ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2015

2 апреля 2015 г.

1. Найдите матрицу X, если $X - X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, причем $\det X = 1$.

2. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c} = \bar{0}$. Вычислите $(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{a})$, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 2$.

3. Пусть $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, g — функция, обратная f. Докажите, что для $x \in [0, a]$
$$xf(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^{f(x)} g(t)dt.$$

4. Вычислите A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найдите $f(x)$, если
$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x.$$

6. Вычислите
$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}.$$

7. Определите, при каких натуральных n система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \vdots \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$
совместна?

8. Вычислите
$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx.$$