплексного переменного определяются непрерывные в $\mathbb{C}$ *гиперболические функции*:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из определения тригонометрических и гиперболических функций получаем для всех $z \in \mathbb{C}$ формулы:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz),\ \operatorname{sh} z = -i \sin(iz),\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Из этих формул, поскольку $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ находим, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{ch} y = \lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{sh} y = +\infty$, то из последних формул следует, что $\lim\limits_{y\to+\infty} |\cos z| = \lim\limits_{y\to+\infty} |\sin z| = +\infty$, поэтому функции $|\cos z|$ и $|\sin z|$ не ограничены в $\mathbb{C}$.

Аналогично вещественной переменной, определим функции

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},\ z \neq +\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $|z|$, очевидно, непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$. Функция $\arg z$ непрерывна в плоскости $\mathbb{C}$, из которой выброшен любой луч из $z = 0$ в $z = \infty$.

Функция от $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ — функция корня n-ой степени, как известно, содержит n однозначных ветвей

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big),\ \varphi = \arg z, \tag{4.3}$$

определяемых формулой (4.3) при каждом фиксированном $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Каждая такая ветвь, как функция от z, непрерывна в плоскости $\mathbb{C}$, из которой выброшен любой луч из $a = 0$ в $a = \infty$.

Функция

$$\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ \arg z \in (0, 2\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4.4}$$

называется *логарифмической функцией*, содержит бесконечно много однозначных ветвей, которые определяются формулой (4.4) при каждом $k \in \mathbb{Z}$, непрерывных в плоскости $\mathbb{C}$, из которой выброшен любой луч из $z = 0$ в $z = \infty$. Однозначная ветвь при $k = 0$ называется главной ветвью функции $\operatorname{Ln} a$ и обозначается $\ln a$, то есть $\ln a = \ln|a| + i \arg a,\ 0 < \arg z < 2\pi$.

Пример 4.1. *Показать, что функция* $\omega = e^{z^2}$

а) стремится к ∞ *при* $z \to \infty$ *в любом угле вида* $|\arg z - \pi| \le \alpha < \frac{\pi}{4}$, *и в любом угле вида* $|\arg z| \le \alpha < \frac{\pi}{4}$;

б) стремится к 0 *при* $z \to \infty$ *в любом угле вида* $|\arg z \pm \dfrac{\pi}{2}| \le \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

■ Как известно,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty, \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0.$$

Пусть $r = |z|, \varphi = \arg z$.

а) Рассмотрим функцию $\omega = \exp(z^2)$ в угле $|\arg z| \le \alpha$ $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4})$. Нетрудно заметить, что $|e^{z^2}| = |e^{r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}| = e^{r^2\cos 2\varphi}$. В заданной области определения $|e^{z^2}| \ge e^{r^2\cos 2\alpha}$, поскольку на $[-\alpha, \alpha]$ функция $\cos 2\varphi$ принимает наименьшее значение, равное $\cos 2\alpha > 0$).

Пусть $E > 0$. Решением неравенства $e^{r^2\cos 2\alpha} > E$ является любое число $r_0 > \sqrt{\dfrac{\ln E}{\cos 2\alpha}}$, если $E > 1$, и любое число $r_0 > 0$, если $0 < E \le 1$. Из оценки $|e^{z^2}| \ge e^{r^2\cos 2\alpha}$ следует, что как только $|\arg z| \le \alpha$ и $|z| > r_0$, то $|e^{z^2}| > E$. Следовательно, в заданной области определения $\lim\limits_{z\to\infty} e^{z^2} = \infty$. Аналогично проверяется, что, если $|\arg z - \pi| \le \alpha$ $(0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{4})$, то $\lim\limits_{z\to\infty} e^{z^2} = \infty$.

б) Рассмотрим функцию $\omega = e^{z^2}$ в угле $|\arg z - \dfrac{\pi}{2}| \le \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. В этом случае $|e^{z^2}| = e^{r^2\cos 2\varphi}$, $\varphi = \arg z$, но $\cos 2\varphi < 0$. Для указанных значений φ функция $\cos 2\varphi$ принимает наибольшее значение, равное $-\cos 2\alpha$. Поэтому $|e^{z^2}| = e^{r^2\cos 2\varphi} \le e^{-r^2\cos 2\alpha}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдём хотя бы одно положительное число r_0, являющееся решением неравенства $e^{-r^2\cos 2\alpha} < \varepsilon$. Легко вычислить, что $r_0 > \sqrt{\dfrac{-\ln\varepsilon}{\cos 2\alpha}}$, если $0 < \varepsilon < 1$, и $r_0 > 0$, если $\varepsilon \ge 1$. Тогда, как только $|\arg z - \dfrac{\pi}{2}| \le \alpha$ и $|z| > r_0$, выполняется неравенство $|e^{z^2}| < \varepsilon$, которое доказывает, что в рассматриваемом угле $\lim\limits_{z\to\infty} \exp z^2 = 0$. Аналогично проверяем, что если $|\arg z + \dfrac{\pi}{2}| \le \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, то $\lim\limits_{z\to\infty} e^{z^2} = 0$. □

Пример 4.2. *Показать, что если* $|\mathcal{R}e\, z| \le \dfrac{\pi}{4}$, *то* $|\operatorname{tg} z| \le 1$.

■ Если $z = x + iy$, то из формул:

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

для $z : |x| = |\mathcal{R}e\, z| \le \dfrac{\pi}{4}$ следует, что $|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\dfrac{\sin^2 z}{\cos^2 z}} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}}$.

Воспользуемся соотношениями:

$$\operatorname{sh}^2 y = \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2},\ \operatorname{ch}^2 y = \frac{\operatorname{ch} 2y + 1}{2},\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

и перейдём к равенству $|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}$. Для $|x| \le \dfrac{\pi}{4}$ функция $\cos 2x \ge 0$, поэтому $|\operatorname{tg} z| \le \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2y}{\operatorname{ch} 2y}} = 1$. □

Пример 4.3. *Показать , что если $|z| \le r$, то $|\operatorname{sh} z| \le \operatorname{sh} r$.*

■ Для каждого $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2} = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y.$$

Поэтому $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\cos^2 y \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y \operatorname{ch}^2 x} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$. Отметим, что оценки $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y} \le \operatorname{ch} x \le \operatorname{ch} r$ для $|x| \le r$, ещё не доказывают неравенства $|\operatorname{sh} z| \le \operatorname{sh} r$, поскольку $\operatorname{sh} r \le \operatorname{ch} r$ для любого $r > 0$.

Для доказательства нужного неравенства исследуем функцию $|\operatorname{sh} z|$ на максимум в круге $|z| \le r$. Поскольку точки максимума функций $|\operatorname{sh} z|$ и $|\operatorname{sh} z|^2$ совпадают, то рассмотрим в круге $|z| \le r$ функцию

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y.$$

Применив известные из курса математического анализа методы дифференциального исчисления функций двух переменных устанавливаем, что точки $z_1 = 0$ и $z_k^{'} = \dfrac{k\pi}{2} i$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, для которых $\left|\dfrac{k\pi}{2}\right| < r$), являются стационарными точками функции $|\operatorname{sh} z|$.

Исследуем на экстремум функцию $|\operatorname{sh} z|^2$ для $|z| = r$. Это приводит к необходимости изучения функции

$$f(x) = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r.$$

Её точками возможного экстремума являются решения уравнения $f'(x) = 0$, то есть решения уравнения

$$\operatorname{sh} 2x - \sin 2\sqrt{r^2 - x^2} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \ \ (-r < x < r).$$

Отсюда вытекает, что $x = 0$, будучи решением этого уравнения, является стационарной точкой функции f. Для определения других её стационарных точек последнее уравнение представим в виде

$$\frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} = \frac{\sin 2\sqrt{r^2 - x^2}}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \ \ (-r < x < r, x \ne 0). \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что для произвольных отличных от нуля x и y

$$\frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} > 1, \text{ а } \frac{\sin 2y}{2y} < 1.$$

Поэтому уравнение (4.5) решений не имеет.

Следовательно, для нахождения максимума функции $|\operatorname{sh} z|$ нужно сравнить между собой следующие значения этой функции:

$$|\operatorname{sh} 0| = 0, \ \left|\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2} i\right| = 0, \text{ если } k \text{ чётное, и } \left|\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2} i\right| = 1, \text{ если } k \text{ нечётное;}$$

$$|\operatorname{sh}(ir)| = \sqrt{1 - \cos^2 r} = |\sin r|; \ |\operatorname{sh} r| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 r - 1} = \operatorname{sh} r.$$

Если $r < \dfrac{\pi}{2}$, то точки $\dfrac{k\pi i}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, не принадлежат кругу $|z| < r$, поэтому наибольшим значением функции в этом круге является $\operatorname{sh} r$. Если $r \geq \dfrac{\pi}{2}$, то, так как $\operatorname{sh} r > r \geq \dfrac{\pi}{2} > 1$, наибольшее значение функции $|\operatorname{sh} z|$ в круге $|z| \leq r$ также равно $\operatorname{sh} r$. Итак, если $|z| \leq r$, то $|\operatorname{sh} z| \leq \operatorname{sh} r$. □

Определение 4.3. *Пусть $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Говорят, что функция f равномерно непрерывна на множестве E, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(z') - f(z'')| < \varepsilon, \ \forall z', z'' \in E : |z' - z''| < \delta.$$

Равномерная непрерывность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ на множестве E равносильна равномерной непрерывности на E функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (докажите это!).

Очевидно, что функция f, равномерно непрерывная на множестве $E \subseteq \mathbb{C}$, непрерывна на этом множестве. Обратное утверждение, как и для функций вещественной переменной, в общем случае не имеет места, но справедливо в том случае, когда E компакт в $\mathbb{C}$.

Теорема 4.6 (Кантора)**.** *Функция равномерно непрерывна на компакте из $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда она непрерывна на нем.*

Рассмотрим некоторые примеры, связанные с равномерно непрерывными функциями.

Пример 4.4. *Является ли функция $f(z) = \exp(-1/|z|)$ равномерно непрерывной в круге $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?*

■ Для доказательства равномерной непрерывности $f(z) = \exp(-1/|z|)$ на K_1 надо показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall z_1, z_2 \in K_1 \text{ и } |z_1 - z_2| < \delta$$

выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и положим $\delta = \min\Big\{\ln^2(1+e\varepsilon),\ 1,\ \dfrac{1}{16}\ln^{-4}\dfrac{2}{\varepsilon}\Big\}$. Тогда, если $|z_1| \le \sqrt[4]{\delta}$, то из неравенства $|z_1 - z_2| < \delta$ следует, что

$$|z_2| < |z_1| + \delta \le \delta + \sqrt[4]{\delta} \le 2\sqrt[4]{\delta}.$$

Поэтому

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \exp\Big(\frac{-1}{\sqrt[4]{\delta}}\Big) + \exp\Big(\frac{-1}{2\sqrt[4]{\delta}}\Big) \le 2\exp\Big(\frac{-1}{2\sqrt[4]{\delta}}\Big) \le \varepsilon,$$

поскольку $\sqrt[4]{\delta} \le \dfrac{1}{2}\ln^{-1}\dfrac{2}{\varepsilon}$. Если же $1 > |z_1| \ge \sqrt[4]{\delta}$, $1 > |z_2| \ge \sqrt[4]{\delta}$ и, например, $|z_2| \ge |z_1|$, то из неравенства $|z_1 - z_2| < \delta$ получаем, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \exp\Big(\frac{-1}{|z_1|}\Big)\cdot\Big(\exp\Big(\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|}\Big) - 1\Big) \le$$
$$\le e^{-1}\Big(\exp(\sqrt{\delta}) - 1\Big) < \varepsilon,$$

поскольку $\delta \le \ln^2(1+e\varepsilon)$. Следовательно, функция $f(z)$ равномерно непрерывна в K_1. □

Пример 4.5. *Является ли функция* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *равномерно непрерывной в круге* $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$*?*

■ Очевидно, что функция $f(z)$ по теореме о непрерывности частного двух непрерывных функций является непрерывной в круге K_1.

Пусть $z_n' = 1 - \dfrac{1}{n}$, $z_n'' = 1 - \dfrac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $z_n', z_n'' \in K_1$ и

$$\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n'' = 1, \quad \lim_{n\to\infty} |z_n'' - z_n'| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Вместе с тем, поскольку $f(z_n') = n$, $f(z_n'') = n/2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(z_n') - f(z_n'') = \frac{n}{2} \to +\infty, \text{ при } n \to \infty,$$

и функция f не является равномерно непрерывной в круге K_1. □

Пример 4.6. *Является ли функция* $f(z) = \exp(-1/z^2)$ *равномерно непрерывной в кольце* $D = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| \le R\}$, $R > 0$*?*

■ Функция f непрерывна на D, как суперпозиция непрерывных функций. Пусть $z_n' = \dfrac{i}{\sqrt{\ln n}}$, $z_n'' = \frac{i}{\sqrt{\ln 2n}}$, $n \ge 2$. Тогда $\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n'' = 0$ и

$$|z_n' - z_n''| = \Big|\frac{i}{\sqrt{\ln n}} - \frac{i}{\sqrt{\ln 2n}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} - \frac{1}{\sqrt{\ln 2n}} = \frac{\sqrt{\ln 2n} - \sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln n}\cdot\sqrt{\ln 2n}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\ln n}\cdot\sqrt{\ln 2n}(\sqrt{\ln 2n}+\sqrt{\ln n})} \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

в то время, как

$$|f(z_n^{'}) - f(z_n^{''}| = e^{\ln 2n} - e^{\ln n} = 2n - n = n \to +\infty.$$

Следовательно, функция f не является равномерно непрерывной на D. $\square$

Задача 4.1. *Пусть $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, и функция fнепрерывна в G. Доказать, что функция f равномерно непрерывна в G тогда и только тогда, когда её можно доопределить по непрерывности до непрерывной функции $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$, такой, что $\tilde{f}(z) = f(z)$, $\forall z \in G$.*

■ *Достаточность.* Пусть функцию f можно доопределить до непрерывной функции в замкнутой области $\overline{G}$. Обозначим эту непрерывную функцию через $\tilde{f}$. Поскольку замыкание ограниченного множества также ограниченно, то $\overline{G}$ — компактное множество в $\mathbb{C}$. Тогда по теореме Кантора 4.6 функция $\tilde{f}$, являясь непрерывной на компакте, равномерно непрерывна на нём, а потому функция f равномерно непрерывна на G.
Необходимость. Пусть функция f равномерно непрерывна на G, то есть

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z', z'' \in G \text{ и } |z' - z''| < \delta,$$

выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Выберем произвольную точку $z_0 \in \overline{G}$ и рассмотрим некоторую последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \in G$, $\lim\limits_n z_n = z_0$. Тогда такая последовательность фундаментальна, то есть

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,\, m > n_0 \quad |z_n - z_m| < \delta.$$

В силу равномерной непрерывности функции f, для этих же номеров n и m имеет место неравенство $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ также фундаментальна, а потому существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha \in \mathbb{C}$. Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}$.

Пусть последовательности $\{z_n\}$ и $\{z_n^{'}\} : z_n, z_n^{'} \in G$, $\lim\limits_n z_n = z_0$, $\lim\limits_n z_n' = z_0$, $z_0 \in \overline{G}$. Тогда $\forall\delta > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \quad |z_n - z_n^{'}| < \delta$. Но функция f равномерно непрерывна на G, отсюда следует, что $\forall n > n_1\ |f(z_n) - f(z_n^{'})| < \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n{}').$$

Итак, существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha$, который не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}$. Положим $\tilde{f}(z_0) = \alpha = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Если $z_0 \in G$, то полагая $z_n = z_0, \forall n \in \mathbb{N}$, получим, что

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0),$$

то есть функция $\tilde{f}$ является продолжением функции f с G на $\overline{G}$. Остается показать, что функция $\tilde{f}(z)$ непрерывна на $\overline{G}$. Пусть z_0 — произвольная точка из множества $\overline{G}$. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \tilde{f}(z_0)$, то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in \mathring{U}_{z_0}(\delta) \cap \overline{G} \quad |f(z) - \tilde{f}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $z \in \mathring{U}_{z_0}(\delta) \cap \overline{G}$, то, согласно определению функции $\tilde{f}(z)$, $\exists z^{'} \in \mathring{U}_{z_0}(\delta) \cap G$: $|\tilde{f}(z) - f(z^{'})| < \varepsilon/2$. Тогда для таких z выполняются следующие соотношения:

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)| \leq |\tilde{f}(z) - f(z^{'})| + |f(z^{'}) - \tilde{f}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{z \to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0)$ и потому функция $\tilde{f}$ непрерывна на $\overline{G}$. $\square$

4.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 4.7. *Вычислить следующие пределы, где $z = x + iy$:*

1) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2}{z - i}$;
2) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z - 2i}{z + i}$;
3) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 2}{z^2 - 2i}$;
4) $\lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z + 1}{z^2 + 4}$;
5) $\lim\limits_{z \to 0} \Big(\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + 2i\Big)$;
6) $\lim\limits_{z \to 2+i} \overline{z}$;
7) $\lim\limits_{z \to -2} \arg z$;
8) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$;
9) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{x^2}{y}$;
10) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z + 3i}{z^2}$;
11) $\lim\limits_{z \to i} \arg \overline{z}$;
12) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{x^2 + y}{i}$;
13) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;
14) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{2i - 3z}{2z}$;
15) $\lim\limits_{z \to i} \arg \dfrac{z}{2}$;
16) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{x - 2y}{z}$.

Пример 4.8. *Является ли непрерывной в $\mathbb{C}$ функция*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z},\ z \neq 0 \\ 1,\ z = 0 \end{cases} \qquad ?$$

Пример 4.9. *Является ли непрерывной в* $\overline{\mathbb{C}}$ *функция*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, \; z \neq 0, \; z \neq \infty \\ 1, \; z = 0 \\ 0, \; z = \infty \end{cases} \qquad ?$$

Пример 4.10. *Показать, что функция* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, \; z \neq 0 \\ 0, \; z = 0 \end{cases}$ *не является непрерывной в точке* $z = 0$*, а функция* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{|z|}, \; z \neq 0 \\ 0, \; z = 0 \end{cases}$ *является.*

Пример 4.11. *Будет ли функция* $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ *равномерно непрерывна в круге* $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$*?*

Пример 4.12. *Являются ли функции*

$$f_1(z) = \frac{\mathcal{R}e\, z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{(\mathcal{R}e\, z^2)^2}{z^2}, \quad f_3(z) = \exp\Big(\frac{-1}{z^2}\Big), \quad f_4(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

равномерно непрерывными в кольце $K_{0,1} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$*?*

4.2 Теоретические задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2. *Доказать, что для любой последовательности комплексных чисел можно указать её подпоследовательность, имеющую предел в* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

Задача 4.3. *Пусть функция* $f\colon E \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, z_0 \in E'$*. Доказать, что*
а) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0$ *б)* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Задача 4.4. *Пусть функция* $f\colon E \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$*,* $z_0 \in E'$ *и существует предел* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$*, причём* $A \neq 0$*,* $A \neq \infty$*. Доказать, что*
а) $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |A|$; *б)* $\lim\limits_{z\to z_0} \arg f(z) = \arg A$*,* $(\arg f(z), \arg A \in [0, 2\pi))$.

Задача 4.5. *Пусть* $z_n = x_n + iy_n$*,* $x_n, y_n \in \mathbb{R}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Используя определение предела доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \mathcal{R}e\, A \;\textit{и}\; \lim_{n\to\infty} y_n = \mathcal{I}m\, A.$$

Задача 4.6. *Пусть* $z = \lambda(t)$*,* $t \in [a, b]$*, — непрерывная кривая в* $\mathbb{C}$*,* $\gamma = \lambda([a, b])$*. Доказать, что* γ *— ограниченное и замкнутое множество в* $\mathbb{C}$*.*

Задача 4.7. *Доказать, что если функция* $f(z)$ *непрерывна на множестве* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$*, то функция* $|f(z)|$ *также непрерывна на* D*.*

Задача 4.8. *Пусть функция равномерно непрерывна на каждом из множеств D_1 и D_2. Следует ли отсюда, что она будет равномерно непрерывна на множестве $D_1 \cup D_2$?*

Задача 4.9. *Пусть точка $z_0 = \infty$ является предельной для множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, функция $f(z)$ непрерывна на D и существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Следует ли отсюда, что $f(z)$ равномерно непрерывна на D?*

Задача 4.10. *Пусть $f : \overline{K}_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le 1\} \to \mathbb{C}$ и функция f равномерно непрерывна в круге $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Доказать, что для любой точки a на окружности $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ и любой последовательности точек $\{z_n\} : z_n \in K_1$, $\lim\limits_{n} z_n = a$, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, который не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}$, а функция f, доопределённая на границе круга при помощи предельного перехода, будет непрерывна на замкнутом круге $\overline{K}_1$.*

5 Дифференцируемость функции комплексного переменного

Определение 5.1. *Пусть на множестве $E \subset \mathbb{C}$ определена функция $f : E \to \mathbb{C}$, $z_0 \in E \cap E'$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то он называется производной функции f в точке z_0 по множеству E и обозначается $f'(z_0)$, то есть*

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{5.1}$$

При этом функция f называется дифференцируемой в точке z_0.

Пример 5.1. *Функция $\overline{z^2} = x^2 - y^2 - 2ixy$ не дифференцируема ни в одной точке из $\mathbb{C}$, кроме точки $z_0 = 0$.*

■ Рассмотрим точки $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$, $z = x + iy \neq z_0$, и положим

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y.$$

Составим и вычислим разность

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) =$$
$$= ((x_0+\Delta x)^2 - (y_0+\Delta y)^2 - 2i(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)) - (x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0) =$$
$$= 2(x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)) + (\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y)).$$

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\frac{x_0\Delta x - y_0\Delta y - i(y_0\Delta x + x_0\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{5.2}$$

Перейдём в (5.2) к пределу при $\Delta z \to 0$ двумя способами.

1) Пусть $\Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0\Delta x - iy_0\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 2(x_0 - iy_0).$$

2) Пусть $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-y_0\Delta y - ix_0\Delta y}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y^2}{i\Delta y} = -2(x_0 - iy_0).$$

Так как при двух различных способах стремления Δz к нулю получились разные значения, то $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует при $z \neq 0$.

Рассматриваемая функция дифференцируема в точке $z = 0$ и $f'(0) = 0$, так как $\Delta f = \overline{z^2}$, $\Delta z = z$ и $f'(0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z^2}}{z} = 0.$ □

Теорема 5.1 (общий критерий дифференцируемости фкп в точке)**.** *Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E \cap E'$. Для того, чтобы f была дифференцируема в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы существовало число $A \in \mathbb{C}$ такое, что имеет место представление*

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \alpha(z), \quad z \in E, \tag{5.3}$$

где функция α определена на E и $\alpha(z) = o(z - z_0)$ при $z \to z_0$.

Если функция f дифференцируема в точке z_0, то $A = f'(z_0)$.

Теорема 5.2 (критерий Коши-Римана дифференцируемости фкп в точке)**.** *Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в области $G \subset \mathbb{C}$. Для того, чтобы f была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в этой точке, как функции двух вещественных переменных (x, y), и выполнялись соотношения:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \tag{5.4}$$

которые называются условиями Коши–Римана.

В случае дифференцируемости функции f в точке z_0, производную $f'(z_0)$ можно вычислить по одной из формул:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \\ f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Данное выше определение 5.1 производной функции в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ с помощью равенства (5.1), очевидно, неприменимо к бесконечно удалённой точке. Понятие дифференцируемости функции в бесконечно удалённой точке можно ввести следующим образом.

Определение 5.2. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_\infty(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда функция $g(t) := f(t^{-1})$ определена в окрестности $U_0(\varepsilon^{-1})$ начала координат, при этом полагают $g(0) = f(\infty)$. Говорят, что функция f дифференцируема в бесконечно удалённой точке, если функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$.*

Теорема 5.3 (о дифференцируемости суперпозиции функций комплексного переменного). *Пусть E_1 и E_2 — подмножества в $\mathbb{C}$, функция f определена на множестве E_1 и отображает его на множество E_2; пусть, далее, функция g определена на множестве E_2, точка $z_0 \in E_1 \cap E_1'$ и $f(z_0) \in E_2'$. Тогда, если функция f дифференцируема в точке z_0, а функция g — в точке $f(z_0)$, то суперпозиция $h(z) = (g \circ f)(z)$ дифференцируема в точке z_0, причём $h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.*

Определение 5.3. *Пусть функция f определена в области $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$. Функция f называется аналитической в области G, если она однозначна в G и дифференцируема в каждой точке $z \in G$.*

Определение 5.4. *Функция f называется аналитической в замкнутой области $\overline{G} \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в некоторой области D, содержащей $\overline{G}$.*

Определение 5.5. *Функция f называется аналитической в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если функция f аналитична в некоторой окрестности точки z_0.*

Замечание. Функция f называется аналитической в бесконечно удалённой точке ∞, если функция $g(z) = f(z^{-1})$ аналитична в точке $z = 0$.

Пример 5.2. *Указать множество дифференцируемости указанной функции и область ее аналитичности:*

a) $f(z) = 3\overline{z} - \mathcal{I}m\,(z+i)$; *b)* $f(z) = i|z|^2 - 3z$; *c)* $f(z) = 4z^2 + i(\mathcal{R}e\, z)^2$.

■ a) Находим действительную и мнимую части функции:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 3(x - iy) - \mathcal{I}m\,(x + iy + i) = 3(x - y - 1) - 3iy.$$

Таким образом, $u(x,y) = 3x - y - 1$, $v(x,y) = -3y$. Проверим выполнение условий Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -3.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, как видим, имеют непрерывные в $\mathbb{R}^2$ частные производные и потому (непрерывно) дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Но так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3 \neq -3 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, условия критерия Коши – Римана не выполняются. Следовательно, данная функция не дифференцируема (следовательно, и не аналитична) ни в одной точке комплексной плоскости $\mathbb{C}$. (Второе условие Коши – Римана в данном случае можно не проверять.)

b) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = i(x^2 + y^2) - 3x - 3iy = -3x + i(x^2 + y^2 - 3y)$. Таким образом, $u(x, y) = -3x$, $v(x, y) = x^2 + y^2 - 3y$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 3,$$

которые непрерывны в $\mathbb{R}^2$ и потому функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (непрерывно) дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Чтобы найти точки плоскости $\mathbb{C}$, в которых выполняются условия Коши – Римана, рассмотрим систему: $\begin{cases} -3 = 2y - 3 \\ 0 = -2x \end{cases}$, решением которой является только точка $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, данная функция дифференцируема только в точке $z = 0$, но нигде не является аналитической.

c) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 4(x + iy)^2 + ix^2 = 4x^2 - 4y^2 + i(8xy + x^2)$. Таким образом, $u(x, y) = 4x^2 - 4y^2$, $v(x, y) = 8xy + x$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -8y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 8y + 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 8x,$$

которые непрерывны в $\mathbb{R}^2$ и потому функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (непрерывно) дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Система $\begin{cases} 8x = 8x \\ 8y = 8y + 2x \end{cases}$, имеет решение $\{(x, y) : x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, во всех точках мнимой оси $(z = iy)$ условия Коши – Римана выполняются. Значит, в этих точках функция дифференцируема, но так как мнимая ось не является областью в $\mathbb{C}$ и нет содержащей мнимую ось области, в которой функция была бы аналитической, то данная функция нигде не является аналитической. □

Пример 5.3. *Доказать, пользуясь условиями Коши – Римана, что функция $f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ дифференцируема в каждой точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$.*

■ В данном случае $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2,$$

которые непрерывны в $\mathbb{R}^2$ и потому функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ (непрерывно) дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана выполняются в $\mathbb{C}$, поэтому в $\mathbb{C}$, в силу (5.5),

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i\cdot 6xy = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3z^2. \qquad \square$$

Пример 5.4. *Показать, что для функции $f(z) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy$, в точке $z = 0$ условия Коши –Римана выполняются, но функция f не является дифференцируемой в этой точке.*

■ Поскольку $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $v(x,y) = 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = 0,$$

и $\dfrac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Поэтому условия Коши—Римана для функции $f(z)$ в точке $z = 0$ выполняются. Но нетрудно показать, что функция $f(z)$ (и функция $u(x,y)$!) не является дифференцируемой в точке $z = 0$, можно, например, вычислить $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(z_k) - f(0)}{z_k}$, $z_k = \dfrac{1+i}{k^3}$, $k \in \mathbb{N}$ (сделайте это!). □

Задача 5.1. *Пусть функция f является аналитической в области $G \subset \mathbb{C}$. Доказать, что если $|f(z)| \equiv \mathrm{const}$ в G, то функция $f \equiv \mathrm{const}$ в G.*

■ Если $|f(z)| = 0, \forall z \in G$, то $f(z) = 0$ в каждой точке области G. Следовательно, $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G.

Пусть $|f(z)| \equiv c \neq 0$, $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\forall z = x + iy \in G$. Тогда в области G выполняется тождество $u^2(x,y) + v^2(x,y) \equiv c^2$. Введем сопряженную функцию $\overline{f}(x + iy) = u(x,y) - iv(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$ и запишем тождество следующим образом: $f(z)\overline{f}(z) = c^2, \forall z \in G$.

Из последнего равенства следует, что $f(z) \neq 0$ для всех $z \in G$, а поэтому функция $\overline{f}(z) = \dfrac{c^2}{f(z)}$ аналитична в области G. Условия Коши – Римана для функций f и $\overline{f}$ приводят к системам равенств

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

из которых следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \forall z \in G.$$

Из курса математического анализа известно, что если обе частные производные дифференцируемой функции двух переменных равны нулю в области G, то

$$u(x,y) = c_1,\ v(x,y) = c_2,\ \forall (x,y) \in G.$$

Следовательно, $f(z) = c_1 + ic_2,\ \forall z \in G.$ $\square$

Задача 5.2. *Доказать, что условия Коши – Римана для функции f можно записать в виде* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$

■ Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$ задана функция

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy \in G,$$

для которой функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в G как функции двух действительных переменных. Тогда $df = du + idv$. Поскольку

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy, \text{ то } df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}$ — производные от комплекснозначной функции по действительным переменным. Из равенств

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy$$

получаем, что $dx = \dfrac{dz + d\overline{z}}{2}$, $dy = \dfrac{dz - d\overline{z}}{2i}$, и, если ввести следующие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

то получим, что $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$. Отсюда следует, что функция f дифференцируема в области G тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемы в области G и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ в G, что равносильно выполнению условий Коши-Римана для функции f в области G. $\square$

Задача 5.3. *В области $G \subset \mathbb{C}$ определена функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, причём u и v дифференцируемы (как функции двух действительных переменных) в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Доказать, что множество всех предельных значений функции* $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}$ *при $\Delta z \to 0$ есть либо точка, либо окружность.*

■ Напомним, что (как и для функций действительных переменных) точку $A \in \overline{C}$ называют предельным значением функции $\omega = g(z)$ при $z \to a$, $(z \in G)$, если существует последовательность $\{z_n\}$ точек области G, для которой выполняются соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = A$. Понятно, что функция g имеет предел при $z \to a$ в том и только том случае, когда она имеет только одно предельное значение при $z \to a$, совпадающее с $\lim\limits_{z\to a} g(z)$.

Начнем доказательство с того, что представим $\Delta f_{z_0}(\Delta z)$ в удобной для дальнейшего форме. Считая $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и пользуясь дифференцируемостью функций u и v в точке z_0, при $\Delta z \to 0$ запишем

$$\Delta f_{z_0}(\Delta z) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) =$$
$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right]\Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right]\Delta y + o(|\Delta z|).$$

Выразим Δx и Δy через $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$:

$$\Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}, \quad \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i},$$

и запишем представление

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + B\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \to 0,$$

где

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right],$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right].$$

Итак, при $\Delta z \neq 0$ $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} = A + B\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}$, поэтому (учитывая равенство $\lim\limits_{\Delta z\to 0} o(|\Delta z|)/\Delta z = 0$) предельные значения функции $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ полностью определяются предельными значениями функции $B\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$.

Пусть вначале $B = 0$. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} = A$, являющийся единственным предельным значением функции $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ (то есть функция f дифференцируема в точке z_0).

Если $B \neq 0$, рассмотрим равенство

$$\frac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} = A + B\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} \text{ при } \Delta z \to 0.$$

Поскольку $|\overline{\Delta z}/\Delta z| = 1$ для всех $\Delta z \neq 0$, получаем, что каждое предельное значение функции $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ равно $A + Be^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ и принадлежит окружности с центром в точке A радиуса $|B|$.

Покажем, что каждая точка $A + Be^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$, указанной окружности, является предельным значением функции $\Delta f_{z_0}(\Delta z)/\Delta z$ при $\Delta z \to 0$. Действительно, рассмотрим последовательность $(\Delta z)_n = r_n e^{-i\phi/2}$, где $|(\Delta z)_n| = r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для этой последовательности

$$\frac{\Delta f_{z_0}((\Delta z)_n)}{(\Delta z)_n} = A + Be^{i\phi} + \frac{o(|(\Delta z)_n|)}{(\Delta z)_n} \text{ при } n \to \infty$$

и потому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta f_{z_0}((\Delta z)_n)}{(\Delta z)_n} = A + Be^{i\phi}$, то есть точка $A + Be^{i\phi}$ является предельным значением функции $\dfrac{\Delta f_{z_0}((\Delta z)_n)}{\Delta z}$ при $(\Delta z)_n \to 0$. Таким образом, если $B \neq 0$, множество всех предельных значений функции $\dfrac{\Delta f_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ есть окружность с центром в точке A радиуса $|B|$. $\square$

Задача 5.4. *Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в некоторой точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:*

1) u, v — дифференцируемые функции; *2)* $\exists \lim\limits_{\Delta z\to 0} \left|\dfrac{\Delta w_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}\right| \in \mathbb{R}$.

Доказать, что либо f, либо $\overline{f}$ дифференцируема в точке z_0.

■ Так как $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $\Delta w_{z_0}(\Delta z) = \Delta u_{(x_0,y_0)}(\Delta x, \Delta y) + i\Delta v_{(x_0,y_0)}(\Delta x, \Delta y)$ (далее будем писать $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$), то при $\Delta z \neq 0$

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \sqrt{\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

По условию существует конечный $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. Этот предел не зависит от способа стремления Δz к нулю. Возьмем сначала $\Delta z = \Delta x$, получим

$$\lim_{\Delta z\to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2}.$$

Если же взять $\Delta z = i\Delta y$, то получим

$$\lim_{\Delta z\to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2. \tag{5.6}$$

Из дифференцируемости функций u и v в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ следует, что их приращения в этой точке при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ имеют вид

$$\Delta u = du + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

$$\Delta v = dv + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Выражение $\dfrac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ при $= (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ записывается в виде

$$\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$
$$\frac{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Delta x^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\Delta y^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + o(1).$$

Принимая во внимание равенство (5.6), имеем при $= (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

$$\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + o(1).$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2}$, то в точке z_0

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Последнее возможно лишь в двух случаях:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0);$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$

В случае а) функция f дифференцируема в точке z_0, так как для неё в точке z_0 выполняются условия Коши –Римана. В случае б) условиям Коши-Римана в точке z_0 удовлетворяет функция $\overline{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$. □

Задача 5.5. *Пусть функция* $f = u + iv$ *дифференцируема в* $\mathbb{C}$. *Рассмотрим отображение* $\Phi\colon x = r\cos\phi, \ y = r\sin\phi, \ \Phi\colon [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}, \ r = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Записать уравнения Коши –Римана для* f *в полярных координатах.*

■ Рассмотрим суперпозицию отображения Φ и функции f :

$$f(x, y) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) = (f \circ \phi)(r, \phi) =$$
$$= (u \circ \phi)(r, \psi) + i(v \circ \phi)(r, \psi) = U(r, \psi) + iV(r, \psi), \ r \geq 0, \ \psi \in [0, 2\pi).$$

Применяя правило дифференцирования суперпозиции, находим $\frac{\partial U}{\partial r}$, $\frac{\partial U}{\partial \phi}$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi\Big)\frac{\partial x}{\partial r} + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi\Big)\frac{\partial y}{\partial r} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi\Big) \cdot \cos\phi + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi\Big) \cdot \sin\phi,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi\Big)\frac{\partial x}{\partial \phi} + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi\Big)\frac{\partial y}{\partial \phi} = -\Big(\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi\Big) \cdot r\sin\phi + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi\Big) \cdot r\cos\phi.$$

Решая эту систему относительно $\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi$ и $\frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi$, находим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} \circ \phi = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \cos\phi - \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \frac{\sin\phi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \circ \phi = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \sin\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \frac{\cos\phi}{r}.$$

Аналогично, применяя правило дифференцирования суперпозиции, находим $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ и решая полученную систему, находим, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} \circ \phi = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \cos\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{\sin\phi}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \circ \phi = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \sin\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{\cos\phi}{r}.$$

Теперь запишем условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \cos\phi - \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \frac{\sin\phi}{r} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \sin\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{\cos\phi}{r}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \sin\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \frac{\cos\phi}{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \cos\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{\sin\phi}{r}. \tag{5.8}$$

Умножая (5.7) на $\cos\phi$, (5.8) — на $\sin\phi$ и складывая полученные равенства, находим, что $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}$. Умножая (5.7) на $-\sin\phi$, (5.8) — на $\cos\phi$, и складывая полученные равенства, находим, что $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial r}$. Таким образом, уравнения Коши-Римана для функции $f = u + iv$ в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{5.9}$$

где $U(r,\psi) = (u \circ \phi)(r,\psi)$, $V(r,\psi) = (v \circ \phi)(r,\psi)$. □

5.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 5.5. *Указать множество, на котором функция $f(z)$ дифференцируема. Указать область аналитичности функция $f(z)$. В заданной точке z_0, найти производную $f'(z_0)$, если она существует.*

1) $f(z) = z^{-2}$, $z_0 = -1$;

9) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + 5$, $z_0 = -i$;

2) $f(z)=x^2-2\,y\,i$, $z_0=i$;

3) $f(z)=i\,z^3$, $z_0=-1+i$;

4) $f(z)=e^{-z^2}$, $z_0=i$;

5) $f(z)=z\,e^z$, $z_0=-1+\pi\,i$;

6) $f(z)=i\,(1-z^2)-2z$, $z_0=1$;

7) $f(z)=\bar z^3+z^5$, $z_0=1+i$;

8) $f(z)=\dfrac{\mathcal{R}e\,z}{\bar z}$, $z_0=-i$;

10) $f(z)=|z|^{100}$, $z_0=1-i$;

11) $f(z)=\dfrac{1}{\bar z^2}$, $z_0=1+2i$;

12) $f(z)=z\sin 2z$, $z_0=\pi i/4$;

13) $f(z)=e^{z-1}$, $z_0=i$;

14) $f(z)=z\cos z$, $z_0=-\pi i/3$;

15) $f(z)=\dfrac{z^2-3z+1}{2i}$, $z_0=-1-i$;

16) $f(z)=\mathcal{I}m\,\dfrac{z^2}{2}$, $z_0=2i+1$.

5.2 Теоретические задачи для самостоятельной работы

Задача 5.6. *Доказать, что если функции f_1 и f_2 определены на множестве E и дифференцируемы в точке $z_0\in E\cap E'\cap\mathbb{C}$, то в этой точке дифференцируемы функции f_1+f_2, $f_1\cdot f_2$, и $\dfrac{f_1}{f_2}$, если $f_2(z_0)\neq 0$, и при этом*

$$(f_1+f_2)'(z_0)=f_1'(z_0)+f_2'(z_0),$$
$$(f_1\cdot f_2)'(z_0)=f_1'(z_0)\cdot f_2(z_0)+f_1(z_0)\cdot f_2'(z_0),$$
$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'=\frac{f_1'(z_0)\cdot f_2(z_0)-f_1(z_0)\cdot f_2'(z_0)}{f_2^2(z_0)}.$$

Задача 5.7. *Доказать теорему о дифференцируемости суперпозиции функций комплексного переменного.*

Задача 5.8. *Пусть функция f аналитична в области $G\subset\mathbb{C}$ и $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Доказать, что для $\forall z\in G$ существуют частные производные $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|$ и*

$$a)\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln|f(z)|=0;\qquad b)\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|\geq 0.$$

Задача 5.9. *Если функция f аналитична в области $G\subset\mathbb{C}$ и $\forall z\in G$ $\mathcal{R}e\,f(z)=const$, что можно сказать о функции f?*

Задача 5.10. *Пусть функция $f=u+iv$ аналитична в $\mathbb{C}$ и $u=v^2$. Доказать, что $f\equiv const$ в $\mathbb{C}$.*

Задача 5.11. *Пусть функция f аналитична в области $G\subset\mathbb{C}$ и $f'(z)\equiv 0$, $\forall z\in G$. Доказать, что $f\equiv const$ в G*

Задача 5.12. *Пусть $f(z)=u+iv$, причём функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в области $D\subset\mathbb{C}$. Доказать, что если всюду в D выполнено одно из условий:*

a) существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \mathcal{R}e\,\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ *; b) существует* $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \mathcal{I}m\,\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, *то функция* $f(z)$ *аналитична в* D.

Задача 5.13. *Доказать, что если функции* f *и* g *являются аналитическими в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $f(z_0) = g(z_0) = 0$, *но* $g'(z_0) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

6 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{C}$ с параметризацией $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$. В этом случае будем говорить, что кривая γ проходит через точку z_0.

Определение 6.1. *Прямая, проходящая через точку* $\gamma(t_0), t_0 \in [\alpha, \beta]$, *параллельно вектору* $\gamma'(t_0) \neq 0$ *(комплексное число определяет вектор!), называется касательной к кривой* γ *в точке* $\gamma(t_0)$.

Отметим, что у гладкой кривой касательная существует во всех точках, а у кусочно гладкой кривой касательной может не существовать только в конечном числе точек, но в этих точках существуют односторонние касательные.

Таким образом, для комплекснозначной функции $z = \gamma(t)$ наличие в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$ производной $\gamma'(t_0) \neq 0$ означает существование в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ касательной к кривой γ. При этом угол наклона этой касательной к положительному направлению действительной оси совпадает с $\arg \gamma'(t_0)$ (см. [2, с. 90]).

Определение 6.2. *Пусть* γ_1, γ_2 *— гладкие кривые в* $\mathbb{C}$ *с параметризацией* $z = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ *и* $z = \gamma_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta_2]$, *соответственно, которые проходят через точку* z_0, *то есть*

$$\exists t_1 \in [\alpha_1, \beta_1],\ \exists t_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2).$$

Углом между кривыми γ_1, γ_2 *в точке* z_0 *называется угол* φ *между касательными, проведенными в точке* z_0 *к кривым* γ_1 *и* γ_2 *(касательная считается направленной в ту сторону, что и кривая). В этом случае,* $\varphi = \arg \gamma_1'(t_1) - \arg \gamma_2'(t_2)$.

Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и функция f аналитична в G, γ — гладкая кривая в G с параметризацией $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Пусть $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $z_0 = \gamma(t_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Образ кривой γ при отображении f — это кривая L с параметризацией $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. При этом $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0) \neq 0$. Кривая L имеет касательную в точке $f(z_0)$ с углом наклона к вещественной положительной полуоси равным

$$\arg(f \circ \gamma)'(z_0) = \arg(f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0)),$$

где $\arg(\gamma'(t_0))$ — угол наклона касательной к кривой γ к вещественной положительной полуоси OX.

Определение 6.3. *Угол* $\alpha = \arg(f\circ\gamma)'(z_0) - \arg(\gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0))$ *называется углом поворота кривой* γ *в точке* z_0 *при отображении* f.

Таким образом, касательная к кривой γ при отображении f, поворачивается на угол $\arg(f'(z_0))$, который не зависит от кривой γ.

Определение 6.4. *Величина* $\lim\limits_{\substack{z\to z_0,\\ z\in\gamma}} \dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$, *если она существует и больше нуля, называется линейным растяжением гладкой кривой* γ *в точке* z_0 *при отображении* f.

При перечисленных выше условиях, линейное растяжение в точке z_0 при отображении аналитической функцией f существует и не зависит от кривой γ. В этом случае говорят, что функция f определяет коэффициент растяжения в точке z_0, который равен $|f'(z_0)|$.

Из сказанного можно сделать следующий вывод: если функция f аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то угол между гладкими кривыми, проходящими через точку z_0, сохраняется при отображении f, и функция f определяет коэффициент растяжения в точке z_0, который равен $|f'(z_0)|$.

Пример 6.1. *Найти коэффициент линейного растяжения* k *и угол поворота* α *луча в точке* $z_0 = i$ *при отображении* $f(z) = z^2$.

■ Если $f'(z) = 2z$, то $k = |f'(i)| = |2i| = 2$, $\alpha = \arg f'(i) = \arg(2i) = \pi/2$. □

Пример 6.2. *Найти коэффициент линейного растяжения* k *и угол поворота* α *луча в точке* $z_0 = i$ *при отображении* $f(z) = \overline{z}^2$.

■ Сначала найдём коэффициент линейного растяжения:

$$\lim_{r\to 0}\frac{|f(re^{i\beta}+z_0)-f(z_0)|}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{|\overline{(i+re^{i\beta})}^2-\overline{i}^2|}{r} = \lim_{r\to 0}|re^{-2i\beta}-2ie^{-i\beta}| = 2,$$

следовательно, по определению $k = 2$ в точке $z_0 = i$.

Пусть $\Gamma = \{z\in\mathbb{C} : z = i + re^{i\beta}, r\geq 0\}$ — луч в $\mathbb{C}$, проходящий через точку $z_0 = i$. Пусть $\beta\in[0,\pi/2)$. Тогда образом луча Γ при отображении $f(z) = \overline{z}^2$ является кривая $\Gamma_1 = \{w\in\mathbb{C} : w = \overline{(i+re^{i\beta})}^2, r\geq 0\} =$
$= \{w\in\mathbb{C} : w = r^2\cos 2\beta - 2r\sin\beta - 1 - i(r^2\sin 2\beta + 2r\cos\beta), r\geq 0)\}$ с началом в точке $w = -1$.

Если теперь $w = u + iv$, то для достаточно малых $r > 0$ имеем $u + 1 < 0$ и $v < 0$, поэтому для угла наклона ϕ касательной к кривой Γ_1 в точке $r = 0$, выполняется

$$\phi_1 = \pi + \operatorname{arctg}\left(\lim_{r\to 0}\frac{v}{u+1}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\left.\frac{v'(r)}{u'(r)}\right|_{r=0}.$$

А так как $\left.\dfrac{v'(r)}{u'(r)}\right|_{r=0} = \left.\dfrac{-2\cos\beta - 2r\sin 2\beta}{2r\cos 2\beta - 2\sin\beta}\right|_{r=0} = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{2} - \beta\Big)$, то $\phi_1 = \dfrac{3\pi}{2} - \beta$, а $\alpha = \phi_1 - \beta = \dfrac{3\pi}{2} - 2\beta$. Для других β рассуждения аналогичны.

Укажем другой способ решения этой задачи. Пусть вновь $\beta \in [0, \pi/2)$. Поскольку для функции $g(z) = z^2$ выполняется $g'(i) = 2i$, то функция g отображает луч Γ в кривую, касательная к которой в точке $w = -1$ составляет с положительным направлением действительной оси угол $\beta + \dfrac{\pi}{2}$. Так как $f = \overline{g}$, то функция f отображает луч Γ на кривую, касательная к которой в точке $w = -1$ составляет с положительным направлением действительной оси угол $\dfrac{3\pi}{2} - \beta$. Откуда следует, что $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} - 2\beta$. $\square$

6.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 6.3. *Пусть $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : arg(z - z_0) = \beta\}$ — луч в $\mathbb{C}$. Найти коэффициент линейного растяжения k и угол поворота α луча Γ в указанной точке z_0 при следующих отображениях:*

а) $f(z) = ie^{2z},\ z_0 = 0$; *б)* $f(z) = 2z + i\overline{z},\ z_0 = 0$;

в) $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z + z_0},\ z_0 \neq 0$; *г)* $f(z) = \dfrac{1 - iz}{1 + iz},\ z_0 = -i$.

Пример 6.4. *Найти угол поворота α для функции $w = f(z)$ в точке z_0, если*

а) $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$, *где* $\mathcal{I}m\, z_0 = y_0 > 0$; *б)* $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}$, *где* $|z_0| < 1$.

Пример 6.5. *Для следующих функций указать множество M тех значений z, в которых коэффициент линейного растяжения $k = 1$, и множество Q тех значений z, в которых угол поворота $\alpha = 0$:*

а) $f(z) = z^2$; *б)* $f(z) = z^3$;

в) $f(z) = z^2 - 2z$; *г)* $f(z) = 2z - z^2$;

д) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; *е)* $f(z) = iz^2$;

ж) $f(z) = -z^3$; *з)* $f(z) = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$.

Пример 6.6. *Пусть функция f аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, пусть k и α — коэффициент линейного растяжения и угол поворота луча $\{z : arg(z - z_0) = \beta\}$ в точке z_0 при отображении $w = \overline{f}(z)$. Доказать, что $k = |f'(z_0)|$, а $\alpha = -2\beta - \arg f'(z_0) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.*

7 Конформные отображения

Определение 7.1. *Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : U_{z_0} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, называется конформной в точке $z_0 \in G$, если в точке z_0 функция f обладает свойствами постоянства растяжения и сохранения углов между кривыми, проходящими через z_0.*

В теории функций комплексного часто рассматриваются функции, определяемые в бесконечно удаленной точке(и её окрестности) или принимающие бесконечные значения в конечной точке. Поэтому есть необходимость в определении конформного отображения в этих случаях.

Определение 7.2. *Говорят, что функция $w = f(z)$, определенная в окрестности бесконечно удаленной точки, конформна в точке $z = \infty$, если функция $w_1 = f(1/z)$ конформна в точке $z = 0$. Если $f(z_0) = \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, то говорят, что $w = f(z)$ конформна в точке z_0, если $w_1 = 1/f(z)$ конформна в этой точке. И, наконец, если $z_0 = \infty$ и $f(z_0) = \infty$, то говорят, что $w = f(z)$ конформна в точке $z_0 = \infty$, если фннкция $w_1 = \dfrac{1}{f(1/z)}$ конформна в точке $z = 0$.*

В терминах определений раздела 6, верно следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Если f — аналитическая функция в окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то функция f является конформной в точке z_0.*

Определение 7.3. *Пусть G область в $\mathbb{C}$. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется конформной в области G, если f инъективна (взаимно-однозначна) в области G и конформна в каждой точке z области G.*

Отметим, что в определении конформности, в силу его геометрического характера, часто говорят не о функции f, а об отображении f.

Пример 7.1. *Для функции $f(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 5$ найти коэффициент линейного растяжения k и угол поворота α луча в точках $z_0 = 0$ и $z_1 = i$. Выяснить вдоль каких линий угол поворота α и коэффициент линейного растяжения k не изменяются, а также найти точки, в которых нарушается конформность функции $f(z)$.*

■ Прежде всего заметим, что $f(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 5 = (z-1)^3 + 6$. Находим, что $f'(z) = 3(z-1)^2$. Тогда $f'(0) = 3 \neq 0$, $f'(i) = -6i \neq 0$. Исходя из геометрического смысла аргумента и модуля производной, получаем, что

1) в точке $z_0 = 0$: $\alpha = \arg f'(0) = \arg 3 = 0$, $k = |f'(0)| = 3$;

2) в точке $z_1 = i$: $\alpha = \arg f'(i) = \arg(-6i) = -\dfrac{\pi}{2}$, $k = |f'(i)| = 6$.

Вычисляя вещественную и мнимую части производной $f'(z)$ и полагая $\arg f'(z) = \text{const}$, $|f'(z)| = \text{const}$, получим линии, вдоль которых не изменяются

а) угол поворота α: $(x-1)^2 - y^2 - 2cy(x-1) = 0$ ($c \in \mathbb{C}$);

б) коэффициент линейного растяжения k: $(x-1)^2 + y^2 = c_1$ ($c_1 \in \mathbb{C}$).

Приравнивая к нулю производную, находим точку $z = 1$, в которой заданная функция $f(z)$ не является конформной.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемых элементарными функциями комплексного переменного.

Линейная функция. Рассмотрим функцию $w = az+b$, $a \neq 0$. Функция w определена на всей комплексной плоскости и отображает её на себя, $w(\infty) = = \infty$, w аналитична в $\mathbb{C}$, и любая её производная в конечной точке $w' = a \neq 0$.

В любой области $D \subset \mathbb{C}$ функция w осуществляет конформное отображение. Такое отображение (линейная функция) преобразует любую прямую или окружность соответственно в прямую или окружность.

Дробно-линейная функция. Рассмотрим отображение:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{7.1}$$

где $a, b, c, d = \text{const}$ и $A := ad - bc \neq 0$. Будем полагать, что $c \neq 0$ (иначе, так как $d \neq 0$, w превратится в линейную функцию).

Определение 7.4. *Функция* (7.1) *называется дробно-линейной функцией (ДЛФ), а отображение, осуществляемое такой функцией, называется дробно-линейным отображением (ДЛО).*

ДЛФ $w \equiv const$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. Если $A \neq 0$, то $|c|+|d| > 0$ и такая дробно-линейная функция называется невырожденной. Далее всегда будем рассматривать только невырожденные ДЛФ.

ДЛФ не определена в точках $z = -\dfrac{d}{c}$ и $z = \infty$, по определению полагаем, что $w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \dfrac{a}{c} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d}$. Теперь ДЛФ (7.1) определена на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ и отображает её взаимно однозначно на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$. ДЛФ имеет обратную функция, которая также будет ДЛФ: $z = \dfrac{dw-b}{a-cw}$.

Свойства ДЛФ.

1. ДЛФ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$.

2. ДЛФ полностью определяется тремя параметрами. Пусть $c \neq 0$, тогда

$w = \dfrac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$, и тройка чисел $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$ определяет ДЛФ w. Решая систему уравнений:

$$w(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, 3 \tag{7.2}$$

для трёх попарно различных точек z_1, z_2, z_3, в которых ДЛФ (7.1) принимает три попарно различных значения, мы получим три параметра, которые определяют w: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$.

Если z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 — числа, то для нахождения ДЛФ w, удовлетворяющей (7.2), удобнее всего пользоваться формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{7.3}$$

Заметим, что если есть точка $z_k = \infty$ или $w_k = \infty$, то соответствующие им разности в формуле (7.3) заменяются на 1 (вычисляется предел при $z_k \to \infty$ или, соответственно, $w_k \to \infty$).

3. ДЛФ отображает окружность или прямую в окружность или прямую.

4. Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно окружности $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| = R\}$, если (1) $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$, (2) $\arg(z_1 - z_0) = \arg(z_2 - z_0)$. ДЛФ пару симметричных относительно окружности точек переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Теорема 7.2. *Всякая невырожденная ДЛФ $w = f(z)$, не являющаяся линейной, переводящая точку z_1 в точку $w_1 = 0$, а точку $z_2 \neq z_1$ в точку $w_2 = \infty$, имеет вид*

$$w = A\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{7.4}$$

Теорема 7.3. *ДЛФ, отображающая верхнюю полуплоскость $H_+ = \{z : \mathcal{I}m \ z > 0\}$ на единичный круг $K_1 = \{w : |w| < 1\}$, имеет вид*

$$w = e^{i\varphi}\frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \mathcal{I}m \ a > 0, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Теорема 7.4. *ДЛФ, отображающая единичный круг K_1 на себя, имеет вид:*

$$w = e^{i\varphi}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1.$$

Теорема 7.5. *Для того чтобы функция $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ отображала верхнюю полуплоскость $H_+ = \{z : \mathcal{I}m \ z > 0\}$ на себя, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.*

Пример 7.2. *Найти ДЛФ w, переводящую точки -1, i, $1+i$, соответственно, в точки 0, $2i$, $1-i$.*

■ Применим формулу (7.3), получим:

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{1+i-i}{1+i+1}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{1}{2+i}=\frac{w}{w-2i}\cdot\frac{1-3i}{1-i},$$

$$(z+1)(w-2i)(1-i)=w(z-i)(2+i)(1-3i).$$

Решая равенство относительно w, получим:

$$w=\frac{2i(z+1)(1-i)}{(z+1)(1-i)-(z-i)(1-3i)(2+i)}=\frac{2z+2+i(2z+2)}{-4z+1+5i}\,. \qquad \square$$

Пример 7.3. *Найти ДЛФ, переводящую точки -1, ∞, i, соответственно, в точки ∞, i, 1.*

■ Итак, $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Так как $w(-1)=\infty$ и $c\cdot(-1)+d=0,$то $c=d$ и функция имеет вид: $w=\dfrac{az+b}{c(z+1)}$. Отсюда $c\neq 0$. Разделим на c, и получим, что $w=\dfrac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+1}$. Далее, так как $w(\infty)=i$, то $\dfrac{a}{c}=i$, то $c=d$ и $w=\dfrac{iz+\frac{b}{c}}{z+1}$. Учитывая, что $w(i)=1$, получим уравнение для определения $\dfrac{b}{c}$:

$$1=\frac{i^2+\frac{b}{c}}{i+1},\ \text{откуда следует, что}\ \frac{b}{c}=2+i,\ \text{и}\ w=\frac{iz+2+i}{z+1}.$$

Другой способ решения состоит в использовании формулы (7.3) и замечания к ней:

$$\frac{z+1}{1}\cdot\frac{1}{i+1}=\frac{1}{w-i}\cdot\frac{1-i}{1}.$$

Поэтому $(w-i)(z+1)=(1-i)(1+i)$ и $w=\dfrac{2+i(z+1)}{z+1}=\dfrac{iz+2+i}{z+1}$. $\square$

Пример 7.4. *Найти ДЛФ w, отображающую верхнюю полуплоскость H_+ на круг K_1 так, чтобы $w(i)=0$ и $\arg w'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$.*

■ По теореме 7.3 любая ДЛФ, осуществляющая отображение H_+ на K_1 имеет вид

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\ \mathcal{I}m\, a > 0.$$

Так как $w(i) = 0$, то $0 = e^{i\varphi}\dfrac{i-a}{i-\bar{a}}$, отсюда находим, что $a = i$, $\bar{a} = -i$ и потому $w = e^{i\varphi}\dfrac{z-i}{z+i}$. Найдем φ:

$$w' = e^{i\varphi}\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+i)^2}\,.$$

В точке $z = i$ $w'(i) = e^{i\varphi}\dfrac{2i}{(2i)^2} = \dfrac{e^{i\varphi}}{2i}$. Поэтому $\arg w'(i) = \arg e^{i\varphi} - \arg(2i) = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$. Учитывая требование $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$, получаем, что $-\dfrac{\pi}{2} = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$, то есть $\varphi = 0$. Итак, искомая ДЛФ имеет вид: $w = \dfrac{z-i}{z+i}$. □

Пример 7.5. *Найти ДЛФ, отображающую круг* $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ *на круг* $K_2 = \{w : |w| < 1\}$ *так, чтобы* $w(i) = i,\ w(i/2) = 4i/5$.

■ ДЛФ отображает окружность $\{z : |z| = 1\}$ на окружность $\{w : |w| = 1\}$. Точка a, симметричная $i/2$, относительно окружности $\{z : |z| = 1\}$, перейдет в точку b, симметричную $\dfrac{4i}{5}$, относительно окружности $\{w : |w| = 1\}$.

Так как $|a| \cdot |i/2| = 1$, то $|a| = 2$, а поскольку $\arg a = arg(i/2) = \pi/2$, то $a = 2i$. Аналогично находим, что $b = 5i/4$. Таким образом, задача сводится к нахождению ДЛФ w, удовлетворяющей условиям: $w(i) = i,\ w(i/2) = 4i/5$, $w(2i) = 5i/4$. Применим формулу (7.3) и получим равенство

$$\frac{w-i}{w-\dfrac{4}{5}i}\cdot\frac{\dfrac{5}{4}i-\dfrac{4}{5}i}{\dfrac{5}{4}i-i} = \frac{z-i}{z-\dfrac{i}{2}}\cdot\frac{2i-\dfrac{i}{2}}{2i-i}\,.$$

Решая полученное уравнение относительно w, находим, что $w = \dfrac{2z+i}{2-i\,z} = \dfrac{2iz-1}{z+2i}$. □

Пример 7.6. *Найти ДЛФ, отображающую круг* $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ *на круг* $K_2 = \{w : |w| < 1\}$ *так, чтобы* $w(-1/2) = 1/2$, $\arg w'(-1/2) = \pi/4$.

■ Введем круг $K_3 = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Из теоремы 7.4 следует, что ДЛФ

$$\zeta = f_1(z) = \frac{z+\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{z}{2}}\cdot(1+i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2z+1}{z+2}\cdot(1+i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

отображает круг K_1 на круг K_3 так, что $f_1(-1/2)=0$, $\arg f_1'(-1/2)=\pi/4$, а ДЛФ

$$\zeta = f_2(w) = \frac{w-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{w}{2}} = \frac{2w-1}{2-w}$$

отображает круг K_2 на круг K_3 так, что $f_2(1/2)=0$, $\arg f_2'(1/2)=0$.

Искомую ДЛФ можно найти из уравнения $f_2(w)=f_1(z)$, поскольку ДЛФ $w(z) = f_2^{-1}\big(f_1(z)\big)$ отображает круг K_1 на круг K_2, причем $w(-1/2) = f_2^{-1}(0) = 1/2$, а так как $f_1'(z) = f_2'(w(z))\cdot w'(z)$, то

$$\arg w'(-1/2) = \arg f_1'(-1/2) - \arg f_2'(1/2) = \pi/4.$$

Итак, решая уравнение $f_2(w) = f_1(z)$ относительно w, последовательно получим

$$\frac{2w-1}{2-w} = \frac{2z+1}{z+2}\cdot(1+i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(2w-1)\cdot(2z+4) = (2-w)\cdot(2z+1)\cdot(1+i)\cdot\sqrt{2},$$

$$w\cdot\big(4z+8+(2z+1)\cdot(1+i)\cdot\sqrt{2}\big) = 2z+4+(4z+2)\cdot(1+i)\cdot\sqrt{2},$$

и, окончательно, $w = \dfrac{z(2+4\sqrt{2}(1+i))+4+2\sqrt{2}(1+i)}{z(4+2\sqrt{2}(1+i))+8+\sqrt{2}(1+i)}$. □

Функция Жуковского. Функцией Жуковского называют рациональную функцию

$$w = \lambda(z) := \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big).$$

Перечислим основные свойства функции Жуковского (см., например, [3, с.306-309])).

1. Функция Жуковского взаимно однозначна в области $D\subset\overline{C_z}$ тогда и только тогда, когда D не содержит ни одной пары точек z_1 и z_2, связанных отношением $z_1\cdot z_2 = 1$.

Такому условию удовлетворяют, например, внутренность или внешность единичного круга: $K_1 = \{z : |z|<1\}$, $E_1 = \{z : |z|>1\}$; верхняя или нижняя полуплоскости: $H_+ = \{z : \mathcal{I}m\, z > 0\}$, $H_- = \{z : \mathcal{I}m\, z<0\}$.

2) Так как $\lambda'(z) = \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{z^2}\Big)$, в силу теоремы 7.1 отображение $w=\lambda(z)$ конформно в любой точке из $\overline{\mathbb{C}}$, отличной от точек $z=\pm1$.

3) При отображении функцией Жуковского:

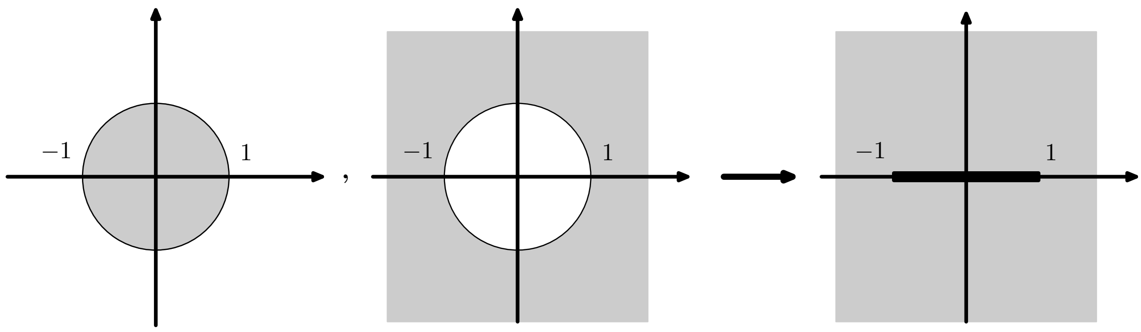
(a) окружности $\{z : |z| = r\}$, $\Big\{z : |z| = \dfrac{1}{r}\Big\}$, $0<r<1$, переходят в один и тот же эллипс с фокусами в точках ±1 и полуосями $\dfrac{1}{2}\Big(r\pm\dfrac{1}{r}\Big)$;

(b) окружность $\{z : |z| = 1\}$ отображается на дважды проходимый отрезок $[-1, 1]$; при этом когда z пробегает верхнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \mathcal{I}m z \geq 0\}$ против часовой стрелки, то точка $w = \lambda(z)$ пробегает отрезок $[1, -1]$ (от точки $w = 1$ до точки $w = -1$), когда z пробегает нижнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \mathcal{I}m\, z < 0\}$ против часовой стрелки, то точка $w = \lambda(z)$ пробегает тот же отрезок от точки $w = -1$ до точки $w = 1$;

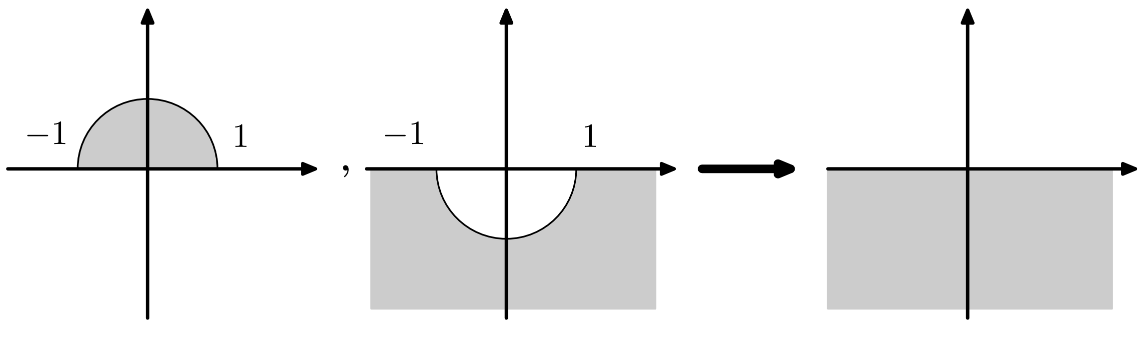
(c) лучи $[0, +\infty]$ и $[-\infty, 0]$ вещественной оси переходят, соответственно, в лучи $[1, +\infty]$ и $[-\infty, -1]$, проходимые дважды. Например, если z пробегает луч $[0, +\infty]$, то, когда z возростает от 0 до 1, то $w = \lambda(z)$ проходит по вещественной оси от точки $w = +\infty$ к точке $w = 1$, а когда z возрастает от $+1$ до $+\infty$, то точка w пробегает этот же луч от точки $w = 1$ к точке $w = +\infty$.

4) Функция Жуковского конформно отображает:

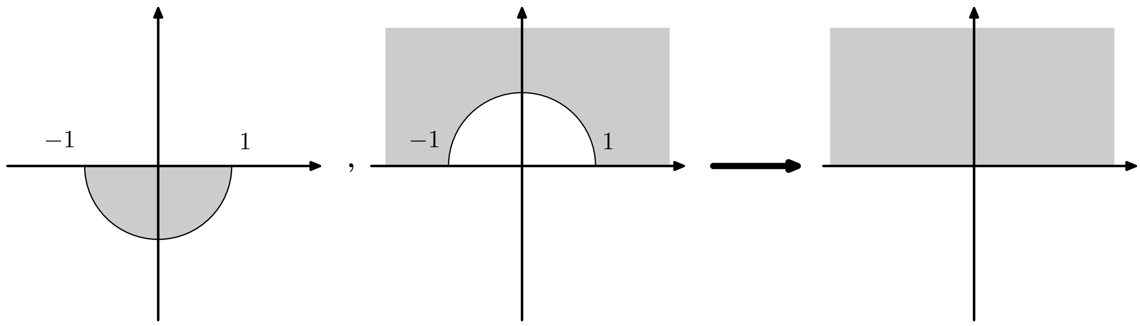
a) единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ и внешность единичной окружности $\{z : |z| > 1\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$;



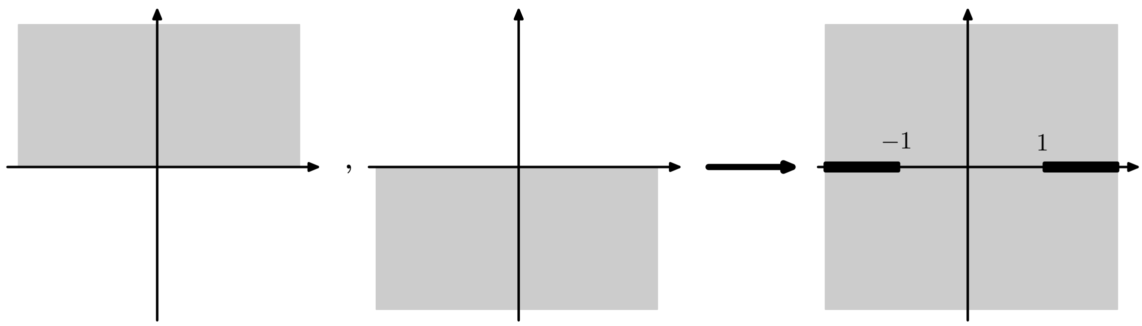
b) верхний полукруг $\{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\, z > 0\}$ и область $\{z : |z| > 1, \mathcal{I}m\, z < 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\, w < 0\}$;



c) нижний полукруг $\{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\, z < 0\}$ и область $\{z : |z| > 1, \mathcal{I}m\, z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\, w > 0\}$;



d) верхнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\ z > 0\}$ и нижнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\ z < 0\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси.



Пример 7.7. *Найти образ области* $D = \{z : |z| < 1, z \notin [c, 1]\}$ *при отображении функцией Жуковского, если (1)* $c = \dfrac{1}{2}$*;   (2)* $c = -\dfrac{1}{2}$.

■ В области D функция Жуковского является конформной в каждой ее точке. Отметим, что отрезок $[c, 1]$ в области D при прохождении границы области D проходится дважды. Поскольку функция Жуковского взаимно однозначна в круге $\{z : |z| < 1\}$, то и образ отрезка $[c, 1]$ будет проходиться дважды. Согласно свойству 4 a) круг $\{z : |z| < 1\}$ отобразится функцией Жуковского на плоскость $\overline{C}_w$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Обозначим эту область через G_1. Найдем образ отрезка $[c, 1]$ при отображении $w = \lambda(z)$ и исключим его из области G_1. Полученная область и будет искомой. Случаи (1) и (2) рассмотрим отдельно.

(1) $c = 1/2$. В этом случае функция $w = \lambda(z)$ переводит отрезок $[1/2, 1]$ в отрезок $[1, 5/4]$. В самом деле, функция $\lambda(z)$ непрерывна на отрезке $[1/2, 1]$, кроме того её производная

$$\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) < 0, \forall z \in [1/2, 1).$$

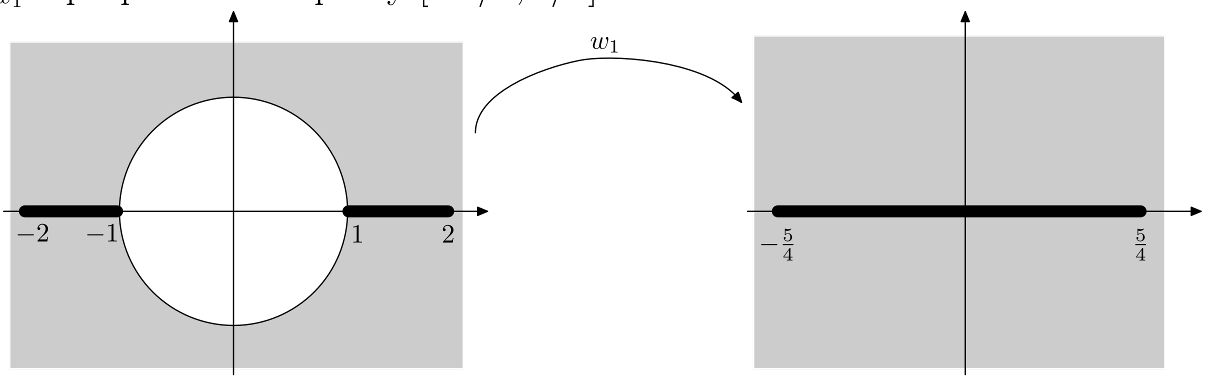
Значит, на отрезке $[1/2, 1]$ она убывает от значения $w = 5/4$ до значения $w = 1$, принимая, в силу известной теоремы анализа, все промежуточные значения, поэтому отрезок $[1/2, 1]$ перейдет в отрезок $[1, 5/4]$.

(2) $c = -1/2$. В этом случае поступим следующим образом. Разобьем отрезок $[-1/2, 1]$ на два $[-1/2, 0]$ и $[0, 1]$. Как и выше, показывается, что образом первого из них является луч $[-\infty, -5/4]$, а второго — луч $[1, +\infty]$. Поэтому весь промежуток переходит в объединение двух лучей $[-\infty, 5/4] \cup [1, +\infty]$.

Образом области D при отображении функцией Жуковского является:
при $c = \dfrac{1}{2}$ — плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 5/4]$;
при $c = -\dfrac{1}{2}$ — плоскость $\mathbb{C}$ с размером по лучам $[-\infty, -5/4]$ и $[-1, +\infty]$. $\square$

Пример 7.8. *Пусть область* $D = \{z : |z| > 1, z \notin [-2, -1] \cup [1, 2]\}$. *Отобразить конформно область* D *на плоскость с разрезом по лучу* $[0, +\infty]$.

■ Функция Жуковского $w_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ конформно отображает область $\{z : |z| > 1\}$ на всю плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Как и раньше, нетрудно проследить, что отрезок $[-2, -1]$ при этом отображается на отрезок $[-5/4, -1]$, а отрезок $[1, 2]$ — на $[1, 5/4]$. Поэтому функция w_1 отобразит область D на область G_1, которая представляет собой плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по отрезку $[-5/4, 5/4]$.



Преобразуем плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с помощью дробно линейной функции $w = \dfrac{\frac{5}{4} + w_1}{\frac{5}{4} - w_1} = \dfrac{5 + 4w_1}{5 - 4w_1}$, которая отобразит область G_1 на плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по лучу $[0, +\infty]$

В самом деле, функция $w(x) = \dfrac{5 + 4x}{5 - 4x}$ имеет положительную производную $w'(x) = 40 \cdot (5 - 4x)^{-2}$ на промежутке $[-5/4, 5/4)$. Значит, на этом промежутке она возрастает. При $x = -5/4$ $w = 0$, а при $x \to 5/4$ $w \to +\infty$. Отсюда следует, что отрезок $[-5/4, 5/4]$ отобразится на луч $[0, +\infty]$. Беря суперпозицию этих двух отображений, получим, что функция $w = \dfrac{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} =$

$\dfrac{2z^2+5z+2}{-2z^2+5z-2}$ искомая. $\square$

Степенная функция $z^\alpha,\ \alpha > 0$ в общем случае является многозначной функцией. Для задач построения конформных отображений воспользуемся однозначной ветвью степенной функции

$$w = z^\alpha := |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha \arg z},\ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{\alpha}, \tag{7.5}$$

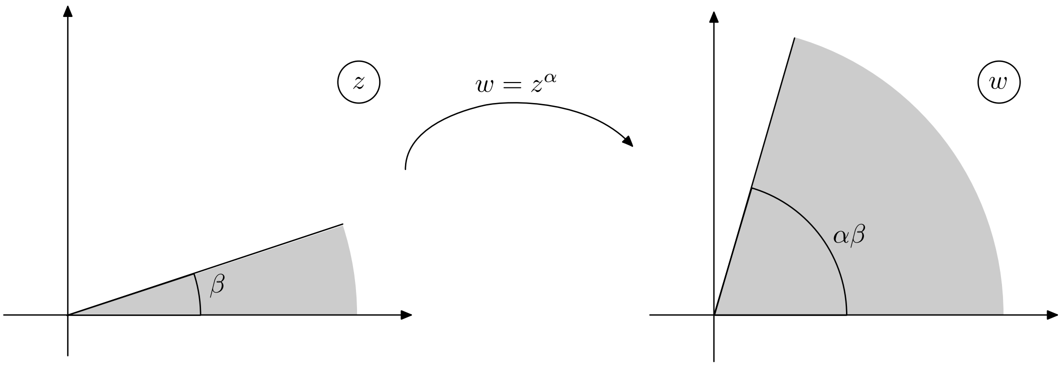
которая конформна внутри указанного угла $\left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{\alpha}\right\}$.

Перечислим свойства этой функции. Доказательства этих свойств можно найти в ([5, с.171-175], [3, с.123-126]). 1) Функция 7.5 отображает луч $\{z : \arg z = \gamma\},\ 0 < \gamma < \dfrac{2\pi}{\alpha}$ на луч $\{w : \arg w = \alpha\gamma\}$.

2) Функция 7.5 конформно отображает:

a) круговой сектор $\{z : |z| < r, 0 < \arg z < \beta\}$, $0 < \beta < \dfrac{2\pi}{\alpha}$ на круговой сектор $\{w : |w| < r^\alpha, 0 < \arg w < \alpha\beta\}$;

b) угол $\{z : 0 < \arg z < \beta\}, 0 < \beta < \dfrac{2\pi}{\alpha}$ на угол $\{w : 0 < \arg w < \alpha\beta\}$.



Так, например, функция $w = z^2$ конформно отображает первый квадрант $\Big\{z : 0 < \arg z < \pi/2\Big\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$, а верхнюю полуплоскость $\{z : 0 < \arg z < \pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу $\{w : 0 < \arg w < 2\pi\}$. Функция $w = \sqrt{z}$ конформно отображает плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty]$ (область $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$) на верхнюю полуплоскость

Пример 7.9. *Конформно отобразить полукруг* $\{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\ z > 0\}$ *на верхнюю полуплоскость.*

■ *Первое решение.* Функция Жуковского (свойство 4 b)) $w_1 = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ конформно отображает заданный полукруг на нижнюю полуплоскость $\{w_1 : \mathcal{I}m\ w_1 < 0\}$. Отображение $w = -w_1$ переводит нижнюю полуплоскость в верхнюю $\{w : \mathcal{I}m\, w > 0\}$. Суперпозиция этих двух отображений, то есть функция $w = -\dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$, осуществляет искомое отображение.

Второе решение. Заметим сначала, что граница заданного полукруга естественным образом разбивается на два контура:

(1) $l_1 = \{z : |z| < 1, 0 \le \arg \le \pi\}$ — полуокружность, (2) $l_2 = \{z : \mathcal{I}m\, z = 0, \mathcal{R}e\, z \in [-1, 1]\}$ — отрезок.

Легко видеть, что в точках $z = \pm 1$ контуры l_1 и l_2 взаимно ортогональны. Дробно линейная функция $w_1 = \dfrac{1+z}{1-z}$ отображает точку $z = -1$ в точку $w_1 = 0$, а точку $z = 1$ в точку $w_1 = \infty$, при этом вещественную ось плоскости $\overline{C}_z$ отображается на вещественную ось плоскости $\overline{C}_{w_1}$. В силу конформности и кругового свойства ДЛФ контуры l_1 и l_2 функцией w_1 отобразятся на лучи L_1 и L_2, соответственно, исходящие из начала координат (соединяющие точки 0 и ∞) и взаимно ортогональные в начале координат. Поскольку $w_1(0) = 1$, а $w_1(i) = i$, то $L_1 = \{w_1 : \arg w_1 = \pi/2\}$, а $L_2 = \{w_1 : \arg w_1 = 0\}$ (при непрерывном отображении связное множество переходит в связное). Лучи L_1 и L_2 разбивают плоскость $\overline{C}_{w_1}$ на две области

$$G_1 = \{w_1 : 0 < \arg w_1 < \pi/2\} \text{ и } G_2 = \{w_1 : \pi/2 < \arg w_1 < 2\pi\}.$$

Исходная область (полукруг) отобразится, либо на G_1, либо на G_2.Так как $w_1(i/2) = (3+4i)/5$, то полукруг отобразится на G_1 (конформно).

Далее, отображение $w = {w_1}^2$ конформно отобразит G_1 на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$. Беря суперпозицию этих двух отображений, получаем, что отображение $w = \Big(\dfrac{1+z}{1-z}\Big)^2$ является искомым. □

Замечание. Первое решение более простое, однако второе демонстрирует общий метод, который применяется при отображении круговых луночек на верхнюю полуплоскость. *Круговой луночкой* называют область на плоскости, граница которой состоит из двух дуг окружностей. Упомянутый выше метод состоит в построении дробно линейного отображения, которое одну из общих точек граничных дуг переводит в бесконечность, а другую — в начало координат, при этом круговая луночка отображается на некоторый угол с вершиной в начале координат. Далее, полученный угол с помощью функции $w = z^\alpha$ «разворачивают» до угла раствора π. И, наконец, применяя, если необходимо, поворот, отображают этот угол на верхнюю полуплоскость.

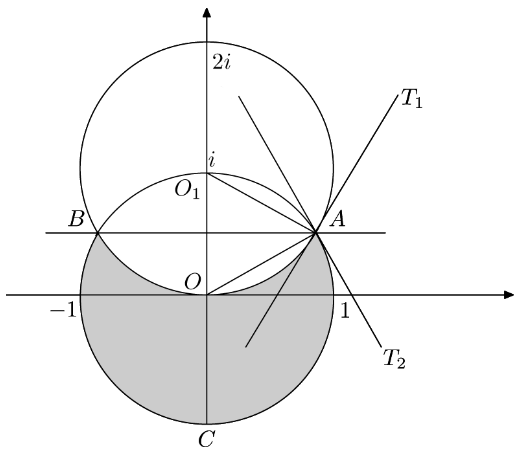
Воспользуемся идеями, изложенными в замечании в следующем примере.

Пример 7.10. *Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку $G = \{z : |z| < 1, |z - i| > 1\}$.*

■ Граница G состоит из двух дуг окружностей $l_1 = BOA$ и $l_2 = BCA$.

Заметим, что длины отрезков O_1A, OO_1 и OA равны 1. Отсюда следует, что угол $\angle O_1AO = \pi/3$, а потому острый угол между касательными T_1 и T_2 к контурам l_1 и l_2 точке A равен также $\pi/3$. Кроме того, прямая BA делит отрезок OO_1 пополам, поэтому ординаты точек A и B равны $1/2$. Если z_A (или z_B) — комплексное число, соответствующее точке A (или B), то $z_A = x + \dfrac{i}{2}$ и, в силу условия задачи $\left|x + \dfrac{i}{2}\right| = 1$. Отсюда $x^2 + \dfrac{1}{4} = 1$ и $x^2 = \dfrac{3}{4}$. Из чертежа видно, что $z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$, а $z_B = \dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отметим ещё, что угол между касательной T_1 и прямой $l = \left\{z : \mathcal{I}m\, z = \dfrac{1}{2}\right\}$, проходящей через точки A и B равен $\pi/3$.

Рассмотрим ДЛФ $w_1 = \dfrac{z - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)}{z + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}$ для которой $w_1(z_A) = 0$, $w_1(z_B) = \infty$, кроме того $w_1\Big(x + \dfrac{i}{2}\Big) = \dfrac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}}$ — вещественное число. Таким образом, точки z_A и z_B функцией w_1 отображаются соответственно в точки 0 и ∞, а прямая l в вещественную ось $\overline{C}_{w_1}$ Рассуждая так же, как и во втором решении предыдущего примера, получим, что контуры l_1 и l_2 отображаются в лучи Δ_1 и Δ_2, исходящие из начала координат. Угол между этими лучами равен $\pi/3$. Так как точка $z = 0$ принадлежит дуге l_1 и



$$w_1(0) = -\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = -\frac{1}{4}\,(2 + 2i\sqrt{3}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,(1 + i\sqrt{3}),$$

то луч Δ_1 лежит в третьем квадранте и наклонён к вещественной оси под углом $\pi/3$. Так как точка $z = -i$ принадлежит дуге l_2 и

$$w_1(-i) = \frac{-\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-3i} = -\frac{1}{12}\,(-6 + 6i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\,(1 - i\sqrt{3}),$$

то луч Δ_2 лежит в четвертом квадранте и наклонён к вещественной оси под углом $\pi/3$. Прямая l, не принадлежащая луночке, переходит в вещественную ось. Значит, луночка G функцией w_1 отображается на угол

$$G_1 = \{w_1 : 4\pi/3 < \arg w_1 < 5\pi/3\}.$$

Угол G_1 на угол $G_2 = \{w_2 : 0 < \arg w_2 < \pi/3\}$ отображает функция $w_2 = e^{-4\pi i/3} \cdot w_1$. Согласно свойству 2 b) степенной функции, функция $w = (w_2)^3$ отобразит угол G_2 на верхнюю полуплоскость. Составляя суперпозицию этих трех отображений, получим, что искомое отображение осуществляется функцией $w = \Big(\dfrac{2z - (\sqrt{3}+i)}{2z + (\sqrt{3}-i)}\Big)^3$. □

Пример 7.11. *Область $G = \{z : z \notin [-1,1]\}$ (плоскость с разрезом по отрезку $[-1,1]$) отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.*

■ Дробно линейная функция $w_1 = \dfrac{1+z}{1-z}$, переводящая точки $-1, 0, 1$ в точки $0, 1, \infty$, отобразит отрезок $[-1,1]$ на луч $[0,+\infty]$. При этом область G отобразится на плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по лучу $[0,+\infty]$. Функция $w = \sqrt{w_1}$ конформно отображает полученную область на верхнюю полуплоскость. Итак, искомое отображение имеет вид $w = \sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}$. □

Показательная функция e^z в $\mathbb{C}$ определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Перечислим её основные свойства (см., например, [5, с.43],[3, с.90-92]).

1. Функция $w = e^z$ отображает взаимно однозначно прямую $\{z : \mathcal{I}m\, z = b\}$ на луч $\{w : \arg w = b\}$.

2. Функция $w = e^z$ конформна в любой области, не содержащей пары точек z_1 и z_2, связанных соотношением $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3. Функция $w = e^z$ конформно отображает:

a) полосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < 2\pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу $\{w : 0 < \arg w < 2\pi\}$;

b) полосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\, w > 0\}$;

c) левую полуполосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < 2\pi, \mathcal{R}e\, z < 0\}$ на единичный круг с разрезом по отрезку $[0,1] : \{w : |w| < 1, 0 < \arg w < 2\pi\}$;

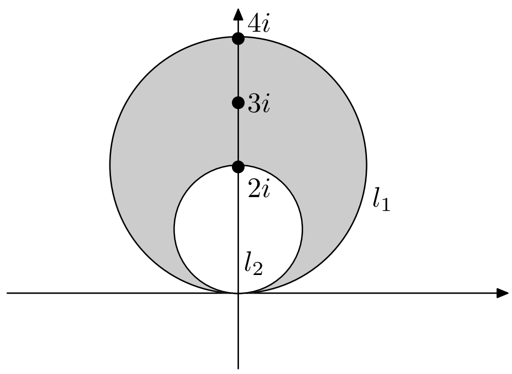
d) левую полуполосу $\{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < \pi, \mathcal{R}e\, z < 0\}$ на единичный полукруг, лежащий в верхней полуплоскости: $\{w : |w| < 1, \mathcal{I}m\, w > 0\}$.

Рассмотрим типичные примеры.

Пример 7.12. *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость круговую луночку $\{z : |z - i| > 1; |z - 2i| < 2\} = G$.*

■ Граница области G состоит из двух окружностей $l_1 = \{z : |z - i| = 1\}$ и $l_2 = \{z : |z - 2i| = 2\}$, имеющих общую точку $z = 0$.

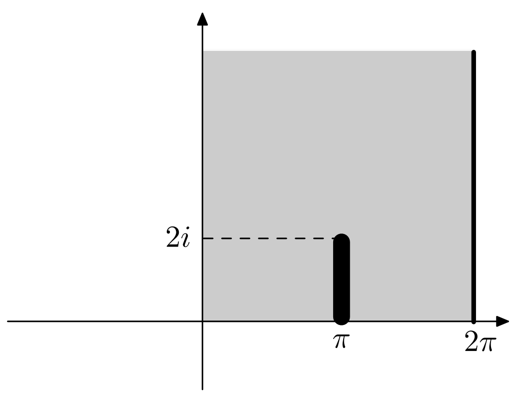
В точках $z = 2i$ и $z = 4i$ контуры l_1 и l_2 ортогональны мнимой оси. ДЛФ $w_1 = 1/z$ переводит точку $z = 0$ в точку $w_1 = \infty$, мнимую ось плоскости C_z в мнимую ось плоскости C_{w_1}, а окружности l_1 и l_2 в прямые T_1 и T_2, ортогональные мнимой оси и проходящие через точки $w_1(2i) = -i/2$ и $w_1(4i) = -i/4$. Так как $w_1(3i) = -i/3$, то область G функцией $1/z$ отобразится в полосу $G_1 = \Big\{w_1 : -1/2 < \mathcal{I}m\, w_1 < -1/4\Big\}$.



Функция $w_2 = -4\pi\Big(w_1 + \dfrac{i}{4}\Big)$, производящая сдвиг, поворот и растяжение, переводит полосу G_1 в стандартную полосу $G_2 = \{w_2 : 0 < \mathcal{I}m\, w_2 < \pi\}$. Функция $w = e^{w_2}$ отобразит эту полосу на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$. Суперпозиция последовательных преобразований даёт искомую функцию $w = e^{-4\pi\left(\frac{1}{z}+\frac{i}{4}\right)} = -e^{-4\pi/z}$. $\square$

Пример 7.13. *Полуполосу $\{z : \mathcal{I}m\, z > 0,\ 0 < \mathcal{R}e\, z < 2\pi\}$ с разрезом вдоль отрезка $\{z : z = \pi + iy, 0 < y \le 2\}$ отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.*

■ Обозначим заданную полуполосу с разрезом через G.



Отображение $w_1 = z\, e^{i\pi/2}$ переведёт область G в область G_1 — полуполосу $\{w_1 : 0 < \mathcal{I}m\, w_1 < 2\pi, \mathcal{R}e\, w_1 < 0\}$ с разрезом по отрезку $\{w_1 : w_1 = x + \pi i, -2 < x < 0\}$. Применим отображение $w_2 = e^{w_1}$. По свойству 3 c) сама полуполоса перейдёт в круг $\{w_2 : |w_2| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0, 1)$, а разрез, как нетрудно видеть, перейдёт в отрезок $(-1, -e^{-2}]$. Таким образом, при отображении $w_2 = e^{w_1}$ область G_1 перейдёт в область $G_2 = \{w_2 : |w_2| < 1, w_2 \notin (-1, -e^{-2}] \cup [0, 1)\}$. Отображение областей вида G_2 уже рассматривалось при изучении функции Жуковского. В этом случае $w_3 = \dfrac{1}{2}\Big(w_2 + \dfrac{1}{w_2}\Big)$ отображает область G_2 на область G_3 — плоскость с разрезом по лучу $[c, +\infty]$, где $c = \dfrac{1}{2}(e^{-2} + e^2) = \operatorname{ch} 2$. Наконец, функция $w = \sqrt{w_3 - \operatorname{ch} 2}$ отображает G_3 на верхнюю полуплоскость. Суперпозиция рассмотренных отображений даёт решение задачи:

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{w_1} + e^{-w_1}) - \operatorname{ch} 2} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) - \operatorname{ch} 2} = \sqrt{\cos z - \operatorname{ch} 2}. \qquad \square$$

7.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 7.14.

1) Найти образы при отображении функцией $f(z) = iz + 1 - 2i$
a) прямой $\mathcal{R}e\, z = 1$, b) прямой $\mathcal{I}m\, z = 1$,
c) области $G = \{z : \mathcal{R}e\, z > 1, \mathcal{I}m\, z > 1\}$.

2) Найти образы областей при отображении функцией $f(z) = 2/z$
a) $G = \{z : |z-1| > 1\}$, b) $G = \{z : |z-1| < 3\}$, c) $G = \{z : 1 < |z-1| < 3\}$.

3) Найти образы при отображении функцией $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$
a) прямой $\mathcal{R}e\, z = 1$, b) области $G = \{z : 0 < \mathcal{R}e\, z < 1\}$,
c) прямой $\mathcal{I}m\, z = 1$, d) области $G = \{z : 0 < \mathcal{I}m\, z < 1\}$.

4) Найти образ прямой $\mathcal{R}e\, z - \mathcal{I}m\, z = 0$ при отображении функцией $f(z) = 2ze^{3\pi i/4} + 2$.

5) Найти образы при отображении функцией $f(z) = \dfrac{iz}{3i - z}$
a) окружности $|z| = 3$, b) мнимой оси.

6) Найти образы при отображении функцией $f(z) = \dfrac{4i - z}{z}$
a) прямой $\mathcal{R}e\, z = 0$, b) прямой $\mathcal{I}m\, z = 0$, c) прямой $\mathcal{I}m\, z = 2$.

7) Найти образы областей при отображении указанными функциями $w(z)$:
a) $G = \{z : 0 < \arg z < \varphi \le \pi\}$, $w = 1/z$;
b) $G = \{z : |z| > r > 0\}$, $w = (z - i)/z$;
c) $G = \{z : |z| < 1,\ \mathcal{I}m\, z > 0\}$, $w = \dfrac{1+z}{1-z}$.

Пример 7.15. *Найти ДЛФ, переводящую*

1) точки -1, i, $1+i$ в точки i, ∞, 1; 2) точки -1, ∞, i в точки i, 1, $1+i$;

3) точки -1, ∞, i в точки 0, ∞, 1; 4) точки 1, i, 0 в точки 1, i, -1;

5) точки $\dfrac{1}{2}$, i, 0 в точки $\dfrac{1}{2}$, i, -1; 6) точки 1, -1, i в точки 1, -1, 0.

Пример 7.16. *Найти ДЛФ, отображающую*

1) круг $\{z : |z| < 1\}$ на круг $\{w : |w| < 1\}$ так, что

$w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$;

2) верхнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\ z > 0\}$ на круг $w : |w| < 1$ так, что

$w(1+2i)=0$, $\arg w'(1+2i)=\pi$;

3) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w:\mathcal{I}m\ \ w>0\}$ так, что $w(-1)=0$, $w(0)=2$, $w(1)=\infty$;

4) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на круг $w:|w|<1$ так, что $w(0)=1$, $w(2i)=0$;

5) круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w-1|<1\}$ так, что $w(0)=\dfrac{1}{2}$, $w(1)=0$;

6) круг $\{z:|z-2|<1\}$ на круг $\{w:|w-2i|<2\}$ так, что $w(2)=i$, $\arg w'(2)=0$;

7) круг $\{z:|z|<2\}$ на правую полуплоскость $\{w:\mathcal{R}e\ \ w>0\}$ так, что $w(0)=1$, $\arg w'(0)=\dfrac{1}{2}$;

8) круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(1)=-i$, $w(2i)=3i$;

9) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w:\mathcal{I}m\ \ w>0\}$ так, что $w(1)=3$, $w(i)=2i$;

10) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w:\mathcal{I}m\ \ w>0\}$ так, что $w(-1)=-2$, $w(i-2)=1+3i$;

11) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(i)=0$, $\arg w'(i)=\dfrac{\pi}{2}$;

12) круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(0)=0$, $\arg w'(0)=-\dfrac{\pi}{2}$;

13) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(1+i)=\dfrac{1}{2}$, $\arg w'(1+i)=\pi$;

14) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w:\mathcal{I}m\ \ w>0\}$ так, что $w(1+i)=i$, $\arg w'(i+1)=-\dfrac{\pi}{2}$;

15) круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(1/2)=1/2$, $\arg w'(1/2)=\pi/2$

16) верхнюю полуплоскость $\{z:\mathcal{I}m\ \ z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(1)=i$, $w(i)=\dfrac{2+i}{5}$;

17) круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что $w(i/2)=0$, $\arg w'(i/2)=\pi/2$;

18) Верхнюю полуплоскость $\{z : \mathcal{I}m\, z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \mathcal{I}m\, W > 0\}$ так, что $w(1) = 2,\ w(i) = 2 + i$;

19) область $G = \{z : \mathcal{R}e\, z + \mathcal{I}m\, z < 0\}$ на область $D = \{w : \mathcal{R}e\, w > 2\}$;

20) область $G = \{z : \mathcal{R}e\, z + \mathcal{I}m\, z < 0\}$ на область $D = \{w : \mathcal{I}m\, w > 0\}$, при условии, что $w(0) = \infty$, $w(1 + i) = 1 + i$.

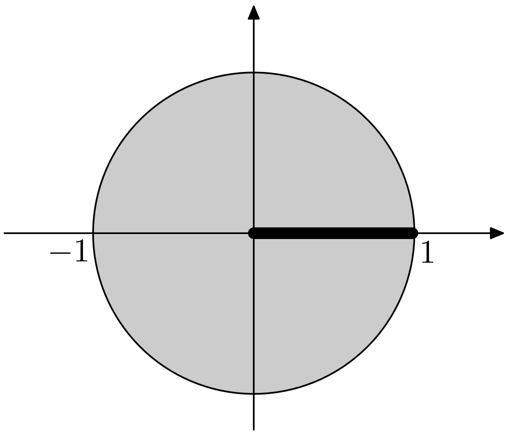
Пример 7.17. *Найти образы следующих областей при отображении функцией Жуковского* $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$, $(w = u + iv)$:

1) $\Big\{z : |z| < \dfrac{1}{2}\Big\}$;

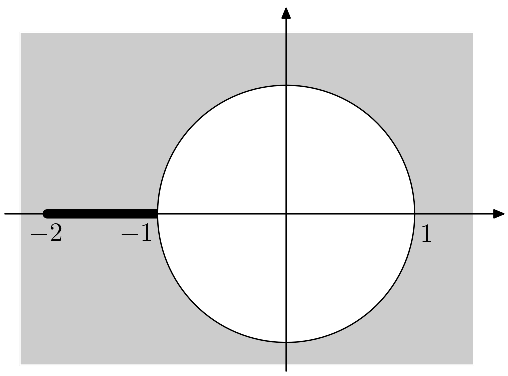
2) $\Big\{z : |z| < 1, z \notin [-1, 0] \bigcup \Big[\dfrac{1}{2}, 1\Big]\Big\}$;

3) $\{z : |z| > 1, \mathcal{I}m\, z < 0, z \notin [-2i, -i]\}$.

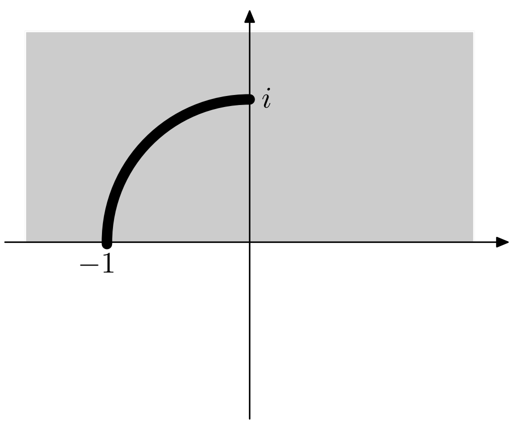
Пример 7.18. *Найти функцию* $w = w(z)$*, конформно отображающую каждую следующую область на плоскость с разрезом по лучу* $[0, +\infty]$*:*



a)

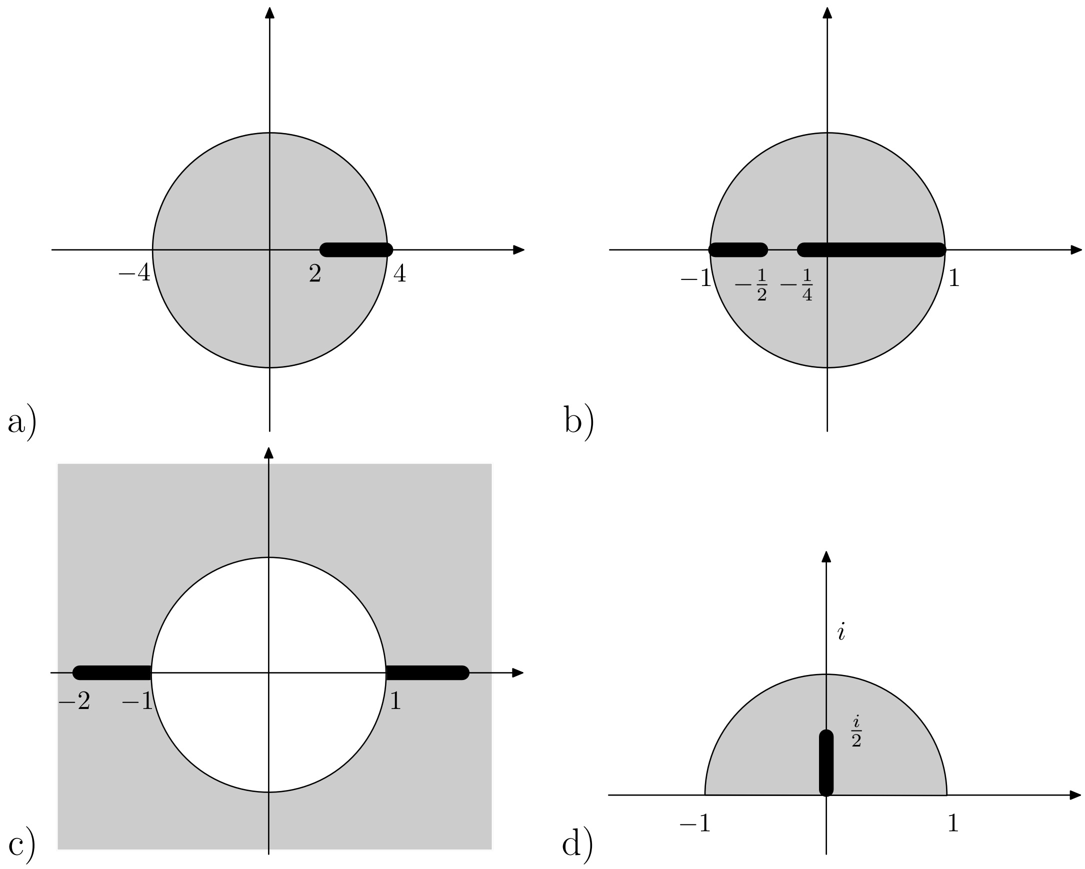


b)



c)

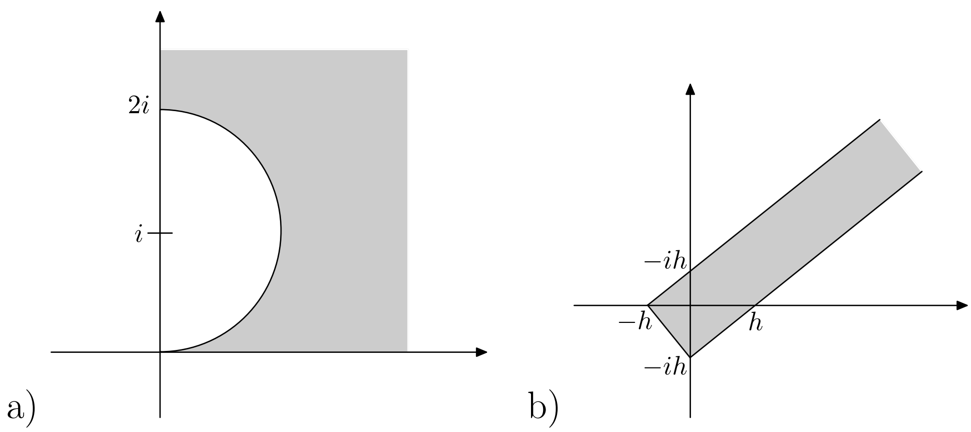
Пример 7.19. *Найти функцию* $w = w(z)$*, конформно отображающую каждую следующую область на верхнюю полуплоскость:*

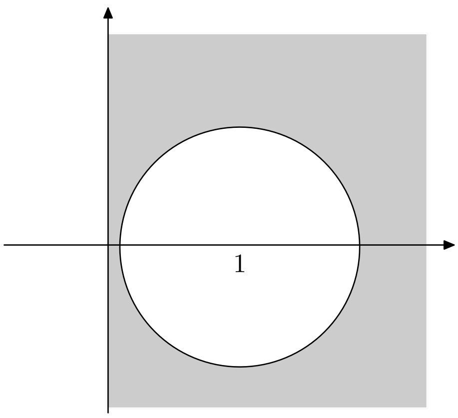


Пример 7.20. *Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку* $\left\{z : |z| > 2; |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\right\}$.

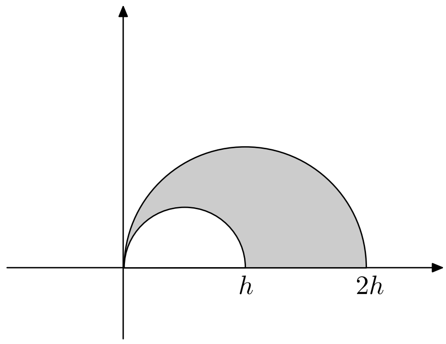
Пример 7.21. *Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость область* $G = \{z : |z| > 1, |z - i| > 1\}$.

Пример 7.22. *Отобразить конформно следующие области на верхнюю полуплоскость:*

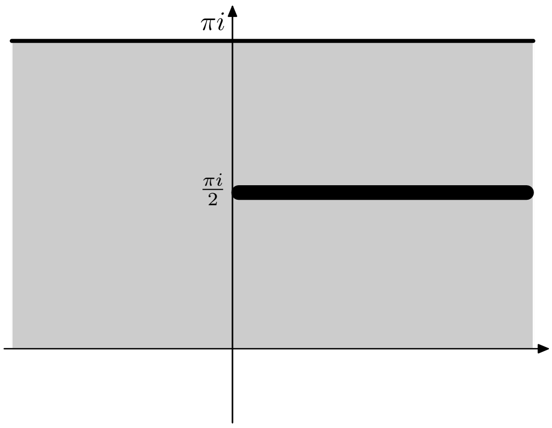




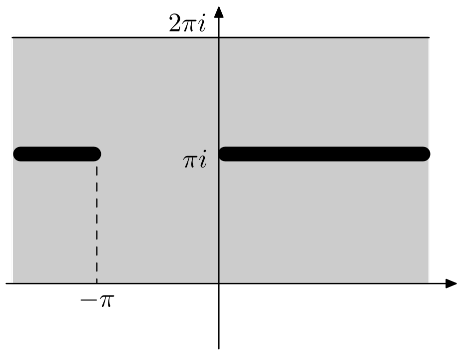
c)



d)



e)



f)

Пример 7.23. *Показать, что функция* $w = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ *взаимно однозначно отображает область* $D = \{z : |z| < 1, \mathcal{I}m\ z < 0\}$ *на верхнюю полуплоскость.*

Пример 7.24. *Показать, что если точка* z *описывает окружность* $|z| = 2$, *то* $w = z - 2i + \dfrac{1}{z}$ *описывает эллипс с главными осями, равными* 5 *и* 3.

Пример 7.25. *Для указанного отображения* $w(z)$ *в указанных точках* z_1 *и* z_2 *найти угол поворота и коэффициент растяжения. Определить вдоль каких линий угол поворота и коэффициент растяжения не меняются. Найти точки в которых нарушается конформность отображения:*

a) $w = 1 - z^2$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1 - i$; b) $w = \dfrac{1}{z+1}$, $z_1 = 0$, $z_2 = i$.

8 Функциональные последовательности и ряды в $\mathbb{C}$

Последовательность функций $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на некотором множестве $E \subseteq \mathbb{C}$, называется функциональной последовательностью на E.

Определение 8.1. *Если* $z_0 \in E$ *и последовательность* $\{f_k(z_0)\}$ *сходится, то говорят, что функциональная последовательность* $\{f_k(z)\}$ *сходится в* *точке z_0, а z_0 называют точкой сходимости функциональной последовательности $\{f_k(z)\}$. Если функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится в любой точке из E, говорят, что последовательность $\{f_k(z)\}$ поточечно сходится на E, а функцию, определенную равенством $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(z) = f(z)$ называют предельной функцией функциональной последовательности $\{f_k(z)\}$ на E.*

Тот факт, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ поточечно сходится к функции $f(z)$ на множестве E символически записывают в виде

$$f_k(z) \xrightarrow{E} f(z) \text{ или } f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z), \ \forall\, z \in E.$$

Из свойств сходящихся последовательностей комплексных чисел следует, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ на E тогда и только тогда, когда функциональные последовательности $\{u_k(x, y)\}$ и $\{v_k(x, y)\}$ сходится к функциям $\mathcal{R}e\, f(z)$ и $\mathcal{I}m\, f(z)$, соответственно.

Определение 8.2. *Функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$, поточечно сходящаяся к функции $f(z)$ на множестве E, называется равномерно сходящейся к функции $f(z)$ на множестве E, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_k(z) - f(z)| < \varepsilon, \ \forall\, k > k_0, \ \forall\, z \in E$$

$$\textit{то есть} \ \lim_{k\to\infty} \sup_{z\in E} |f_k(z) - f(z)| = 0.$$

Тот факт, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно на множестве E сходится к функции $f(z)$ символически будем записывать в виде

$$f_k(z) \overset{E}{\rightrightarrows} f(z).$$

Из неравенств $\max\{|u_k(x, y)|, |v_k(x, y)|\} \le |f_k(z)| \le |u_k(x, y)| + |v_k(x, y)|$, $z = x + iy \in E$, $k \in \mathbb{N}$, и определения 8.2 следует, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно на множестве E сходится к функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функциональные последовательности $\{u_k(x, y)\}$ и $\{v_k(x, y)\}$ равномерно на множестве E сходится к функциям $\mathcal{R}e\, f(z)$ и $\mathcal{I}m\, f(z)$, соответственно.

Таким образом, остаются в силе все результаты математического анализа о поточечно и равномерно сходящихся функциональных последовательностях для случая функциональных последовательностей комплекснозначных функций от комплексного переменного, в том числе и критерии равномерной сходимости.

Помимо понятия равномерной сходимости на множестве, часто используется понятие равномерной сходимости внутри множества.

Определение 8.3. *Говорят, что функциональная последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри множества $E \subseteq \mathbb{C}$, если она равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте F из E. Символически этот факт записывают так: $f_k(z) \overset{(E)}{\rightrightarrows} f(z)$.*

Очевидно, что если E — компакт в $\mathbb{C}$, то на E определения 8.3 и 8.2 совпадают.

Так, например, функциональная последовательность $\{z^k\}$ сходится равномерно внутри круга $K_0(1)$, не сходится равномерно на круге $K_0(1)$ и расходится в любой точке $z \in \mathbb{C}$, для которой $|z| > 1$.

Определение 8.4. *Функциональным рядом на множестве $G \subset \mathbb{C}$ называется ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k(z), \; z \in G, \tag{8.1}$$

Определение 8.5. *Будем говорить, что функциональный ряд 8.1*

- *сходится в точке $z_0 \in G$, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_k(z_0)$ сходится (или, другими словами, числовая последовательность $\{S_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(z)\}$ сходится в точке z_0);*
- *абсолютно сходится в точке $z_0 \in G$, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_k(z_0)$ абсолютно сходится;*
- *сходится на множестве G к функции $f(z)$, если функциональная последовательность $\{S_k(z)\}$ поточечно сходится к $f(z)$ на G;*
- *абсолютно сходится на множестве G к функции $f(z)$, если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k(z)|$ поточечно сходится на G;*
- *равномерно сходится на множестве G (внутри множества G) к функции $f(z)$, если функциональная последовательность $\{S_k(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ на множестве G (внутри множества G).*

Для исследования ряда (8.1) на сходимость и равномерную сходимость можно использовать все доступные методы математического анализа. Приведем некоторые из них.

1) *Критерий Коши*: для того, чтобы функциональный ряд (8.1) равномер-

но сходится на множестве G, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon,\ \forall\,n > k_0,\ \forall\,p \in \mathbb{N},\ \forall\,z \in G.$$

2) *Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда*: если все функции $f_k(z)$ непрерывны на множестве G и ряд (8.1) равномерно сходится на G к $f(z)$, то функция $f(z)$ непрерывна на множестве G.

3) *Почленное интегрировании равномерно сходящегося ряда*: если все функции $f_k(z)$ интегрируемы на спрямляемой кривой γ и ряд (8.1) равномерно сходится на σ к $f(z)$, то сумма ряда является интегрируемой функцией на σ, а ряд можно почленно интегрировать по σ, то есть $\displaystyle\int_\sigma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\sigma f_k(z)\,dz$.

4) *Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда*: если

$$c_k = \sup_{z\in G}|f_k(z)|,\ k \in \mathbb{N},$$

и числовой ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ сходится, то функциональный ряд (8.1) равномерно сходится на множестве G.

В случае функциональных рядов от аналитических функций важную роль играют два следующих результата.

Теорема 8.1 (теорема Вейерштрасса)**.** *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, *составленный из аналитических в области D функций, сходится равномерно внутри области D, то его сумма* $S(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *является аналитической функцией в области D, при этом ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *сходится равномерно внутри области D к сумме $S^{(k)}(z)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 8.2. *Если функции $f_n(z)$ непрерывны в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ и аналитичны в области D, то из равномерной сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *на границе области D следует его равномерная сходимость на $\overline{D}$.*

Степенные ряды. Частным видом функциональных рядов, но очень важным для функций в комплексной плоскости, являются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z_0 \in \mathbb{C}, \tag{8.2}$$

здесь $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел. Такой ряд называется степенным рядом с центром в точке z_0.

Аналогичные ряды подробно изучались в курсе математического анализа. Все основные свойства степенных рядов в $\mathbb{R}$ остаются в силе и для степенных рядов в $\mathbb{C}$, но в несколько измененном виде.

Теорема 8.3 (первая теорема Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *сходится в точке* $z_1 \neq z_0$, *то он сходится абсолютно в круге* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| < |z_1-z_0|\}$.

Определение 8.6. *Величина* $R = \sup\Big\{|z| \ : \ \text{ряд} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \text{сходится}\Big\}$, *называется радиусом сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *а круг* $|z| < R$ *называется кругом (областью) сходимости ряда.*

Теорема 8.4 (следствие первой теоремы Абеля). *Пусть* $R \in (0, +\infty)$ *— радиус сходимости степенного ряда (8.2). Тогда ряд (8.2) сходится абсолютно в круге* $|z-z_0| < R$, *равномерно внутри этого круга и расходится во внешности этого круга* $|z-z_0| > R$. *Если* $R = 0$, *то ряд (8.2) сходится только в точке* z_0 *и расходится в любой точке* $z \neq z_0$. *Если* $R = +\infty$, *то ряд (8.2) сходится абсолютно во всей комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и равномерно на любом компакте из* $\mathbb{C}$.

Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле *Коши – Адамара* (она основана на признаке Коши):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то полагают $R = 0$, если $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то полагают $R = +\infty$.

Отметим поведение степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ внутри круга сходимости $|z-z_0| = R$, когда радиус сходимости $R > 0$:

1) сумма степенного ряда f является аналитической функцией в круге сходимости $|z-z_0| < R$;

2) степенной ряд можно почленно дифференцировать в круге $|z-z_0| < R$ любое число раз, при этом

$$f^{(s)}(z) = \sum_{n=s}^{+\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n-s+1)(z-z_0)^{n-s}, \quad |z-z_0| < R, \ s \in \mathbb{N};$$

3) коэффициенты a_n $(n \geq 0)$ степенного ряда определяются формулами

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

4) степенной ряд можно почленно интегрировать вдоль любой спрямляемой кривой, лежащей внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$.

Пример 8.1. *Указать область сходимости следующих рядов*

$$\textit{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \qquad \textit{б)} \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \qquad \textit{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \qquad \textit{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} \frac{1}{(z+i)^n}.$$

■ а) Используем формулу Коши – Адамара и найдем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, радиус сходимости равен 2 и неравенство $|z/2| < 2$, то есть $|z| < 2$, определяет область сходимости ряда а).

б) Напомним, для вычисления радиуса сходимости степенного ряда можно использовать признак Д'Аламбера, который в этом случае дает формулу

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ если предел существует.}$$

В этом случае находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

поэтому $R = 0$ и ряд сходится только в точке $z = 0$.

в) Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u^n$, $u = 1/z$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$, то по формуле Коши – Адамара $R = 1$ и область сходимости исходного ряда определяется неравенством $|u| < 1$, то есть $|z| > 1$ — это внешность единичного круга с центром в точке $z = 0$. □

г) По формуле Коши – Адамара

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n} = 0,$$

поэтому $R = +\infty$ и область сходимости данного ряда определяет неравенством $|z + i| > 0$, то есть область сходимости данного ряда — вся плоскость с выколотой точкой $z = -i$. □

Пример 8.2. *Найти область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z-2i}{z+i}\right)^n$.

■ Исходный ряд — обобщенный степенной ряд, который можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} u^n, \text{ где } u = \frac{z-2i}{z+i}.$$

Поскольку, очевидно, что для последнего ряда $R = 1$, область сходимости исходного ряда определяется неравенством $\dfrac{|z-2i|}{|z+i|} < 1$, то есть: $|z-2i| < |z+i|$. Границей этого множества является линия, комплексное уравнение которой $|z-2i| = |z+i|$. Нетрудно определить, что это прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему точки $z = 2i$ и $z = -i$ и проходящая через его середину. Найдем уравнение этой прямой. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$|x + i(y-2)| = |x + i(y+1)|.$$

По определению модуля $x^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y+1)^2$. Отсюда получаем уравнение этой прямой $6y = 3$ или $y = \mathcal{I}m\, z = 1/2$. Итак, областью сходимости ряда будет множество $\mathcal{I}m\, z > \dfrac{1}{2}$. □

Пример 8.3. *Найти радиус сходимости рядов*

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\, 3^n, \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^n}.$$

■ а) По формуле *Коши – Адамара*, поскольку $a_n = 3^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3^n|}} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому областью сходимости этого ряда будет круг $|z-1| < \dfrac{1}{3}$.

б) У заданного ряда коэффициент $a_k = 0$ при $k = 2n-1$ и $a_k = \dfrac{1}{3^n}$ при $k = 2n$. Поэтому радиус сходимости вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|1/3^n|}} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

а областью сходимости этого ряда будет круг $|z| < \sqrt{3}$. □

Пример 8.4. *Найти радиус сходимости степенных рядов и исследовать их поведение на границе круга сходимости:*

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 - \ln n}.$$

■ а) Так как $R = 1$, то $\{z : |z| < 1\}$ — круг сходимости данного степенного ряда. На границе кругу сходимости $|z| = 1$ или, в экспоненциальной форме, $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Для точек границы получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi + i \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\varphi,$$

который, очевидно, расходится в любой точке $\varphi \in [0, 2\pi)$, поскольку общий член ряда $e^{in\varphi}$ не стремиться к нулю при $n \to \infty$.

б) Так как $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2 - \ln n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{1 - \dfrac{\ln n}{n^2}}} = 1$, то $R = 1$ и $\{z : \ |z| < 1\}$ — круг сходимости. При $|z| = 1$

$$\left|\frac{z^n}{n^2 - \ln n}\right| = \frac{1}{n^2 - \ln n} = \frac{1}{n^2(1 - \dfrac{\ln n}{n^2})} \sim \frac{1}{n^2},\ n \to \infty.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, согласно признаку сравнения, следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^n - \ln n}$ при $|z| = 1$. Итак, при $|z| \leqslant 1$ ряд сходится абсолютно, а при остальных z — расходится. □

Из приведенных примеров видно, что поведение степенного ряда на границе круга сходимости уникально, и требует специального исследования, более сложного, чем исследование степенного ряда в $\mathbb{R}$, поскольку в $\mathbb{R}$ граница интервала сходимости $(-R, R)$, когда $0 < R < +\infty$, состоит всего из двух точек. Когда поведение степенного ряда на границе круга сходимости зависит лишь от модуля общего члена, то исследование такого ряда на границе круга сходимости провести несложно. В том случае, когда это не так, исследование значительно усложняется. В этих случаях степенной ряд может сходиться в одних точках границы своего круга сходимости и расходиться — в других. Например, используя сведения из теории рядов, изложенные в курсе математического анализа, легко проверить, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ сходится в точке $z = -1$ и расходится при $z = 1$. В любой другой точке единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$, ряд представляется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{n}$$

и, используя признак Дирихле, нетрудно убедиться в том, что этот ряд сходится во всех таких точках.

8.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 8.5. *Найти радиус сходимости степенного ряда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2n}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^n}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{2^n}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{2n}}{2n-1}$;
6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$;
7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+i)(z+i)^n}{(1+i)^n}$;
8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n z^n$;
9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{n^2}z^n$;
10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^n z^{2n}$;
11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}z^n$;
12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+3)}{(2n-3)^n}z^n$;
13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^{3n}}{2^n}$;
14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}(z-i)^n$;
15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{n^n}$;
16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!z^n}{2^n}$.

Пример 8.6. *Найти радиус сходимости степенного ряда и исследовать его поведение на границе круга сходимости:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n n}{2^n}$;
2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n^2}$;
3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2+i)^n}{1-\ln\sqrt{n}}$;
4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}z^{2n}\dfrac{n(1+i)^n}{\ln n}$;
5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in^2}(z+1)^n$;
6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2z-1+i)^n}{1-\ln\sqrt[4]{n}}$;
7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}z^{3n}\dfrac{\sqrt{n}(1-i)^n}{2\ln n}$;
8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{3in}(z-2i1)^n$;
9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{\sqrt{n}}z^n$;
10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n(z+1)^n$;
11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{5^n-n}$;
12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n\ln^2 n}$;
13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(iz)^n}{2^{n+\sqrt{n}}}$;
14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{3^n+\sqrt{n}}$;
15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2z)^{2n}}{n\ln^3 n}$;
16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(iz+1)^n}{2^{n+\sqrt[3]{n}}}$.

Пример 8.7. *Найти область сходимости ряда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{z^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!z^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n!z^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln z}{z^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z+1}{n}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nz$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nz}{\sin nz}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{z^n}$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!z^n}$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nz$

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(zn)}{z^2}$

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nz$

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{zn}$

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln az^n, \quad (a \in \mathbb{C})$

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{i}{z^n}\right)$

Пример 8.8. *Известно, что радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *равен* $R \in (0, +\infty)$. *Что можно сказать о радиусе сходимости и области сходимости каждого из следующих рядов?*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-1)^n$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(2+(-1)^n\big)^n a_n z^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n a_n (z+i)^n$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n} a_n z^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 (z+2i)^n$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$.

9 Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть Γ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, заданная параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [a, b]$. Пусть $A = \sigma(a)$, $B = \sigma(b)$ — начальная и конечная точки Γ (не исключено, что $A = B$). Выберем на Γ направление по возрастанию параметра, которое будем называть положительным направлением. Спрямляемую кривую Γ в $\mathbb{C}$ с противоположным направлением (по убыванию параметра) будем обозначать через Γ^-.

Выберем разбиение $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m \in N[a, b]$, и точки $z_k = \sigma(t_k) \in \Gamma$, $k = \overline{0, m}$. Число $d(\tau) = \max_{1 \le k \le m} |t_k - t_{k-1}|$ называют диаметром разбиения τ.

Пусть на кривой Γ определена функция f. По разбиению τ произведём выборку $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, то есть выберем $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, m}$, и положим

$\zeta_k := \sigma(t_k) \in \Gamma$, $k = \overline{1,m}$. Сумма

$$S^f(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{m} f(\sigma(\xi_k))(\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta z_k$$

называется интегральной суммой функции f, составленной по разбиению τ и выборке ξ.

Определение 9.1. *Комплексное число $I(\in \mathbb{C})$ называется пределом интегральных сумм $S^f(\tau, \xi)$ при $d(\tau) \to 0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |S^f(\tau, \xi) - I| < \varepsilon, \forall \tau \in N[a, b] \text{ с } d(\tau) < \delta \text{ и } \forall \xi.$$

При этом пишут $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi) = I$.

Определение 9.2. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S^f(\tau, \xi)$, *то значение этого предела называется интегралом от функции f по кривой Γ и обозначается* $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, *при этом функция f называется интегрируемой по кривой* Γ.

Исходя из определения, нетрудно доказать следующие свойства интегралов от функций комплексного переменного по спрямляемой кривой Γ с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [a, b]$.

1. Если функцииf и g интегрируемы по спрямляемой кривой Γ, то для любых чисел $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ функция $c_1 f + c_2 g$ интегрируема по Γ и

$$\int_{\Gamma} (c_1 f(z) + c_2 g(z))\, dz = c_1 \int_{\Gamma} f(z)dz + c_2 \int_{\Gamma} g(z)\, dz.$$

2. Если на спрямляемой кривой Γ с положительным направлением обхода изменить направление на противоположное (отрицательное), то оба интеграла от функция f по кривой Γ и по кривой Γ^- существует или не существует одновременно и, если существуют, то

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_{\Gamma} f(z)dz.$$

3. Если спрямляемая кривая Γ представлена в виде $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ (Γ_1, Γ_2 — спрямляемые дуги кривой Γ, причем конец кривой Γ_1 совпадает с началом кривой Γ_2), то функция f интегрируема по Γ тогда и только тогда, когда f интегрируема по Γ_1 и Γ_2. Если функция f интегрируема по Γ, то имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

4. Пусть функция f интегрируема по спрямляемой кривой Γ с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [a,b]$, и длиной $\ell(\Gamma)$. Если $M_\sigma(f) := \sup\limits_{z\in\Gamma} |f(z)| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(\sigma(t))| < +\infty$, то

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le M_\sigma(f) \cdot \ell(\Gamma).$$

Интегралы от функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексного переменного тесно связаны с криволинейными интегралами II-го рода по кривой Γ. Как доказывается в курсе математического анализа (см., например, [6, глава 15, с. 120-121]), криволинейные интегралы второго рода от непрерывных функций по спрямляемым кривым существуют. Следовательно, для функции комплексного переменного справедлива следующая теорема о существовании интеграла.

Теорема 9.1 (о существовании интеграла). *Если на спрямляемой кривой* Γ *с параметризацией* $z = \sigma(t)$, $t \in [a,b]$ *определена и непрерывна функция* f *(то есть функция* $f\circ\sigma$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*), то интеграл* $\int_\Gamma f(z)dz$ *существует и имеет место формула*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\sigma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\Gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy. \tag{9.1}$$

В случае, когда кривая Γ — гладкая (или кусочно гладкая) с параметризацией $z = \sigma(t)$, $t \in [a,b]$, интеграл по Γ от непрерывной на Γ функции f можно свести к определённому интегралу от комплекснозначной функции по отрезку вещественной оси.

Теорема 9.2. *Если* Γ *— гладкая кривая (или кусочно гладкая) с параметризацией* $z = \sigma(t)$, $t \in [a,b]$, *и функция* f *непрерывна на* Γ, *то*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt\,. \tag{9.2}$$

Основные теоремы комплексного анализа используют интегралы по замкнутым (простым) спрямляемым кривым. Напомним, что по теореме Жордана, любая замкнутая простая кривая разбивает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на две области и является их общей границей. Одна из них ограничена и называется внутренностью кривой Γ ($\operatorname{int}\Gamma$), а другая содержит бесконечно удалённую точку и называется внешностью Γ ($\operatorname{ext}\Gamma$). Опираясь на теорему Жордана дадим следующее, важное для теории функций комплексного переменного, определение.

Определение 9.3. *Область $G \subset \mathbb{C}$ называется односвязной, если внутренность любой замкнутой простой кривой Γ, лежащей в G, принадлежит G.*

Область G, содержащая бесконечно удалённую точку называется односвязной, если для любой лежащей в ней замкнутой жордановой кривой либо её внутренность, либо внешность принадлежит G.

Теорема 9.3 (интегральная теорема Коши)**.** *Пусть функция f аналитична в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ, лежащей в G,*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Следствие 9.3.1. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, функция $f \in A(G)$, z_1 и z_2 — произвольные точки этой области, тогда значение интеграла $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ по спрямляемой кривой γ, соединяющей в G точки z_1 и z_2 с направлением от z_1 к z_2, не зависит от выбора этой кривой (при этом пишут $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$).*

Определение 9.4. *Пусть G область в $\mathbb{C}$, $f\colon G \to \mathbb{C}$. Функция $F\colon G \to \mathbb{C}$ называется первообразной функции f на G если F аналитична в G и $F^{'}(z) = f(z)$, $\forall z \in G$.*

Теорема 9.4 (о существовании первообразной)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, функция f непрерывна на G и интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ по спрямляемой кривой Γ, лежащей в G, не зависит от пути интегрирования. Тогда функция f имеет в G первообразную.*

Отметим, что при таком определении первообразной, функция f, которая имеет первообразную в области G, является аналитической функцией в G, а тот факт, что интеграл по спрямляемой кривой Γ, лежащей в G, не зависит от пути интегрирования эквивалентен тому, что интеграл от функции f вдоль любой замкнутой спрямляемой кривой, лежащей в этой области, равен нулю.

Следствие 9.4.1. *Если G — односвязная область в $\mathbb{C}$, и функция f аналитична в G, то f имеет первообразную в G, одной из которых является функция*

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt, \ z_0, z \in G. \tag{9.3}$$

Теорема 9.5 (Ньютона-Лейбница). *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, а f — аналитическая в G функция. Если F — первообразная для функции f в G, то для любых точек z_1, z_2 из G имеет место равенство (формула Ньютона-Лейбница)*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1). \tag{9.4}$$

Отметим, что если функции f и h аналитические в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, z_1, z_2 — произвольные точки из G, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(t)h'(t)\,dt = f(t)\cdot h(t)\,\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} f'(t)h(t)\,dt. \tag{9.5}$$

Условимся далее называть контуром любую простую спрямляемую кривую. Если не оговорено другое, будем считать, что на замкнутом контуре всегда задано направление обхода *против часовой стрелки* (положительное направление). Если контур не замкнут, то направление обхода на нем устанавливается от первой указанной точки контура (начальной) к последней (конечной) точке.

Теорема 9.6 (интегральная формула Коши). *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, функция f аналитична в G, замкнутый контур Γ принадлежит G вместе со своей внутренностью, тогда для любого $z \in \operatorname{int}\Gamma$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \tag{9.6}$$

которое называется интегральной формулой Коши.

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$. Если в качестве Γ окружность $C_{R_0}(z_0) = \{z : |z - z_0| = R_0\}$, рассмотреть функцию f, аналитическую на круге $K_{R_0}(z_0) = \{z : |z - z_0| \le R_0\}$, и в интеграле (9.6) сделать замену $t = z_0 + R_0e^{i\varphi}$, $dt = iR_0e^{i\varphi}d\varphi$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0 + R_0e^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{9.7}$$

Теорема 9.7. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция f аналитична в G. Тогда функция f бесконечно дифференцируема в каждой точке $z \in G$ и для любого замкнутого контура Γ, принадлежащего G вместе со своей внутренностью,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt,\ \forall z \in \operatorname{int}\Gamma,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9.8}$$

Обобщая изложенные определения и результаты перечислим способы вычисления интегралов $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$.

Первый способ: вычисление интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от непрерывной функции по спрямляемой кривой Г посредством его сведения к криволинейным интегралам второго рода от вещественнозначных функций двух вещественных переменных (применение формулы (9.1)) и вычисление последних известными из математического анализа методами.

Второй способ: вычисление интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от непрерывной функции по гладкой или кусочно гладкой (а потому спрямляемой) кривой Г посредством его сведения в случае параметрического задания кривой интегрирования к определенному интегралу от комплекснозначной функции вещественной переменной и его вычисление.

Третий способ: вычисление интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от аналитической в односвязной области функции, имеющей первообразную, по спрямляемой кривой Г с помощью формулы Ньютона – Лейбница (применение формулы (9.4)), возможно, применяя еще и формулу (9.5).

Четвертый способ: вычисление интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от аналитической в области функции по замкнутой простой спрямляемой кривой, лежащей в области вместе со своей внутренностью, с помощью интегральной формулы Коши (формулы (9.6)).

Приведем несколько примеров на вычисление интегралов от функции комплексного переменного.

Пример 9.1. *Вычислить интеграл*

$$I = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{I}m\, z\, dz, \qquad \Gamma = \{z : |z| = 1, \quad 0 \le arg\ z \le \pi\}.$$

■ *Первый способ.* Если $z = x + iy$, то $\mathcal{I}m\ z = y$, $dz = dx + idy$. Рассмотрим параметризацию кривой Г: $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in [-1, 1]$ (она определяет направление обхода по часовой стрелке!) и вычислим криволинейные интегралы второго рода известными из математического анализа методами. По формуле (9.1) получим

$$I = \int\limits_{\Gamma} y\,dx + i\int\limits_{\Gamma} y\,dy = -\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt + i\int\limits_{-1}^{1} t\,dt =$$

$$= -\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right) + i\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Второй способ. Вычислим интеграл I с помощью формулы (9.2) при параметрическом задании кривой $\Gamma : z(t) = e^{it}$, $t \in [0,\pi]$. Тогда $\mathcal{I}m\, z = \dfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $dz = ie^{it}dt$, и после замены получим

$$I = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{I}m\, z\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(e^{it} - e^{-it})e^{it}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} e^{2it}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} dt = -\frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Пример 9.2. *Вычислить интегралы* $I_1 = \int\limits_{\Gamma} x\,dz$, $I_2 = \int\limits_{\Gamma} y\,dz$, *где* Γ — *прямолинейный отрезок, соединяющий точки* $z_1 = 0$ *и* $z_2 = 2 + i$.

■ *Первый способ.* С помощью формулы (9.2) и проходящей через точки z_1 и z_2 прямой Γ, параметризацию которой представим либо в виде $x = x$, $y(x) = x/2$, $x \in [0,2]$, либо в виде $y = y$, $x = 2y$, $y \in [0,1]$, получим

$$I_1 = \int\limits_{0}^{2} x\,dx + i\int\limits_{0}^{1} x(y)\,dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} + 2i\int\limits_{0}^{1} y\,dy = 2 + i,$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{2} y(x)\,dx + i\int\limits_{0}^{1} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\,dx + \frac{i}{2}y^2\Big|_{0}^{1} = 1 + \frac{i}{2}.$$

Второй способ. Уравнение прямой в $\mathbb{C}$, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 + i$ можно записать в либо в виде $z = \left(1 + \dfrac{i}{2}\right)x$, $x \in [0,2]$, либо в виде $z = (2+i)y$, $y \in [0,1]$. Тогда по формуле (9.2)

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma} x\,dz = \left(1 + \frac{i}{2}\right)\int\limits_{0}^{2} x\,dx = \left(1 + \frac{i}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 2 + i,$$

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma} y\,dz = (2+i)\int\limits_{0}^{1} y\,dy = (2+i)\frac{y^2}{2}\Big|_{0}^{1} = 1 + \frac{i}{2}. \qquad \square$$

Пример 9.3. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{\Gamma} |z|\bar{z}\,dz$, *где* Γ — *контур, состоящий из верхней полуокружности* $|z| = 1$ *и отрезка* $-1 \le x \le 1$, $y = 0$.

■ Представим интеграл I в виде суммы двух интегралов по каждому из двух участков: $I = \int\limits_{\Gamma_1} \bar{z}\,dz + \int\limits_{\Gamma_2} |z|\bar{z}\,dz$, где $\Gamma_1 = \{z = e^{it} : t \in [0,\pi]\}$, $\Gamma_2 = \{z = x : x \in [-1,1]\}$. Тогда по формуле (9.2)

$$\int\limits_{\Gamma_2} |z|\bar{z}\,dz = \int\limits_{-1}^{1} |x|x\,dx = 0 \text{ (нечетная функция на } [-1,1]!).$$

На Γ_1 $z = e^{it}$, $\bar{z} = e^{-it}$, $dz = ie^{it}dt$, $t \in [0,\pi]$, поэтому $\int\limits_{\Gamma_1} \bar{z}\,dz = i\int\limits_{0}^{\pi} dt = i\pi$. Следовательно, $I = i\pi$. □

Пример 9.4. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}\,dz$.

■ Поскольку функция ze^{z^2} является аналитической в $\mathbb{C}$ и одной из ее первообразных является функция $F(z) = \dfrac{e^{z^2}}{2}$, то данный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница (см. формулу (9.4)): $I = \dfrac{e^{z^2}}{2}\Big|_{-i}^{i} = 0$. □

Пример 9.5. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{0}^{i} (z-i)e^{-z}\,dz$.

■ Функции $f(z) = z - i$ и $h(z) = -e^{-z}$ являются аналитическими в $\mathbb{C}$ и можно применить формулу интегрирования по частям (формулу (9.5)):

$$I = -(z-i)e^{-z}\Big|_0^i + \int\limits_0^i e^{-z}\,dz = i - e^{-z}\Big|_0^i = (1-\cos 1) + i(\sin 1 - 1).$$ □

Пример 9.6. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2+4}$.

■ Так как $z^2 + 4 = 0$ в точках $\pm 2i$, то на круге $|z| \le 1$ подынтегральная функция аналитическая. По теореме Коши 9.3 $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2+4} = 0$. □

Пример 9.7. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z-2i|=1} \dfrac{dz}{z^2+4}$.

■ Точка $z = 2i$ является центром окружности $C : |z - 2i| = 1$. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4} = \dfrac{1}{z+2i} \cdot \dfrac{1}{z-2i}$ и, воспользовавшись интегральной формулой Коши для функции $g(z) = \dfrac{1}{z+2i}$, получим

$$\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{dz}{z^2+4} = \int\limits_{|z-2i|=1} \frac{g(z)}{z-2i} = 2\pi i g(2i) = 2\pi i \,\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Пример 9.8. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$.

■ Точка $z = i$ является центром окружности интегрирования. Так как знаменатель содержит степень $z - i$, воспользуемся формулой Коши для производных (9.8):

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^{2+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\,\Big|_{z=i} = \pi i(-\cos z)\,\Big|_{z=i} = -i\pi\cos i = -i\pi\,\mathrm{ch}\,1. \ \square$$

Пример 9.9. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$, $a > 0$, *используя известный результат Пуассона*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{9.9}$$

■ Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-z^2}$ на прямоугольнике

$$\Pi = \{z = x + iy : |x| \le R, 0 \le y \le a\},$$

на котором она аналитична, и проинтегрируем ее по границе прямоугольника. Тогда по теореме Коши

$$0 = \int\limits_{\Gamma} e^{-z^2}\,dz = \int\limits_{\Gamma} e^{-x^2-y^2}e^{2ixy}\,d(x+iy) =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx + i\int\limits_0^a e^{-R^2-y^2}e^{-i2Ry}\,dy + \int\limits_{R}^{-R} e^{-x^2+a^2-i2xa}\,dx + \int\limits_a^0 e^{-R^2-y^2+i2Ry}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx - e^{a^2}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2-2ixa}\,dx + ie^{-R^2}\int\limits_0^a e^{-y^2}(e^{-i2Ry} - e^{i2Ry})\,dy.$$

Перейдем к пределу при $R \to +\infty$, и тогда, так как $\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-R^2} = 0$, учитывая значение интеграла Пуассона (9.9), получим

$$\sqrt{\pi} = e^{a^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - i2xa}\, dx, \quad \text{то есть} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-a^2}. \qquad \square$$

Пример 9.10. *Вычислить интеграл* $I = \int_L \Big(z^2 e^{4iz} - 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z + \dfrac{\operatorname{sh} 3z}{2z - \pi i} \Big)\, dz$, *где* L *— граница множества* $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2,\ \mathcal{I}m z > 0\}$ *с направлением обхода против часовой стрелки.*

■ Граница множества G, состоит из прямолинейного отрезка $\ell_1 = [-2, 2]$ и полуокружности $\ell_2 = \{z : |z| = 2,\ \mathcal{I}m\, z \geq 0\}$, имеет направление обхода против часовой стрелки. По свойству аддитивности интеграла можем записать

$$I = \int_L z^2 e^{4iz}\, dz - \int_L 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z\, dz + \int_L \frac{\operatorname{sh} 3z}{2z - \pi i}\, dz = I_1 - I_2 + I_3.$$

1. Рассмотрим первый интеграл. Подынтегральная функция $w = z^2 e^{4iz}$ аналитична во всей комплексной плоскости, значит, она аналитична на замкнутой области $\overline{G}$. Поскольку L — замкнутый контур, то по интегральной теореме Коши этот интеграл равен нулю.

2. Вычислим второй интеграл, который представим в виде суммы двух интегралов

$$I_2 = \int_L 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z\, dz = \int_{\ell_1} 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z\, dz + \int_{\ell_2} 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z\, dz.$$

На контуре интегрирования ℓ_1 имеем $z = x$, $\overline{z} = x$, $dz = dx$, $\mathcal{I}m\ z = 0$, поэтому интеграл по ℓ_1 равен 0.

Контур интегрирования ℓ_2 — полуокружность $\{z : |z| = 2,\ \mathcal{I}m\ z \geq 0\}$, уравнение которой $z = 2e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда $\overline{z} = 2e^{-i\varphi}$, $dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$, $\mathcal{I}m\, z = \mathcal{I}m\, 2(\cos\varphi + i \sin\varphi) = 2\sin\varphi$. Поэтому

$$\int_{\ell_2} 2\overline{z}\,\mathcal{I}m\, z\, dz = 2 \int_0^\pi 2e^{-i\varphi} 2\sin\varphi\, 2i\, e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= 16i \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = -16i \cos\varphi \Big|_0^\pi = -16i(-1-1) = 32i.$$

3. Третий интеграл вычислим, используя интегральную формулу Коши, учитывая, что функция $w = \operatorname{sh} 3z$ аналитическая в $\mathbb{C}$ (значит, и на $\overline{G}$).

$$I_3 = \int_L \frac{\operatorname{sh} 3z}{2z - \pi i}\, dz = \frac{1}{2} \int_L \frac{\operatorname{sh} 3z}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\, 2\pi i\, \operatorname{sh} \frac{3\pi i}{2} =$$

$$= \pi i\Big(-i\sin i\frac{3\pi i}{2}\Big) = \pi\sin\Big(-\frac{3\pi}{2}\Big) = \pi.$$

(Здесь использована формула $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$.) Итак, $I = \pi - 32i$. $\square$

Пример 9.11. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int_L \Big(z\,\overline{z} + \frac{\sin 4z}{2z^2+3z-2}\Big)\,dz$, *где* L — *граница треугольника* G *с вершинами в точках* $-i$, 1, i, *с направлением обхода против часовой стрелки.*

■ Контур интегрирования — граница указанного треугольника — состоит из прямолинейного отрезка $\ell_1 = [-i, 1]$, уравнение которого в $\mathbb{R}^2$ имеет вид $y = x - 1$, $x \in [0,1]$, прямолинейного отрезка $\ell_2 = [1, i]$, уравнение которого в $\mathbb{R}^2$ имеет вид $y = -x+1$, $x \in [1,0]$, и прямолинейного отрезка $\ell_3 = [i, -i]$ мнимой оси, который в $\mathbb{R}^2$ имеет вид $\{(x,y) : x = 0, y \in [1,-1]\}$. Как и в предыдущем примере представим исходный интеграл в виде суммы интегралов

$$I = \int_L z\,\overline{z}\,dz + \int_L \frac{\sin 4z}{2z^2+3z-2}\,dz = I_1 + I_2.$$

1. Сначала вычислим интеграл I_1, который представим в виде

$$I_1 = \int_L z\,\overline{z}\,dz = \int_{\ell_1} z\,\overline{z}\,dz + \int_{\ell_2} z\,\overline{z}\,dz + \int_{\ell_3} z\,\overline{z}\,dz.$$

Поскольку уравнение отрезка ℓ_1 имеет вид $y = x - 1$, x изменяется от 0 до 1, $dy = dx$, то

$$\int_{\ell_1} z\,\overline{z}\,dz = \int_{\ell_1}(x^2+y^2)(dx+idy) = \int_0^1 \big(x^2+(x+1)^2\big)(1+i)\,dx =$$

$$= (1+i)\int_0^1 (2x^2-2x+1)\,dx = (1+i)\Big(\frac{2x^3}{3} - x^2 + x\Big)\Big|_0^1 =$$

$$= (1+i)\Big(-\frac{2}{3} - 1 + 1\Big) = \frac{2}{3}\,(1+i).$$

На отрезке ℓ_2 $y = -x+1$, $dy = -dx$ и переменная x изменяется от 1 до 0, поэтому

$$\int_{\ell_2} z\,\overline{z}\,dz = \int_1^0 \big(x^2 + (-x+1)^2\big)(1-i)\,dx = (1-i)\int_1^0 (2x^2-2x+1)\,dx =$$

$$= (1-i)\Big(\frac{2x^3}{3} - x^2 + x\Big)\Big|_1^0 = (1-i)\Big(\frac{2}{3} + 1 - 1\Big) = \frac{2}{3}\,(i-1).$$

В качестве параметра на отрезке ℓ_3 выберем переменную y, изменяющуюся от 1 до -1. В этом случае $x = 0$ и потому

$$\int_{\ell_3} z\,\overline{z}\,dz = \int_1^{-1} y^2 i\,dy = i\,\frac{y^3}{3}\Big|_1^{-1} = \frac{i}{3}\,(-1-1) = -\frac{2i}{3}.$$

Следовательно, $I_1 = \dfrac{2}{3}(1+i) + \dfrac{2}{3}(i-1) - \dfrac{2i}{3} = \dfrac{2i}{3}$.

2. Чтобы вычислить интеграл $I_2 = \displaystyle\int_L \frac{\sin 4z}{2z^2+3z-2}\,dz$, найдем нули знаменателя подынтегральной функции: $2z^2+3z-2=0 \Leftrightarrow z_1=-2,\ z_2=\dfrac{1}{2}$. Поскольку $z_1=-2\notin\overline{G}$, функция $\dfrac{\sin 4z}{z+2}$ аналитична на $\overline{G}$. Точка $z_2=\dfrac{1}{2}\in G$, преобразуем интеграл I_2 и применим интегральную формулу Коши:

$$I_2 = \int_L \frac{\sin 4z}{2(z+2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,dz = \frac{1}{2}\int_L \frac{(\sin 4z)/(z+2)}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,2\pi i\frac{\sin 2}{5/2} = \frac{2\pi i}{5}\,\sin 2.$$

Следовательно, $I = \dfrac{2i}{3} + \dfrac{2\pi i}{5}\,\sin 2 = 2i\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi\sin 2}{5}\right)$. □

9.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 9.12. *Вычислить интегралы:*

1) $\displaystyle\int_0^1 (1+it)^2\,dt$; 2) $\displaystyle\int_0^1 (a+(b-a)t)^2 dt$; 3) $\displaystyle\int_0^\pi e^{it}dt$;

4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,n\,t}dt$; 5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+it}$; 6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+it}{1-it}dt$;

7) $\displaystyle\int_{[-i,i]} |z|dz$; 8) $\displaystyle\int_{[-1,1]} z\sin z dz$; 9) $\displaystyle\int_{[1,1+i]} (z+\mathcal{R}e\, z)dz$.

Пример 9.13. *Вычислить интегралы (всюду в примерах* $\ln 1 = 0$*):*

1) $\displaystyle\int_L \frac{dz}{z-a}$, $L=\{z : |z-a|=r\}$; 2) $\displaystyle\int_{|z|=2} Im\ z^2\,dz$;

3) $\displaystyle\int_L \bar{z}\,dz$, $L=[0,1+i]$; 4) $\displaystyle\int_{-i}^{i} z^2 e^{z^3}\,dz$;

5) $\displaystyle\int_0^1 (z-i)e^{-z}\,dz$; 6) $\displaystyle\int_i^{ei} \frac{\ln z}{z}\,dz$;

7) $\displaystyle\int_{|z|=1} |z|^2\,dz$; 8) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} Re\ z\,dz$;

9) $\displaystyle\int_{|z|=R} |z|\,dz$; 10) $\displaystyle\int_{|z|=1\ (y\le 0)} \frac{dz}{\sqrt{z}}$;

11) $\int\limits_{L} \ln z\, dz$, $L = \{z : |z-2| = 1\}$;

12) $\int\limits_{|z|=1} z^{\alpha}\, dz$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

13) $\int\limits_{|z-2|=1} z^{\alpha}\, dz$, $\alpha > 0$;

14) $\int\limits_{|z-3|=2} z^{2} \ln z\, dz$, $n \in \mathbb{N}$, ;

15) $\int\limits_{|z=1|} \dfrac{dz}{z^2}$;

16) $\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^3\, dz$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 9.14. *Используя интегральную теорему и интегральную формулу Коши, вычислить интегралы по замкнутому контуру:*

1) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^2+2z}\, dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin z}{z^3}\, dz$;

3) $\int\limits_{|z-2i|=1} \dfrac{dz}{z^2+4}$;

4) $\int\limits_{|z-a|=a} \dfrac{z\, dz}{z^4-1}$;

5) $\int\limits_{|z-i|=i} \dfrac{\sin(iz\pi/2)}{z^2+1}\, dz$;

6) $\int\limits_{|z-2|=3} \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz$;

7) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z}{z^2+1}\, dz$;

8) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2+4}$;

9) $\int\limits_{\substack{|z|=1,\\ \mathcal{R}e\, z \geq 0}} z e^{z^2}\, dz$;

10) $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=2} \dfrac{z e^z}{(z-1)^3}\, dz$;

11) $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=1/2,\\ \mathcal{I}m\, z \geq 0}} \dfrac{dz}{(z^2+1)^2}$;

12) $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=3,\\ \mathcal{I}m\, z \geq 0}} \dfrac{dz}{z^2+4}$;

13) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z}{z-\ln 2}\, dz$;

14) $\int\limits_{|z-i|=1} \dfrac{dz}{z^2+iz+2}$.

15) $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z-i)^3}\, dz$;

16) $\int\limits_{C} \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^2+\pi^2}\, dz$, $C : x^2+y^2 = 4(x+y)$.

Пример 9.15. *Используя интегральную теорему и формулу Коши, вычислить следующие интегралы:*

1) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{zdz}{z^4-16}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$; 3) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos zdz}{(z-i)^3}$; 4) $\displaystyle\int\limits_{|z|=9} \frac{\sin zdz}{z^2-\pi^2}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{e^z dz}{(z-2)^2}$, *a)* $G = \{z : |z| < 1\}$, *b)* $G = \{z : |z| < 4\}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(1+z)(1-z)^2}$, *a)* $G = \{z : |z-1| < 1\}$, *b)* $G = \{z : |z+1| < 1\}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)(z+3)^3}$, *a)* $G = \{z : |z| < 1\}$, *b)* $G = \{z : |z-1| < 7\}$.

Пример 9.16. *Вычислите интегралы:* $I_1 = \displaystyle\int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}e\, zdz$, $I_2 = \displaystyle\int\limits_{\Gamma} \mathcal{I}m\, zdz$, *где*

а) $\Gamma : |z| = R,\ R \in (0, +\infty)$; *б)* $\Gamma :$ *отрезок* $[0, 3+2i]$.

9.2 Теоретические задачи для самостоятельной работы

Задача 9.1. *Пусть функция* f *аналитична в односвязной области* $G \subset \mathbb{C}$, $a \in G$, $b \in G$. *Доказать следующие неравенства:*

1) $\displaystyle\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \le \int\limits_a^b |f(t)|dt$; 2) $\displaystyle\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \ge \Big|\int\limits_a^b \mathcal{R}e\, f(t)dt\Big|$;

3) $\displaystyle\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \ge \Big|\int\limits_a^b \mathcal{R}e\,(e^{i\alpha} f(t))dt\Big|$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Задача 9.2. *Пользуясь определением интеграла, показать, что для любой спрямляемой кривой* Γ *с началом в точке* A *и концом в точке* B

$$\int\limits_{\Gamma} zdz = \frac{B^2 - A^2}{2}.$$

Задача 9.3. *Для* $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $R \in (0, +\infty)$ *вычислить интеграл*

$$I_m = \int\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^m},$$

в котором окружность проходится против часовой стрелки.

Задача 9.4. *Показать, что если функция* f *определена и непрерывна в некоторой окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$, *то*

$$\lim_{r \to +0} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Задача 9.5. *Пусть функция f аналитична в ограниченной выпуклой области G и $\mathcal{R}e\, f(z) \geq M > 0$, $\forall z \in G$. Доказать, что для любых точек $z_1, z_2 \in G$*

$$\Big| \int\limits_{[z_1,z_2]} f(z)dz \Big| \geq M \cdot |z_2 - z_1|.$$

Задача 9.6. *Пусть f аналитична в открытом круге $\{z : |z-a| < R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$, $(a \in \mathbb{C},\ R \in (0, +\infty))$.*

Доказать, что $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + R \cdot e^{i\varphi})d\varphi = f(a)$.

Задача 9.7. *Пусть функция f аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$, $(a \in \mathbb{C},\ R \in (0, +\infty))$ и $M = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$. Доказать, что для всех $z : |z| < R$,*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq \frac{M \cdot R}{(R - |z|)^{n+1}},\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

10 Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора

Определение 10.1. *Пусть функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0. Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{10.1}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке z_o.

Теорема 10.1 (Коши)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, f аналитична в G, $z_0 \in G$, $\rho = \rho(z_0, \mathbb{C}\backslash G)$. Тогда функция f разлагается в круге $|z - z_0| < \rho$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, то есть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \rho.$$

Определение 10.2. *Степенной ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удалённой точки, если ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является рядом Тейлора для функции $f(z^{-1})$ в окрестности точки $z_0 = 0$.*

Для того чтобы разложить аналитическую в точке z_0 функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, необходимо найти коэффициенты этого ряда и круг сходимости. Алгоритм решения этой задачи состоит из следующих шагов:

1) найти производные n-ого порядка от заданной функции;

2) вычислить значения производных в точке z_0 и записать коэффициенты ряда по формуле Коши

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{10.2}$$

3) составить степенной ряд по степеням $z - z_0$ по вычисленным коэффициентам

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

4) найти радиус и круг сходимости полученного ряда.

Заметим, что радиус сходимости R ряда Тейлора можно получить, либо используя формулу Коши – Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_n} \sqrt[n]{|c_n|}}$, либо вычисляя $R = \lim\limits_n \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, если конечнный или бесконечный предел этого отношения существует, либо опираясь на то свойство, что радиус сходимости ряда Тейлора, полученного при разложении аналитической функции в окрестности точки z_0, равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки этой функции, то есть до точки, в которой функция не является аналитической.

Пример 10.1. *Найти разложения в ряд Тейлора по степеням z элементарных функций:*

$$\text{a) } e^z; \qquad \text{b) } \sin z; \qquad \text{c) } \cos z; \qquad \text{d) } \operatorname{sh} z; \quad \text{e) } \operatorname{ch} z.$$

■ 1. Вычислим производные n-ого порядка указанных функций:

a) $f(z) = e^z,\ f^{(n)}(z) = e^z$;

b) $f(z) = \sin z,\ f^{(n)}(z) = \sin\left(z + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $f(z) = \cos z,\ f^{(n)}(z) = \cos\left(z + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

d) $f(z) = \operatorname{sh} z,\ f^{(n)}(z) = \operatorname{sh} z$ при $n = 2k$, $f^{(n)}(z) = \operatorname{ch} z$ при $n = 2k - 1$;

e) $f(z) = \operatorname{ch} z,\ f^{(n)}(z) = \operatorname{ch} z$ при $n = 2k$, $f^{(n)}(z) = \operatorname{sh} z$ при $n = 2k - 1$.

2. Пользуясь в точке $z_0 = 0$ формулой (10.2) и применяя указанный выше алгоритм, находим:

a) $f(z) = e^z$, $c_n = \dfrac{1}{n!}$, $R = +\infty \ \Rightarrow \quad e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}$.

b) $f(z)=\sin z$, $c_{2k}=0$, $c_{2k+1}=\dfrac{\cos k\pi}{(2k+1)!}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, $R=+\infty\ \Rightarrow$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\ \ z\in\mathbb{C}.$$

c) $f(z)=\cos z$, $c_{2k+1}=0$, $c_{2k}=\dfrac{\cos k\pi}{(2k)!}=\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$, $R=+\infty\ \Rightarrow$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\ \ z\in\mathbb{C}.$$

d) $f(z)=\operatorname{sh} z$, $c_{2k}=0$, $c_{2k+1}=\dfrac{1}{(2k+1)!}$, $R=+\infty\ \Rightarrow$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ z\in\mathbb{C}.$$

e) $f(z)=\operatorname{ch} z$, $c_{2k+1}=0$, $c_{2k}=\dfrac{1}{(2k)!}$, $R=+\infty\ \Rightarrow$

$$\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ z\in\mathbb{C}.$$

Все полученные ряды сходятся во всей комплексной плоскости к указанным функциям. Напомним, что такие функции называются целыми. □

Отметим, что задачу разложения некоторой функции в ряд Тейлора можно решить, не пользуясь указанным выше алгоритмом, а используя формулы разложения в ряд Тейлора элементарных функций, полученные в примере 10.1 или формулу суммы членов убывающей геометрической прогрессии.

Пример 10.2. *Найти разложения следующих функций по степеням z:*

$$a)\ \frac{1}{1-z},\qquad b)\ \frac{z^2}{z-1}.$$

■ Используем здесь известную формулу суммы членов убывающей геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=\dfrac{1}{1-z}$, $\quad |z|<1$ и найдем, что

a) $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|<1;$

b) $\dfrac{z^2}{z-1}=-z^2\dfrac{1}{1-z}=-z^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n+2},\quad |z|<1;$

Заметим, что здесь $c_0=0$, $c_1=0$, $c_n=-1$ для $n\geq 2$. □

Пример 10.3. *Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующие функции и указать радиусы сходимости полученных рядов:*

$$a)\ z\,\mathrm{ch}\,2z^2;\quad b)\ \frac{1}{(1+z^4)^2};\quad c)\ \frac{3z}{(z^2+iz+2)};\quad d)\ e^z\,\mathrm{sh}\,z.$$

■ a) Воспользуемся разложением функции $\mathrm{ch}\,z$, справедливым во всей плоскости, и получаем для любого $z \in \mathbb{C}$ в примере 10.1

$$z\,\mathrm{ch}\,2z^2 = z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2z^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{(2n)!}\,z^{4n+1}.$$

b) Разложим сначала функцию $1/(1+w)$ по степеням w в единичном круге $|w| < 1$:

$$\frac{1}{(1+w)} = \frac{1}{(1-(-w))} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w^n.$$

Используя свойство степенного ряда,Продифференцируем это разложение и получим

$$-1/(1+w)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n w^{n-1}\quad (|w| < 1).$$

Отсюда $\dfrac{1}{(1+w)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)w^n\quad (|w| < 1)$. Полагая здесь $w = z^4$, заключаем, что

$$\frac{1}{(1+z^4)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^{4n}\quad (|z| < 1).$$

Нетрудно, применяя формулу Коши – Адамара, проверить, что радиус сходимости последнего ряда равен 1.

c) Разложим дробь $f(z) = \dfrac{3z}{(z^2+iz+2)}$ на простейшие дроби. Для этого найдем нули знаменателя:

$$z^2+iz+2 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = (-i \pm \sqrt{-1-8})/2 = (-i \pm 3i)/2 \Leftrightarrow z_1 = -2i; z_2 = i.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{3z}{(z+2i)(z-i)} = \frac{A}{(z+2i)} + \frac{B}{(z-i)} \Leftrightarrow 3z = A(z-i) + B(z+2i).$$

Полагая в этом тождестве $z = -2i$ и $z = i$ находим $A = 2$ и $B = 1$. Итак, $f(z) = \dfrac{2}{z+2i} + \dfrac{1}{z-i}$. Далее,

$$\frac{2}{(z+2i)} = \frac{2}{(2i(1+z/2i))} = \frac{1}{i(1-iz/2)} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{n-1}z^n}{2^n}\ (|z| < 2);$$

$$\frac{1}{(z-i)} = \frac{1}{(-i(1-z/i))} = -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n} =$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n i^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} i^{n-1} z^n \quad (|z|<1).$$

При $|z|<1$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{n-1}z^n}{2^n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}i^{n-1}z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{1}{2^n}+(-1)^{n+1}\Big]i^{n-1}z^n.$

Радиус сходимости полученного ряда, как легко вычислить, равен 1.

d) На первый взгляд, следует умножить друг на друга разложения в ряд Тейлора функций e^z и $\operatorname{sh} z$. Такой подход теоретически законен (сходящиеся степенные ряды можно перемножать почленно), но приводит к громоздким выкладкам, из которых трудно определить выражение общего члена ряда для функции $e^z \operatorname{sh} z$.

Поэтому вспомним, что $\operatorname{sh} z = \dfrac{(e^z - e^{-z})}{2}$. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z \operatorname{sh} z = \frac{(e^{2z}-1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2z)^n}{n!} - 1\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}z^n}{n!}. \qquad \square$$

В рассмотренных нами примерах $z_0 = 0$. Общий случай сводится к этому частному заменой $w = z - z_0$.

Пример 10.4. *Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 4$ функцию $1/z$ и указать, где справедливо разложение.*

■ Полагая $w = z - 4$, получим

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w+4} = \frac{1}{4(1+w/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{w^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-4)^n.$$

Радиус сходимости полученного ряда равен 4 (проверьте!) и функция $1/z$ аналитична в круге $|z-4|<4$. $\square$

Пример 10.5. *Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{z-3}{z+2i}$ в окрестности точки $z_0 = -1$.*

■ В плоскости $\mathbb{C}$ данная функция имеет единственную особую точку $z = -2i$, поэтому радиус круга сходимости искомого ряда Тейлора равен расстоянию от точки $z_0 = -1$ до особой точки $z = -2i$: $r = |-1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Исходную функцию преобразуем следующим образом: $f(z) =$

$$= \frac{z+2i-2i-3}{z+2i} = 1 - \frac{3+2i}{z+2i} = 1 - \frac{3+2i}{z+1-1+2i} = 1 - \frac{3+2i}{2i-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+1}{2i-1}} =$$

$$= 1 - \frac{3+2i}{2i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{z+1}{2i-1}\Big)^n = 1 - (3+2i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i-1)^{n+1}} (z+1)^n.$$

Ряд сходится тогда и только тогда, когда $\left|\dfrac{z+1}{2i-1}\right| < 1$, то есть, как и ожидалось, в круге $|z+1| < \sqrt{5}$. □

Пример 10.6. *Найти разложения по степеням* $(z - z_0)$ *функций*

$$a)\ \ln z,\ z_0 = 1,\ \ln 1 = 0, \qquad b)\ \ln(1+z),\ z_0 = 0,\ \ln 1 = 0.$$

■ Разложения будем искать для однозначной ветви многозначной функции

$$\log z = |\log z| + i(\arg z + 2\pi k),\ -\pi < \arg z < \pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Выбор ветви определяется заданием функции в точке z_0.

a) Функция однозначно определена во всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной — вне луча $\{\mathcal{R}e\ z \le 0, \mathcal{I}m\ z = 0\}$. По условию $\ln 1 = 0$ и точка $z_0 = 1$ является внутренней точкой односвязной области определения, в которой $-\pi < \arg z < \pi$, а функция $\ln z$ является однозначной аналитической функцией в этой области.

Далее, находим производные

$$f'(z) = \frac{1}{z},\ f''(z) = -\frac{1}{z^2},\ f^{(3)}(z) = \frac{2}{z^3}, \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z^n};$$

затем по формуле (10.2) и в соответствии с указанным выше алгоритмом

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!,\ c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n \in \mathbb{N}, R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n}} = 1 \Rightarrow$$

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n, \quad \forall\, z : |z-1| < 1\,,\ \ln 1 = 0.$$

b) Рассмотрим функцию $\ln(1+z)$ во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу $\{\mathcal{R}e\ z \le -1, \mathcal{I}m\ z = 0\}$. В этой односвязной области функция является однозначной и аналитической. Задачу можно решать методом, примененным выше, а можно использовать полученный выше результат, введя обозначения $1+z = t$. Для t, удовлетворяющих неравенству $|t-1| < 1$, имеем представление $\ln t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(t-1)^n$. Заменяя t на $(1+z)$, получаем, что

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$ □

Пример 10.7. *Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки* $z_0 = 0$ *функции*

$$a)\ f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}, \qquad b)\ f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z.$$

■ a) Представление исходной рациональной функции в виде суммы простых дробей задача трудоемкая. Иногда удается этого избежать, используя искусственные приемы, например, умножение на некоторое выражение. В данном случае выполним следующее преобразование:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} = \frac{1-z}{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)} = \frac{1-z}{1-z^8}.$$

Остается применить формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{8n} = \sum_{n=0}^{\infty}\bigl(z^{8n} - z^{8n+1}\bigr),\ |z|<1.$$

b) Заданная функция целая, поэтому разлагается в степенной ряд с радиусом сходимости $R=+\infty$. Чтобы найти ряд, выполним простые преобразования:

$$f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z = \Bigl(\frac{1-\cos 2z}{2}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{1+\cos 2z}{2}\Bigr)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 2z}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1+\cos 4z}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4z}{4}.$$

Используя разложение в $\mathbb{C}$ функции $\cos z$, получаем, что для всех $z\in\mathbb{C}$

$$f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(4z)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n}. \quad \square$$

Задача 10.1. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ действительных чисел монотонно стремится к нулю. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится всюду на окружности $C_1 = \{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$, за исключением, возможно, точки $z=1$.*

■ Пусть $z\in C_1$, тогда z можно представить в виде $z=e^{i\varphi}=\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Тогда сходимость исследуемого ряда равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\varphi$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\varphi$. Поскольку $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а, как хорошо известно из курса математического анализа,

$$\Bigl|\sum_{n=0}^{N}\cos n\varphi\Bigr| \le \frac{1}{\sin(\varphi/2)},\quad \Bigl|\sum_{n=0}^{N}\sin n\varphi\Bigr| \le \frac{1}{\sin(\varphi/2)},\ \varphi\ne 0,\ N\in\mathbb{N},$$

то по признаку Дирихле оба вещественных ряда сходятся при $\varphi\ne 0$.

При $\varphi = 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. $\square$

В заключение перечислим приемы, которые использовались выше и которые оказались полезными при разложении функций в ряд Тейлора:

- использовать известные разложения в ряд элементарных функций;
- провести дифференцирование или интегрирование известных разложений в ряд элементарных функций;
- представить рациональные функции в виде суммы простейших дробей;
- для комбинаций показательных, тригонометрических и гиперболических функций либо использовать известные формулы для элементарных функций, либо преобразовать разлагаемую функцию к комбинации только показательных функций;
- провести преобразования, с целью упрощения функции, используя искусственные приемы.

10.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 10.8. *Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 следующие функции, указать, где справедливо разложение:*

1) $\dfrac{1}{2-z}$, $z_0 = 1+i$;

2) $\dfrac{e^z}{1-z}$, $z_0 = i$;

3) $\dfrac{z^3}{1-z}$, $z_0 = i-1$;

4) $\ln(2+2z)$, $z_0 = 1$;

5) $\cos z$, $z_0 = 3i$;

6) $\operatorname{sh} 3z$, $z_0 = -1-i$;

7) e^{2z}, $z_0 = \pi i$;

8) $\dfrac{1}{a-z}$, $z_0 = a/2$;

9) e^{z-1}, $z_0 = i$;

10) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 1/2$;

11) $\dfrac{2z-1}{z+2}$, $z_0 = 1$;

12) $\dfrac{z^2-z+3}{z+2}$, $z_0 = 0$;

13) $\dfrac{z+3}{z^2-2z-3}$, $z_0 = 1$;

14) $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z-2)}$, $z_0 = 3$;

15) $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$, $z_0 = -3$;

16) $\dfrac{z}{z^2-i}$, $z_0 = 1$.

10.2 Теоретические задачи для самостоятельной работы

Задача 10.2. *Доказать, что если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = T$, $0 < T \le +\infty$, *то радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *равен* T.

Задача 10.3. *Пусть* $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \ge R\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)$, $n \ge n_0$, $\alpha > 1$, $R > 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *сходится абсолютно и равномерно на множестве* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le R\}$.

Задача 10.4. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *и радиус сходимости ряда равен* 1. *Доказать, что если* $\lim\limits_{n\to 1-0} f(z) = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot |a_n| = 0$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

Задача 10.5. *Доказать, что если функция* $f(z)$ *аналитична в единичном круге* $K_0(1) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $f(0) = 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ *сходится в* $K_0(1)$ *и представляет в нем аналитическую функцию.*

Задача 10.6. *Пусть* f *аналитична в окрестности точки* $z = 0$ *и* $f(0) = 0$. *Доказать, что если* $f(z) = z + f(z^2)$, *то* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

Задача 10.7. *Пусть функция* f *целая и удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)| \le c \cdot |z|^{\alpha},$$

где $\alpha \ge 0$, c, α *— константы, не зависящие от* z. *Доказать, что* f *— многочлен степени* $n \le [\alpha]$.

Задача 10.8. *Доказать, что если функция аналитична в расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$, *то она константа.*

Задача 10.9. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$. *Доказать, что для* $0 < r < R$ *справедливы соотношения:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \le \max_{|z|=r} |f(z)|^2.$$

Задача 10.10. *Пусть функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *является аналитической в* *круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$. Доказать, что функция $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ является целой функцией.*

11 Теорема единственности и нули аналитической функции

Теорема 11.1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, функция f аналитична в G и пусть $f(z)$ обращается в нуль на некотором множестве $M(\subset G)$, имеющем хотя бы одну предельную точку в G. Тогда $f(z) = 0$, $\forall z \in G$.*

Следствие 11.1.1. *Если две аналитические в области G функции принимают равные значения на некотором подмножестве M в G, имеющем в G предельную точку, то они равны в G.*

Теорему единственности и ее следствие можно использовать для доказательства того, что формулы, известные на вещественной оси, сохраняются при переходе в комплексную плоскость.

Пример 11.1. *Доказать равенство* $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

■ Левая и правая части равенства — аналитические в $\mathbb{C}$ функции, совпадающие на вещественной оси — множестве M, каждая точка которого является предельной точкой M и лежит в $\mathbb{C}$. По следствию из теоремы единственности равенство имеет место всюду в $\mathbb{C}$. □

Пример 11.2. *Существует ли функция $f(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки $z_0 = 0$ и удовлетворяющая условию*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos n\pi + \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

■ Заметим, что точка $z_0 = 0$ является предельной для точек $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$f(z_{2k}) = \cos 2\pi k + \frac{2}{2k} = 1 + \frac{2}{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

но этим же условиям удовлетворяет и функция $f_1(z) = 1 + 2z$. Далее,

$$f(z_{2k+1}) = \cos(2k+1)\pi + \frac{2}{2k+1} = -1 + \frac{2}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

но этим же условиям удовлетворяет функция $f_2(z) = -1 + 2z$. Так как $f_1(z) \neq f_2(z)$, то по теореме единственности для аналитической функции поставленная задача решений не имеет. □

Пример 11.3. *Существует ли функция $f(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки $z_0 = 1$ и удовлетворяющая условию*

$$f\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = f\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big) = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

■ Точка $z_0 = 1$ является предельной и для точек $z_n' = \dfrac{n}{n+1}$, и для точек $z_n'' = \dfrac{n+2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Функция $\hat{f}(z) = (1-z)^2$ является целой и удовлетворяет равенствам

$$\hat{f}(z_n') = f\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{(n+1)^2}, \ \hat{f}(z_n'') = f\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{(n+1)^2}, \ n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, она является искомой функцией. □

Определение 11.1. *Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Точка z_0 называется нулём кратности $m \in \mathbb{N}$ функции f, если $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Если $m = 1$, то z_0 называется простым нулём функции f.*

Теорема 11.2. *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ и функция f аналитична в круге $K_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Точка z_0 является нулём кратности m функции f тогда и только тогда, когда имеет место представление $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$, $z \in K_{z_0}(R)$, где функция $g(z)$ аналитична в $K_{z_0}(R)$ и $g(z_0) \neq 0$.*

Доказательство теоремы следует из определения 11.1 и теоремы 10.1, поскольку при указанных условиях в круге $K_{z_0}(R)$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m} = (z-z_0)^m\, g(z),$$

где $g(z) = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}$ аналитична в $K_{z_0}(R)$ как сумма степенного ряда, сходящегося в $K_{z_0}(R)$, и $g(z_0) = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$.

Замечание. Если функция f аналитична в проколотой окрестности точки z_0, не определена в точке z_0, но $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$, то после доопределения функции в точке z_0 равенством $f(z_0) = 0$, точку z_0 тоже называют нулём функции. Например, для функции $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$, доопределённой в точке $z_0 = 0$ равенством $f(0) = 0$, точка $z_0 = 0$ является простым нулём.

Пример 11.4. *Найти все нули аналитической функции $f(z) = \dfrac{\sin^3 z}{z^2}$ и указать их кратность.*

■ В точке $z=0$, которая является нулём и числителя, и знаменателя, функция f не определена. Разлагая числитель функции в ряд Тейлора, получим, что

$$\frac{\sin^3 z}{z^2}=\frac{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^3}{z^2}=\frac{z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\ldots\right)^3}{z^2}=$$

$$=z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\ldots\right)^3=z\,g(z),$$

где функция $g(z)$ аналитична в окрестности точки $z=0$ и $g(0)=1$. Потому, определив функцию f в точке $z=0$ равенством $f(0)=0$, получаем, что $z=0$ — простой нуль функции f. Нули $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, функции $\sin z$, также являются нулями функции f. Поскольку знаменатель функции f в этих точках не равен нулю, их кратность определим следующим образом:

$$(\sin^3 z)'=3\sin^2 z\,\cos z=\frac{3}{2}\sin 2z\sin z=\frac{3}{4}\Big(\cos z-\cos 3z\Big)\Big|_{\pi k}=0,$$

$$(\sin^3 z)''=\frac{3}{4}\Big(\cos z-\cos 3z\Big)'=\frac{3}{4}\Big(-\sin z+3\sin 3z\Big)\Big|_{\pi k}=0,$$

$$(\sin^3 z)'''=\frac{3}{4}\Big(-\sin z+3\sin 3z\Big)'=\frac{3}{4}\Big(-\cos z+9\cos 3z\Big)\Big|_{\pi k}=6(-1)^k\neq 0.$$

Следовательно, по определению 11.1 все эти нули функции f являются нулями кратности 3. □

Пример 11.5. *Определить кратность нуля $z=0$ функции*

$$f(z)=z^2(6-z^4)-6\sin z^2.$$

■ Используя стандартный ряд $\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}$, разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z:

$$f(z)=6z^2-z^6-6\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}+\ldots\right)=$$

$$=-z^6+6z^2-6z^2+z^6-\frac{1}{20}z^{10}+\frac{1}{840}z^{14}-\cdots=z^{10}\left(-\frac{1}{20}+\frac{z^4}{840}-\ldots\right)=z^{10}f_1(z).$$

Здесь $f_1(0)\neq 0$, $f_1(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки $z=0$, поскольку является суммой степенного ряда с радиусом сходимости раиным $+\infty$. Так как $k=10$, точка $z=0$ для функции $f(z)$ является нулем кратности 10. □

Определение 11.2. *Пусть функция f аналитична в окрестности бесконечно удалённой точки. Точка $z=\infty$ называется нулём функции f кратности $m\in\mathbb{N}$, если точка $t=0$ является нулём кратности m функции $g(t)=f(1/t)$.*

Пример 11.6. *Найти все нули аналитической функции* $f(z) = \dfrac{1}{z^2}e^{1/(z+1)}$ *и указать их кратность.*

■ Поскольку функция $e^{1/(z+1)}$ в точках плоскости $\mathbb{C}$ не обращается в нуль, а в точке $z = \infty$ принимает значение 1, то функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2}e^{1/(z+1)}$ имеет в точке $z = \infty$ нуль второго порядка. □

11.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Задача 11.1. *Существует ли функция* $f(z)$*, аналитическая в некоторой окрестности точки* z_0 *и удовлетворяющая условиям:*
а) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $|z| < 1$; *б)* $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n + \cos n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, $|z| < 1$.

Задача 11.2. *Найти все нули указанных аналитических функций и указать их кратность:*

а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos 3z}{z^2}$; *б)* $f(z) = \dfrac{(1 + z^2)^2}{1 - z^2}$;

в) $f(z) = (e^{z^2} - 1 - z^2)\sin^3 z$; *г)* $f(z) = \cos z \operatorname{ch} z$;

д) $f(z) = \sin 3z - 3\sin z$; *е)* $f(z) = z \operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{z}$.

Задача 11.3. *Пусть* $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$*, где* f_1 *и* f_2 *— аналитические функции в точке* $z_0 \in \mathbb{N}$*, и точка* z_0 *является нулём кратности* k *для числителя и нулём кратности* m *для знаменателя. При условии* $k > m$*, определив функцию* f *в точке* z_0*, полагая* $f(z_0) = 0$*, доказать, что* z_0 *— нуль функции* f *кратности* $(k - m)$*.*

Задача 11.4. *Пусть область* G *содержит точку* $z = \infty$*, а функция* f *аналитична и периодична в* G*. Доказать, что* $f \equiv const$ *в* G*.*

12 Принцип максимума модуля аналитической функции

Теорема 12.1 (принцип максимума модуля аналитической функции). *Пусть* G *— область в* $\mathbb{C}$*, функция* f *аналитична в* G *и непрерывная в* $\overline{G}$*. Пусть* $\sup\limits_{z\in\overline{G}}|f(z)| = M$*. Если* $\exists\, a \in G : |f(a)| = M$*, то* $f(z) \equiv \mathrm{const}$ *в* G *(то есть для функции, аналитической в области* G*, непрерывной на* $\overline{G}$ *и отличной от тождественной константы в* G*, точная верхняя граница значений* $|f(z)|$ *достигается на границе области* G*).*

Следствие 12.1.1 (принцип минимума модуля аналитической функции). *Пусть* G *— область в* $\mathbb{C}$*, функция* f *аналитична в* G*, непрерывна на* $\overline{G}$*,* *и не обращается в нуль в $\overline{G}$. Если существует точка $a \in G$ такая, что $|f(a)| = \inf_{z\in\overline{G}} |f(z)|$, то $f(z) \equiv const$ в G (то есть для функции, аналитической в области G, непрерывной в $\overline{G}$, отличной от тождественной константы в G и не имеющей нулей в G, точная нижняя граница значений $|f(z)|$ достигается на границе области).*

Задача 12.1 (лемма Шварца)**.** *Пусть $K_0(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, функция f аналитична в $A(K_0(1))$, $a_0 = f(0) = 0$ и $|f(z)| < 1$, $\forall z \in K_0(1)$. Тогда $|f(z)| \le |z|$, $\forall\, z \in K_0(1)$. Если, кроме того, существует $z_0 \in K_0(1) : z_0 \ne 0,\ |f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall z \in K_0(1)$.*

■ $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим функцию $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z},\ z \in K_0(1), z \ne 0, \\ a_1 = f'(0),\ z = 0. \end{cases}$

Функция $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ является аналитической в $K_0(1)$ и

$$\sup_{|z|\le r} |g(z)| = \sup_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r},\ \forall\, r \in (0,1).$$

Тогда $\sup\limits_{|z|<1} |g(z)| = \lim\limits_{r\to 1-0} \sup\limits_{|z|\le r} |g(z)| \le \lim\limits_{r\to 1-0} \dfrac{1}{r} = 1$. Итак, $\sup\limits_{|z|<1} |g(z)| \le 1$. Следовательно, для всех $z \in K_0(1) \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le 1 \text{ или } |f(z)| \le |z|.$$

Так как $f(0) = 0$, то $|f(z)| \le |z|$, $\forall z \in K_0(1)$.

Пусть теперь $\exists z_0 \in K_0(1) \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$. Тогда $|g(z_0)| = 1$. Таким образом, функция $g(z)$ в $K_0(1)$ достигает во внутренней точке своего sup, что возможно только в том случае, если $g(z) \equiv \text{const}$ в $K_0(1)$. Но так как $|g(z_0)| = 1$, $|g(z)| = 1$ в $K_0(1)$ и потому $\exists \alpha \in \mathbb{R} : g(z) = e^{i\alpha}$, $\forall z \in K_0(1)$. А значит $f(z) = ze^{i\alpha}$, $\forall z \in K_0(1)$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Задача 12.2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \le R$ и $|f(z)| > m$ для всех $z : |z| = R$. Доказать, что при выполнении условия $|f(0)| < m$ функция $f(z)$ имеет в круге $|z| < R$ хотя бы один нуль.*

■ Доказательство проведём методом от противного. Пусть $f(z) \ne 0$ в круге $|z| < R$. Тогда функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ также является аналитической в круге $|z| < R$, непрерывной на $|z| \le R$ и по принципу максимума модуля аналитической функции величина $|\varphi(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|}$ достигает своего наибольшего значения на окружности $|z| = R$. Отсюда следует, что минимальное значение $|f(z)|$ достигается на границе круга и поэтому оно больше m. Но по условию $|f(0)| < m$. Получили противоречие. $\square$

Задача 12.3. *Пусть функция f аналитична в круге $|z| \le 1$, $|f(z)| \le M$ при $|z| = 1$ и $f(a) = 0$, где $|a| < 1$. Доказать, что $|f(z)| \le M \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$ в круге $|z| < 1$.*

■ Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z) = \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a} f(z)$. Известно, что функция $w(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ взаимно однозначно (биективно) и конформно отображает круг $|z| < 1$ на себя и $|w(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Функция $\varphi(z)$ также является аналитической в круге $|z| \le 1$, а при $|z| = 1$, $|\varphi(z)| = |f(z)| \le M$. Согласно принципу максимума модуля аналитической функции при $|z| < 1$ также $|\varphi(z)| \le M$, то есть $|f(z)| \le M \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$. $\square$

Задача 12.4. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$ и $|f(z)| = 1$ для всех $z : |z| = 1$. Доказать, что $f(z)$ — рациональная функция.*

■ Покажем, что функция $f(z)$ в круге $|z| < 1$ может иметь только конечное число нулей с учётом их кратностей. Действительно, если бы их было бесконечно много, то они имели бы, по крайней мере, одну предельную точку z_0: $|z_0| \le 1$. Тогда, если $|z_0| < 1$, то по теореме единственности для аналитических функций, $f(z)$ была бы тождественно равной нулю в круге $|z| < 1$, что противоречит условию о том, что $f(z)$ непрерывна в $|z| \le 1$ и $|f(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Если же $|z_0| = 1$, то, поскольку функция f непрерывна на $|z| \le 1$, получили бы, что $|f(z_0)| = 0$, что также противоречит условию $|f(z)| = 1$ на окружности $|z| = 1$. Таким образом, функция f имеет в круге $|z| < 1$ не более, чем конечное число нулей с учётом их кратностей: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причём каждый нуль вписан столько раз, какова его кратность.

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{1-\overline{a_1}z}{z-a_1} \cdot \frac{1-\overline{a_2}z}{z-a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-\overline{a_n}z}{z-a_n} f(z),$$

где a_k $(1 \le k \le n)$ — нули функции $f(z)$ в круге $|z| < 1$. Функция $f_1(z)$, доопределённая в точках a_k, $k = \overline{1,n}$, своими предельными значениями, является аналитической в круге $|z| < 1$, непрерывной в круге $|z| \le 1$ и не имеет нулей в этом круге, и $|f_1(z)| = 1$ на окружности $|z| = 1$. Поэтому её модуль достигает своего минимума и максимума (они равны между собой) на окружности $|z| = 1$. Следовательно, так как $1 = \min\limits_{|z|\le 1} |f_1(z)| \le |f_1(z)| \le$

$\max\limits_{|z|\le 1}|f_1(z)| = 1$, функция $f_1(z)$ постоянна при $|z| < 1$. Откуда и следует, что $f(z)$ — рациональная функция в круге $|z| < 1$. $\square$

12.1 Теоретические задачи для самостоятельного решения

Задача 12.5. *Пусть $f \in A(\mathbb{C})$ и $M_f(r) := \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, $r \in [0, +\infty)$. Доказать, что*

1) $M_f(r) = \max\limits_{|z|\le r}|f(z)|$;

2) если $f(z) \ne const$, то функция $M_f(r)$ возрастает на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{r\to+\infty} M_f(r) = +\infty;$$

3) $\forall r \in (0, +\infty)\ \exists z_r \in \mathbb{C} : |z_r| = r,\ |f(z_r)| = M_f(r)$;

4) на любом отрезке $[0, r]$, $r \in (0, +\infty)$, функция $M_f(r)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\exists A_r > 0 : M_f(r_2) - M_f(r_1) \le A_r(r_2 - r_1),$$

для всех $0 \le r_1 < r_2 \le r$. В частности $M_f(r)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Задача 12.6. *Пусть функция f является аналитической в круге $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$, $f(0) = 0$. Доказать, что если $f(1) = 1$ и существует $f'(1)$, то $f'(1) \ge 1$. .*

Задача 12.7. *Пусть функция f является аналитической в области G и $\inf\{|f(z)| : z \in G\} > m > 0$. Доказать, что тогда $|f(z)| > m$, $\forall z \in G$ или $f(z) = me^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

Задача 12.8. *Пусть функция f аналитична в круге $|z| < 1$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \le M < +\infty$, $\forall z : |z| < 1$. Тогда $|f'(0)| \le M$, причем знак равенства достигается, если $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

Задача 12.9. *Пусть функция f аналитична в круге $|z| < R$ и $f^{(k)}(0) \ge 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Доказать, что в этом круге справедливо неравенство $f(z) \le f(|z|)$.*

Задача 12.10. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является аналитической в круге $|z| < 1$ и непрерывной на окружности $|z| = 1$. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ сходится.*

13 Ряд Лорана

Из теории степенных рядов следует, что для ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(z - z_0)^n} \tag{13.1}$$

областью сходимости является внешность круга $|z - z_0| > r$, радиус которого вычисляется по формуле $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|}$.

Обобщением степенного ряда со слагаемыми только по целым неотрицательным или только по целым неположительным степеням $z - z_0$, является ряд по целым степеням

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m}. \tag{13.2}$$

Данный ряд сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$, где $r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$, $R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Часть ряда (13.2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется его *правильной частью*, а часть $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ — его *главной частью.*

Здесь и всюду далее, как договаривались, если не оговаривается что-то другое, обход замкнутого контура интегрирования совершается в положительном направлении (против часовой стрелки).

Теорема 13.1 (Лорана о разложении аналитической функции в кольце)**.** *Если функция f аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она разлагается в сходящийся ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ где } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ \forall \rho \in (r, R), n \in Z, \tag{13.3}$$

который называется рядом Лорана функции f в точке z_0.

Отметим, что разложение в ряд Лорана функции f, аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$, единственно.

При $r = 0$ получаем частный случай кольца — круг с выколотой точкой $0 < |z - z_0| < R$. В этом случае точка z_0 —особая точка функции f, а формула (13.3) называется разложением функции в ряд Лорана в окрестности особой точки.

При $R = +\infty$ кольцо $r < |z - z_0| < +\infty$ — это внешность круга. В частном случае $r = 0$ — это множество $|z| > 0$. Формула (13.3) в этом случае называется разложением функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, главной частью ряда (13.3) является часть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, а правильной частью — часть $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$.

Для коэффициентов a_n ряда Лорана справедливо неравенство Коши

$$|a_n| \le \frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|}{\rho^n}, \qquad \forall \rho \in (r, R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд Лорана аналитической в кольце $0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f сходится абсолютно и равномерно внутри этого кольца. На каждой окружности, являющейся границей кольца, лежит хотя бы одна особая точка функции f.

Технически, разложение функции в ряд Лорана сводится к разложению в ряды Тейлора. Так например, простые дроби преобразуются следующим образом:

- для получения правильной части рядя Лорана, то есть ряда, сходящегося в круге $|z - z_0| < R$, $z_0 \in \mathbb{C}$, разложение простой дроби $\dfrac{1}{a-z}$, $a \ne z_0$ записывают в виде

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{a-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}},$$
$$|z - z_0| < R = |a - z_0|;$$

- для получения главной части рядя Лорана, то есть ряда, сходящегося на множестве $|z - z_0| > r$, $z_0 \in \mathbb{C}$, разложение простой дроби $\dfrac{1}{a-z}$, $a \ne z_0$ записывают в виде

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$
$$|z - z_0| > r = |a - z_0|.$$

Основные задачи, которые нужно уметь решать относительно ряда Лорана, сводятся к следующим: (1) если задан ряд вида (13.2), найти множество его сходимости, (2) разложить функцию в ряд Лорана в кольце, в котором она аналитична.

Пример 13.1. *Найти область сходимости ряда*

$$\sum_{n=-\infty,\ n\ne 0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{\operatorname{sh} \alpha n},\ (\alpha > 0).$$

■ Так как коэффициенты ряда равны $a_n = \dfrac{1}{\operatorname{sh} \alpha n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, то его область сходимости совпадает с кольцом

$$r < |z - z_0| < R,\ \text{где } r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|},\ R^{-1} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Так как $\operatorname{sh}\alpha n = \dfrac{e^{\alpha n} - e^{-\alpha n}}{2}$, то получаем, что $r = e^{-\alpha}$, $R = e^{\alpha}$, и потому данный ряд сходится в кольце $e^{-\alpha} < |z - z_0| < e^{\alpha}$. $\square$

Пример 13.2. *Разложить функцию* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ *в ряд Лорана в кольце a)* $1 < |z| < 2$; *b)* $2 < |z| < +\infty$; *c)* $1 < |x - 3| < 2$.

■ Отметим вначале, что функция $f(z)$ аналитична в указанных кольцах. Поэтому к ней применима теорема 13.1. Далее, представим $f(z)$ в виде суммы простых дробей: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

a) Так как при $|z| < 2$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2(1 - z/2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

а при $|z| > 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1 - 1/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n},$$

то всюду в кольце $\{z : 1 < |z| < 2\}$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{z^n}.$$

b) Так как при $|z| > 2$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1 - 2/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n};$$

а при $|z| > 1$ для $1/(z-1)$ справедливо разложение, полученное в предыдущем случае, $1/(z-1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/z^n$, то при $|z| > 2$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}.$$

c) Представим $f(z)$ в более удобной форме

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-3)+1} - \frac{1}{(z-3)+2}.$$

Далее, поскольку, при $|z - 3| > 1$

$$\frac{1}{(z-3)+1} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1 + 1/(z-3)} = \frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}.$$

При $|z-3|<2$

$$\frac{1}{(z-3)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(z-3)/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-3}{2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n.$$

Тогда в кольце $1<|z-3|<2$ справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-3)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-3)^n.$$

□

Пример 13.3. *Разложить функцию* $\dfrac{1}{(z+i)}$ *в ряд Лорана в окрестности точек* $z_0=0$ *и* $z_0=+\infty$.

■ a) $z_0=0$. Функция $1/(z+i)$ аналитична в окрестности точки $z_0=0$ (именно, в единичном круге $|z|<1$). Поэтому в $|z|<1$ она разлагается в ряд Лорана, который совпадает в данном случае с ее рядом Тейлора:

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i(1+z/i)}=\frac{1}{i}\frac{1}{1-iz}=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}i^nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}i^{n-1}z^n.$$

b) $z_0=+\infty$. Функция $1/(z+i)$ аналитична в кольце $1<|z|<+\infty$. Поэтому в нем

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z(1+i/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{i^{n-1}}{z^n}.\qquad □$$

Пример 13.4. *Разложить в ряд Лорана функцию* $z^3 sh\dfrac{1}{z}$ *в окрестности точек* $z_0=0$ *и* $z_0=+\infty$.

■ Исследуемая функция аналитична в кольце $0<|z|<+\infty$. Ее разложение в ряд Лорана в этом кольце есть ряд

$$z^3 sh\frac{1}{z}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}=z^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{2n-2}},$$

который одновременно является разложением этой функции и в окрестности точки $z_0=0$, и в окрестности точки $z_0=+\infty$. □

Пример 13.5. *Разложить в ряд Лорана функцию* $f(z)=\dfrac{(1+i)z+4}{z^2+(3-i)z-3i}$

a) в кольце $1<|z|<3$;
b) в проколотой окрестности точки $z=i$;
c) в окрестнасти точки $z=\infty$.

■ Найдем особые точки функции $f(z)$. Для этого решим уравнение

$$z^2 + (3-i)z - 3i = 0$$

и найдем его корни $z_1 = i$, $z_2 = -3$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{(1+i)z+4}{z^2+(3-i)z-3i} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+3} = \frac{A(z+3)+B(z-i)}{z^2+(3-i)z-3i}.$$

Подставляя в равенство $(1+i)z+4 = A(z+3)+B(z-i)$ сначала точку $z_1 = i$, затем точку $z_2 = -3$, находим, что $A = 1$, $B = i$ и потому $f(z) = \dfrac{1}{z-i} + \dfrac{i}{z+3}$.

a) Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}},\ |z| > 1;$$

$$\frac{i}{z+3} = \frac{i}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = i\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}},\ |z| < 3.$$

Таким образом, в кольце $1 < |z| < 3$

$$f(z) = \frac{(1+i)z+4}{z^2+(3-i)z-3i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

b) Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = i$, то есть построим ряд Лорана для этой функции по степеням $(z-i)$. Первая дробь $\dfrac{1}{z-i}$ является рядом Лорана для самой себя в силу единственности ряда Лорана. Рассмотрим дробь

$$\frac{i}{z+3} = \frac{i}{z-i+i+3} = \frac{i}{3+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{3+i}} = i\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(3+i)^{n+1}},$$

причем этот ряд сходится тогда и только тогда, когда $\left|\dfrac{z-i}{i+3}\right| < 1$, то есть $|z-i| < \sqrt{10}$. Таким образом, в кольце $0 < |z-i| < \sqrt{10}$

$$f(z) = \frac{(1+i)z+4}{z^2+(3-i)z-3i} = \frac{1}{z-i} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3+i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

Отметим, что $\sqrt{10}$ — это расстояние от точки $z = i$ до особой точки функции $z = -3$.

c) Получим, наконец, разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, то есть в кольце $3 < |z| < +\infty$. Как показано в a)

$\dfrac{1}{z-i} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i^n}{z^{n+1}}$ для всех $|z| > 1$, а значит и для всех $|z| > 3$. Далее,

$$\frac{i}{z+3} = \frac{i}{z}\,\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = i\,\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^{n+1}},$$

ряд сходится тогда и только тогда, когда $|3/z| < 1$, то есть $|z| > 3$. Следовательно, в кольце $3 < |z| < +\infty$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i^n}{z^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{z^{n+1}}$. □

13.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 13.6. *Разложить функцию в ряд Лорана в указанной области:*

1)	$\dfrac{1}{(z^2-1)}$,	a) $1 < \lvert z-2\rvert < 3$;	b) $1 < \lvert z\rvert < +\infty$;
2)	$\dfrac{1}{(z+2i)^2}$,	a) $0 < \lvert z\rvert < 2$;	b) $2 < \lvert z\rvert < +\infty$;
3)	$\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$,	a) $1 < \lvert z\rvert < 2$;	b) $2 < \lvert z\rvert < +\infty$;
4)	$\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$,	a) $1 < \lvert z\rvert < 2$;	b) $2 < \lvert z\rvert < +\infty$;
5)	$\dfrac{(z+1)}{z(z-1)}$,	a) $0 < \lvert z-1\rvert < 1$;	b) $1 < \lvert z\rvert < +\infty$;
6)	$\dfrac{(z+3)}{(z^2+1)}$,	a) $0 < \lvert z\rvert < 1$;	b) $1 < \lvert z\rvert < +\infty$.
7)	$\dfrac{1}{(z^2+2z)}$,	a) $0 < \lvert z+2\rvert < 4$;	b) $2 < \lvert z\rvert < +\infty$;
8)	$\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$,	a) $0 < \lvert z+2\rvert < 4$;	b) $2 < \lvert z\rvert < +\infty$.

Пример 13.7. *Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности указанной точки:*

1)	$\dfrac{1}{(z-6)}$,	$z_0 = \infty$;	9)	$\dfrac{1}{(z-1)^2}$,	$z_0 = 0$;
2)	$\dfrac{z^2}{(z^2+4)}$,	$z_0 = \infty$;	10)	$\dfrac{1}{z(z+3)}$,	$z_0 = 1$;
3)	$\dfrac{(z^2-2z+5)}{(z-2)(z^2+1)}$,	$z_0 = 0$;	11)	$\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$,	$z_0 = 1$;
4)	$z^3e^{1/z}$,	$z_0 = \infty$;	12)	$z^2\sin(\pi(z+1)/z)$,	$z_0 = 0$;

5) $\dfrac{ze^z}{(z-1)}$, $z_0 = 1$;

6) $z\cos(\dfrac{1}{(2z+1)})$, $z_0 = -1/2$;

7) $e^{-1/(z-3)}$, $z_0 = 3$;

8) $\dfrac{(z^2-2z+5)}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2$;

13) $2\sin^2 z + \cos(1/z)$, $z_0 = 0$;

14) $ze^{1/(1-z)}$, $z_0 = 1$;

15) $\dfrac{\operatorname{sh}(z-1)+1}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$;

16) $\dfrac{1}{z(z+3)}$, $z_0 = 3$.

14 Особые точки функции

Определение 14.1. *Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется изолированной особой точкой однозначного характера (ИОТОХ) функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой функция f является аналитической.*

Разложение в ряд Лорана функции, аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < R \le +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, или в кольце $0 < \delta < |z| < +\infty$, то есть в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки, позволяет ввести следующие характеристики для изолированной особой точкой однозначного характера.

Определение 14.2. *Изолированная особая точка однозначного характера (ИОТОХ) $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ функции f называется:*

а) устранимой особой точкой (УОТ), если ряд Лорана функции f в проколотой окрестности точки z_0 не имеет главной части, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k,\ 0 < |z-z_0| < R,\ \text{если } z_0 \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{z^k},\ 0 < \delta < |z| < +\infty,\ \text{если } z_0 = \infty;$$

б) полюсом, если главная часть ряд Лорана функции f в проколотой окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, то есть

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k,\ 0 < |z-z_0| < R,\ \text{если } z_0 \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k,\ 0 < \delta < |z| < +\infty,\ \text{если } z_0 = \infty;$$

при этом, положительное число m ($m = \max\{k : a_{-k} \neq 0\}$, если $z_0 \in \mathbb{C}$; $m = \max\{k : a_k \neq 0\}$, если $z_0 = \infty$) называется порядком полюса; если $m = 1$ полюс называется простым;

c) существенной особой точкой (СОТ), если главная часть ряд Лорана функции f в проколотой окрестности точки z_0 содержит бесконечное число слагаемых, то есть

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k,\ 0 < |z - z_0| < R,\ \text{если } z_0 \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k,\ 0 < \delta < |z| < +\infty,\ \text{если } z_0 = \infty.$$

Теорема 14.1. *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — ИОТОХ функции f. Тогда:*

1) *a — устранимая особая точка f в том и только том случае, когда существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$;*

1′) *a — устранимая особая точка f в том и только том случае, когда f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a;*

2) *a — полюс f, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;*

2′) *a — полюс f, тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ является аналитической функцией в окрестности точки a и $\varphi(a) = 0$.*

3) *a — существенно особая точка f в том и только том случае, если функция f не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного) при $z \to a$.*

В случае конечной ИОТОХ можно дать и другие критерии полюса функции f.

Теорема 14.2. *Для того, чтобы конечная ИОТОХ $a \in \mathbb{C}$ функции f была полюсом функции f порядка m, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой ее проколотой окрестности $\{z : 0 < |z - a| < \rho\}$ имело место представление $f(z) = g(z)/(z-a)^m$, в котором функция $g(z)$ аналитична в круге $|z - a| < \rho$ и $g(a) \neq 0$.*

Следствие 14.2.1. *Если функция $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности $\{z : 0 < |z - a| < \rho\}$ точки $a \in \mathbb{C}$ допускает представление $f(z) = g(z)/h(z)$, в котором $g(z)$ и $h(z)$ аналитичны в круге $|z - a| < \rho$, $g(a) \neq 0$ и точка a — нуль $h(z)$ кратности m, то a — полюс f порядка m.*

В случае бесконечной ИОТОХ задача сводится к конечной особой точке.

Теорема 14.3. *Пусть $a = \infty$ — ИОТОХ функции f. Точка $a = \infty$ является устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции f, тогда и только тогда, когда точка $\zeta = 0$ является, соответственно, устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$.*

Комбинируя теоремы 14.2 и 14.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 14.4. *Для того, чтобы ИОТОХ $a = \infty$ функции f была полюсом функции f порядка m, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой ее проколотой окрестности $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$ имело место представление $f(z) = z^m \cdot g(z)$, в котором функция $g(z)$ аналитична в указанной проколотой окрестности и $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) \neq 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) \neq \infty$.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки описывают две следующие теоремы.

Теорема 14.5 (Сохотского)**.** *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к a такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Теорема 14.6 (Пикара)**.** *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f, то для любого $A \in \mathbb{C}$, за исключением, возможно, одного значения A_0, существует последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $z_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n} z_n = a$, $f(z_n) = A$.*

Значение A_0 называется исключительным пикаровским значением функции f.

При исследовании характера особой точки конкретной функции, могут помочь следующие утверждения.

Теорема 14.7. *1. Пусть точка a — полюс порядка m функции f_1 и полюс порядка n функции f_2. Тогда точка a является*
(а) для функции $f_1 + f_2$ полюсом порядка $\max\{m, n\}$, если $m \neq n$, если же $m = n$, то полюсом порядка $k \leq \max\{m, n\}$ или устранимой особой точкой;
(б) для функции $f_1 \cdot f_2$ полюсом порядка $m + n$;
(в) для функции f_1/f_2 полюсом порядка $m - n$, если $m > n$, иначе устранимой особой точкой.

2. Пусть точка a — существенно особая точка функции f_1 и полюс или устранимая особая точка функции f_2. Тогда точка a является существенно особой точкой функций $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$, f_1/f_2.

3. Пусть точка a — полюс порядка m функции f_1 и устранимая особая точка функции f_2. Тогда точка a является

(а) для функции $f_1 + f_2$ полюсом порядка m;
(б) для функции $f_1 \cdot f_2$ полюсом порядка m, если $\lim\limits_{z\to a} f_2(z) \neq 0$, если же $\lim\limits_{z\to a} f_2(z) = 0$ и p — кратность нуля f_2, то полюсом порядка $m - p$ при $m > p$, устранимой особой точкой при $m = p$, нулем кратности $p - m$ при $m < p$;
(в) для функции f_1/f_2 полюсом порядка m, если $\lim\limits_{z\to a} f_2(z) \neq 0$, если же $\lim\limits_{z\to a} f_2(z) = 0$ и p — кратность нуля f_2, то полюсом порядка $m + p$.

4. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в $\overset{\circ}{U}_a(r_1)$ — проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и отображает ее на $\overset{\circ}{V}_\infty(r_2)$ — проколотую окрестность бесконечно удаленной точки. Пусть функция f аналитична в $\overset{\circ}{V}_\infty(r_2)$. Если точка a — полюс порядка m функции $\varphi(z)$, а бесконечно удаленная точка — существенно особая точка функции f, то точка a — существенно особая точка функции $(f \circ \varphi)(z)$.

Основные задачи, которые нужно уметь решать относительно ИОТОХ сводятся к следующим: (1) найти все изолированные особые точки однозначного характера заданной функции, (2) разложить функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности каждой ее особой точки и найти область сходимости полученного ряда, (3) установить характер всех ИОТОХ заданной функции.

Пример 14.1. *Определить тип особой точки $z_0 = 1$ для функции*

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4}.$$

■ Так, как

$$\lim_{z\to 1} \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3},$$

то $z_0 = 1$ — УОТ для функции f по определению. □

Пример 14.2. *Определить тип точки $z = \infty$ для функции $f(z) = z^2 e^{-2z}$.*

■ Воспользуемся разложением функции e^t в степенной ряд, тогда

$$z^2 e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n z^{n+2}}{n!},$$

то $z = \infty$ — СОТ функции $f(z) = z^2 e^{-2}$. □

Пример 14.3. *Найти все ИОТОХ функции $f(z) = \dfrac{z(z-1)^2}{(z^2+z-2)^2}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и установить их тип.*

■ Данная функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$, кроме точек $z=1$, $z=-2$, где знаменатель $(z^2+z-2)^2=(z-1)^2(z+2)^2$ обращается в нуль. Кроме того, $f(z)$ не определена в бесконечно удаленной точке $z=\infty$. Все три точки $z=1$, $z=-2$, $z=\infty$ из $\overline{\mathbb{C}}$ обладают, очевидно, проколотыми окрестностями, в которых $f(z)$ аналитична, и потому являются ИОТОХ.

После преобразования (при $z\neq 1$) имеем $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^2}$. Из этого представления следует, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$; $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=1/9$; $\lim\limits_{z\to -2} f(z)=\infty$. Следовательно, $z=1$ и $z=\infty$ — устранимые особые точки $f(z)$, а $z=-2$ — полюс. Далее, по теореме 14.2 при $a=-2$, $g(z)=z$, $m=2$, получаем, что $z=-2$ — полюс порядка 2. □

Пример 14.4. *Определить порядок полюса $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ функции*

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}2z}{(1+\cos 2z)^2}.$$

■ Для функции $f(z)=\dfrac{(1+\cos 2z)^2}{\operatorname{sh}2z}$ точка $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ является нулем. Определим кратность нуля для этой функции. Так как $\operatorname{sh}2\dfrac{\pi}{2}=\operatorname{sh}\pi\neq 0$, достаточно определить кратность нуля для функции $h(z)=(1+\cos 2z)^2$. Продифференцируем $h(z)$ и найдем, что

$$\begin{aligned}
h'(z)&=2\cdot(1+\cos 2z)\cdot(-\sin 2z)\cdot 2=-4\sin 2z-2\sin 4z,\ \ h'(\pi/2)=0,\\
h''(z)&=-8\cos 2z-8\cos 4z,\ \ h''(\pi/2)=0,\\
h'''(z)&=16\sin 2z+32\sin 4z,\ \ h'(\pi/2)=0,\\
h^{(4)}(z)&=32\cos 2z+128\cos 4z,\ \ h''(\pi/2)\neq 0.
\end{aligned}$$

Значит, точка $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ является для $h(z)$ нулем кратности 4, тогда для функции $f(z)$ эта точка является полюсом 4-го порядка. □

Пример 14.5. *Найти все ИОТОХ функции $f(z)=\dfrac{ze^z}{1-\cos z}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и установить их тип.*

■ Функция $f(z)$ аналитична всюду в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точки $z=\infty$ и точек, в которых знаменатель $1-\cos z=0$. Решая уравнение $1=cos z$ находим корни $z_k=2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Числитель ze^z не обращается в нуль в точках z_k при $k\neq 0$. Из следствия теоремы 14.2, где $g(z)=ze^z, h(z)=1-\cos z$, заключаем, что точки $z_k=2\pi k$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ являются полюсами $f(z)$, порядки которых равны кратности нуля z_k знаменателя $h(z)=1-\cos z$. Здесь

$$h(z_k)=0,\ h'(z_k)=\sin z_k=0,\ h''(z_k)=\cos z_k=1\neq 0,\ k=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Поэтому кратность нуля z_k для $h(z)$ при любом $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ равна 2. Соответственно, эти точки являются полюсами $f(z)$ порядка 2.

В точке $z_0 = 0$ числитель обращается в нуль, поэтому следствие теоремы 14.2 сразу не применимо. Воспользуемся разложением $\cos z$ в степенной ряд $cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - \dots, |z| < +\infty$. После очевидных преобразований получим $f(z) = e^z/(z(-1/2! + z^2/4! - \dots))$ всюду в области $0 < |z| < 1$, в которую не попадает ни одна точка z_k. Функция $g(z) = e^z/(-1/2!+z^2/4!-\dots)$ является аналитической в окрестности $z_0 = 0$, так как знаменатель здесь не обращается в нуль. Кроме того, $g(0) = -2 \neq 0$. Поэтому по теореме 14.2 $z_0 = 0$ — простой полюс функции $f(z)$.

Наконец, $z = +\infty$ не является ИОТОХ функции $f(z)$ потому что в любой проколотой окрестности $\rho < |z| < +\infty$ функция $f(z)$ не аналитична из-за наличия в ней точек z_k, в которых функция $f(z)$ не определена. $\square$

Пример 14.6. *Найти все ИОТОХ функции $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и установить их тип.*

■ Функция $f(z)$, как легко проверить, дифференцируема во всех точках из $\mathbb{C}$, за исключением точек $z = 1$, $z = +\infty$, где она не определена. Очевидно, что эти точки являются ИОТОХ. Так как $\exists \lim\limits_{z\to+\infty} e^{\frac{1}{1-z}} = 1$, то по теореме 14.1 $z = +\infty$ — устранимая особая точка f.

Покажем, что $z = 1$ является существенно особой точкой заданной функции. Сделаем это двумя способами. Если $z = x \in R$, то $\lim\limits_{x\to1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = 0$. Следовательно, при $z \to 1$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $e^{\frac{1}{1-z}}$.

Решим задачу по-другому, разлагая функцию f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = 1$:

$$e^{1/(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(z-1)^{-n}.$$

Его главная часть содержит бесконечное много ненулевых слагаемых, и по определению $z = 1$ — существенно особая точка. $\square$

Пример 14.7. *Определить порядок полюса в бесконечно удаленной точке для функций*

$$а)\ f_1(z) = \frac{z^3}{z-1}; \qquad б)\ f_2(z) = z^2 + 1 + \frac{1}{z^2-1}.$$

■ Отметим, что функции f_1 и f_2 аналитичны в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки, и $\lim z \to \infty f_1(z) = \infty$, $\lim z \to \infty f_2(z) = \infty$, так что по теореме 14.1 2) бесконечно удаленная точка является для этих функций полюсом.

Первый способ. Разложим функции f_1 и f_2 в ряд по степеням z:

$$f_1(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = z^2 + z + 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^{n-2}},\ |z| > 1;$$

$$f_2(z) = z^2 + 1 + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = z^2 + z + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+2}},\ |z| > 1.$$

Из полученных разложений и определения 14.2 следует, что ∞ для каждой из заданных функций является полюсом второго порядка.

Второй способ. Пусть $z = \dfrac{1}{\zeta}$. Определим порядок полюса в точке $\zeta = 0$ у функций $f_1(1/\zeta)$ и $f_2(1/\zeta)$:

$$f_1(1/\zeta) = \frac{1}{\zeta^2(1-\zeta)},\ f_2(1/\zeta) = z^2 + 1 + \frac{1}{z^2-1} = \frac{z^4}{z^2-1} = \frac{1}{\zeta^2(1-\zeta^2)}.$$

Для каждой функции получили представление вида $f(1/\zeta) = \frac{g(\zeta)}{\zeta^2}$, в котором функция $g(\zeta)$ аналитична в окрестности точки $\zeta = 0$ и $g(0) \neq 0$. По теореме 14.2 точка $\zeta = 0$ полюс второго порядка для функций $f_1(1/\zeta)$ и $f_2(1/\zeta)$. Из теоремы 14.3 тогда следует, что бесконечно удаленная точка является полюсом второго порядка для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Третий способ. Представим рассматриваемые функции в виде

$$f_1(z) = \frac{z^2}{1-\frac{1}{z}} = z^2 \cdot g_1(z),\ g_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}};$$

$$f_2(z) = \frac{z^4}{z^2-1} = z^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = z^2 \cdot g_2(z),\ g_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}.$$

Так как функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 14.4, то бесконечно удаленная точка является полюсом второго порядка для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Четвертый способ. Сравним порядки полюсов в точке ∞ числителя и знаменателя каждой из дробей $f_1(z) = \dfrac{z^3}{z-1}$ и $f_2(z) = \dfrac{z^4}{z^2-1}$. Для первой дроби ∞ — полюс третьего порядка для числителя и первого порядка для знаменателя; для второй дроби ∞ — полюс четвертого порядка для числителя и второго порядка для знаменателя. Следовательно, по теоремы 14.7 $z = \infty$ — полюс второго порядка для каждой из функций. □

Пример 14.8. *Найти все ИОТОХ функции* $f(z) = \dfrac{1}{e^z + i}$ *и определить их тип.*

■ Очевидно, что особыми точками функции $f(z)$ являются нули знаменателя — корни уравнения $e^z+i=0$, то есть точки $z_k = \ln|-i|+i(\arg(-i)+2\pi k) = i\Big(2\pi k - \dfrac{\pi}{2}\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Все эти точки являются простыми нулями, так как $(e^z+i)' = e^z$ и $e^{z_k} = -i \neq 0$. Следовательно, точки z_k являются простыми полюсами функции f (см. следствие теоремы 14.2).

Заметим, что точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой функции $f(z)$ (то есть является неизолированной особой точкой), поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$ и в любой проколотой окрестности точки $z = \infty$ функции $f(z)$ не является аналитической. □

Пример 14.9. *Найти все ИОТОХ функции* $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}\cdot\sin\dfrac{\pi z}{2z+1}$ *и определить их тип.*

■ Точка $z = -1/2$ является полюсом первого порядка для дроби $\dfrac{\pi z}{2z+1}$, точка $t = \infty$ является существенно особой точкой функции $\sin t$, по утверждению 4 теоремы 14.7 точка $z = -1/2$ является существенно особой точкой функции f.

Точка $z = 1$ — простой полюс дроби $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$. Функция $\sin\dfrac{\pi z}{2z+1}$ аналитична в окрестности точки $z = 1$ и $\sin\dfrac{\pi z}{2z+1}\Big|_{z=1} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, поэтому точка $z = 1$ — простой полюс функции $f(z)$.

Точка $z = -1$ — простой полюс дроби $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$. Функция $\sin\dfrac{\pi z}{2z+1}$ аналитична в окрестности точки $z = -1$ и $\sin\dfrac{\pi z}{2z+1}\Big|_{z=-1} = \sin\pi = 0$, поэтому точка $z = -1$ — устранимая особая точка функции $f(z)$. □

Задача 14.1. *Пусть $f(z)$ — целая функция, принимающая каждое свое значение только один раз. Доказать, что $f(z)$ линейная функция.*

■ Очевидно, что $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{C}$ и имеет особенность только в точке $z = \infty$. Точка $z = \infty$ не может быть существенно особой, так как, по теореме Пикара, она принимала бы каждое свое значение (кроме, быть может одного) в бесконечном множестве точек. Следовательно, $f(z)$ — многочлен. По основной теореме алгебры степень многочлена равна 1, поскольку значение 0 принимается только в одной точке. Поэтому $f(z) = az+b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. □

14.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 14.10. *Найти тип особой точки z_0 для следующих функций:*

1) $\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$;

2) $(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0=1$;

3) $\dfrac{z^2+2}{z^{10}+2}$, $z_0=\infty$;

4) $z^4\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=\infty$;

5) $(e^z-1-z)\operatorname{ctg}^3 z$, $z_0=0$;

6) $\dfrac{z^2+1}{e^z}$, $z_0=\infty$;

7) $\dfrac{z^6+1}{z^2+z}$, $z=\infty$;

8) $\dfrac{e^{1/z-1}}{e^z-1}$, $z_0=1$;

9) $\dfrac{e^z}{\sin z-z+z^3/6}$, $z_0=\infty$;

10) $\cos z-\sin z$, $z_0=\infty$;

11) $e^{\frac{1}{z^2-z}}$, $z_0=0$;

12) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;

13) $\dfrac{\sin 2z}{\cos z-1+z^2/2}$, $z_0=0$;

14) $\dfrac{z+2}{z^5+4z+3}$, $z_0=\infty$;

15) $\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$, $z_0=\infty$;

16) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$, $z_0=\infty$.

Пример 14.11. *Определить тип конечных особых точек для следующих функций:*

1) $\dfrac{z-i}{z^3+i}\,e^{-z^2}+\cos z$;

2) $\dfrac{1}{e^z-1}+\dfrac{1}{z}$;

3) $\dfrac{4}{(z-\pi)^2}\ \operatorname{tg} z+\dfrac{1}{\sin z}$;

4) $\dfrac{\cos(\pi z/2)}{\sin^2(z-1)}+\dfrac{e^{1/z}}{(z-1-pi)^3}$;

5) $\dfrac{z+i}{z^3+i}+\dfrac{e^{1/z}\ \operatorname{tg} z}{(z-\pi)^3}$;

6) $\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}\ \cos\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z^4+1}$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 z}{z^3+1}\,(z-\pi)^2+\sin\dfrac{1}{z+1}$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg} z}{(e^{2z}-1)^2}-z\operatorname{ch}\dfrac{1}{z-2}$;

9) $(z-1)\,e^{1/(z-1)}+\cos\pi z$;

10) $e^{1/z}\ \cos\dfrac{z}{z-3}+\dfrac{\operatorname{ch} z+1}{z^2\cos z}$;

11) $e^{1/(z^2-z)}+\sin\dfrac{\pi z}{z+\pi}$;

12) $z\,e^{z/(z+1)}+\sin\dfrac{z+1}{z}$;

13) $\dfrac{1}{z}\,\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$;

14) $\dfrac{4z+\pi}{\sin z+\cos z}$;

15) $\dfrac{z-\pi}{\sin 2z-2\sin z}$;

16) $\dfrac{e^{1/(\pi-z)}}{1+\sin(\pi i z/2)}$.

14.2 Теоретические задачи для самостоятельной работы

Задача 14.2. *Пусть сумма* $f(z)$ *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *имеет на границе круга сходимости* $|z|=R$, $0<R<+\infty$, *только одну особую точку* z_0 —

полюс первого порядка. Доказать, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$ *и, следовательно,* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$.

Задача 14.3. *Пусть функция* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ *аналитична в кольце* $0 < |z| < +\infty$, *а точки* $z = 0$ *и* $z = \infty$ *— существенно особые точки функции* f. *Доказать, что*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|\max\limits_{|z|=r}\mathcal{R}e\, f(z)\right|}{\ln r} = +\infty, \quad \lim_{r\to 0}\frac{\ln\left|\max\limits_{|z|=r}\mathcal{R}e\, f(z)\right|}{\ln(1/r)} = +\infty.$$

Задача 14.4. *Пусть* z_0 *— существенно особая точка функции* f. *Чем является точка* z_0 *для функции* $\dfrac{1}{f(z)(f(z)-a)}$, *где* $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ *?*

Задача 14.5. *Пусть* z_0 *— ИОТОХ функции* f. *Пусть* $M(\rho) = \max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$. *Доказать, что*

a) если $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^k M(\rho) = 0$, *то* z_0 *— полюс функции* f *порядка не выше* $k-1$;

b) если z_0 *— существенно особая точка функции* f, *то для любого* $k \in \mathbb{C}$ $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^k M(\rho) = \infty$.

Задача 14.6. *Какую особенность имеет в точке* z_0 *функция* $f(\varphi(z))$, *если функция* φ *в этой точке аналитическая или имеет полюс, а для функции* f *точка* $\varphi(z_0)$ *является (a) устранимой особой точкой; (b) полюсом порядка* k; *(c) существенно особой точкой ?*

15 Вычет функции в точке и его вычисление

Определение 15.1. *Пусть функция* f *аналитична в* $\overset{\circ}{U}_a(r)$ *— некоторой проколотой окрестности точки* $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. *Вычетом функции* f *в точке* a *называют число*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz, \tag{15.1}$$

где Γ *— любой замкнутый контур с положительным направлением обхода (против часовой стрелки), лежащий в* $\overset{\circ}{U}_a(r)$ *и содержащий внутри себя точку* a. *Контур* Γ *обходится в положительном направлении, т.е. в направлении, при котором внутренность контура остается слева (против часовой стрелки).*

Как следует из интегральной теоремы Коши интеграл в (15.1) не зависит от выбора контура Γ с указанными характеристиками, другими словами, этот интеграл определяется только поведением функции f в точке a и потому может использоваться как некоторая числовая характеристика функции.

Если функция f определена и дифференцируема в $U_a(r)$, то есть и в самой точке a, тогда по интегральной теореме Коши 9.3 любой интеграл вида (15.1) равен нулю, а значит — $\operatorname{res} f \Big|_{z=a} = 0$.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции f, тогда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a(r)$, $r > 0$ точки a, в которой эта функция аналитична и разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри $\overset{\circ}{U}_a(r)$. Коэффициенты c_n определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \qquad n \in \mathbb{Z},\ 0 < \rho < r. \tag{15.2}$$

Учитывая определение вычета (15.1), находим, что

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-a|=\rho} f(t)\, dt = c_{-1}. \tag{15.3}$$

Таким образом, вычет функции f в конечной ИОТОХ a равен коэффициенту c_{-1} её ряда Лорана по степени $z - a$.

Теорема 15.1. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции f. Тогда*

1) если a — устранимая особая точка, то $c_{-k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, а значит, $\operatorname{res} f \Big|_{z=a} = 0$;

2) если a — полюс порядка $p \geq 1$, то

$$c_{-1} = \operatorname{res} f \Big|_{z=a} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [f(z)(z-a)^p]. \tag{15.4}$$

Следствие 15.1.1. *Если a — простой полюс ($p = 1$), то*

$$c_{-1} = \operatorname{res} f \Big|_{z=a} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z). \tag{15.5}$$

Следствие 15.1.2. *Пусть $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где функции g и h аналитичны в окрестности точки a, причем $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Тогда a —*

простой полюс функции f и

$$c_{-1} = \operatorname{res} f \Big|_{z=a} = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{15.6}$$

Вычет в бесконечно удалённой точке. Пусть функция f аналитична в $\overset{\circ}{U}_\infty(r) = \{z : r < |z| < \infty\}$ — некоторой проколотой окрестности бесконечно удалённой точки $\overset{\circ}{U}_\infty(r) = \{z : r < |z| < \infty\}$. Вычетом функции f в точке $z = \infty$ называется выражение вида 15.1, в котором Γ — любой замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат и лежащий в области $\overset{\circ}{U}_\infty(r)$ с направлением обхода по часовой стрелке (именно такое направлением будет положительным в этом случае — точка $z = \infty$ остается слева), например, Γ — окружность $C_\rho^- = \{t : |t| = \rho\}$, $r < \rho < \infty$ с обходом по часовой стрелке.

В кольце $\overset{\circ}{U}_\infty(r)$ функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Из представления коэффициентов c_n ряда Лорана, находим, что

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r^-} f(t)\,dt = -c_{-1}. \tag{15.7}$$

Заметим, что если функция f аналитична в кольце $\{z : r < |z| < \infty\}$, то $\operatorname{res} f \Big|_{z=\infty}$ может быть отличным от нуля и в том случае, когда точка $z = \infty$ — точка непрерывности или устранимая особая точка функция f. Это происходит потому, что в этих случаях главная часть ряда Лорана у функции отсутствует, коэффициент c_{-1} лежит в правильной части ряда Лорана и существует предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) = c_0 \in \mathbb{C}$. А тогда

$$-c_{-1} = \operatorname{res} f \Big|_{\infty} = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)). \tag{15.8}$$

Теорема 15.2 (основная теорема о вычетах). *Пусть Γ — замкнутый контур с положительным направлением обхода (против часовой стрелки), лежащий в области аналитичности функции f и содержащий внутри себя конечное число ИОТОХ $\{a_k\}_{k=1}^m$ функции f. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f \Big|_{a_k}. \tag{15.9}$$

Следствие 15.2.1 (о полной сумме вычетов). *Пусть функция f аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа ИОТОХ $\{a_k\}_{k=1}^m$, то*

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f \Big|_{a_k} + \operatorname{res} f \Big|_{\infty} = 0. \tag{15.10}$$

Следствие 15.2.2. *Пусть функция f аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа ИОТОХ $\{a_k\}_{k=1}^m$, а Γ — замкнутый контур с положительным направлением обхода (против часовой стрелки), лежащий в $\mathbb{C}$ и не проходящий через точки $\{a_k\}_{k=1}^m$. Тогда*

$$\sum_{a_k \in \operatorname{int}\Gamma} \operatorname{res} f \,\Big|_{a_k} = -\Big(\operatorname{res} f \,\Big|_{\infty} + \sum_{a_k \in \operatorname{ext}\Gamma} \operatorname{res} f \,\Big|_{a_k}\Big). \qquad (15.11)$$

Пример 15.1. *Найти вычет функции* $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Так как $i^2 = -1$, то функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ всюду, кроме точек $z = 0$, $z = i$, $z = -i$, поэтому эти точки и точка $z = \infty$ являются ИОТОХ функции f.

Нули знаменателя $z = 0$, $z = i$ и $z = -i$ — простые нули, поэтому эти точки будут простыми полюсами функции $f(z)$. Воспользуемся формулой (15.5)и получим:

$$\operatorname{res} f \,\Big|_{0} = \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+i)(z-i)} = 1,$$

$$\operatorname{res} f \,\Big|_{i} = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z(z+i)} = \frac{1}{i\cdot 2i} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res} f \,\Big|_{-i} = \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{z(z-i)} = \frac{1}{-i\cdot(-2i)} = -\frac{1}{2}.$$

Вычет в точке $z = \infty$ (которая является устранимой особой точкой функции) можно найти с помощью формулы (15.10):

$$\operatorname{res} f \,\Big|_{\infty} = -\Big(\operatorname{res} f \,\Big|_{0} + \operatorname{res} f \,\Big|_{i} + \operatorname{res} f \,\Big|_{-i}\Big) = -\Big(1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Big) = 0. \qquad \square$$

Пример 15.2. *Найти вычет функции* $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Точка $z = -1$ — нуль знаменателя кратности 3. Поскольку точка $z = -1$ не является нулем числителя, она будет полюсом функции $f(z)$ порядка 3. Воспользуемся формулой (15.4) для нахождения значения вычета и получим, что

$$\operatorname{res} f \,\Big|_{-1} = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to -1} \big(f(z)(z+1)^3\big)^{(3-1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to -1} \Big(\frac{z^2(z+1)^3}{(z+1)^3}\Big)^{(2)} = \frac{1}{2} \lim_{z\to -1} (z^2)^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Вычет в $z=\infty$ найдём по формуле (15.10): $\operatorname{res} f\,\Big|_{\infty} = -\operatorname{res} f\,\Big|_{-1} = -1$. Отметим, что, как и в предыдущем примере, точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. $\square$

Пример 15.3. *Найти вычет функции* $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ *в точке* $z=0$.

■ Функция f определена и дифференцируема в $\mathbb{C}$, кроме нулей знаменателя, то есть кроме точек $z_k=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, при этом

$$(1-\cos z)'\Big|_{z=z_k}=\sin z_k=0,\quad (1-\cos z)''\Big|_{z=z_k}=\cos z_k=1,$$

поэтому z_k —нуль знаменателя функции f кратности 2.

Таким образом, функция f аналитична в проколотой окрестности начала координат $\{z:0<|z|<2\pi\}$ и $z=0$ — ее полюс второго порядка. Вычислим вычет по формуле (15.4):

$$\operatorname{Res} f\Big|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z^2}{1-\cos z}\Big)'=\lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{(1-\cos z)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2z\Big(\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+\ldots\Big)-z^2\Big(1-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\Big)}{z^4\Big(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\ldots\Big)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{z^5}{12}+\ldots)}{z^4\Big(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\ldots\Big)^2}=0. \quad \square$$

Пример 15.4. *Найти вычет функции* $f(z)=e^{1/z}$ *в точках* $z=0$ *и* $z=\infty$.

■ Функция f определена и аналитична в кольце $0<|z|<+\infty$. Поэтому точки $z=0$ и $z=\infty$ особые точки функции f. При этом точка $z=0$ — существенно особая точка, так как не существует $\lim\limits_{z\to 0}e^{1/z}$. В окрестности нуля функция f разлагается в ряд Лорана

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots,$$

и её вычет в точке $z=0$ равен коэффициенту при z^{-1} в ряде Лорана, то есть $\operatorname{res}\ f\,\Big|_{z=0}=1$.

В точке $z=\infty$ функция $f(z)=e^{1/z}$ имеет тот же ряд Лорана и, учитывая формулу (15.7), получаем, что $\operatorname{res}\ f\,\Big|_{z=\infty}=-1$. $\square$

Пример 15.5. *Найти вычет функции* $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}=\frac{e^z}{z^2(z+3i)(z-3i)}.$$

Следовательно, функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$, кроме точек $z=0$, $z=3i$ и $z=-3i$. Поэтому эти точки и точка $z=\infty$ — ИОТОХ функции $f(z)$.

Знаменатель функции $f(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль кратности 2, а точках $z=3i$ и $z=-3i$ простые нули, при этом ее числитель в этих точках в нуль не обращается, По теореме 14.2 эти точки будут полюсами функции $f(z)$. Для точки $z=0$ применим формулу (15.4) и найдём, что

$$\operatorname{res} f\,\Big|_0 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \lim_{z\to 0}\Big(\frac{e^z}{(z^2+9)}\Big)' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.$$

К точкам $z=3i$ и $z=-3i$ применим формулу (15.5)и получим:

$$\operatorname{res} f\,\Big|_{3i} = \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = \lim_{z\to 3i}\frac{e^z}{z^2(z+3i)} = -\frac{1}{54i}e^{3i} =$$
$$= -\frac{1}{54i}(\cos 3 + i\sin 3) = \frac{1}{54}(-\sin 3 + i\cos 3);$$

$$\operatorname{res} f\,\Big|_{-3i} = \lim_{z\to -3i}(z+3i)f(z) = \lim_{z\to -3i}\frac{e^z}{z^2(z-3i)} = \frac{1}{54i}e^{-3i} =$$
$$= \frac{1}{54i}(\cos(-3) + i\sin(-3)) = \frac{1}{54}(-\sin 3 - i\cos 3).$$

Вычет в ∞ найдём по формуле (15.10):

$$\operatorname{res} f\,\Big|_\infty = -(\operatorname{res} f\,\Big|_0 + \operatorname{res} f\,\Big|_{3i} + \operatorname{res} f\,\Big|_{-3i}) =$$
$$= -\Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{54}(-\sin 3 + i\cos 3) + \frac{1}{54}(-\sin 3 - i\cos 3)\Big) = \frac{1}{27}\sin 3 - \frac{1}{9}. \qquad \square$$

Пример 15.6. *Найти вычет функции* $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Решим уравнение $1+z^4=0$ или $z^4=-1$. Число -1 можно представить в виде: $-1 = e^{i(\pi+2\pi n)}$, $n\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что корнями уравнения будут числа $z_n = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2})}$, $n=0,1,2,3$. Функция f аналитична в $\mathbb{C}$, кроме точек z_n, $n=0,1,2,3$. Все эти точки — простые нули знаменателя функции f, а поскольку ее числитель в этих точках в нуль не обращается, , точки z_n, $n=0,1,2,3$ будут простыми полюсами функции $f(z)$. К функции $f(z)$ в каждой точке z_n можно применить формулу (15.6), в которой $g(z)=z^2$, $h(z)=1+z^4$. Тогда получим:

$$\operatorname{res} f\,\Big|_{z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$
$$\operatorname{res} f\,\Big|_{z_1} = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4}e^{-3i\pi/4} = \frac{1}{4}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

$$\operatorname{res} f\Big|_{z_2} = \frac{g(z_2)}{h'(z_2)} = \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4}e^{-5i\pi/4} = \frac{1}{4}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

$$\operatorname{res} f\Big|_{z_3} = \frac{g(z_3)}{h'(z_3)} = \frac{z_3^2}{4z_3^3} = \frac{1}{4z_3} = \frac{1}{4}e^{-7i\pi/4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Рассмотрим поведение функции f в точке $z = \infty$. Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2}{1+z^4} = 0$, то по теореме 14.1 точка $z = \infty$ — устранимая особая точка.

Найдём вычет f в точке $z = \infty$. Так как

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4(1+z^{-4})} = \frac{1}{z^2}\,(1+z^{-4})^{-1} = \frac{1}{z^2}\Big(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} + \ldots\Big),$$

то в правильной части ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки $z = \infty$ слагаемого вида c_{-1}/z нет, поэтому $\operatorname{res} f\Big|_{\infty} = 0$. □

Пример 15.7. *Найти вычет функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ во всех ее ИОТОХ.*

■ Воспользуемся представлением $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, в котором $\cos z = 0$ тогда и только тогда, когда $z = z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Все нули функции $\cos z$ простые, поскольку $(\cos z)' = \sin z$ и $\sin z_n \neq 0$. Эти же точки будут простыми полюсами функции $\operatorname{tg} z$. Применяя к функции $\operatorname{tg} z$ формулу (15.6), в которой $g(z) = \sin z$, $h(z) = \cos z$ получим:

$$\operatorname{res} f\Big|_{z_n} = \frac{g(z_n)}{h'(z_n)} = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой $\operatorname{tg} z$, так как есть последовательность полюсов $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, стремящаяся к ∞ при $n \to +\infty$. □

Пример 15.8. *Найти вычет функции $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$ во всех ее ИОТОХ.*

Знаменатель дроби $\dfrac{1}{z-2}$ обращается в нуль в точке $z = 2$. Поскольку f аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{2\}$, то $z = \infty$ — ИОТОХ функции $f(z)$. Так как, предела функции $\cos t$ при $t \to \infty$ не существует, точка $z = 2$ является существенной особой точкой для функции $f(z)$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$. Для этого сначала разложим ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$ функцию $\cos\dfrac{1}{z-2}$:

$$\cos\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\frac{1}{z-2}\Big)^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{z-2}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{1}{z-2}\Big)^4 - \ldots$$

Поскольку $z^3 = (2 + (z-2))^3 = 8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3$, то

$$z^3 \cos\frac{1}{z-2} =$$
$$= \big(8+12(z-2)+6(z-2)^2+(z-2)^3\big)\cdot\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^4-\dots\right).$$

Коэффициент при $(z-2)^{-1}$ равен: $-6+\dfrac{1}{24} = -\dfrac{143}{24}$, поэтому $\operatorname{res} f\,\big|_2 = -\dfrac{143}{24}$.

Вычет в $z=\infty$ найдём по формуле (15.10): $\operatorname{res} f\,\big|_\infty = -\operatorname{res} f\,\big|_2 = \dfrac{143}{24}$. □

Пример 15.9. *Найти вычет функции* $f(z) = \exp\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Очевидно, что единственной конечной ИОТОХ функции $f(z)$ является точка $z=0$. Это существенно особая точка, поскольку не существует предела $e^{z+\frac{1}{z}}$ при $z\to\infty$. Найдём коэффициент c_{-1}, используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{n!k!}.$$

Коэффициент при z^{-1} получается тогда и только тогда, когда $k=n+1$. Следовательно, $\operatorname{res} f\,\big|_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$. Вычет в $z=\infty$ найдём по формуле (15.10): $\operatorname{res} f\,\big|_\infty = -\operatorname{res} f\,\big|_0 = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$. □

Пример 15.10. *Найти вычет функции* $f(z) = \sin\dfrac{z}{z+1}$ *во всех ее ИОТОХ.*

■ Знаменатель дроби $z/(z+1)$ обращается в нуль в точке $z=-1$. Функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, поэтому точки $z=-1$ и $z=\infty$ — ИОТОХ функции $f(z)$.

Так как существует предел $\lim\limits_{z\to\infty} = f(\infty) = \sin 1$, то есть $z=\infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то по формуле (15.8) находим, что

$$\operatorname{res} f\,\big|_\infty = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty)-f(z)) = \lim_{z\to\infty} z\left(\sin 1 - \sin\frac{z}{z+1}\right) =$$
$$= \lim_{z\to\infty} 2z\sin\frac{1-\frac{z}{z+1}}{2}\cos\frac{1+\frac{z}{z+1}}{2} = \lim_{z\to\infty} 2z\sin\frac{1}{2(z+1)}\cos\frac{2z+1}{2(z+1)} =$$
$$= \cos 1\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z+1} = \cos 1$$

$$\text{(поскольку } \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2(z+1)}=0, \text{ то } \sin\frac{1}{2(z+1)}\sim\frac{1}{2(z+1)} \text{ при } z\to\infty).$$

Вычет в -1 найдём по формуле (15.10): $\operatorname{res} f\Big|_{-1}=-\operatorname{res} f\Big|_{\infty}=-\cos 1.$ □

15.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 15.11. *Найти вычеты функции во всех ее конечных ИОТОХ:*

1) $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}$;
2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$;
3) $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$;
4) $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$;
5) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$;
6) $f(z)=\operatorname{ctg}\pi z$;
7) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\pi z}$;
8) $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$;
9) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$;
10) $f(z)=\dfrac{\sin z}{1-\cos z}$;
11) $f(z)=\operatorname{tg} iz$;
12) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-i}$;
13) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$;
14) $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;
15) $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z(\sin z-z)}$;
16) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(1+z^2)^2}$.

Пример 15.12. *Найти вычет функции в бесконечно удалённой точке:*

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$;
2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$;
3) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n\in\mathbb{N}$;
4) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;
5) $f(z)=\cos\Big(\dfrac{z+2}{2z}\Big)\pi$;
6) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$;
7) $f(z)=z^3\cos\Big(\dfrac{1}{z-2}\Big)$;
9) $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{z-1}$;
10) $f(z)=\dfrac{\cos^2(\pi/z)}{z+1}$;
11) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(1-z^2)}$;
12) $f(z)=\cos\Big(\dfrac{1}{z-2}\Big)$;
13) $f(z)=\sin\Big(\dfrac{z}{z+1}\Big)$;
14) $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;
15) $f(z)=\cos\Big(\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}\Big)$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{\sin 1/z}$;

16) $f(z) = e^{(z+1)/z}$.

Пример 15.13. *Найти вычеты функции относительно всех ИОТОХ :*

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^7}$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 - \pi z^2}$;

3) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^n(z-1)}, n \in \mathbb{N}$;

4) $f(z) = \dfrac{z^n}{(1+z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$;

6) $f(z) = \exp \dfrac{1}{1-z}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{\sin iz}$;

9) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 3}$;

10) $f(z) = z^n \sin \dfrac{1}{z}$, $n \in \mathbb{N}$;

11) $f(z) = \cos z \, \cos \dfrac{1}{z}$;

12) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2 - i)^2}$;

13) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z/(z+\pi))}$;

14) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

15) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^3 + 1}$;

16) $f(z) = \dfrac{\cos 2z}{(z+i)^2(z - \pi i)}$.

16 Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

16.1 Определенные интегралы по замкнутому контуру

При вычислении определенных интегралов по замкнутому контуру используется основная теорема о вычетах (теорема 15.2) и ее следствия. Покажем на примерах, как используются эти утверждения. Напомним, что если направление обхода контура явно не указано, то оно — положительное.

Пример 16.1. *Вычислить интеграл*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{z+2}{e^z - 1} - \frac{18 \sin z}{(z - \pi/2)(z^2 + 9)} \right) dz, \quad \Gamma = \{z : |z - 2| = 3\}.$$

■ Особыми точками однозначного характера в $\mathbb{C}$ для подынтегральной функции являются точки $z = \pm 3i$, $z = \dfrac{\pi}{2}$, $z = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутри контура Γ лежат только две точки $z = 0$ и $z = \dfrac{\pi}{2}$, которые являются простыми полюсами подынтегральной функции f. Поэтому по формуле (15.5)

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\left(\frac{z+2}{e^z-1} - \frac{18\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)(z^2+9)}\right) = 2,$$

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{z+2}{e^z-1} - \frac{18\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)(z^2+9)}\right) = -\frac{72}{\pi^2+36},$$

и $I = 2 - \dfrac{72}{\pi^2+36}$. □

Пример 16.2. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$.

■ Все конечные ИОТОХ подынтегральной функции f лежат внутри контура интегрирования. Точка $z=\infty$ также ИОТОХ функции f. Применим формулу (15.11), и получим, что $I = -2\pi i \cdot \operatorname{res} f \Big|_{z=\infty}$. Так как $\operatorname{res} f \big|_{z=\infty}$ равен коэффициенту $-c_{-1}$ в ряде Лорана подынтегральной функции f в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname{res} f \big|_{z=\infty} = \operatorname{res} \frac{1}{z^{13}}\left(1-\frac{2}{z^{10}}\right)^{-1} \big|_{z=\infty} = \operatorname{res} \frac{1}{z^{13}} \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z^{10}}\right)^j \big|_{z=\infty} = 0,$$

Следовательно, $I = 0$. □

Пример 16.3. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin\frac{\pi z}{2z+1}\, dz$.

■ Особыми точками однозначного характера в $\mathbb{C}$ для подынтегральной функции f являются точки: $z=1$ — полюс первого порядка, $z=-1$ — устранимая особая точка, $z=-\dfrac{1}{2}$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — устранимая особая точка. Внутри окружности $|z+1|=1$ лежат только две точки $z=-1$ и $z=-\dfrac{1}{2}$. Поэтому по основной теореме о вычетах

$$I = \int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin\frac{\pi z}{2z+1}\, dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res} f \big|_{z=-1} + \operatorname{res} f \big|_{z=-1/2}\Big).$$

Чтобы избежать вычисления вычета в существенно особой точке, применим формулу (15.10) и получим, что

$$I = \int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin\frac{\pi z}{2z+1}\, dz = -2\pi i\Big(\operatorname{res} f \big|_{z=1} + \operatorname{res} f \big|_{z=\infty}\Big).$$

Так как точка $z = 1$ — полюс первого порядка подынтегральной функции f, то по формуле (15.5)

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=1} = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z-1)(z+1)}\,\sin\frac{\pi z}{2z+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Так как точка $z = \infty$ — устранимая особая точка функции f и $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то по формуле (15.8)

$$\operatorname{res} f \Big|_{\infty} = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z\to\infty}\frac{-z}{z^2-1}\,\sin\frac{\pi z}{2z+1} = 0.$$

Окончательно, $I = -2\pi i\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + 0\Big) = -\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\,i.$ $\square$

16.2 Определенные интегралы от тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi, \tag{16.1}$$

где $R(x, y)$ — рациональная функция от переменных x и y. Рассматривая интеграл (16.1) будем полагать, что функция $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ непрерывна по переменной φ на $[0, 2\pi]$. А если в интеграле (16.1) положить $z = e^{i\varphi}$ и воспользоваться формулами Эйлера

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

то интеграл (16.1) сводится к интегралу по единичной окружности $|z| = 1$ от непрерывной функции, которая является аналитической в достаточно малом кольце, содержащем единичную окружность внутри себя:

$$I = \int\limits_{|z|=1} R_1(z)\,dz, \text{ где } R_1(z) = -\frac{i}{z}R\Big(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P, Q — взаимно простые многочлены с комплексными коэффициентами. Из предположения о непрерывности функции $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ на $[0, 2\pi]$ следует, что $Q(z) \neq 0$ на окружности $|z| = 1$, то есть все корни многочлена $Q(z)$ либо лежат а круге $|z| < 1$, либо вне его. На основании основной теоремы о вычетах (теоремы 15.2 получаем, что

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{|z|=1} R_1(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} R_1(z)\Big|_{z=\alpha_k} \tag{16.2}$$

где вычеты берутся по всем нулям α_k многочлена $zQ(z)$, лежащим внутри окружности $|z| = 1$.

Пример 16.4. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.

■ После замены $z = e^{i\varphi}$ получим: $I = \dfrac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \dfrac{1}{z(3z^2 + 10z + 3)}$. Подынтегральная функция $R_1(z) = \dfrac{2dz}{zi(3z^2 + 10z + 3)}$ аналитична всюду, кроме нулей знаменателя $z_0 = 0$, $z_1 = -1/3$, $z_2 = -3$, точки $z_0 = 0$, $z_1 = -1/3$ попадают внутрь контура $|z| = 1$ и является простыми полюсами. Воспользуемся формулами (15.3) и (15.6) для вычисления вычетов в простом полюсе, и получим, что

$$\operatorname{res} R_1 \Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{2}{i(3z^2 + 10z + 3)} = \frac{2}{3i},$$

$$\operatorname{res} R_1 \Big|_{z=-1/3} = \frac{2}{i} \lim_{z\to -1/3} \frac{1}{z} \cdot \frac{z + \frac{1}{3}}{3\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 3)} = -\frac{2}{i} \cdot \frac{3}{8} = -\frac{3}{4i}.$$

Следовательно, $I = 2\pi i\left(\dfrac{2}{3i} - \dfrac{3}{4i}\right) = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$. □

Пример 16.5. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\cos^4\varphi}{1 + \sin^2\varphi}\, d\varphi$.

■ $I = \dfrac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \dfrac{(1 + \cos 2\varphi)^2}{3 - \cos 2\varphi}\, d\varphi = \dfrac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{(1 + \cos\psi)^2}{3 - \cos\psi}\, d\psi$.

После замены $z = e^{i\psi}$ получим, что $I = -\dfrac{1}{8i} \int\limits_{|z|=1} \dfrac{(z + 1)^4}{z^2(z^2 - 6z + 1)}\, dz$. Нули знаменателя подынтегральной функции f, лежащие внутри окружности $|z| = 1$, это точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, и потому

$$I = -\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{res} f \Big|_{z=0} + \operatorname{res} f \Big|_{z=3-2\sqrt{2}}\right).$$

Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции f. По формуле (15.4) находим

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{(z + 1)^4}{z^2 - 6z + 1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{4(z + 1)^3(z^2 - 6z + 1) - (z - 1)^4(2z - 6)}{(z^2 - 6z + 1)^2} = 10.$$

Точка $z = 3 - 2\sqrt{2}$ — простой полюс функции f, и поэтому

$$\operatorname{res} f \Big|_{z=3-2\sqrt{2}} = \lim_{z\to 3-2\sqrt{2}} \frac{(z+1)^4}{z^2(z-(3+2\sqrt{2}))} = \frac{(4-2\sqrt{2})^4}{-4\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^2} = -8\sqrt{2}.$$

Следовательно, $I = -\dfrac{\pi}{4}(10 - 8\sqrt{2}) = 2\pi(\sqrt{2} - 1{,}25)$. $\square$

Пример 16.6. *Вычислить интегралы*

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},\ I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi\, d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$$

при условиях, что a — вещественное число и $0 < |a| < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

■ Рассмотрим интеграл $I = I_1 + iI_2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\, d\varphi$.

Если значение этого интеграла найдено, то I_1 есть реальная часть этого числа, а I_2 — его мнимая часть. После замены $z = e^{i\varphi}$, используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$), получим

$$I = -\frac{1}{ai} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - (a + 1/a)z + 1}\, dz.$$

Подынтегральная функция аналитична во всех конечных точках, кроме нулей знаменателя: $z_1 = a$, $z_2 = 1/a$, которые являются простыми полюсами подынтегральной функции. Внутри окружности $|z| = 1$ находится только полюс $z_1 = a$. По формуле (15.9) получаем, что

$$I = -\frac{1}{ai} 2\pi i \operatorname{res} \frac{z^n}{(z-a)(z-1/a)} \Big|_{z=a} = -\frac{2\pi}{a} \lim_{z\to a} \frac{z^n}{z - 1/a} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}.$$

Следовательно, $I_1 = \dfrac{2\pi a^n}{1-a^2}$, $I_2 = 0$.

Впрочем, то, что $I_2 = 0$ очевидно и так, поскольку подынтегральная функция нечётная, а пределы интегрирования симметричны. $\square$

Пример 16.7. *Вычислить интеграл* $I = (-1)^n \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\alpha + \sin\varphi) e^{in\varphi}\, d\varphi$.

■ Сделаем в интеграле замену $z = e^{i\varphi}$ и получим

$$I = \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \int_{|z|=1} (z^2 + 2iz\sin\alpha - 1)^n \frac{dz}{iz} = \frac{(-1)^n}{(2i)^n} 2\pi i \operatorname{res} \frac{(z^2 + 2iz\sin\alpha - 1)^n}{iz} \Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2i)^n} 2\pi \lim_{z\to 0} (z^2 + 2iz - 1)^n = \frac{\pi(-1)^n\, i^n}{2^{n-1}}. \qquad \square$$

Пример 16.8. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i}$.

■ Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + 2i} = \frac{1}{\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} + 2i} = \frac{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{-e^{ix} - 3e^{ix}} =$$

$$= \frac{ie^{-ix}\left(e^{2ix} + 1\right)}{-e^{-ix}\left(e^{2ix} + 3\right)} = -i\frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} + 3},$$

и сделаем замену $z = e^{2ix}$, $dz = 2ie^{2ix}dx$ или $dx = \dfrac{dz}{2iz}$. Когда x изменяется от нуля до π, точка z описывает окружность $|z| = 1$. Следовательно,

$$I = -i\int_0^\pi \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} + 3}dx = -i\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z+3} \cdot \frac{dz}{2iz} = -\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z(z+3)}dz.$$

ИОТОХ функции $\dfrac{z+1}{z(z+3)}$ — это простые полюса $z = 0$ и $z = -3$. Внутри окружности $|z| = 1$ лежит только точка $z = 0$. Пользуясь формулой (15.5), находим, что $\operatorname{res} f \Big|_{z=0} = \lim\limits_{z\to 0} z \cdot \dfrac{z+1}{z(z+3)} = \dfrac{1}{3}$. Тогда по основной теореме о вычетах $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 2i} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{3}i$. □

16.3 Вычисление несобственных интегралов

Пусть комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Для любых конечных R_1, $R_2 \in (0, \infty)$ определим интеграл:

$$I(R_1, R_2) = \int\limits_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx = \int\limits_{-R_1}^{R_2} u(x)\,dx + i\int\limits_{-R_1}^{R_2} v(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{R_1, R_2\to\infty} I(R_1, R_2)$, когда R_1, R_2 стремятся к $+\infty$ независимо друг от друга, то этот предел называется сходящимся несобственным интегралом от функции f по $\mathbb{R}$ и обозначается

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R_1\to+\infty \\ R_2\to+\infty}} \int\limits_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx. \tag{16.3}$$

Возможность использовать вычеты для вычисления таких интегралов основана на том, что для сходящегося несобственного интеграла можно всегда выбрать $R_1 = R_2 = R \in \mathbb{R}$, а отрезок $[-R, R]$ действительной оси рассматривать как часть замкнутого контура Γ_R с направлением обхода против часовой стрелки, который состоит из этого отрезка и дуги окружности $C_R = \{z : |z| = R,\ \mathcal{I}m\, z \geq 0\}$. Интеграл по замкнутому контуру Γ_R иногда удается вычислить, используя основную теорему о вычетах. При этом, как легко видеть,

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int\limits_{C_R} f(z)\, dz.$$

Если удается доказать, что $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\, dz = 0$, а поскольку для сходящегося несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx,$$

то получаем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz.$$

Существует несколько общих ситуаций, когда все перечисленные условия удается реализовать и основными являются утверждения о поведении интеграла по дуге окружности $C_R = \{z : |z| = R\}$, которые носят название лемм Жордана.

Лемма 16.1 (I лемма Жордана). *Если функция f непрерывна в некоторой проколотой окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, то*

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{C_r} f(z)dz = 0, \tag{16.4}$$

где C_r — окружность $|z| = r$ $(r > 0)$ или любая её дуга.

В том простом случае, когда функция f является несократимой рациональной дробью, из первой леммы Жордана следует следующий результат.

Теорема 16.1. *Пусть $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ — несократимая рациональная дробь комплексного переменного z, $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены степени p и q, соответственно. Если $q - p \geq 2$, $Q(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, а $z_k \in \mathbb{C}$ — все различные корни* *многочлена $Q(z)$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k>0} \operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z_k} = -2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k<0} \operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z_k}. \qquad (16.5)$$

Пример 16.9. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

■ Функция $R(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ аналитична в $\mathbb{C}$, кроме точек $z_{1,2} = \pm i$ и $z_{3,4} = \pm 3i$. Точки $z_1 = i$ и $z_3 = 3i$ лежат в верхней полуплоскости и являются простыми полюсами функции $R(z)$. Условия теоремы 16.1 выполнены и по формуле (16.5) получим, что

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\Big(\operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z=i} + \operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z=3i}\Big),$$

$$\operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = -\frac{1}{16i},$$

$$\operatorname{res} R(z)\,\Big|_{z=3i} = \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)z^2}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)} = \frac{3}{16i}.$$

Следовательно, $I = 2\pi i\Big(-\dfrac{1}{16i} + \dfrac{3}{16i}\Big) = \dfrac{\pi}{4}$. □

Пример 16.10. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4-2i}$.

■ Прежде всего заметим, что подынтегральная функция является четной, поэтому

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2i} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2i}.$$

Функция $R(z) = \dfrac{dz}{z^4-2i}$ аналитична в $\mathbb{C}$, кроме точек, в которых $z^4-2i=0$, то есть кроме точек $z_k = \sqrt[4]{2}\exp\Big(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k\Big)i$, $k = 0,1,2,3$. Все эти особые точки являются простыми полюсами функции $R(z)$. В верхней полуплоскости лежат точки $z_0 = \sqrt[4]{2}\exp\dfrac{\pi i}{8}$ и $z_1 = \sqrt[4]{2}\exp\dfrac{5\pi i}{8} = \sqrt[4]{2}\exp\dfrac{\pi i}{8}\exp\dfrac{\pi i}{2} = iz_0$. Условия теоремы 16.1 выполнены. Вычислим вычеты функции $R(z)$ в точках z_0 и z_1, для чего воспользуемся формулой (15.6):

$$\operatorname{res} R(z) \,\Big|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{z_0}{4z_0^4} = \frac{z_0}{8i};$$
$$\operatorname{res} R(z) \,\Big|_{z=z_1} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = \frac{z_1}{8i}.$$

По формуле (16.5) получим, что
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 - 2i} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \left(\frac{z_0}{8i} + \frac{z_1}{8i}\right) = \frac{\pi}{8} \cdot (z_0 + iz_0) = \frac{\pi}{8}(1+i)\sqrt[4]{2}\exp\frac{\pi}{8}. \qquad \square$$

Упражнение 16.1. *Вычислить интеграл*
$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ a > 0,\ n = 1, \ldots$$

■ При любом n это интеграл первого типа. Функция $R(z) = (a^2+z^2)^{-n}$ имеет в верхней полуплоскости единственный полюс n-го порядка $z = ai$. Поэтому, применяя формулы (15.4) и (16.5), получаем

$$I_n = 2\pi i \operatorname{res}\,(a^2+z^2)^{-n}\Big|_{z=ai} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{z-ai}{(a^2+z^2)^n}\right)^{(n-1)} =$$
$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\big((z+ai)^{-n}\big)^{(n-1)} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\ldots(2n-2)}{(2ai)^{n-1}} =$$
$$= \frac{2\pi}{(2a)^{2n-1}}\,\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}. \ \square$$

Интегралами вида (16.5) не исчерпывается класс сходящихся несобственных интегралов, к которым можно применить теорию вычетов.

Лемма 16.2 (II лемма Жордана)**.** *Если функция f непрерывна в некоторой проколотой окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то*
$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{C_r} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0,\ \text{для любого } \lambda > 0, \tag{16.6}$$
где C_r — верхняя полуокружность радиуса r с центром в точке $z = 0$ или любая её дуга.

И вновь, в том простом случае, когда функция f является несократимой рациональной дробью, из второй леммы Жордана следует следующий результат.

Теорема 16.2. *Пусть* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— несократимая рациональная дробь вещественной переменной* x, $P(x)$, $Q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами степени* p *и* q, *соответственно. Если* $q - p \geq 1$, $Q(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$, *а* $z_k \in \mathbb{C}$ *— все различные корни многочлена* $Q(z)$, *то для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iaz}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0} \operatorname{res}\big(R(z)\, e^{iaz}\big)\,\big|_{z_k}, \tag{16.7}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax\, dx = \mathcal{R}e\,\Big(2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0} \operatorname{res}\big(R(z)\, e^{iaz}\big)\,\big|_{z_k}\Big), \tag{16.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax\, dx = \mathcal{I}m\,\Big(2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\, z_k > 0} \operatorname{res}\big(R(z)\, e^{iaz}\big)\,\big|_{z_k}\Big). \tag{16.9}$$

Пример 16.11. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\, dx.$

■ В этом случае $P(z) = z + 1$, $Q(z) = z^2 + 2z + 2$, $q - p = 1$, $Q(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$. Функция $R(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z+2}$ имеет в верхней полуплоскости один простой полюс $z = i - 1$, тогда по формуле (16.9) получим, что

$$I = \mathcal{I}m\ \Big(2\pi i \operatorname{res} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}\,\big|_{z=i-1}\Big), \quad \text{где}$$

$$\operatorname{res} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}\,\big|_{z=i-1} = \frac{z+1}{2z+2} e^{2iz}\,\Big|_{z=i-1} = \frac{e^{-2}}{2} \cdot (\cos 2 - i \sin 2).$$

Следовательно, $I = \mathcal{I}m\,\Big(2\pi\ i \dfrac{e^{-2}}{2}\ (\cos 2 - i\sin 2)\Big) = \pi e^{-2} \cos 2.$ □

Пример 16.12. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin nx}{1+x^2}\, dx.$

■ Поскольку подынтегральная функция является четной, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin nx}{1+x^2}\, dx.$$

Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z = i$ и $z = -i$. В верхней полуплоскости находится только один простой полюс —

точка $z = i$. Поэтому

$$2I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin nx}{1+x^2}\, dx = \mathcal{I}m \left\{ 2\pi i \operatorname{res} \frac{z\, e^{inz}}{1+z^2} \,\Big|_{z=i} \right\} = \mathcal{I}m \left\{ 2\pi i \, \frac{e^{inz}}{2} \,\Big|_{z=i} \right\} =$$

$$= \mathcal{I}m \left\{ \pi i e^{-n} \right\} = \pi e^{-n}.$$

Следовательно, $I = \pi e^{-n}/2$. □

До сих пор подынтегральные функции не имели особых точек на кривой интегрирования. Но теорию вычетов удается иногда использовать и в случаях, когда особые точки функции лежат на кривой интегрирования.

Лемма 16.3 (III лемма Жордана)**.** *Пусть a — точка комплексной плоскости, f — аналитическая функция в области $G \setminus \{a\}$, для которой точка a является полюсом первого порядка. Пусть из точки a под углом α друг к другу выходят две гладкие кривые Γ_1 и Γ_2 (см. определение 6.2), все точки которых, исключая a, лежат в $G \setminus \{a\}$. Пусть, наконец, C_r — часть окружности $|z-a| = r > 0$, заключённая между кривыми Γ_1 и Γ_2. Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} f(z)\, dz = \alpha i \operatorname{res} f \,\Big|_{z=a} . \tag{16.10}$$

С помощью этой леммы в курсе лекций по комплексному анализу вычисляется интеграл Дирихле (см, например, [15, п.5.2.4])

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Но применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов не ограничивается только рациональными и тригонометрическими подынтегральными функциями. Приведем только один пример.

Пример 16.13. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}$, $a \in (0,1)$.

■ Отметим, что неотрицательная подынтегральная функция не является рациональной. Несобственный интеграл имеет две особые точки: $-\infty$ и $+\infty$. Так как

$$\frac{e^{ax}}{1+e^x} \sim \frac{1}{e^{(1-a)x}},\ x \to +\infty, \quad \frac{e^{ax}}{1+e^x} \sim \frac{1}{e^{-ax}},\ x \to -\infty,$$

и при $a \in (0,1)$ интегралы $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{(1-a)x}}$, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{e^{-ax}}$ сходятся, поэтому интеграл I сходится.

Пусть $r \in (0,+\infty)$ и Γ_r — замкнутый контур с обходом против часовой стрелки, состоящий их четырех прямолинейных отрезков

$$\Gamma_r = [-r,r] \cup [r, r+2\pi i] \cup [r+2\pi i, -r+2\pi i] \cup [-r+2\pi i, -r].$$

Внутри Γ_r находится единственная ИОТОХ функции $\dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$ — полюс первого порядка $z = \pi i$, в котором

$$\operatorname{res} \frac{e^{az}}{1+e^z} \Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{az}}{(1+e^z)'} \Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{az}}{e^z} \Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{-1} = -e^{a\pi i}.$$

В силу основной теоремы о вычетах

$$I_r = \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Но, учитывая структуру контура Γ_r, получаем, что

$$I_r = \int\limits_{-r}^{r} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int\limits_{r}^{r+2\pi i} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int\limits_{r+2\pi i}^{-r+2\pi i} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} + \int\limits_{-r+2\pi i}^{-r} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}.$$

Выполняя во втором, третьем и четвертом интегралах соответствующие замены переменной интегрирования, получим

$$I_r = \int\limits_{-r}^{r} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x} + i\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy + \int\limits_{r}^{-r} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx + i\int\limits_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy.$$

Легко видеть, что при достаточно больших r имеют место оценки:

$$\left| i\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy \right| \le \frac{2\pi e^{ar}}{e^r - 1}; \qquad \left| i\int\limits_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy \right| \le \frac{2\pi e^{-ar}}{1-e^{-r}},$$

из которых следует, что эти два интеграла, в силу того, что $a \in (0,1)$, стремятся к нулю при $r \to +\infty$. В силу $2\pi i$-периодичности функции e^z,

$$\int\limits_{r}^{-r} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = e^{2\pi a i}\int\limits_{r}^{-r} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx.$$

Из сказанного, переходя к пределу при $r \to +\infty$, получаем равенство

$$(1-e^{2\pi a i})\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi a i}} = -\pi \frac{2i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad \square$$

Замечание. Если в исходном интеграле сделать замену, полагая $t = e^x$, то получим, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad a \in (0,1).$$

16.4 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 16.14. *Используя основную теорему о вычетах 15.2 и ее следствия, вычислить следующие интегралы:*

1) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, $\Gamma = \big\{(x,y) : x^{2/3}+y^{2/3} = 2^{2/3}\big\}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} e^{(z-1)/z}\,dz$, $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z+2}{e^z-1}\,dz$, $\Gamma = \{z : |z-2| = 7\}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z-2}{z(z-1)(z+2)}\,dz$, $\Gamma = \{z : |z-1| = 3\}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^3-z^5}$, $\Gamma = \left\{z : |z-1| = \frac{3}{2}\right\}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}\,dz$, $\Gamma = \{z : |z-1| = 3\}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \operatorname{tg} z\,dz$, $\Gamma = \{z : |z| = n\}$, $n \in \mathbb{N}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2+4}$, $\Gamma = \{z : |z-i| = 2\}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z+4)}$, $\Gamma = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{9}+\frac{y^4}{4} = 1\right\}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, $\Gamma = \{z : |z| = \alpha, \alpha > 0\}$;

11) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z\,dz}{\sin z},\ \Gamma = \left\{z : |z-2\pi| = \frac{5\pi}{2}\right\};$

12) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)},\ \Gamma = \{z : |z| = \alpha, \alpha \in (0,1)\};$

13) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^2 \sin^2 1/z}{(z-1)(z-2)}\,dz,\ \Gamma = \{z : |z| = 4\};$

14) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i}\,dz,\ \Gamma = \partial D,\ D = \{z : |z| < 1, \mathcal{R}e\ \ z > 0, \mathcal{I}m\ \ z > 0\};$

15) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3 dz}{e^{z^3}-1},\ \Gamma = \{z : |z| = 4\};$

16) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \Big(\frac{z^2+3z+4}{(z-2)^2(z^2+10)} + e^{1/(z-1)}\Big)\,dz,\ \Gamma = \{z : |z| = 3\}.$

Пример 16.15. *Вычислить интегралы:*

1) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{5-4\cos\varphi}\,d\varphi;$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi},\ a > 1;$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ a > 1;$

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1-a\sin^2\varphi}\,d\varphi,\ 0 < a < 1;$

5) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 3\varphi}{1-2a\sin\varphi+a^2}\,d\varphi,\ |a| < 1;$

6) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi;$

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi},\ a > b > 0;$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n}\varphi\sin 2m\varphi\,d\varphi,\ n, m \in \mathbb{N};$

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p+q\cos\varphi)^2},\ p > q > 0;$

10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ 0 < a < 1;$

11) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ |a| < 1;$

12) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ |a| < 1;$

13) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi},\ a > 1;$

14) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx,\ a \in \mathbb{R};$

15) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2},\ a, b > 0;$

16) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ a \neq \pm 1.$

Пример 16.16. *Вычислить интегралы:*

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4}$, $a, b > 0$;

5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x\,dx}{x^4+5x^2+4}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+2x+10}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a > 0$;

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+b^2)^2}$, $b > 0$;

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^6\,dx}{(x^4+a^4)^2}$, $a > 0$;

10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, $a, b > 0$;

11) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2ix-1-a^2)^3}$;

12) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+i)^2}$;

13) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3+13x}{x^4+13x^2+36}\sin x\,dx$;

14) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$;

15) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$, $a > 0$;

16) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$, $a, b > 0$.

17 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, за исключением конечного числа полюсов и имеет в области G конечное число нулей. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Ее называют *логарифмической производной* функции f, а вычеты в её особых точках называют *логарифмическими вычетами* f.

Во многих приложениях часть нужно решать задачу о вычислении числа корней или полюсов заданной функции, расположенных в определенной области.

Теорема 17.1 (о логарифмическом вычете)**.** *Пусть функция f аналитична в некоторой области G, за исключением конечного числа полюсов. Пусть Γ — замкнутый контур, содержащийся в G вместе со своей внутренностью, с обходом против часовой стрелки, а функция f не имеет на Γ ни* *нулей, ни полюсов. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P, \tag{17.1}$$

где N — число нулей функции f, находящихся внутри контура Γ, с учетом их кратностей, а P — число полюсов функции f, находящихся внутри контура Γ, с учетом их порядков.

Теорема 17.2 (принцип аргумента)**.** *Пусть выполнены условия теоремы 17.1. Разность между числом нулей с учетом их кратностей и числом полюсов с учетом их порядков функции f, находящихся внутри контура Γ, равна приращению аргумента $f(z)$ при обходе точкой z контура Γ против часовой стрелки, делённому на 2π, то есть*

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}. \tag{17.2}$$

Приращение аргумента $\mathrm{var}(\arg f(z))\Big|_{\Gamma}$ функции f при обходе против часовой стрелки точкой z контура Γ следует понимать следующим образом.

Выберем точку $z_0 \in \Gamma$ и вычислим число $\theta_1 = \arg f(z_0)$. Затем будем перемещать точку z по контуру Γ от точки z_0 против часовой стрелки, что приведет к непрерывному изменению значения $\arg f(z)$. При возвращении в точку z_0 получим возможно другое число $\theta_2 = \arg f(z_0)$. Тогда $\mathrm{var}\arg f(z)\Big|_{\Gamma} = \theta_2 - \theta_1$. Отметим, что $\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{var}\arg f(z)\Big|_{\Gamma}$ — это число оборотов вокруг точки $w = 0$ вектора $w = f(z)$ при полном обходе точкой z контура Γ в положительном направлении. Значение $\arg f(z)$ изменится, если точка $w = 0$ лежит внутри кривой, описываемой вектором $w = f(z)$.

Следствие 17.2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция f аналитична в ней, а Γ — положительно ориентированный замкнутый контур, расположенный в G вместе со своей внутренностью. Если f не имеет нулей на Γ, то число нулей функции f с учётом их кратностей, содержащихся внутри замкнутого контура Γ, вычисляется по формуле*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\mathrm{var}\big[\arg f(z)\big]\Big|_{\Gamma}. \tag{17.3}$$

Действительно, так как функция f не имеет полюсов, то в формулах (17.1), (17.2) $P = 0$.

Подсчёт числа нулей функции, аналитической в некоторой подобласти $\overline{\mathbb{C}}$, часто облегчает следующая теорема.

Теорема 17.3 (Руше). *Пусть f, g — аналитические в области G функции, Γ — замкнутый контур, содержащийся в $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ вместе со своей внутренностью. Если на контуре Γ выполняется неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, то функции f и $f + g$ внутри контура Γ имеют одинаковое число нулей с учетом их кратностей.*

Практическое применение формулы (17.3) при определении числа нулей аналитической функции в области аналитичности состоит в следующем.

Строится кривая, которая является образом границы области G при отображении $w = f(z)$. По рисунку определяется число оборотов вектора w при однократном обходе точкой z границы области G. Затем, по формуле (17.3) *определяется число нулей функции f в области G.*

Область G может быть и неограниченной в $\mathbb{C}$, например, полуплоскостью $\mathcal{R}e\, z > a$. Заметим, что с задачей определения нулей многочлена $P(z)$ в полуплоскости $\mathcal{R}e\, z > 0$ связана проблема устойчивости механических и электрических систем. В этом случае в качестве контура Γ_R выбирается полуокружность $|z| = R > 0$, $\mathcal{R}e\, z > 0$ вместе с ее диаметром, выбирается обход против часовой стрелки, а число R выбирается столь большим, чтобы все нули многочлена $P(z)$, расположенные в правой полуплоскости $\mathcal{R}e\ z > 0$, попали в полукруг $|z| < R$, $\mathcal{R}e\ z > 0$. И, наконец, вычисляется $\mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\Big|_{\Gamma_R}$. Так как контур Γ_R состоит из дуги окружности $C_R = \{z : |z| = R,\ \mathcal{R}e\ z > 0\}$ и отрезка мнимой оси $[iR, -iR]$, то

$$\mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\ \big|_{\Gamma_R} = \mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\ \big|_{C_R} + \mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\ \big|_{[iR,-iR]} .$$

Не нарушая общности, будем считать, что $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k + z^n$, и представим многочлен $P(z)$ в виде

$$P(z) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n} + 1\Big) \cdot z^n = g(z) \cdot z^n,\ \text{где}\ g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n} + 1.$$

Тогда $\mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\ \big|_{C_R} = \mathrm{var}\big[\arg g(z)\big]\ \big|_{C_R} + \mathrm{var}\big[\arg z^n\big]\ \big|_{C_R}$. При этом

$$\mathrm{var}\big[\arg z^n\big]\ \big|_{C_R} = n \cdot \mathrm{var}\big[\arg z\big]\ \big|_{C_R} .$$

Так как $\lim\limits_{R \to +\infty} g(z) = 1$, то $\mathrm{var}\big[\arg g(z)\big]\ \big|_{C_R} = 0$. Таким образом,

$$\mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\ \big|_{C_R} = n \cdot \mathrm{var}\big[\arg z\big]\ \big|_{C_R} .$$

Число $\mathrm{var}\big[\arg z\big]\ \big|_{C_R}$ определяется как разность

$$\mathrm{var}\big[\arg z\big]\ \big|_{C_R} = \arg(iR) - \arg(-iR) = \pi.$$

Чтобы определить приращение аргумента $P(z)$ при перемещении z вдоль отрезка $[iR, -iR]$ при $R \to +\infty$, надо построить образ мнимой оси при отображении $w = P(z)$. Для этого запишем параметрическое представление мнимой оси $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, подставим в $w = P(z)$ и получим параметрическое уравнение образа мнимой оси

$$u = \mathcal{R}e\, P(iy),\ v = \mathcal{I}m\, P(iy),\ y \in \mathbb{R}.$$

Для схематического построения кривой в плоскости uOv бывает достаточно найти несколько значений u и v для разных значений y, в частности определить нули функций u и v и найти их пределы при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$. Далее, следует определить число оборотов вектора $w = f(z)$ вокруг нуля и приращение аргумента $w = f(z)$ вдоль мнимой оси, рассматривая перемещение точки по полученной кривой от $y = +\infty$к $y = -\infty$ и приращение $w = f(z)$ на мнимой оси.

Задача определения числа нулей многочлена $P(z)$ в левой полуплоскости $\mathcal{R}e\, z < 0$ решается аналогично. При этом рассматривается левая полуокружность $|z| = R$, $\mathcal{R}e\, z < 0$ и ее диаметр с положительным направлением обхода, а определение числа оборотов вектора $w = f(z)$ вокруг нуля и приращение аргумента $w = f(z)$ вдоль мнимой оси следует рассматривать при перемещении по полученной кривой от $y = -\infty$ к $y = +\infty$.

Пример 17.1. *Найти число нулей в правой полуплоскости у многочлена* $P(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 1$.

■ Сразу же находим, что $\mathrm{var}\big[\arg P(z)\big]\,\Big|_{C_R} = 4\pi$, так как степень многочлена равна 4. Положим $z = iy$, тогда $P(iy) = y^4 + 2iy^3 - y^2 - 1 = y^4 - y^2 - 1 + 2iy^3$. Выделяя действительную и мнимую части, получаем, что

$$u(y) = \mathcal{R}e\, P(iy) = y^4 - y^2 - 1, \quad v(y) = \mathcal{I}m\, P(iy) = 2y^3.$$

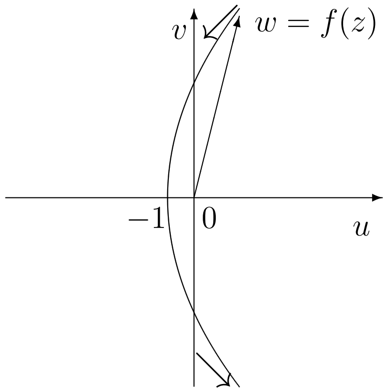
Очевидно, что $v(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, $v(y) > 0$ при $y > 0$ и $v(y) < 0$ при $y < 0$. Для определения корней функции $u(y)$ решим биквадратное уравнение $y^4 - y^2 - 1 = 0$. Положим $y^2 = t$ и найдем корни уравнения $t^2 - t - 1 = 0$: $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Так как $t_1 > 0$, $t_2 < 0$ обозначим $t_1 = b^2$, $t_2 = -a^2$ и разложим многочлен $u(y)$ на множители

$$u(y) = (y - y_1)(y - y_2)(y^2 + a^2),\ \text{где } y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Очевидно, что $u(y) < 0$ для $y \in (y_1, y_2)$, а вне этого интервала $u(y) > 0$.

Поскольку многочлены u и v не имеют общих нулей, то $P(iy) \neq 0$, то есть на границе области $\mathcal{R}e\, z > 0$ нет нулей многочлена $P(z)$. Полученные данные запишем в таблицу и построим схематически кривую:

t	$+\infty$	$(+\infty, 0)$	y_1	$(y_1, 0)$	0	$(0, y_2)$	y_2	$(y_2, -\infty)$	$-\infty$
u	$+\infty$	>0	0	$<0)$	-1	<0	0	$>0)$	$+\infty$
v	$+\infty$	>0	≈ 4.4	$>0)$	0	<0	≈ -4.4	$<0)$	$-\infty$



Из рисунка видно, что при однократном проходе точкой z мнимой оси (y меняется от $+\infty$ до $-\infty$) вектор $w = f(z)$ поворачивается против часовой стрелки на угол 2π или, другими словами, $\lim\limits_{R\to+\infty} \operatorname{var}\big[\arg P(z)\big]\ \Big|_{[iR,-iR]} = 2\pi$. Следовательно, $\operatorname{var}\big[\arg P(z)\big] = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{var}\big[\arg P(z)\big]\ \Big|_{\Gamma_R} = 4\pi + 2\pi = 6\pi$. Поэтому $N_{\mathcal{R}e\, z>0} = \dfrac{\operatorname{var}\big[\arg P(z)\big]}{2\pi} = 3$.

Для определения числа нулей $P(z)$ в левой полуплоскости следует изменять y от $-\infty$ до $+\infty$. При этом обход нуля точкой $w = f(z)$ происходит по часовой стрелке на угол 2π. Поэтому $N_{\mathcal{R}e\, z<0} = \dfrac{4\pi - 2\pi}{2\pi} = 1$. □

Пример 17.2. *Как по квадрантам размещены корни многочлена*

$$P(z) = z^6 + z + 3 = 0?$$

■ Чтобы определить число корней многочлена в первом квадранте, применим принцип аргумента. Рассмотрим контур Γ_R, состоящий из отрезка $\gamma_1 = [0, R]$ действительной оси, дуги $\gamma = \{|z| = R, \mathcal{I}m\ z \geq 0, \mathcal{R}e\ z \geq 0\}$ и отрезка $\gamma_2 = [iR, 0]$ мнимой оси, который имеет положительное направление обхода. Поскольку $z^6 + z + 3 > 0$, $\forall z \in [0, R]$, то $\operatorname{var}(\arg P(z))\ \Big|_{\gamma_1} = 0$. Далее,

$$\operatorname{var}(\arg P(z))\ \Big|_{C_R} = \operatorname{var}\Big(\arg\Big(z^6\Big(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\Big)\Big)\Big)\ \Big|_{C_R} =$$

$$= 6\operatorname{var}(\arg z)\ \Big|_{C_R} + \operatorname{var}\Big(\arg\Big(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\Big)\Big)\ \Big|_{C_R} = 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi,$$

поскольку из того, что $\lim\limits_{R\to+\infty}\Big(1 + \dfrac{1}{z^5} + \dfrac{1}{z^6}\Big) = 1$ следует, что

$$\operatorname{var}\Big(\arg\Big(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\Big)\Big)\ \Big|_{C_R} = 0.$$

Найдем $\operatorname{var}(\arg P(z))\Big|_{\gamma_2}$. Положим $z = iy$, $y \in [0, +\infty)$, тогда

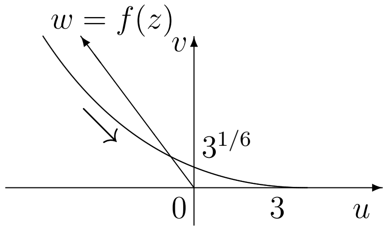
$P(iy) = (iy)^6 + iy + 3 = 3 - y^6 + iy,\ u = \mathcal{R}e\,P(iy) = 3 - y^6,\ v = \mathcal{I}m\,P(iy) = y.$

Исследуем поведение функций $u(y)$ и $v(y)$:

$v(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, $v(y) > 0$ при любом $y > 0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} v(y) = +\infty$;

$u(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[6]{3}$, $u(0) = 3$, $u(y) < 0$ при $y > \sqrt[6]{3}$,
$u(y) > 0$ при $y \in (0, \sqrt[6]{3})$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} u(y) = -\infty$.

Многочлены u и v не имеют общих нулей, поэтому $P(iy) \neq 0$, то есть на мнимой полуоси $\mathcal{I}mz > 0$ нет нулей многочлена $P(z)$. Построим схематически кривую $w = P(z)$ в плоскости uOv:



Из рисунка видно, что при однократном проходе точкой z мнимой полуоси $\mathcal{I}m\ z > 0$ сверху вниз (y меняется от $+\infty$ до 0) вектор $w = f(z)$ поворачивается по часовой стрелке (то есть в отрицательном направлении) на угол π. Поэтому $\lim\limits_{R\to+\infty} \operatorname{var}\big[\arg P(z)\big]\ \Big|_{\gamma_2} = -\pi$. Следовательно, $\operatorname{var}\big[\arg P(z)\big] = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{var}\big[\arg P(z)\big]\ \Big|_{\Gamma_R} = 3\pi - \pi = 2\pi$. Поэтому, согласно принципу аргумента, так как данный многочлен $P(z)$ не имеет полюсов в $\mathbb{C}$, в первом квадранте он имеет один корень. А поскольку данный многочлен $P(z)$ имеет действительные коэффициенты, то он имеет попарно сопряжённые корни. Поэтому в четвёртом квадранте он так же имеет один корень и по два — во втором и третьем квадрантах. $\square$

Пример 17.3. *Сколько корней имеет уравнение* $z^5 - 2z + 5 = 0$ *в кольце* $1 < |z| < 2$*?*

■ Положим $f(z) = 5$, $g(z) = z^5 - 2z$. Поскольку на окружности $|z| = 1$ выполняются неравенства $|f(z)| = 5 > 3 \geq |z^5 - 2z| = |g(z)|$, и функция f не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то по теореме Руше в круге $|z| < 1$ данное уравнение не имеет корней. $\square$

Положим теперь $f_1(z) = z^5$, $g_1(z) = 5 - 2z$. На окружности $|z| = 2$ выполняются неравенства $|f_1(z)| = 32 > 9 \geq |5 - 2z| = |g_1(z)|$. Поскольку функция f_1 имеет в точке $z = 0$ нуль пятого порядка, то по теореме Руше в круге $|z| < 2$ данное уравнение имеет пять корней и все они находятся в кольце $1 < |z| < 2$. $\square$

Задача 17.1. *Пусть функция f аналитична в замкнутом круге $|z| \le 1$, $|f(z)| < 1, \forall z : |z| = 1$. Доказать, что в круге $|z| < 1$ f имеет единственную неподвижную точку z_0, то есть такую точку, что $f(z_0) = z_0$.*

■ Положим $h(z) = f(z) - z$. Тогда функция $h(z)$ аналитична в $|z| \le 1$, и поскольку на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство $|f(z)| < |-z| = 1$, то по теореме Руше в круге $|z| < 1$ функции z и $h(z) = f(z) - z$ имеют одинаковое число нулей, а именно, один простой нуль. Поэтому существует единственная точка $z_0 : |z_0| < 1$ и $h(z_0) = 0$, то есть $f(z_0) = z_0$. □

Задача 17.2. *Пусть функция f аналитична в круге $|z| \le 1$. Доказать существование такого числа $\rho > 0$, что для всех w из круга $K_\rho = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \rho\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $|z| < 1$ ровно один корень.*

■ Рассмотрим уравнение $\phi(z) + \psi(z) = 0$, где $\phi(z) = z$, $\psi(z) = -wf(z)$. При $|z| = 1$ $|\phi(z)| = 1$, $|wf(z)| \le |w|M$, где $M = \max\limits_{|z|=1} |f(z)|$. При $|w| < \dfrac{1}{M}$ выполняются условия теоремы Руше. Поэтому, если $\rho = \dfrac{1}{M} > 0$, то для $w : |w| < \rho$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $|z| < 1$ ровно один корень. □

17.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 17.4. *Определить, сколько корней имеют следующие уравнения в указанных областях:*

1) $z^4 - 5z + 1 = 0$, $1 < |z| < 2$;
2) $z^2 - \dfrac{1}{3}e^z = 0$, $|z| < 1$;
3) $e^{z-\lambda} - z = 0$, $(\lambda > 1)$, $|z| < 1$;
4) $z^3 - 12z + 2 = 0$, $|z| < 2$;
5) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $|z| < 1$;
6) $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$; в каждом квадранте;
7) $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$, $|z| < 1$;
8) $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$, $4 < |z| < 6$;
9) $e^z + 8z^2 = 0$, $|z| < 1/2$;
10) $z^4 + 4z + \cos z = 0$, $|z| < 1$;
11) $3z^4 + \operatorname{ch} iz = 0$, $|z| < 1/2$;
12) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$, в каждом квадранте;
13) $z^6 - 12z + 10 = 0$, $1 < |z| < 2$;
14) $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$; в каждом квадранте;
15) $3z^4 - 5z + 1 = 0$, $|z| < 1$;
16) $z^7 + 5z^4 - z^2 + 2 = 0$, $1 < |z| < 2$.

Пример 17.5. *Определить число корней многочлена $P(z)$ в указанных областях:*

1) $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 3z^2 - z + 15$, $\mathcal{R}e\, z < 0$;
2) $P(z) = z^3 - 2z + 5$, $\mathcal{R}e\, z > 0$;

3) $P(z) = 2z^4 + z^3 - 4z^2 + 8z + 5$, $\mathcal{R}e\, z > 0$;
4) $P(z) = z^5 - 5z^2 - 4z - 10$, $\mathcal{R}e\, z < 0$;
5) $P(z) = 2z^5 + z^4 - 6z^3 + 4z + 2$, $\mathcal{R}e\, z < 0$;
6) $P(z) = z^8 + 3z^5 - 5z^4 + 15z^3 + 18z + 4$, $\mathcal{R}e\, z > 0$.

Пример 17.6. *Показать, что все корни многочлена* $P(z) = 3z^n + z + 1$, $n > 2$, *лежат внутри кольца* $1/2 < |z| < 1$.

Пример 17.7. *Найти логарифмический вычет функции* f *относительно контура* Γ*:*

1) $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2+4}$, $\Gamma : |z| = 3$;
2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3+8}$, $\Gamma : |z| = 5$;
3) $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-3z+2}$, $\Gamma : |z| = 4$.

17.2 Теоретические задачи для самостоятельной работы

Задача 17.3. *Пусть* $P(z) = az^n + z + 1$, $a \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$. *Доказать, что* $P(z)$ *имеет хотя бы один корень в круге* $|z| \leq 2$.

Задача 17.4. *Доказать, что уравнение* $ze^{\lambda - z} = 1$ *при* $\lambda > 1$ *имеет в круге* $|z| < 1$ *единственный действительный корень.*

Задача 17.5. *Пусть функция* f *аналитична в ограниченной замкнутой области* $\overline{G}$, *за исключением конечного числа полюсов, лежащих в* G. *Пусть* $\mathcal{I}m\, f(z) \neq 0$ *на* ∂G. *Доказать, что число полюсов и число нулей функции* f *в области* G *равны.*

Задача 17.6. *Пусть* $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$, $\lambda > 1$. *Доказать, что в полуплоскости* $\mathcal{R}e\, z \geq 0$ *функция* f *имеет единственный корень, который является действительным числом и лежит на интервале* $(\lambda - 1, \lambda + 1)$.

Задача 17.7. *Доказать, что уравнение* $(2z+1)e^z = 2z+3$ *не имеет решений с положительной действительной частью.*

Задача 17.8. *Доказать, что при* $a > e$ *уравнение* $e^z = az^n$ *имеет* n *корней внутри единичного круга.*

Задача 17.9. *Доказать, что уравнения* $z \sin z = 1$ *и* $z = \operatorname{tg} z$ *имеют только действительные корни.*

Задача 17.10. *Определить, сколько нулей имеет уравнение* $\sin z = z$.

Задача 17.11. *Показать, что при действительных значениях a и b уравнение $z^{2n} + a^2 z^{2n-1} + b^2 = 0$ имеет $n-1$ корень с $\mathcal{R}e\, z > 0$, если n нечётно, и n корней с $\mathcal{R}e\, z > 0$, если n — чётно.*

Задача 17.12. *Пусть $0 \le a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Доказать, что функция*

$$f(z) = a_0 + a_1 \cos z + \cdots + a_n \cos nz$$

имеет только действительные корни.

18 Гармонические функции

Пусть G — область в $\mathbb{C}$,функция f аналитична в G. Тогда в каждой точке $z \in G$ функция f бесконечно дифференцируема. Если $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, то функции u и v бесконечно дифференцируемы в каждой точке $(x,y) \in G$. Продифференцируем условия Коши – Римана (условия (5.4)), например, первое по переменной x, а второе по переменной y, и получим, поскольку смешанные частные производные функции v равны, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, (x,y) \in G. \tag{18.1}$$

Введем в рассмотрение оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{18.2}$$

Из равенства (18.1) следует, что $\Delta u = 0$. В случае дифференцирования условий Коши – Римана по переменной y, аналогично получаем, что $\Delta v = 0$.

Определение 18.1. *Вещественнозначная функция u, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^2$, дважды непрерывно дифференцируемая в каждой точке этой области (то есть $u \in C^2(G)$) и удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{18.3}$$

называется гармонической функцией в области G.

Теорема 18.1. *Если функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$, то ее действительная часть $u(x,y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ и мнимая часть $v(x,y) = \mathcal{I}m\, f(z))$ — гармонические функция в G.*

Обратно, если область G односвязна и функция и гармоническая в области G, то найдется (единственная с точностью до константы) функция $f \in A(G)$ такая, что $u(x,y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ для всех $z = x + iy \in G$.

Определение 18.2. *Две вещественнозначные функции u и v, гармонические в области $G \subset \mathbb{C}$, называются сопряженными гармоническими функциями (или гармонически сопряженными), если они в области G связаны условиями Коши –Римана.*

Если в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ задана гармоническая функция u, то сопряженную с ней гармоническую в области $G \subset \mathbb{C}$ функцию v с точностью до константы можно построить по формуле

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy + C,\ (x,y) \in G, \tag{18.4}$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка в G.

Замечание. Поскольку функции $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ непрерывно дифференцируемы в G и функция u удовлетворяет в G уравнению Лапласа, то криволинейный интеграл второго рода (18.4)не зависит от пути интегрирования. Если выбрать в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны координатным осям, то задачу можно свести к вычислению двух определенных интегралов:

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy + C. \tag{18.5}$$

Пример 18.1. *Пусть $v = v(x,y)$ — гармоническая в односвязной области G функция. Найти сопряженную с ней функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u = \mathcal{R}e\, f$, $v = \mathcal{I}m\, f$, где f — функция, аналитическая в области G.*

■ Поставленную задачу можно сформулировать, как задачу восстановления (с точностью до константы) аналитической функции по ее мнимой части. Функцию $u(x,y)$ находим интегрированием полного дифференциала:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} du + C = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy + C,\ (x,y) \in G,$$

или, используя условия Коши–Римана для пары сопряженных гармонических функций,

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} du + C = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy + C,\ (x,y) \in G, \tag{18.6}$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка в G.

Если, как и выше, выбрать в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны координатным осям, то из (18.6) получим, что

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y_0)\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy + C\ (x,y) \in G. \tag{18.7}$$

Таким образом, гармоническая в односвязной области G функцию u можно восстановить по сопряженной с ней гармонической в G функции v и построить аналитическую в G функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. □

Пример 18.2. *Построить аналитическую функцию* $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ *такую, что* $v(x,y) = 3\cos 4x \operatorname{ch} 4y - 4xy$, $f(0) = 3i$.

■ Проверим, является ли функция $v(x,y)$ гармонической в некоторой области. Найдем частные производные функции v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -12\sin 4x \operatorname{ch} 4y - 4y, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -48\cos 4x \operatorname{ch} 4y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 12\cos 4x \operatorname{sh} 4y - 4x, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 48\cos 4x \operatorname{ch} 4y. \end{aligned}$$

Так как функции $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ непрерывны в $\mathbb{R}^2$, то $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, следовательно, функция $v(x,y)$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$. Далее существует два способа решения задачи.

1 способ. Находим функцию $u(x,y)$, учитывая, что она является гармонически сопряженной с $v(x,y)$, и применяя формулы (18.6) и (18.7)

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y_0)\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Поэтому (с точностью до константы)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (12\cos 4x \operatorname{sh} 4y - 4x)\,dx + (12\sin 4x \operatorname{ch} 4y + 4y)\,dy + C = \\ &= \int_0^x (-4x)\,dx + \int_0^y (12\sin 4x \operatorname{ch} 4y + 4y)\,dy + C = \\ &= -2x^2 \Big|_0^x + 3\sin 4x \operatorname{sh} 4y \Big|_0^y + 2y^2 \Big|_0^y + C = \\ &= -2x^2 + 3\sin 4x \operatorname{sh} 4y + 2y^2 + C. \end{aligned}$$

Зная $u(x,y)$ и $v(x,y)$, построим аналитическую функцию

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= -2x^2 + 3\sin 4x \operatorname{sh} 4y + 2y^2 + C + 3i\cos 4x \operatorname{ch} 4y - 4ixy = \\ &= -2(x^2 - y^2 + 2ixy) + 3\sin 4x\,(-i \sin 4iy) + 3i \cos 4x \cos 4iy + C = \\ &= -2z^2 + 3i\cos(4x + 4iy) + C = -2z^2 + 3i\cos 4z + C,\ z = x + iy. \end{aligned}$$

Наконец, используя условие $f(0) = 3i$, находим постоянную C:

$$-2 \cdot 0^2 + 3i \cos(4 \cdot 0) + C = 3i,\ 3i + C = 3i,\ C = 0.$$

Таким образом, $f(z) = 3i \cos 4z - 2z^2$.

II способ. Решим теперь эту же задачу другим способом. Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -12\sin 4x \ \mathrm{ch}\, 4y - 4y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ то}$$

$$u(x,y) = \int (12\sin 4x \ \mathrm{ch}\, 4y + 4y)\, dy + C(x) = 3\sin 4x\, sh4y + 2y^2 + C(x),$$

где $C(x)$ —постоянная, которая в данном случае может зависеть от x.

Находим производную $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 12\cos 4x \ \mathrm{sh}\, 4y + C'(x)$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, то используя значение производной $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, найденное выше, получаем

$$12\cos 4x \ \mathrm{sh}\, 4y + C'(x) = 12\cos 4x \ \mathrm{sh}\, 4y - 4x.$$

Отсюда следует, что $C'(x) = -4x$, $C(x) = -2x^2 + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, $u(x,y) = 3\sin 4x\, sh4y + 2y^2 - 2x^2 + C_1$. Как видим, найденная функция $u(x,y)$ совпадает с полученной ранее при первом способе решения задачи. Далее выполним те же вычисления и получим тот же ответ. □

Пример 18.3. *Найти все гармонические функции вида* $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *где* φ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция в* $(-\infty, +\infty)$.

■ Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{y^2}{x^4} + \varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{2y}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$, то условие гармоничности имеет вид

$$\frac{1}{x^4}\left(\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)(x^2+y^2) + 2xy\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0.$$

Полагая $y = tx$, имеем: $\varphi''(t)(1+t^2) + 2t\varphi'(t) = 0$. Решая это дифференциальное уравнение, последовательно получим, что

$$\ln\varphi'(t) = -\ln(1+t^2) + \ln C_1,\ C_1 = \mathrm{const},\ \varphi(t) = C_1 \,\mathrm{arctg}\, t + C_2,\ C_2 = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = C_1\,\mathrm{arctg}\, t + C_2 = C_1\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + C_2.$ □

18.1 Практические задачи для самостоятельной работы

Пример 18.4. *По заданной вещественной или мнимой части построить аналитическую функцию* f:

1) $\mathcal{I}m\, f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ f(0) = 0;$
2) $\mathcal{R}e\, f = e^x(x\cos y - y\sin y),\ f(0) = 0;$
3) $\mathcal{I}m\, f = y\cos y\,\mathrm{ch}\, x + x\sin y\,\mathrm{sh}\, x,\ f(0) = 0;$
4) $\mathcal{R}e\, f = xy,\ f(0) = 0;$

5) $\mathcal{R}e\, f = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0;$
6) $\mathcal{I}m\, f = (x^2 + y^2)e^x,\ f(0) = 0;$
7) $\mathcal{R}e\, f = x^2 - y^2 + 2x,\ f(i) = -1 + 2i;$
8) $\mathcal{I}m\, f = e^x \sin y + 2xy + 5y,\ f(0) = 10;$
9) $\mathcal{R}e\, f = x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y,\ f(0) = 0;$
10) $\mathcal{I}m\, f = e^{-y}(x \cos x - y \sin x),\ f(0) = 0;$
11) $\mathcal{R}e\, f = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x,\ f(i) = 0;$
12) $\mathcal{I}m\, f = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ f(i) = \dfrac{3\pi}{2} + 2i;$
13) $\mathcal{R}e\, f = x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4,\ f(0) = 0;$
14) $\mathcal{I}m\, f = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1},\ f(1) = 0;$
15) $\mathcal{R}e\, f = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y+1},\ f(0) = 0;$
16) $\mathcal{I}m\, f = x^3 - 3xy^2 + 4xy,\ f(2) = 12;$

Пример 18.5. *Предполагая, что функция φ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, найти все гармонические функции, для которых действительная часть имеет указанный вид:*

$$\text{а) } u = \varphi(x^2 + y^2); \qquad \text{б) } u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right).$$

Пример 18.6. *Найти все аналитические функции $f = u + iv$, для которых*

$$\text{а) } u^2 + v^2 = \alpha(x) \text{ (зависит только от } x); \qquad \text{б) } \frac{u}{v} = \alpha(x).$$

Пример 18.7. *Существуют ли аналитические функции $f = u + iv$, для которых:*

1) $u = x^2 - y;$	2) $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2};$	3) $u = \cos \dfrac{y}{x};$
4) $u = x^2 - y^2;$	5) $u = \dfrac{x}{y^2};$	3) $v = y \cos x.$

Пример 18.8. *Пусть функция f аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$ и не имеет нулей в G. Доказать, что для всех $z \in G$*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln |f(x + iy)| = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(x + iy)| > 0.$$

Пример 18.9. *Пусть u, v — сопряженные гармонические функции в области $G \subset \mathbb{C}$, одновременно не обращающиеся в нуль в этой области. Будут ли функции $\dfrac{u}{u^2 + v^2}$, $\dfrac{-v}{u^2 + v^2}$ также сопряженными гармоническими функциями в области G?*

Список литературы

[1] Леонтьева Т. А. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. — М.: МИР. — 2005.

[2] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1967. — Т.1; 1968. — Т2.

[3] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1966.

[4] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1984.

[5] Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1976.

[6] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. — М. : Наука, 1966.

[7] А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисления в примерах и задачах. — Изд. «Высшая школа». — 2001.

[8] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — Изд. «Наука». — 1970.

[9] Грищенко А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.И. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. — Изд. «Вища школа» — 1986.

[10] Коробейник Ю.Ф., Абанин А.В. Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного. — Ростов-на-Дону, УПЛ РГУ. — 1992.

[11] Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. Вычеты. Применение теории вычетов к вычислению определенных интегралов. — Ростов-на-Дону, УПЛ РГУ. — 1994.

[12] Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. Конформные отображения. — Ростов-на-Дону, УПЛ РГУ. — 1998.

[13] Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. Многозначные аналитические функции. — Ростов-на-Дону, УПЛ РГУ. — 1994.

[14] Смелик Г.Г. Учебный практикум и задания по теории аналитических функций. — Ростов-на-Дону, РГПУ. — 2000.

[15] Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А., Моржаков В.В. Курс лекций по комплексному анализу. — Изд. ЮФУ, — Ростов-на-Дону. — 2014.

Содержание